PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

MICHAEL R. HERMAN

Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 49 (1979), p. 5-233

<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1979__49__5_0>

SUR LA CONJUGAISON DIFFÉRENTIABLE DES DIFFÉOMORPHISMES DU CERCLE A DES ROTATIONS

par Michael Robert HERMAN

> « D'après ce qui précède, on comprendra sans peine à quel point les difficultés que l'on rencontre en mécanique céleste, par suite des petits diviseurs et de la quasi-commensurabilité des moyens mouvements, tiennent à la nature même des choses et ne peuvent être tournées. Il est extrêmement probable qu'on les retrouvera, quelle que soit la méthode que l'on emploie. »
>
> Paris, 13 décembre 1885
> Henri Poincaré
> (Sur les courbes définies par les équations différentielles, chap. XIX, *Œuvres*, t. I, p. 222).

Références et notations.

A désigne l'annexe. Le signe ■ indique la fin d'une démonstration.

On utilise les renvois suivants :

IX.6.1 pour « chapitre IX, paragraphe 6, premier sous-paragraphe ».
6.1 pour « paragraphe 6, premier sous-paragraphe, chapitre en cours ».
Pour les renvois bibliographiques : Arnold [1] veut dire se reporter à l'article d'Arnold, numéroté [1] dans la bibliographie.

Les chapitres I à XIII et A ont chacun un plan et un commentaire où l'on indique rapidement quelques éléments de bibliographie ainsi que les points importants du chapitre qui suivra. Ils ne constituent pas des résumés.

Comme référence générale pour les fonctions absolument continues, le lecteur pourra se reporter par exemple à Hewitt et Stromberg [1].

Nous donnons maintenant quelques conventions et notations.

Conventions et notations.

1) Si $\frac{p}{q}\in\mathbf{Q}$, on convient que $q\in\mathbf{N}$, $q\geq 1$, $p\in\mathbf{Z}$ et que p et q sont premiers entre eux.

2) Si f est une bijection d'un ensemble X sur lui-même, et si $n \in \mathbf{N}$, f^n est l'itérée n-ième de f, avec $f^0 = \mathrm{Id}_X$ (*i.e.* l'identité de X), f^{-1} est la bijection réciproque, et $f^{-n} = (f^{-1})^n$.

3) Si $\varphi_i : X \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2$ sont deux fonctions, on désigne le produit de φ_1 et φ_2 par $\varphi_1 . \varphi_2$ (point); on note $\varphi_1 . \varphi_1 = (\varphi_1)^2$; nous espérons que le lecteur ne sera pas induit en erreur avec les notations de 2).

4) Pour $\varphi : X \to \mathbf{R}$, et a et b dans $\mathbf{R}$, $a \leq \varphi \leq b$ veut dire : pour tout $x \in X$, $a \leq \varphi(x) \leq b$.

5) $dx = m$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$ et aussi la mesure de Haar sur $\mathbf{T}^n$. Si $\varphi : \mathbf{T}^n \to \mathbf{R}^p$ est intégrable, on écrira indifféremment :

$$m(\varphi) = \int_{\mathbf{T}^n} \varphi \, dm = \int_{\mathbf{T}^n} \varphi(x) \, dx.$$

Si $A \subset \mathbf{R}^n$ est m-mesurable, $m(A)$ désigne la m-mesure de A. Dans la suite $|\ |_{L^1}$ désigne la norme de $L^1(\mathbf{T}^1, m, \mathbf{R})$.

6) $\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\} =$ l'ensemble des réels positifs ou nuls.

7) s.e.d. est une abréviation pour « sauf pour un ensemble de points au plus dénombrable » (l'ensemble pouvant être vide).

8) Si $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est bornée, on pose :

$$|\varphi|_0 = \sup_{x \in \mathbf{R}} |\varphi(x)|.$$

9) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable, de dérivée $Df > 0$; alors Log Df désigne $\mathrm{Log}(Df)$ et $D \,\mathrm{Log}\, Df = D(\mathrm{Log}(Df))$. Si $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est dérivable et $i \in \mathbf{N}$, $i \geq 1$, alors :

$$D\varphi \circ f^i (Df^i)^2 = ((D\varphi) \circ f^i) . (Df^i)^2.$$

10) On convient d'écrire la sommation $\sum_{i=0}^{n-1}$ également $\sum_{i<n}$.

11) Si $x \in \mathbf{R}$, $[x]$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x et x (mod 1) désigne $x - [x] \in [0, 1[$.

INTRODUCTION

Soit $\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$. Pour $0 \leq r \leq \omega$ (ce qui est une abréviation de :

$$r \in \{0, +\infty, \omega\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 1\}),$$

on désigne par $\mathrm{Diff}_+^r(\mathbf{T}^n)$ le groupe des difféomorphismes de $\mathbf{T}^n$ de classe C^r et C^r-isotopes à l'identité (si $r=0$, c'est le groupe des homéomorphismes de $\mathbf{T}^n$; si $r \geq 1$, $r \in \mathbf{R}^* - \mathbf{N}$, c'est le groupe des difféomorphismes de classe $C^{[r]}$ vérifiant une condition de Hölder d'exposant $r-[r]$ sur la $[r]$-ième dérivée; si $r=\omega$, c'est le groupe des difféomorphismes $\mathbf{R}$-analytiques).

Le problème que nous proposons d'étudier est la C^r-conjugaison, c'est-à-dire la conjugaison dans $\mathrm{Diff}_+^r(\mathbf{T}^1)$ à des rotations ou translations : $R_\alpha : x \mapsto x+\alpha$ $(\alpha \in \mathbf{T}^1)$.

Henri Poincaré a introduit en 1885 un invariant de C^0-conjugaison :

$$\rho : \mathrm{Diff}_+^0(\mathbf{T}^1) \to \mathbf{T}^1$$

appelé nombre de rotation; en 1932, Arnaud Denjoy a démontré (contrairement à ce que Poincaré supposait vraisemblable) que si la dérivée Df de $f \in \mathrm{Diff}_+^1(\mathbf{T}^1)$ est à variation bornée, et si $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, alors f est C^0-conjugué à R_α : il existe $g \in \mathrm{Diff}_+^0(\mathbf{T}^1)$ tel que $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$. (Noter que $\mathrm{Diff}_+^0(\mathbf{T}^1)$ est aussi le groupe des homéomorphismes du cercle préservant l'orientation.)

Remarquons que, si l'on impose $g(0)=0$, g est unique, le *problème* étant alors : si f est de classe C^r, quelle est la classe de différentiabilité de g?

Vladimir I. Arnold a montré, en 1961, que si f est un difféomorphisme C^ω « suffisamment » proche de R_α, où α satisfait une condition diophantienne, et si $\rho(f) = \alpha$, alors f est C^ω-conjugué à R_α. Il a posé la :

Conjecture d'Arnold. — Il existe $A \subset \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ *de mesure de Haar égale à* 1, *tel que si* $f \in \mathrm{Diff}_+^\omega(\mathbf{T}^1)$ *et* $\rho(f) = \alpha \in A$, *alors* f *est* C^ω*-conjugué à* R_α.

De plus, V. I. Arnold a donné un exemple de $f \in \mathrm{Diff}_+^\omega(\mathbf{T}^1)$ tel que :

$$\rho(f) = \alpha \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z}),$$

bien que f ne soit pas absolument conjugué à R_α.

Nous nous proposons dans ce mémoire de poursuivre cette étude. Déjà pour l'étude de l'équation linéarisée en l'identité de la C^∞-conjugaison à R_α :

$$\varphi \in C^\infty(\mathbf{T}^1) \mapsto \varphi - \varphi \circ R_\alpha \in C^\infty(\mathbf{T}^1),$$

la réponse dépend de la nature arithmétique de α (*i.e.* des approximations de α par les rationnels). (Noter que sur l'équation linéarisée le théorème de Denjoy semble faux!)

Le présent mémoire est composé de deux parties. La *première partie*, qui va du chapitre I au chapitre IX, consiste à démontrer la conjecture d'Arnold. La *deuxième partie* montre (par la catégorie de Baire) que les théorèmes que nous démontrons sont essentiellement optimaux. Cette deuxième partie est probablement celle qui se prête le plus simplement aux généralisations en grandes dimensions (nos démonstrations ont été choisies pour que le cas des variétés possédant une action effective C^∞ de $\mathbf{T}^1$ ne présente souvent aucune difficulté). Il va sans dire que tout chercheur désireux de travailler sur les difféomorphismes du cercle doit s'habituer à construire et étudier des exemples. Dans Denjoy [5, p. 1004] (notice sur ses travaux), Denjoy raconte comment son théorème lui est apparu comme négatif : il n'arrivait pas à construire un difféomorphisme C^2 de nombre de rotation irrationnel ayant un ensemble de Cantor minimal invariant.

Le présent mémoire est une version améliorée de ma thèse d'État, soutenue en 1976. La version présentée ici contient une démonstration complète de la conjecture d'Arnold (nous avons aussi inclus d'autres améliorations).

La première partie consiste à démontrer le théorème fondamental. Commençons par une définition.

Définition. — Si $\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$ et si $\alpha = a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + \ldots))$ est son développement en fraction continue, α satisfait à une condition A si :

$$\lim_{B\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \Big(\sum_{\substack{a_i \geq B \\ 1\leq i\leq n}} \operatorname{Log}(1+a_i) \Big/ \sum_{1\leq i\leq n} \operatorname{Log}(1+a_i)\Big) = 0.$$

Remarque. — Nous montrerons au chapitre V.10 que l'ensemble A des irrationnels qui satisfont à une condition A est de mesure de Lebesgue pleine.

Le théorème suivant est démontré au chapitre IX (5.1).

Théorème fondamental. — Si $3 \leq r \leq \omega$ $(r \in \mathbf{R}^* \cup \{+\infty, \omega\})$, *si* $f \in \mathrm{Diff}^r_+(\mathbf{T}^1)$, *où* $\rho(f) = \alpha$ *satisfait à une condition* A, *alors* f *est* C^{r-2}*-conjugué à* R_α (*en fait* $C^{r-1-\beta}$*-conjugué pour tout* $\beta > 0$, $\beta \in \mathbf{R}$) ; *si* f *est un difféomorphisme de classe* C^∞ (resp. C^ω) *alors* f *est* C^∞-(resp. C^ω-) *conjugué à* R_α.

Pour démontrer le théorème fondamental, on utilise essentiellement les neuf premiers chapitres.

Les chapitres I, II, III et V sont des rappels de résultats connus que nous exposons de façon systématique (surtout pour II et III).

Au chapitre IV, on introduit l'invariant H_r $(1 \leq r < +\infty$, r entier) semi-continu inférieurement pour la C^r-topologie, tel que $H_r(f) < +\infty$ si et seulement si f est C^r-conjugué à une rotation.

Le chapitre VI est consacré au théorème de Denjoy (et les résultats sont de Denjoy). Nous réexposons la démonstration fondamentale que Denjoy a donnée, en 1946, dans [3]. Nous remarquons que sa démonstration donne un théorème pour les homéomorphismes qu'on appelle de classe P (en fait, en lisant bien Denjoy [3], on se rend compte que Denjoy le savait) ; ainsi, le théorème de Denjoy reste valable pour les homéomorphismes PL de $\mathbf{T}^1$. Nous en déduisons la construction d'un homéomorphisme PL de $\mathbf{T}^1$ sans mesure σ-finie invariante, non nulle, absolument continue par rapport à la mesure de Haar de $\mathbf{T}^1$. Mais le chapitre VI contient surtout l'inégalité de Denjoy-Koksma et l'inégalité de Denjoy, inégalités essentielles pour la suite.

Dans la première partie du chapitre VII, on démontre le théorème suivant, qui est une réponse partielle à un problème de Denjoy.

Théorème. — Tout difféomorphisme f de $\mathbf{T}^1$, de classe C^2 et de nombre de rotation irrationnel, est ergodique par rapport à la mesure de Haar m de $\mathbf{T}^1$, au sens suivant : si A *est un ensemble m-mesurable de $\mathbf{T}^1$ invariant par f, alors* $m(A)=1$ *ou* 0.

Dans la deuxième partie du chapitre VII, nous montrons en VII.2.5 comment revenir proche d'une rotation dans la « C^1-topologie plus variation bornée » par des C^r-conjugaisons ($r\geq 2$) de tout difféomorphisme C^r de nombre de rotation irrationnel. Ceci est extrêmement important pour la suite.

Au chapitre VIII nous démontrons une inégalité de P. Deligne (voir Deligne [1]). Nous donnons aussi une amélioration du théorème de Denjoy (*i.e.* on contrôle le module de continuité de l'homéomorphisme qui conjugue f à une rotation) pour certains nombres de rotation (*i.e.* de densité bornée), f étant seulement un difféomorphisme de classe C^1 et Df à variation bornée.

Le chapitre IX contient la démonstration du théorème fondamental. Nous commençons, sous les hypothèses du théorème fondamental, par montrer que f est $C^{1+\varepsilon}$-conjugué ($0<\varepsilon<1/5$) à R_α. La suite du théorème fondamental est une question de régularité. Nous incluons dans le chapitre IX une suite de théorèmes de régularité qui impliquent la conjecture d'Arnold en C^∞. Pour obtenir la conjecture d'Arnold (en C^ω) nous nous appuyons sur VII.2.7 et l'Annexe.

L'Annexe est indépendante de tous les autres chapitres. On y reprend le théorème d'Arnold, en suivant J. Moser et H. Rüssmann pour préciser les constantes et le voisinage. Ce chapitre est consacré aux « petits dénominateurs » et peut être lu indépendamment du reste.

La deuxième partie, qui se compose du chapitre III et des chapitres X à XII, est consacrée à montrer en un certain sens que le théorème de conjugaison locale de l'Annexe est le meilleur possible : il se produit bien une perte de dérivabilité, comme le laissait supposer l'équation linéarisée.

Soient, pour $0\leq r\leq\omega$, $F_\alpha^r=\{f\in \mathrm{Diff}_+^r(\mathbf{T}^1)\mid \rho(f)=\alpha\}$ le fermé des difféomorphismes de classe C^r et de nombre de rotation α, et $O_\alpha^r=\{g^{-1}\circ R_\alpha\circ g\mid g\in\mathrm{Diff}_+^r(\mathbf{T}^1)\}$ l'orbite de R_α.

Au chapitre X, on montre que, pour α irrationnel, O_α^0 est résiduel dans F_α^0 pour la C^0-topologie. Nous avons inclus dans ce chapitre des améliorations sur les contre-exemples de Denjoy. Nous discutons aussi le théorème de Denjoy quand on remplace « de classe C^1 plus variation bornée » par « C^1 plus module de continuité ».

Au chapitre XI, contrairement au cas C^0, on montre que pour tout entier $1\leq r<+\infty$, O_α^r est maigre dans F_α^r pour la C^r-topologie, et, si α est un nombre de Liouville, O_α^∞ est maigre dans F_α^∞ pour la C^∞-topologie. Ces résultats et d'autres montrent bien que, suivant la nature arithmétique du nombre de rotation, on a des réponses différentes.

Au chapitre XII, on reprend l'exemple d'Arnold et on montre qu'il existe dans la famille $f_{a,b}(x)=x+a\sin 2\pi x+b$, $|a|<\frac{1}{2\pi}$. On étudie aussi le problème des centralisateurs : il existe $f\in \mathrm{Diff}^{\infty}_{+}(\mathbf{T}^1)$, avec $\rho(f)=\alpha\in\mathbf{T}^1-(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, tel que f ne soit pas absolument continûment conjugué à R_α, mais que le centralisateur C^∞ de f ait la puissance du continu.

Finalement au chapitre XIII on donne quelques exemples et généralisations à $\mathbf{T}^n$.

Remarque importante. — Il est bien plus commode pour des raisons d'écriture de travailler dans $D^r(\mathbf{T}^1)$, le revêtement universel de $\mathrm{Diff}^r_+(\mathbf{T}^1)$, puisque $D^r(\mathbf{T}^1)$ s'identifie canoniquement au sous-groupe des $f\in\mathrm{Diff}^r(\mathbf{R})$, où $f=\mathrm{Id}+\varphi$ et φ est une fonction $\mathbf{Z}$-périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ (de classe C^r).

Évidemment notre problème se ramène à la conjugaison dans $D^r(\mathbf{T}^1)$ aux translations $x\mapsto R_\alpha(x)=x+\alpha$. En conséquence, nous énoncerons toutes les propositions dans $D^r(\mathbf{T}^1)$ et le lecteur passera aisément au quotient : si $C=\{R_p \mid p\in\mathbf{Z}\}$ est le centre de $D^r(\mathbf{T}^1)$, on a :

$$\mathrm{Diff}^r_+(\mathbf{T}^1)=D^r(\mathbf{T}^1)/C=D^r(\mathbf{T}^1)\ (\mathrm{mod}\ 1).$$

Si $f\in D^r(\mathbf{T}^1)$, $\bar{f}$ désigne le difféomorphisme de $\mathbf{T}^1$ obtenu par passage au quotient.

Je voudrais remercier A. Chenciner, H. Rosenberg, L. Schwartz, F. Sergeraert, ainsi que D. Sullivan de m'avoir encouragé, pendant plusieurs années, à persévérer dans mon effort et mon étude des difféomorphismes du cercle. Je remercie A. Douady pour m'avoir aidé dans la compréhension des difféomorphismes $\mathbf{R}$-analytiques d'une variété $\mathbf{R}$-analytique. L. Carleson et P. Deligne ont apporté des améliorations et des simplifications de démonstrations du théorème fondamental et je les remercie de m'avoir autorisé à les inclure, ainsi que Y. Meyer de m'avoir autorisé à inclure une proposition non publiée par lui.

L'aide de M. Reversat et J.-M. Deshouillers m'a été particulièrement utile pour l'arithmétique.

Finalement ce mémoire est en grande partie consacré à la théorie ergodique; F. Ledrappier, J. M. Strelcyn et J.-P. Thouvenot m'ont posé des questions cruciales pour la démonstration du théorème fondamental; je leur en suis infiniment reconnaissant.

Je remercie J.-P. Bourguignon, M. Chaperon, A. Chenciner, D. B. A. Epstein et son séminaire, G. Joubert, F. Laudenbach, ainsi que le *referee* de m'avoir aidé pour l'amélioration de la rédaction de ce mémoire.

Ce travail a été effectué dans le cadre du Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, Équipe de Recherche associée au C.N.R.S. n° 169, dont le secrétariat a assuré la frappe et les nombreuses corrections.

Il va sans dire que le présent mémoire est sous l'entière responsabilité de l'auteur.

I. — RAPPELS ET NOTATIONS : GROUPES DE DIFFÉOMORPHISMES DE $\mathbf{T}^n$ ET TOPOLOGIE GÉNÉRALE

Plan :

Commentaire :

Ce chapitre est un chapitre de notations et de rappels. Ainsi que le lecteur le constatera, il est plus facile de travailler dans les groupes $D^r(\mathbf{T}^n)$ (revêtement $\mathbf{Z}^n$-cyclique de $\mathrm{Diff}^r_0(\mathbf{T}^n)$ associé à l'injection scindée

$$0 \to \pi_1(\mathbf{T}^n) \to \pi_1(\mathrm{Diff}^r_0(\mathbf{T}^n)).$$

En effet, il est alors commode et facile d'écrire des difféomorphismes; par exemple si $|a| < \frac{1}{2\pi}$, $b \in \mathbf{R}$:

$$f_b(x) = x + a \sin 2\pi x + b \in D^{\omega}(\mathbf{T}^1).$$

La famille des f_b, dépendant de a et de b, apparaît très « naturellement »; son étude sera en partie l'objet du chapitre III et du chapitre XII (qui n'épuiseront pas ses propriétés).

Évidemment, le problème qui nous occupe, la conjugaison dans $\mathrm{Diff}^r_+(\mathbf{T}^n)$, peut s'étudier dans $D^r(\mathbf{T}^n)$ par revêtement, puis passage au quotient par $\{1\} \to \mathbf{Z}^n \to D^r(\mathbf{T}^n) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Diff}^r_0(\mathbf{T}^n) \to \{1\}$. Pour $f \in D^r(\mathbf{T}^n)$, on notera le difféomorphisme induit sur $\mathbf{T}^n$ par $\bar{f}$.

On introduit les groupes $D^r(\mathbf{T}^n)$, $r \geq 1$, r non entier, comme les difféomorphismes de classe $C^{[r]}$ dont la dérivée r-ième vérifie une condition de Hölder d'exposant $r - [r]$. C'est un groupe pour $r \geq 1$, et un espace topologique pour la topologie C^r, mais malheureusement ce n'est pas un groupe topologique.

1. Notations.

(1.1) *Le tore* $\mathbf{T}^n$.

Soient n un entier ≥ 1, $\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ le tore de dimension n, $\pi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{T}^n$ la projection canonique.

(1.2) *Norme sur* $\mathbf{R}^n$.

On note $|\ |$ la norme suivante sur $\mathbf{R}^n$: si $x = (x, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$:

$$|x| = \sup_i |x_i| \quad (i.e. \text{ la norme } \ell^\infty).$$

Cette norme sur $\mathbf{R}^n$ induit une norme sur $\mathscr{L}_s((\mathbf{R}^n)^p, \mathbf{R}^n)$ (p entier) espace des formes multilinéaires symétriques vectorielles, norme que l'on note encore $|\ |$.

(1.3) *Métrique sur* $\mathbf{T}^n$.

On choisit sur $\mathbf{T}^n$ la métrique quotient : si x, $y \in \mathbf{T}^n$ et si $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ sont des relèvements à $\mathbf{R}^n$, alors :

$$\|x - y\| = \operatorname*{Inf}_{p \in \mathbf{Z}^n} |\tilde{x} - \tilde{y} + p|.$$

On pose $\|x\| = \|x - 0\|$.

On a les propriétés *a)* $\|-x\| = \|x\|$, *b)* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(1.4) *Applications de classe* C^r.

Dans la suite r désignera la classe de différentiabilité d'une application ; r sera un entier non négatif ou égal à $+\infty$ ou ω (C^ω pour $\mathbf{R}$-analytique) ; $0 \leq r \leq \omega$ veut dire que r est entier, $r = +\infty$ ou $r = \omega$ (on convient que si $r \in \mathbf{R}$, $r < +\infty < \omega$).

Pour $r \in \mathbf{R}_+$, une application est dite *de classe* C^r si elle est de classe $C^{[r]}$ et si sa dérivée $[r]$-ième vérifie une condition de Hölder d'exposant $r - [r]$ ($\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ satisfait une condition de Hölder d'exposant β, $0 < \beta < 1$, s'il existe $k \geq 0$ tel que pour tous x, y dans $\mathbf{R}^n$ on ait :

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq k |x - y|^\beta.$$

Si $\beta = 1$, φ est dite *lipschitzienne*).

Si $0 \leq r \leq \infty$, r non entier, nous le préciserons toujours.

(1.5) *Les groupes* $\mathrm{Diff}^r(\mathbf{T}^n)$, $\mathrm{Diff}^r_+(\mathbf{T}^n)$ *et* $\mathrm{Diff}^r_0(\mathbf{T}^n)$.

Pour *r entier*, $0 \leq r \leq \omega$, soit $\mathrm{Diff}^r(\mathbf{T}^n)$ le groupe des difféomorphismes de classe C^r de $\mathbf{T}^n$, avec la convention que $\mathrm{Diff}^0(\mathbf{T}^n)$ est le groupe des homéomorphismes de $\mathbf{T}^n$.

On note $\mathrm{Diff}^r_+(\mathbf{T}^n)$ le sous-groupe (distingué) de $\mathrm{Diff}^r(\mathbf{T}^n)$ formé des difféomorphismes qui sont C^r-isotopes à l'identité. Si $r \geq 1$, alors $\mathrm{Diff}^r_+(\mathbf{T}^n) = \mathrm{Diff}^1_+(\mathbf{T}^n) \cap \mathrm{Diff}^r(\mathbf{T}^n)$. On note $\mathrm{Diff}^r_0(\mathbf{T}^n)$ le sous-groupe de $\mathrm{Diff}^r(\mathbf{T}^n)$ formé (ou « composé ») des difféomorphismes de $\mathbf{T}^n$ qui sont homotopes à l'identité. Pour $n \leq 3$, on a $\mathrm{Diff}^r_0(\mathbf{T}^n) = \mathrm{Diff}^r_+(\mathbf{T}^n)$ (voir Cerf ([1] et [2])).

(1.6) *Les espaces* $C^r(\mathbf{T}^n)$ *et* $C^r(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$, $r \in \mathbf{R}_+$, $r = +\infty$ *ou* ω.

On désigne par $C^r(\mathbf{T}^n)$ l'ensemble des fonctions réelles sur $\mathbf{R}^n$ de classe C^r et $\mathbf{Z}^n$-périodiques $(0 \leq r \leq \omega)$; $C^r(\mathbf{T}^n)$ s'identifie canoniquement à l'ensemble des fonctions réelles et de classe C^r sur $\mathbf{T}^n$.

Nota. — Nous ferons constamment cette identification. On pose :

$$C^r(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n) \cong (C^r(\mathbf{T}^n))^n,$$

qui s'identifie aux champs de vecteurs de classe C^r sur $\mathbf{T}^n$. Si $\varphi \in C^r(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$, et $r \in \mathbf{N}$, $D^r\varphi$ est la dérivée d'ordre r de φ avec la convention $D^0\varphi = \varphi$, $D^1\varphi = D\varphi$.

(1.7) *Les groupes* $D^r(\mathbf{T}^n)$, $D^r_+(\mathbf{T}^n)$ *et* $D^r(\mathbf{T}^n, 0)$.

a) *r entier*, $0 \leq r \leq \omega$.

Si f est un C^r-difféomorphisme de $\mathbf{T}^n$ homotope à l'identité, par la théorie du revêtement universel, il en existe un relèvement $\tilde{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, où $\tilde{f}$ est un C^r-difféomorphisme de $\mathbf{R}^n$, et $\tilde{f} - \mathrm{Id} = \varphi \in C^r(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$.

Considérons le sous-groupe $D^r(\mathbf{T}^n)$ de $\mathrm{Diff}^r(\mathbf{R}^n)$ formé des difféomorphismes de $\mathbf{R}^n$ qui s'écrivent $f = \mathrm{Id} + \varphi$ avec $\varphi \in C^r(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$; $\mathbf{R}^n$ se plonge dans $D^\omega(\mathbf{T}^n)$ comme sous-groupe des *translations* :

$$\alpha \in \mathbf{R}^n \mapsto R_\alpha \in D^\omega(\mathbf{T}^n) \qquad \text{avec} \qquad R_\alpha(x) = x + \alpha ;$$

on considère de même les *rotations* (ou translations) :

$$\alpha \in \mathbf{T}^n \mapsto R_\alpha \in \mathrm{Diff}^\omega_+(\mathbf{T}^n) \qquad \text{avec} \qquad R_\alpha : x \mapsto x + \alpha,$$

images des translations par passage au quotient.

Soit $C = \{R_p \mid p \in \mathbf{Z}^n\} \cong \mathbf{Z}^n$; C est le centre de $D^r(\mathbf{T}^n)$, $0 \leq r \leq \omega$ et

$$\mathrm{Diff}^r_0(\mathbf{T}^n) \cong D^r(\mathbf{T}^n)/C.$$

On a la suite exacte de groupes :

$$\begin{array}{ccccccccc} \{1\} & \longrightarrow & \mathbf{Z}^n & \longrightarrow & D^r(\mathbf{T}^n) & \xrightarrow{\pi} & \mathrm{Diff}^r_0(\mathbf{T}^n) & \longrightarrow & \{1\} \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \{1\} & \longrightarrow & \mathbf{Z}^n & \longrightarrow & \mathbf{R}^n & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{T}^n & \longrightarrow & \{1\} \end{array}$$

Si $f \in D^r(\mathbf{T}^n)$, $\pi(f) \in \mathrm{Diff}^r_0(\mathbf{T}^n)$, on écrira aussi $f (\mathrm{mod}\ \mathbf{Z}^n)$ à la place de $\pi(f)$ ou encore $f (\mathrm{mod}\ 1)$ si $n = 1$; on écrira souvent $\pi(f) = \bar{f}$.

Notation. — Si $\alpha \in \mathbf{R}^n$, on écrira encore R_α la translation $R_{\pi(\alpha)}$ sur $\mathbf{T}^n$. Rappelons que si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^n$ alors $(1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ sont indépendants sur $\mathbf{Q}$ si, et seulement si, R_α est une translation ergodique sur $\mathbf{T}^n$.

b) *r non entier.*

Si $r \geq 1$, r non entier, on définit de façon analogue $D^r(\mathbf{T}^n)$ qui est alors un groupe.

Si $0 < r < 1$, $f \in D^0(\mathbf{T}^n)$ est un *homéomorphisme de classe* C^r si $f - \mathrm{Id} \in C^r(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$ et si $f^{-1} - \mathrm{Id} \in C^r(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$ (remarquons que $f - \mathrm{Id} \in C^r(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$ n'implique pas que $f^{-1} - \mathrm{Id} \in C^r(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$: les homéomorphismes de classe C^r, $0 < r < 1$, ne forment pas un groupe pour r fixé).

$f \in D^0(\mathbf{T}^n)$ est un *homéomorphisme lipschitzien* si f *et* f^{-1} sont des applications de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ lipschitziennes pour la métrique standard de $\mathbf{R}^n$: il existe $k \geq 1$ tel que pour tous x, y on ait $\frac{1}{k}|x-y| \leq |f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$.

c) $D^r_+(\mathbf{T}^n)$, $0 \leq r \leq +\infty$ *et* $D^r(\mathbf{T}^n, 0)$, *si* $r \geq 1$.

Si $0 \leq r \leq \omega$, $D^r_+(\mathbf{T}^n)$ est le sous-groupe des difféomorphismes de classe $C^{[r]}$, $C^{[r]}$-isotopes à l'identité. On pose $D^r(\mathbf{T}^n, 0) = \{g \in D^r(\mathbf{T}^n) \mid g(0) = 0\}$ et aussi :

$$\mathrm{Diff}^r_0(\mathbf{T}^n, 0) = \{g \in \mathrm{Diff}^r_0(\mathbf{T}^n) \mid g(0) = 0\}.$$

2. Topologies.

(2.1) *Topologie sur* $C^r(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$.

On pose, pour $\varphi \in C^0(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$, $|\varphi|_{C^0} = |\varphi|_0 = \operatorname*{Max}_{x \in \mathbf{R}^n} |\varphi(x)|$.

Si r est entier, $\varphi \in C^r(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$, $|\varphi|_{C^r} = |\varphi|_0 + \ldots + |D^r\varphi|_0$.

Si $0 \leq r < 1$, $\varphi \in C^r(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$, $|\varphi|_r = \operatorname*{Max}_{x \neq y} \dfrac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x-y|^r}$ est une semi-norme et on pose $|\varphi|_{C^r} = |\varphi|_0 + |\varphi|_r$.

Si $0 \leq r < +\infty$, $C^r(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$ est un espace de Banach.

Si $r = +\infty$, $C^\infty(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$ est un espace de Fréchet dont la topologie est la limite projective des topologies C^r.

Si $r = \omega$, on met la C^∞-topologie sur $C^\omega(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$ [1]. On désigne par δ_∞ une distance sur $C^\infty(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$ invariante par translation et complète, définissant la topologie de Fréchet sur cet espace.

[1] Il existe une topologie d'e.v.t.l.c. et complet sur $C^\omega(\mathbf{T}^n)$, appelée C^ω-topologie : la topologie limite inductive localement convexe des espaces de fonctions holomorphes définies sur un système fondamental *ad hoc* de voisinages de Stein de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{C}^n$ (par exemple $|\mathrm{Im}\, z| < h$, $h \to 0$). Pour cette topologie $C^\omega(\mathbf{T}^n)$ n'est ni métrisable ni de Baire; comme cette topologie ne nous sera d'aucune utilité, nous supposerons que sur les fonctions C^ω, on met la C^∞-topologie qui est moins fine que la C^ω-topologie, bien que la plupart des propositions soient vraies avec la C^ω-topologie (sauf ce qui se rapporte à la catégorie de Baire).

(**2.2**) *Topologie sur* $D^r(\mathbf{T}^n)$, $0 \leq r \leq +\infty$.

(**2.2.1**) Si $0 \leq r < +\infty$, on a la distance $\delta_r(f, g) = |f-g|_{C^r}$ si r est entier et, si $r \geq 1$ est non entier :

$$\delta_r(f, g) = |f-g|_{C^{[r]}} + |D^{[r]}(f-g)|_{C^{r-[r]}};$$

si $r = +\infty$, on a la distance

$$\delta_\infty(f, g) = \delta_\infty(f-g, 0).$$

Ces distances définissent la C^r-topologie sur $D^r(\mathbf{T}^n)$.

Sur $D^\omega(\mathbf{T}^n)$, on met la C^∞-topologie.

(**2.2.2**) Pour $0 \leq r \leq +\infty$, r entier, $D^r(\mathbf{T}^n)$ est un groupe topologique pour la C^r-topologie (voir Cerf [1]).

Remarque (**2.2.3**). — Si $r \geq 1$ est non entier, $D^r(\mathbf{T}^n)$ n'est pas un groupe topologique pour la C^r-topologie.

(**2.2.4**) Si $0 \leq r \leq \omega$, r entier, $D^r(\mathbf{T}^n)$ est localement contractile (pour la C^r-topologie).

Pour $r = 0$, c'est un théorème dû à Edwards-Kirby. Si $r \geq 1$ et $f = \mathrm{Id} + \varphi$, si φ est suffisamment voisin de 0 dans la C^1-topologie,

$$t \in [0, 1] \mapsto \mathrm{Id} + t\varphi$$

est une contraction sur l'identité. Comme $D^r(\mathbf{T}^n)$ est un groupe topologique, il est localement contractile en tout point puisqu'il l'est au voisinage de l'identité.

(**2.2.5**) *Si* $1 \leq r \leq \omega$, $D^r(\mathbf{T}^n)$ est canoniquement homéomorphe à un ouvert de $C^r(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$ (ouvert induit par la C^1-topologie) ; donc, pour $1 \leq r < +\infty$, $D^r(\mathbf{T}^n)$ est canoniquement une variété banachique, et si $r = +\infty$ une variété fréchétique (il est donc localement contractile aussi pour $r \geq 1$, r non entier).

$D^r_+(\mathbf{T}^n)$ est la composante connexe de l'identité ; c'est un sous-groupe ouvert (dans la C^r-topologie) de $D^r(\mathbf{T}^n)$ et aussi un sous-groupe fermé. Si $r \geq 1$, r entier $< +\infty$, bien que $D^r(\mathbf{T}^n)$ soit un groupe topologique pour la C^r-topologie et une variété banachique, $D^r(\mathbf{T}^n)$ n'est pas un groupe de Lie banachique de classe C^1. Les applications $g \mapsto f \circ g$ et $f \mapsto f^{-1}$ ne sont pas de classe C^1 pour la C^r-topologie.

On montre (voir Dieudonné [1, VIII.12, exercice 8) et X.2, exercice 4)] et Irwin [1]) que pour $k \geq 0$, k entier :

$$(f, g) \in D^r(\mathbf{T}^n) \mapsto f \circ g \in D^{r-k}(\mathbf{T}^n)$$
$$f \in D^r(\mathbf{T}^n) \mapsto f^{-1} \in D^{r-k}(\mathbf{T}^n)$$

sont de classe C^k. C'est ce que l'on appelle la *perte de différentiabilité*. Pour $r = +\infty$, en un sens à préciser, $D^\infty(\mathbf{T}^n)$ est un groupe de Lie fréchétique. Le théorème des fonctions implicites étant en général faux pour les espaces de Fréchet, il faut des hypothèses beaucoup plus draconiennes pour avoir un théorème. Nous renvoyons le lecteur à F. Sergeraert [1] ou Hamilton [1] pour un théorème des fonctions implicites adapté à notre étude. L'objet de ce travail est l'étude de cette difficulté sur un cas particulier, la conjugaison dans $D^r(\mathbf{T}^n)$ à des translations, et de montrer que pour r fini il se produit ce qu'on appelle une perte de différentiabilité.

(2.3) *Topologie sur* $\mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n)$, $0 \leq r \leq \omega$, *r entier.*

Sur $\mathrm{Diff}_0^0(\mathbf{T}^n)$, on a la distance qui définit la C^0-topologie :

$$d_0(f, g) = \sup_{x \in \mathbf{T}^n} \|f(x) - g(x)\|;$$

sur $\mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n)$, $1 \leq r \leq +\infty$, r entier, on a la distance qui définit la C^r-topologie : si f et $g \in \mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n)$ et si $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont des relèvements à $D^r(\mathbf{T}^n)$:

$$d_r(f, g) = d_0(f, g) + |D(\tilde{f} - \tilde{g})|_{C^{r-1}} \quad \text{si} \quad 1 \leq r < +\infty$$
$$d_\infty(f, g) = d_0(f, g) + \delta_\infty(D(\tilde{f} - \tilde{g}), 0) \quad \text{si} \quad r = +\infty.$$

Sur $\mathrm{Diff}_0^\omega(T^n)$ on met la C^∞-topologie.

Pour la C^r-topologie, $\mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n)$ est un groupe topologique localement contractile et la suite :

$$\{1\} \to C \cong \mathbf{Z}^n \to D^r(\mathbf{T}^n) \to \mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n) \to \{1\}$$

est une suite exacte de groupes topologiques; $D^r(\mathbf{T}^n)$ est le revêtement $\mathbf{Z}^n$-cyclique associé à l'injection (scindée) :

$$0 \to \pi_1(\mathbf{T}^n) \to \pi_1(\mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n)).$$

Si $n = 1, 2$, $D^r(\mathbf{T}^n)$, pour $0 \leq r \leq +\infty$, est le revêtement universel de $\mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n)$ pour la C^r-topologie; de plus, si $n = 1, 2$, $\mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n)$ est la composante connexe de l'identité pour la C^r-topologie (*i.e.* $\mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n) = \mathrm{Diff}_+^r(\mathbf{T}^n)$).

Proposition **(2.4)**. — *Pour* $r \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ (1), $D^r(\mathbf{T}^n)$ (resp. $\mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n)$), *pour la* C^r*-topologie, est un espace topologique polonais* (i.e. *homéomorphe à un espace métrique complet séparable*).

Démonstration. — Si l'on prend comme nouvelle distance sur $D^r(\mathbf{T}^n)$:

$$\rho_r(f, g) = |f - g|_{C^r} + |f^{-1} - g^{-1}|_{C^r} \quad \text{si} \quad 0 \leq r < +\infty$$

et :

$$\rho_\infty(f, g) = \delta_\infty(f, g) + \delta_\infty(f^{-1}, g^{-1}) \quad \text{si} \quad r = +\infty,$$

ρ_r définit sur $D^r(\mathbf{T}^n)$ une topologie équivalente à la C^r-topologie puisque $D^r(\mathbf{T}^n)$ est un groupe topologique, et pour cette distance ρ_r, $D^r(\mathbf{T}^n)$ est complet; $D^r(\mathbf{T}^n)$ est séparable, car homéomorphe à un sous-espace de $C^r(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$, qui est séparable.

---

(1) Si $r \geq 1$ *n'est pas entier*, $D^r(\mathbf{T}^1)$ n'est pas séparable pour la C^r-topologie.

On montre de même que $\mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n)$ est homéomorphe à un espace métrique complet, et il est séparable puisque

$$\pi : \mathrm{D}^r(\mathbf{T}^n) \to \mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n) \to \{1\}$$

est continue. ■

Remarques (**2.5**). — 1) Si $k<r$, $\mathrm{D}^r(\mathbf{T}^n)$ avec la C^k-topologie n'est pas un espace de Baire.

2) On supposera qu'un sous-espace de $\mathrm{D}^r(\mathbf{T}^n)$ a la topologie induite par la C^r-topologie sauf mention du contraire.

Corollaire (**2.6**). — *Pour* $0 \leq r \leq +\infty$, *r entier, tout fermé de* $\mathrm{D}^r(\mathbf{T}^n)$ (resp. $\mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n)$), *et même tout* G_δ *(intersection dénombrable d'ouverts) est un espace topologique polonais et a donc la propriété de Baire.*

Démonstration. — Voir Bourbaki [2].

(**2.7**) *Densité.*

Soit $\mathrm{P}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{T}^n)$ l'ensemble des $f \in \mathrm{D}^\omega(\mathbf{T}^n)$ avec $f = \mathrm{Id} + \varphi$, où φ est une application polynôme trigonométrique à coefficients rationnels (*i.e.* chaque composante de φ est un polynôme trigonométrique à coefficients rationnels) ; $\mathrm{P}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{T}^n)$ est dénombrable mais n'est pas un groupe.

Proposition. — *Si* $r \geq 1$, *r entier,* $\mathrm{P}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{T}^n)$ *est dense dans* $\mathrm{D}^r(\mathbf{T}^n)$ *pour la* C^r*-topologie. Si* $n=1$, $\mathrm{P}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{T}^1)$ *est dense dans* $\mathrm{D}^0(\mathbf{T}^1)$ *pour la* C^0*-topologie.*

Démonstration. — Si $r \geq 1$, $\mathrm{D}^r(\mathbf{T}^n)$ est homéomorphe à un ouvert (ouvert induit par la C^1-topologie) de $\mathrm{C}^r(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$ et la proposition est alors classique. Si $n=1$, et $r=0$, c'est aussi classique par la continuité uniforme des $f \in \mathrm{D}^0(\mathbf{T}^1)$ et le fait que f est croissante. ■

3. Rappels sur les espaces de Baire (voir Bourbaki [2]).

Soit X un espace topologique de Baire (par exemple un espace topologique polonais).

Définitions (**3.1**). — 1) Une partie de X est *maigre* si elle est contenue dans une réunion dénombrable de fermés (*i.e.* un F_σ) sans point intérieur. Comme X est de Baire, la réunion est sans point intérieur.

2) Un ensemble est *résiduel* s'il contient une intersection dénombrable d'ouverts denses (*i.e.* un G_δ dense), ce qui est équivalent à ce que son complémentaire soit maigre.

3) Une propriété d'éléments de X est *générique* si elle est vraie sur un ensemble résiduel.

(3.2) Un espace topologique est *parfait* s'il est sans point isolé et non vide.

(3.3) Un *ensemble de Cantor* de $[0, 1]$ est un fermé parfait, qui est sans point intérieur dans $[0, 1]$; et sur $\mathbf{T}^1$ deux ensembles de Cantor se déduisent l'un de l'autre par un homéomorphisme de $\mathbf{T}^1$ préservant l'orientation.

(3.4) On a la

Proposition. — Soient X *un espace topologique polonais et* F *un* G_δ *sans point isolé; alors* F *a la puissance du continu.*

Démonstration. — Comme F est un espace topologique polonais, on peut supposer que $X=F$ et que X est sans point isolé; X se plonge dans $[0, 1]^{\mathbf{N}}$ (voir Bourbaki [2]), donc $\mathrm{Card}(X) \leq \mathrm{Card}(\mathbf{R})$. On montre (Hewitt et Stromberg [1, chap. II (6.65)]) que $\mathrm{Card}(X) \geq \mathrm{Card}(\mathbf{R})$ car, X étant un espace métrique complet sans point isolé, il existe une injection continue de l'ensemble de Cantor triadique dans X. ■

Remarque. — Puisque X est un espace de Baire séparé, s'il est sans point isolé, on voit facilement que son cardinal est strictement supérieur au dénombrable.

4. Semi-continuité (voir Dieudonné [2]).

Soient $\overline{\mathbf{R}}=\mathbf{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$, et X un espace topologique; $f: X \to \overline{\mathbf{R}}$ est *semi-continue supérieurement* si pour tout $a \in \overline{\mathbf{R}}$, $f^{-1}[-\infty, a[$ est ouvert; $f: X \to \overline{\mathbf{R}}$ est semi-continue inférieurement si $-f$ est semi-continue supérieurement. Voici les résultats que nous utiliserons :

Proposition. — Soit $f: X \to \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$, *semi-continue inférieurement. Alors* $\{x \mid f(x)<+\infty\}$ *est un* F_σ *(réunion dénombrable de fermés), donc* $f^{-1}(+\infty)$ *est un* G_δ *(intersection dénombrable d'ouverts).*

Démonstration. — $\{x \in X \mid f(x)<+\infty\} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n$ avec $F_n=\{x\in X \mid f(x) \leq n\}$ qui est fermé par la semi-continuité inférieure de f. ■

Proposition. — Soit $f: X \to \mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$ *semi-continue supérieurement; alors* $f^{-1}(0)$ *est un* G_δ.

Démonstration. — Soit, pour $n \geq 1$, $U_n = \left\{x\in X \mid f(x)<\frac{1}{n}\right\}$; U_n est ouvert. Puisque $f\geq 0$, $f^{-1}(0)=\bigcap_{\substack{n\in\mathbf{N}\\ n\geq 1}} U_n$, qui est donc un G_δ. ■

Rappelons que l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions semi-continues inférieurement est semi-continue inférieurement, qu'une fonction semi-continue inférieurement sur un espace topologique polonais est de première classe de Baire (*i.e.* limite simple d'une suite de fonctions continues); elle est alors continue en chaque point d'un ensemble résiduel (comme toute application $f: X \to Y$, qui est de première classe de Baire, dans le cas où X et Y sont des espaces topologiques polonais; voir Bourbaki [2, § 5, exerc. 21]).

II. — NOMBRE DE ROTATION DES HOMÉOMORPHISMES DU CERCLE

Plan :

Commentaire :

Ce chapitre est dû essentiellement à H. Poincaré, repris par A. Denjoy [2]. La proposition (2.7) est de V. I. Arnold [1] et 8 est de Carleman [1], repris par Denjoy [1] et aussi retrouvé par H. Fürstenberg [1]. Finalement nous suivons Fürstenberg [1] dans 8. (Pour une autre démonstration, voir VI.3.)

L'introduction en 1 des mesures de probabilités, il nous semble, simplifie l'exposition des résultats classiques sur la fonction « nombre de rotation » appelée ρ. Noter l'invariance de ρ en (2.10) qui est plus générale que l'invariance par conjugaison.

Le problème de conjuguer f, si $\rho(f) = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$, à $R_{p/q}$, est élémentaire, et sera résolu en 6.

Toutes nos C^k-conjugaisons, $0 \leq k \leq \omega$, à des translations sont dans les groupes $D^k(\mathbf{T}^n)$ (ou $\mathrm{Diff}^k_0(\mathbf{T}^n)$) dans tous les chapitres.

Nous signalons que si $f \in D^r(\mathbf{T}^1)$, évidemment $f \in \mathrm{Diff}^r(\mathbf{R})$. Le problème de conjuguer f à une translation dans $\mathrm{Diff}^r(\mathbf{R})$ est élémentaire (voir Herman [10]) et ne nous occupera pas.

1. Mesures de probabilités.

Si X est un espace topologique compact métrisable, $f : X \to X$ une application continue, et $C^0(X)$ l'espace des fonctions continues, muni de la topologie de la convergence uniforme, alors l'application linéaire :

$$f^* : C^0(X) \to C^0(X), \quad f^*(\varphi) = \varphi \circ f$$

est continue. De plus l'application transposée $f_*: C^0(X)' \to C^0(X)'$ (espace des mesures de Radon sur X) est faiblement continue.

Définition. — Une mesure est dite *mesure de probabilité* sur X si $\mu \in (C^0(X))'$, $\mu \geq 0$ et $\mu(1) \equiv \mu(X) = 1$; μ est *invariante* par f, si $f_* \mu = \mu$.

Remarque. — L'ensemble des mesures de probabilités sur X est convexe et faiblement compact (ou $*$-faiblement compact).

$m = dx$ sera la mesure de Haar sur $\mathbf{T}^n$. On écrira, pour $\varphi \in C^0(\mathbf{T}^n)$:

$$m(f) = \int_{\mathbf{T}^n} \varphi \, dm = \int_{\mathbf{T}^n} \varphi(x) dx.$$

Rappelons le

Théorème de Markov et Kakutani. — Si $f: X \to X$ et $g: X \to X$ sont continues et vérifient $g \circ f = f \circ g$ (f et g commutent), alors il existe une mesure de probabilité μ sur X telle que $f_* \mu = g_* \mu = \mu$.

Démonstration. — Voir Bourbaki [1].

2. Nombre de rotation.

(2.1) Soit $f \in D^0(\mathbf{T}^1)$, telle que $f = \mathrm{Id} + \varphi$, avec $\varphi = C^0(\mathbf{T}^1)$. On a par récurrence sur $k \in \mathbf{N}$:

$$f^k = \mathrm{Id} + \sum_{i=0}^{k-1} \varphi \circ f^i.$$

Considérons la somme de Birkhoff :

$$\frac{f^k - \mathrm{Id}}{k} = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi \circ f^i.$$

Lemme **(2.2)**. — *Soit $f = \mathrm{Id} + \varphi \in D^0(\mathbf{T}^1)$. Soit $M = \operatorname*{Max}_{x \in \mathbf{R}} \varphi(x)$ et $m = \operatorname*{Min}_{x \in \mathbf{R}} \varphi(x)$; on a $M - m < 1$.*

Démonstration. — Soit $x_M \in \mathbf{R}$ tel que $\varphi(x_M) = M$ et $x_m \in \mathbf{R}$ tel que $\varphi(x_m) = m$, avec $x_m \leq x_M$ et $x_M - x_m < 1$ (φ est $\mathbf{Z}$-périodique). On a :

$$f(x_M) - f(x_m) < 1.$$

Soit $M - m < 1 - (x_M - x_m) < 1$. ■

Proposition **(2.3)**. — *Pour tout $f \in D^0(\mathbf{T}^1)$, si $k \to +\infty$, $\dfrac{f^k - \mathrm{Id}}{k}$ converge uniformément vers un nombre $\rho(f) \in \mathbf{R}$ appelé nombre de rotation de f.*

Démonstration. — Soit μ une mesure de probabilité invariante par $\bar{f}$ sur $\mathbf{T}^1$; μ étant invariante par $\bar{f}$, si $k \in \mathbf{N}$, $\mu(f^k - \mathrm{Id} - k\mu(\varphi)) = 0$. Donc $f^k - \mathrm{Id} - k\mu(\varphi)$ s'annule puisque μ est une mesure de probabilité. Or, par le lemme (2.2) :

$$\operatorname{Max}(f^k - \mathrm{Id} - k\mu(\varphi)) - \operatorname{Min}(f^k - \mathrm{Id} - k\mu(\varphi)) < 1.$$

Il en résulte que

$$|f^k - \mathrm{Id} - k\mu(\varphi)|_0 < 1$$

(si $\varphi \in C^0(\mathbf{T}^1)$ on a posé $|\varphi|_0 = \operatorname{Max}_{x \in \mathbf{R}} |\varphi(x)|$); soit :

$$\left|\frac{f^k - \mathrm{Id}}{k} - \mu(\varphi)\right|_0 < \frac{1}{k}.$$

Il suit que, si $k \to +\infty$, $\dfrac{f^k - \mathrm{Id}}{k}$ converge uniformément vers un nombre $\rho(f) = \mu(\varphi)$ et cela ne dépend donc pas du choix de μ. ∎

On a montré au passage :

(2.4) *Si* $\rho(f) = \alpha$, *pour tout* $k \in \mathbf{N}$, $R_{-k\alpha} \circ f^k$ a un *point fixe*. Ou encore : $f^k - R_{k\alpha}$ *s'annule en au moins un point* $x_k \in \mathbf{R}$.

(2.5) *L'inégalité du nombre de rotation* : si $k \in \mathbf{N}$, on a :

$$\boxed{|f^k - \mathrm{Id} - k\alpha|_0 < 1.}$$

(2.6) $\alpha = \rho(f) = \mu(\varphi) \equiv \int_{\mathbf{T}^1} \varphi \, d\mu$, où μ est une mesure de probabilité invariante par f.

Proposition **(2.7)**. — $\rho : D^0(\mathbf{T}^1) \to \mathbf{R}$ *est continue pour la* C^0*-topologie.*

Démonstration. — Par (2.5), $\rho(f)$ est limite uniforme en f des applications continues $f \mapsto \dfrac{f^k - \mathrm{Id}}{k}$. ∎

(2.8) Pour toute translation $R_\alpha : x \mapsto x + \alpha$, $\rho(R_\alpha) = \alpha$.

(2.9) Si $p \in \mathbf{Z}$, on a $\rho(R_p \circ f) = p + \rho(f)$.

En général, si $\lambda \in \mathbf{R}$, $\rho(R_\lambda \circ f) \neq \lambda + \rho(f)$ (voir III.2.7).

De la propriété (2.9) il suit que ρ passe au quotient et définit une application continue (que l'on note encore ρ), $\rho : \mathrm{Diff}^0_+(\mathbf{T}^1) \to \mathbf{T}^1$.

Proposition **(2.10)** (*invariance de* ρ *par conjugaison*). — *Soient* f *et* $g \in D^0(\mathbf{T}^1)$, *et* $h = \mathrm{Id} + \varphi$ *avec* $\varphi \in C^0(\mathbf{T}^1)$ *(h n'est pas nécessairement un homéomorphisme). Si* $h \circ f = g \circ h$, *alors* $\rho(f) = \rho(g)$.

Démonstration. — Si $n \in \mathbf{N}$, $h \circ f^n = g^n \circ h$, donc $f^n + \varphi \circ f^n = g^n \circ h - h + h$, soit :

$$\frac{f^n - \mathrm{Id}}{n} + \frac{\varphi \circ f^n}{n} = \frac{(g^n - \mathrm{Id}) \circ h}{n} + \frac{\varphi}{n}.$$

Si $n \to +\infty$, on en déduit que :

$$\rho(f) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f^n - \mathrm{Id}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{g^n - \mathrm{Id}}{n} \circ h\right) = \rho(g). \ \blacksquare$$

En particulier si $h \in D^0(\mathbf{T}^1)$, on conclut que :

$$\rho(f) = \rho(h^{-1} \circ g \circ h) = \rho(g).$$

Donc, si $g = R_\alpha$ et $f = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$, alors $\rho(f) = \alpha$.

Proposition (**2.11**). — *Si f et $g \in D^0(\mathbf{T}^1)$ commutent, alors* $\rho(f \circ g) = \rho(f) + \rho(g)$.

Démonstration. — On écrit $f = \mathrm{Id} + \varphi$, $g = \mathrm{Id} + \psi$. Soit μ une mesure de probabilité invariante par $\bar{f}$ et $\bar{g}$ (qui existe par le théorème de Markov et Kakutani), où $\bar{f}$ et $\bar{g}$ sont les homéomorphismes induits sur $\mathbf{T}^1$ par f et g. On a :

$$f \circ g = \mathrm{Id} + \psi + \varphi \circ g.$$

Par (2.6) :

$$\rho(f \circ g) = \mu(\psi + \varphi \circ g) = \mu(\psi) + \mu(\varphi) = \rho(f) + \rho(g). \ \blacksquare$$

Remarque (**2.12**). — Soient f et g dans $\mathrm{Diff}_0^0(\mathbf{T}^n)$ avec $f \circ g = g \circ f$; si $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont des relèvements de f et g à $D^0(\mathbf{T}^n)$, alors $\tilde{f} \circ \tilde{g} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$. En effet, soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbf{T}^n$ invariante par f et g; posons $\tilde{f} = \mathrm{Id} + \varphi$ et $\tilde{g} = \mathrm{Id} + \psi$. Comme $f \circ g = g \circ f$, $\tilde{f} \circ \tilde{g} = \tilde{g} \circ \tilde{f} + p$ avec $p \in \mathbf{Z}^n$. Il suffit de voir que $p = 0$. Or :

$$\mu(\tilde{f} \circ \tilde{g} - \mathrm{Id}) = \mu(\varphi) + \mu(\psi) = \mu(\tilde{g} \circ \tilde{f} - \mathrm{Id}),$$

donc $0 = \mu(p) = p$, et $\tilde{f} \circ \tilde{g} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$. $\blacksquare$

3. Généralités sur la conjugaison.

Définition (**3.1**). — Soient $0 \leq r \leq \omega$ et $0 \leq k \leq r$, $f \in D^r(\mathbf{T}^n)$ (resp. $\mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n)$); f est *C^k-conjugué* à R_α si f est conjugué à R_α dans $D^k(\mathbf{T}^n)$ (resp. $\mathrm{Diff}_0^k(\mathbf{T}^n)$). Remarquons qu'il est équivalent que $f \in D^r(\mathbf{T}^n)$ soit C^r-conjugué à une translation et que $\bar{f}$ le soit.

(**3.2**) *Minimalité.*

Soient X un espace topologique métrique compact non vide et f un homéomorphisme de X. Si $x \in X$, l'*orbite de x par f* est l'ensemble $\{f^n(x) \mid n \in \mathbf{Z}\}$.

Définition. — f est *minimal* si tout ensemble fermé invariant par f est vide ou égal à X (ou encore si l'orbite de tout point de X est dense).

Propriétés. — 1) Si f est conjugué à g dans le groupe des homéomorphismes de X et si f est minimal, alors g est minimal.

2) f est minimal si et seulement si, pour tout $x \in X$, $\{f^n(x) \mid n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans X.

3) Si $F \subset X$ est fermé, non vide et invariant par f (*i.e.* $f(F)=F$) alors F contient un fermé M non vide, invariant par f et minimal pour la relation d'inclusion (*i.e.* $f|_M$ est un homéomorphisme minimal de M). (Utiliser le lemme de Zorn).

4) Si $p: X \to Y$ est continue surjective et si $g: Y \to Y$ est un homéomorphisme de l'espace compact Y vérifiant $p \circ f = g \circ p$, alors, si f est minimal, g l'est aussi.

Exemple. — Soit R_α une translation de $\mathbf{T}^n$; R_α est minimale si et seulement si R_α est une translation ergodique.

(3.3) *Classe de différentiabilité de l'homéomorphisme qui conjugue à une translation ergodique.*

Lemme **(3.3.1)**. — *Si* $f \in D^0(\mathbf{T}^n)$ *commute avec une translation* R_α *ergodique sur* $\mathbf{T}^n$, *alors* f *est une translation.*

Démonstration. — Ecrivons $f = \mathrm{Id} + \varphi$ avec $\varphi \in C^0(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$. On a $f \circ R_{k\alpha} = R_{k\alpha} \circ f$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$, donc $\varphi \circ R_{k\alpha} = \varphi$: comme R_α est une translation ergodique sur $\mathbf{T}^n$, $\varphi = C = \text{constante} \in \mathbf{R}^n$, donc $f = R_C$. ∎

Proposition **(3.3.2)**. — *Soit* $f \in D^r(\mathbf{T}^n)$ *vérifiant* $f = g_i^{-1} \circ R_\alpha \circ g_i$, $g_i \in D^0(\mathbf{T}^n)$ *pour* $i = 1, 2$; *si* R_α *sur* $\mathbf{T}^n$ *est une translation ergodique, il existe* $C \in \mathbf{R}^n$ *telle que* $R_C \circ g_1 = g_2$.

Démonstration. — $g_1^{-1} \circ R_\alpha \circ g_1 = g_2^{-1} \circ R_\alpha \circ g_2$, donc $g_2 \circ g_1^{-1}$ commute avec R_α, donc $g_2 = R_C \circ g_1$. ∎

Si $1 \leq r \leq \omega$, $f \in D^r(\mathbf{T}^n)$, et $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$ avec $g \in D^0(\mathbf{T}^n)$, où R_α sur $\mathbf{T}^n$ est une translation ergodique, alors la classe de différentiabilité de g est indépendante du choix de g.

Problème **(3.3.3)**. — L'objet de ce mémoire est le problème du rapport entre la classe de différentiabilité de f et celle de g.

(3.3.4) Soit $D^r(\mathbf{T}^n, 0) = \{g \in D^r(\mathbf{T}^n) \mid g(0) = 0\}$, sous-groupe fermé de $D^r(\mathbf{T}^n)$; on définit de même $\mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n, 0)$. Si R_α est sur $\mathbf{T}^n$ une translation ergodique et si $f \in D^r(\mathbf{T}^n)$ est C^0-conjugué à R_α, il existe un unique $g \in D^0(\mathbf{T}^n, 0)$ tel que $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$. En effet, si $f = g_1^{-1} \circ R_\alpha \circ g_1$ avec $g_1 \in D^0(\mathbf{T}^n)$, il suffit de prendre $g = R_{-g_1(0)} \circ g_1$; g est unique par (3.3.2).

4. Définitions de F_α^r, O_α^r et $O_\alpha^{r,k}$, $0 \leq k \leq r$.

(4.1) *Définition de* F_α^r. — Soit $\alpha \in \mathbf{R}^1$; on pose

$$F_\alpha^0 = \{f \in D^0(\mathbf{T}^1) \mid \rho(f) = \alpha\}$$

(homéomorphismes de nombre de rotation α); F_α^0 est fermé dans $D^0(\mathbf{T}^1)$ puisque ρ est continue. On définit, pour $1 \leq r \leq \omega$:

$$F_\alpha^r = F_\alpha^0 \cap D^r(\mathbf{T}^1).$$

L'ensemble F^r_α est fermé dans $D^r(\mathbf{T}^1)$ pour la C^r-topologie. On pose

$$F^r_{\pi(\alpha)} = \{f \in \mathrm{Diff}^r_0(\mathbf{T}^1) \mid \rho(f) = \pi(\alpha) \in \mathbf{T}^1\}.$$

Si $\pi : D^r(\mathbf{T}^1) \to \mathrm{Diff}^r_0(\mathbf{T}^1) \to \{1\}$ est la projection canonique, π est évidemment, pour $0 \leq r \leq \omega$, un homéomorphisme de F^r_α sur $\pi(F^r_\alpha) = F^r_{\pi(\alpha)}$. (Puisque :

$$\rho : \mathrm{Diff}^0_+(\mathbf{T}^1) \to \mathbf{T}^1 \subset \mathrm{Diff}^0_+(\mathbf{T}^1)$$

est homotope à l'identité, l'image inverse par ρ du revêtement $\mathbf{Z} \to \mathbf{R} \to \mathbf{T}^1$ est isomorphe au revêtement $\mathbf{Z} \to D^0(\mathbf{T}^1) \to \mathrm{Diff}^0_+(\mathbf{T}^1)$.) On identifiera F^r_α avec $F^r_{\pi(\alpha)}$.

(4.2) O^r_α, *orbite de* R_α (¹).

On pose, pour $\alpha \in \mathbf{R}$ et $0 \leq r \leq \omega$:

$$O^r_\alpha = \{g \circ R_\alpha \circ g^{-1} \mid g \in D^r(\mathbf{T}^1)\}$$

et

$$O^r_{\pi(\alpha)} = \{g \circ R_{\pi(\alpha)} \circ g^{-1} \mid g \in \mathrm{Diff}^r_0(\mathbf{T}^1)\}.$$

π est un homéomorphisme de O^r_α sur $O^r_{\pi(\alpha)}$, et on identifiera O^r_α avec $O^r_{\pi(\alpha)}$. On a, par (2.10) (l'invariance par conjugaison de ρ), $O^r_\alpha \subset F^r_\alpha$.

(4.3) *Définition de* $O^{r,k}_\alpha$, $0 \leq k \leq r$.

On pose, pour $\alpha \in \mathbf{R}$, $0 \leq k \leq r$:

$$O^{r,k}_\alpha = O^k_\alpha \cap F^r_\alpha$$

(difféomorphismes de classe C^r qui sont C^k-conjugués à R_α) et $O^{r,r}_\alpha = O^r_\alpha$. Ici encore π est un homéomorphisme de $O^{r,k}_\alpha$ sur $O^{r,k}_{\pi(\alpha)}$ permettant de les identifier.

5. Points périodiques et nombre de rotation.

Soient $f \in D^0(T^1)$ et $\bar{f} = \pi(f)$.

Définition (5.1). — $\bar{f}$ a un *point périodique d'ordre* q, si $\bar{f}^q$ a un point fixe sur $\mathbf{T}^1$.

Lemme (5.2). — *Soit* $f \in D^0(\mathbf{T}^1)$. *S'il existe* $p, q \in \mathbf{N}$ *et* $x_0 \in \mathbf{R}$ *tels que* $f^q(x_0) = R_p(x_0)$, *alors* $\rho(f) = p/q \in \mathbf{Q}$.

Démonstration. — Si $n \in \mathbf{N}$, $f^{nq}(x_0) = x_0 + np$, donc $\rho(f) = \lim_{n \to +\infty} \dfrac{f^{nq}(x_0) - x_0}{nq} = \dfrac{p}{q} \in \mathbf{Q}$. ■

On en déduit par (2.4) la

Proposition (5.3). — *Soient* $f \in D^0(\mathbf{T}^1)$ *et* $\pi(f) = \bar{f}$.

1) $\bar{f}$ *a un point périodique d'ordre minimal* q *si et seulement si* $\rho(f) = \dfrac{p}{q} \in \mathbf{Q}$, p *et* q *premiers entre eux* ; $\bar{f}^k$ *est alors sans point fixe si* k *n'est pas un multiple de* q.

2) $\rho(f) \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ *si et seulement si* $\bar{f}$ *est sans point périodique.*

(¹) Si $f \in \mathrm{Diff}^r_+(\mathbf{T}^1)$, avec $\rho(f) \neq 0$, est sur un groupe C^r à un paramètre, alors ce groupe φ_t à un paramètre est isomorphe à une action de $\mathbf{T}^1$ (φ_t agit transitivement sur $\mathbf{T}^1$, et le stabilisateur d'un point est isomorphe à $\mathbf{Z}$), et on voit facilement que f est C^r-conjugué à R_α avec $\alpha = \rho(f)$.

6. Caractérisation de $\mathrm{O}^r_{p/q}$, $p/q \in \mathbf{Q}$.

Si $p/q \in \mathbf{Q}$ et $f = g^{-1} \circ \mathrm{R}_{p/q} \circ g$ avec $f \in \mathrm{D}^r(\mathbf{T}^1)$ et $g \in \mathrm{D}^0(\mathbf{T}^1)$, alors $f^q = \mathrm{R}_p$. Si $\bar{f}$ est sur $\mathbf{T}^1$ un difféomorphisme périodique, $\{\bar{f}^n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ est un groupe isomorphe à $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$.

Critère de conjugaison. — Soient $0 \leq r \leq \omega$ *et* $f \in \mathrm{D}^r(\mathbf{T}^1)$ *avec* $\rho(f) = p/q$; *alors* f *est* C^r*-conjugué à* $\mathrm{R}_{p/q}$ *si et seulement si* $f^q = \mathrm{R}_p$.

Démonstration. — Soit $g = \dfrac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} \left(f^i - i\dfrac{p}{q} \right)$. Si $f \in \mathrm{D}^r(\mathbf{T}^1)$, alors :

$$g \in \mathrm{D}^r(\mathbf{T}^1) \quad \text{et} \quad g \circ f = \mathrm{R}_{p/q} \circ g,$$

soit $f = g^{-1} \circ \mathrm{R}_{p/q} \circ g$. ∎

L'ensemble $\mathrm{O}^r_{p/q}$ est donc fermé dans $\mathrm{F}^r_{p/q}$ pour la C^r-topologie. Nous verrons en III.2.5 que $\mathrm{O}^r_{p/q}$ est sans point intérieur dans $\mathrm{F}^r_{p/q}$.

7. Introduction à l'étude de F^0_α pour $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$.

(7.1) *Semi-conjugaison.*

En général, si $f \in \mathrm{D}^0(\mathbf{T}^1)$ et si $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, f n'est pas C^0-conjugué à R_α puisque $\bar{f}$ n'est pas minimal. Nous reprendrons de tels exemples, dus à Denjoy [2] et Bohl, au chapitre X.3.1. Néanmoins f est *semi-conjugué* au sens de la proposition suivante :

Proposition. — Soit $f \in \mathrm{D}^0(\mathbf{T}^1)$, *tel que* $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$; *il existe* $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, *continue monotone non décroissante avec* $g - \mathrm{Id} \in \mathrm{C}^0(\mathbf{T}^1)$ (i.e. $\bar{g}$ *est sur* $\mathbf{T}^1$ *de degré* 1) *et telle que* :

$$g \circ f = \mathrm{R}_\alpha \circ g.$$

Remarque. — Si on écrit $g = \mathrm{Id} + \psi$, et $f = \mathrm{Id} + \varphi$, alors $\psi - \psi \circ f = \varphi - \alpha$.

Démonstration. — Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbf{T}^1$ invariante par $\bar{f}$, donc par $\bar{f}^{-1}$; μ est sans masse atomique puisque $\bar{f}$ est sans point périodique.

Soit $g(x) = \int_0^x d\mu$; g est continue non décroissante puisque $\mu \geq 0$ est sans masse atomique, $g(0) = 0$ et $g(x+n) = g(x) + n$ pour $n \in \mathbf{Z}$ puisque $\int_0^1 d\mu = \mu(1) = 1$.

Comme $\bar{f}_* \mu = \mu$:

$$g(f(x)) - g(f(0)) = g(x) - g(0).$$

Si $\mathrm{C} = g(f(0)) - g(0)$, $g \circ f = \mathrm{R}_\mathrm{C} \circ g$ et, par (2.10), $\mathrm{C} = \alpha = \rho(f)$. ∎

(7.2) *Sur l'ensemble de Cantor invariant.*

Soit μ une mesure de probabilité invariante par $\bar{f}$. On verra en (8.5) que μ est unique si $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$.

Proposition (7.2.1). — *Sous les hypothèses de la proposition de* (7.1), g *est un homéomorphisme si et seulement si le support de* μ *est* $\mathbf{T}^1$.

Démonstration. — En effet dans ce cas g est strictement monotone. ■

(7.2.2) Soit $F = \mathrm{supp}(\mu)$; F est un fermé invariant par $\bar{f}$ et sans point isolé puisque μ est sans masse atomique. Si $F \neq \mathbf{T}^1$, alors $\bar{f}$ n'est pas minimal, donc n'est pas C^0-conjugué à R_α.

Proposition (7.2.3). — *Si* $F \neq \mathbf{T}^1$, *alors* F *est un ensemble de Cantor de* $\mathbf{T}^1$ (i.e. *un fermé sans point isolé, et d'intérieur vide*), *qui est l'unique ensemble minimal non vide invariant par* f.

Démonstration. — Soit $g(x) = \int_0^x d\mu$. Soit $\bar{g} : \mathbf{T}^1 \to \mathbf{T}^1$; on a $\bar{g}(F) = \mathbf{T}^1$; $\bar{g}|_F$ est injective sauf sur un ensemble dénombrable D de F (*i.e.* les extrémités des composantes connexes de $\mathbf{T}^1 - F$). Soit M un ensemble fermé invariant par $\bar{f}$, tel que $M \neq \emptyset$. Comme

$$\bar{g} \circ \bar{f} = R_\alpha \circ \bar{g},$$

$\bar{g}(M)$ est invariant par R_α, donc $\bar{g}(M) = \mathbf{T}^1$, et $M \supset F - D$. Comme l'adhérence de $F - D$ est F puisque F est sans point isolé, il suit que $M \supset F$; F est donc bien l'unique ensemble minimal invariant par $\bar{f}$. Si $F \neq \mathbf{T}^1$, $\mathrm{Int}(F) = \emptyset$, sinon la frontière de F serait invariante par $\bar{f}$ et F ne serait pas un ensemble minimal; F est sans point isolé puisque μ est sans masse atomique : F est bien un ensemble de Cantor dans $\mathbf{T}^1$. ■

Remarque (7.2.4). — $\bar{g}(D)$ est un ensemble dénombrable invariant par R_α. Le nombre d'orbites pour l'action de R_α est soit un, soit fini ou même dénombrable (voir Denjoy [2]).

(7.3) *Points errants.*

Soit $f : X \to X$ un homéomorphisme de l'espace métrique compact X (non vide).

Définition. — Un point $x \in X$ est *(topologiquement) errant pour* f s'il existe un voisinage ouvert U de x tel que, pour tout entier $n \geq 1$, on ait $U \cap f^n(U) = \emptyset$ (ce qui revient à dire que les ensembles $f^n(U)$, pour $n \in \mathbf{Z}$, sont deux à deux disjoints).

On pose $\Omega(f) = \{x \in X \mid x \text{ est non errant pour } f\}$; $\Omega(f)$ est un fermé de X non vide, invariant par f. Noter que toute mesure de probabilité μ invariante par f vérifie $\mathrm{supp}(\mu) \subset \Omega(f)$.

Si $x \in X$, on pose $\omega_f(x) = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \overline{\{f^n(x), f^{n+1}(x), \ldots\}}$ (autrement dit $\omega_f(x)$, l'ensemble ω-limite de x par f, est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbf{N}}$) et on pose aussi $\alpha_f(x) = \omega_{f^{-1}}(x)$. Noter que, puisque X est compact, $\omega_f(x)$ et $\alpha_f(x)$ sont des fermés, non vides, invariants par f. De plus, on a $\omega_f(x) \subset \Omega(f)$ et $\alpha_f(x) \subset \Omega(f)$.

Proposition. — *Soit* $f \in \mathrm{Diff}^0(\mathbf{T}^1)$, *tel que* $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. *Alors* $\Omega(f)$ *est l'unique ensemble minimal non vide invariant pour* f.

Démonstration. — La seule chose qu'il faut savoir est que si μ est une mesure de probabilité invariante par f et $\mathrm{supp}(\mu)=F\neq\mathbf{T}^1$, alors $F=\Omega(f)$. Soit I_0 une composante connexe de $\mathbf{T}^1-F\neq\emptyset$. Comme pour tout entier $n\in\mathbf{Z}$, $f^n(I_0)$ est une composante connexe de $\mathbf{T}^1-F$, les intervalles $(f^n(I_0))_{n\in\mathbf{Z}}$ sont disjoints deux à deux, car f est sans point périodique. Donc tout $x\in\mathbf{T}^1-F$ est topologiquement errant. Il suit que $\Omega(f)=\mathrm{supp}(\mu)$. ∎

Remarque. — Sous les mêmes hypothèses que dans la proposition, on vérifie que, pour tout $x\in\mathbf{T}^1$, alors $\omega_f(x)=\Omega(f)$.

8. Unique ergodicité des homéomorphismes de T sans point périodique.

(8.1) *Rappels* (voir Fürstenberg [1]).

Soient X un espace métrique compact non vide et $f: X\to X$ un homéomorphisme de X.

Définition **(8.1.1).** — 1) f est *uniquement ergodique* si f a une unique mesure de probabilité invariante μ.

2) f est *strictement ergodique* si f est uniquement ergodique de mesure invariante μ et si la μ-mesure de tout ouvert non vide est strictement positive (ou encore $\mathrm{supp}(\mu)=X$).

Exemples **(8.2).** — 1) Une translation ergodique sur $\mathbf{T}^n$ est strictement ergodique, la mesure de probabilité invariante étant la mesure de Haar. En effet, si $\widehat{\mu(k)}$, pour $k\in\mathbf{Z}^n$, sont les coefficients de Fourier d'une mesure invariante par R_α, alors on a $\widehat{\mu(k)}(1-e^{2\pi i\langle k,\alpha\rangle})=0$: μ est la mesure de Haar de $\mathbf{T}^n$.

2) Soit $f\in\mathrm{Diff}^0_+(\mathbf{T}^1)$, tel que $\rho(f)=\frac{p}{q}\in\mathbf{Q}$, $(p,q)=1$, et que f^q-R_p ait sur $\mathbf{T}^1$ seulement q points fixes (*i.e.* f a un unique cycle périodique $\{x_0,f(x_0),\ldots,f^{q-1}(x_0),f^q(x_0)=x_0\}$). Alors $\Omega(f)=\{x_0,\ldots,f^{q-1}(x_0)\}$, et l'unique mesure de probabilité invariante par f est $\mu=\frac{1}{q}\sum_{i<q}\delta_{f^i(x_0)}$ (où δ_y est la masse de Dirac en y).

Propriétés **(8.3).** — *a)* Si f, uniquement ergodique (resp. strictement ergodique), est conjugué à g dans le groupe des homéomorphismes de X, alors g est uniquement ergodique (resp. strictement ergodique).

b) Si f est uniquement ergodique avec pour unique mesure de probabilité invariante μ, $\mathrm{supp}(\mu)$ est l'unique ensemble minimal compact non vide invariant par f. (En effet, pour tout ensemble invariant F fermé non vide, par le théorème de Markov-Kakutani il existe une mesure de probabilité invariante par f et de support contenu dans F.) En particulier, si f est strictement ergodique, f est minimal.

(8.4) On rappelle que $C^0(X)$ est l'espace des fonctions continues sur X, avec la norme de la convergence uniforme.

Proposition. — *Les quatre affirmations suivantes sont équivalentes* :

1) f *est uniquement ergodique, de mesure de probabilité invariante* μ;

2) *l'espace des mesures de Radon invariantes par* f *est de dimension* 1;

3) *l'adhérence de* $\{\varphi\circ f-\varphi \mid \varphi\in C^0(X)\}$ *dans* $C^0(X)$ *est un hyperplan (une forme linéaire définissant cet hyperplan étant* μ*)*;

4) *pour tout* $\varphi\in C^0(X)$, *si* $k\to+\infty$, $\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\varphi\circ f^i$ *converge uniformément vers une constante* $(=\mu(\varphi))$.

Démonstration. — Elémentaire (voir Fürstenberg [1]).

(8.5) On a la proposition suivante, due à Carleman [1], Denjoy [1] et Fürstenberg [1] :

Proposition. — *Soit* $f\in \mathrm{Diff}^0_+(\mathbf{T}^1)$ *telle que* $\rho(f)=\alpha\in\mathbf{T}^1-(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$; *alors* f *est uniquement ergodique.*

Démonstration. — Soit μ une mesure de probabilité invariante par f, et soit $g(x)=\int_0^x d\mu$. D'après (7.1) $\bar g\circ f=R_\alpha\circ\bar g$; $\bar g_*\mu$ est donc la mesure de Haar m de $\mathbf{T}^1$. Soit μ_1 une autre mesure de probabilité invariante par f; $\bar g_*\mu_1$ est invariante par R_α $(\alpha\in\mathbf{T}^1-(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}))$, donc $\bar g_*\mu_1=m$. On voit facilement que $\mathrm{supp}(\mu)=\mathrm{supp}(\mu_1)=F$, directement ou par (7.3). Comme $\bar g|_F$ est injective sauf sur un ensemble au plus dénombrable, de μ (et aussi de μ_1)-mesure nulle car μ et μ_1 sont sans masse atomique, on conclut que $\mu=\mu_1$. ■

9. Critère de C^0-conjugaison à une rotation.

On a le

Critère. — *Soit* $f\in D^0(\mathbf{T}^1)$; f *est* C^0 *conjugué à* R_α $(\alpha=\rho(f))$ *si et seulement s'il existe une suite de nombres* $n_i\in\mathbf{N}$, $n_i\to+\infty$, *telle que la suite* $(f^{n_i})_{i\in\mathbf{N}}$ *soit équicontinue.*

Démonstration. — Il est élémentaire de voir que la condition est nécessaire; montrons qu'elle est suffisante.

a) *Cas* $\rho(f)=\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$

Soit μ une mesure de probabilité invariante par $\bar f$; si $\mathrm{supp}(\mu)=\mathbf{T}^1$, alors, par (7.2.1), $\bar f$ est C^0-conjugué à R_α; supposons *par l'absurde* que $\mathrm{supp}(\mu)\neq\mathbf{T}^1$. Comme $F=\mathrm{supp}(\mu)$ est invariant par $\bar f$, $\mathbf{T}^1-F$ est invariant par $\bar f$ et ouvert. Soit I_0 une composante connexe de $\mathbf{T}^1-F$. Puisque, pour tout $n\in\mathbf{Z}$, $\bar f^n(I_0)$ est une composante connexe de $\mathbf{T}^1-F$ et que $\bar f$ est sans point périodique, les intervalles $(\bar f^n(I_0))_{n\in\mathbf{Z}}$ sont tous disjoints. Si $n\to\pm\infty$, la longueur de $f^n(I_0)$, pour la distance standard de $\mathbf{T}^1$, $\|\ \|$, tend vers 0. Or $\bar f^{n_i}$ envoie $\bar f^{-n_i}(I_0)$ sur I_0; comme la longueur de $\bar f^{-n_i}(I_0)$ tend vers 0 si $i\to+\infty$, ceci est contraire à l'équicontinuité de la suite $(\bar f^{n_i})_{i\in\mathbf{N}}$ (*i.e.* pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que $\|x-y\|\leq\eta$ implique, pour tout i, $\|f^{n_i}(x)-f^{n_i}(y)\|\leq\varepsilon$).

Donc, par l'absurde, $\operatorname{supp}(\mu)=\mathbf{T}^1$: f est C^0-conjugué à R_α.

b) *Cas* $\rho(f)=\frac{p}{q}\in\mathbf{Q}$

La suite $(f^{n_i q})_{i\in\mathbf{N}}$ est équicontinue, donc aussi $(f^{n_i q}-n_i p)$. Supposons que $f^q \neq R_p$; soient $a<b$ tels que :

$$(f^q-p)(x)-x\neq 0 \quad \text{si} \quad x\in]a,b[$$

et

$$(f^q-p)(x)-x=0 \quad \text{si} \quad x=a \quad \text{et} \quad x=b.$$

Si $k\in\mathbf{N}$, $k\to+\infty$, $f^{kq}-kp$ converge simplement sur $]a,b[$ vers a si $(f^q-R_p)(x)<0$ (si $(f^q-R_p)(x)>0$, $f^{kq}-kp$ converge simplement sur $]a,b[$ vers b) ; la limite simple sur $[a,b]$ de $f^{kq}-kp$ n'est pas continue sur $[a,b]$. Donc $(f^{n_i q}-n_i p)$ n'est pas équicontinue. Par conséquent, $f^q=R_p$, et on applique alors 6. ■

III. — ÉTUDE DES FERMÉS DE NOMBRE DE ROTATION CONSTANT

Plan :

Commentaire :

Ce chapitre est consacré à l'étude de la topologie des fermés F^r_α dans $D^r(\mathbf{T}^1)$. C'est V. I. Arnold qui, le premier à notre connaissance, entreprit cette étude, qui est d'ailleurs élémentaire. La définition des semi-stables, ainsi que la proposition (4.1.1), sont de V. I. Arnold. Nous reprenons cette étude pour en donner des démonstrations qui restent valables dans les cas C^0 et C^1.

L'exemple (3.4) est de J. Moser (la démonstration est de nous). La connexité de F^r_α $(\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q})$ est de F. Sergeraert (la démonstration est de nous). La proposition (3.2) est une réponse à une question de V. I. Arnold [1].

On peut dire que ce chapitre est consacré à l'étude pour $0 < |a| < \frac{1}{2\pi}$ fixé, de :

$$\lambda \mapsto f_\lambda(x) = x + a \sin 2\pi x + \lambda \in D^\omega(\mathbf{T}^1)$$

ou plus précisément de $\lambda \mapsto \rho(f_\lambda) = h(\lambda)$. Nous conseillons au lecteur de garder cet exemple constamment à l'esprit, cet exemple étant générique par (4.5).

On étudie en 1 des généralités sur $\lambda \mapsto \rho(f_\lambda)$. En 2 on étudie $F^r_{p/q}$. On verra en (3.2), que pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$, $\mathrm{Int}(F^r_{p/q}) = U^r_{p/q} \neq \emptyset$ (intérieur dans $D^r(\mathbf{T}^1)$) et que la frontière de $F^r_{p/q}$ dans $D^r(\mathbf{T}^1)$ est formée des semi-stables : $F^r_{p_+/q} \cup F^r_{p_-/q}$. En 3, on montre en particulier que, si $h(\lambda) = \rho(f_\lambda)$, où $f_\lambda(x) = x + a \sin 2\pi x + \lambda$, alors, pour tout $p/q \in \mathbf{Q}$, $h^{-1}(p/q)$ est un intervalle d'intérieur non vide. On montre en (4.5) que cette propriété, équivalente à la propriété A_0, est générique dans $D^r(\mathbf{T}^1)$ pour $0 \leq r \leq \omega$.

Les propositions les plus importantes sont les suivantes : (4.1) implique que, pour tout $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ et tout $f \in D^0(\mathbf{T}^1)$, il existe un unique $\lambda_\alpha(f)$ tel que $\rho(R_{\lambda_\alpha(f)} \circ f) = \alpha$. Il en résulte en (4.4) que, pour tout $0 \leq r \leq \omega$, tout $r \leq k$ et tout $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, F^k_α est dense dans F^r_α pour la C^r-topologie.

En 5, toujours avec $f(x) = x + a \sin 2\pi x$, on montre que $K_f = [0, 1] - \mathrm{Int}(h^{-1}(\mathbf{Q}))$ est un ensemble de Cantor dans $[0, 1]$.

En 6, on étudie $F^r = D^r(T^1) - \operatorname{Int} \rho^{-1}(\mathbf{Q})$. On montre en (6.2) que $D^r(T^1) \cap \operatorname{Int} \rho^{-1}(\mathbf{Q})$ est un ouvert dense de $D^r(T^1)$ pour tout $0 \leq r \leq \omega$. Si $r \geq 1$, $\operatorname{Int} \rho^{-1}(\mathbf{Q}) \cap D^r(T^1)$ contient un ouvert dense de difféomorphismes structurellement stables (voir Arnold [1]), mais du point de vue de la conjugaison différentiable, la stabilité structurelle est une illusion : si f est structurellement stable, alors son orbite C^1 est de codimension infinie.

Pour le problème de « la mesure » de $\operatorname{Int} \rho^{-1}(\mathbf{Q}) \cap D^r(T^1)$ nous renvoyons à Arnold [1] et Herman [1] (la famille $\lambda \mapsto f_\lambda(x) = x + a \sin 2\pi x + \lambda$ est étudiée).

On suppose que, si $0 \leq r \leq \omega$, alors r est entier ou égal à $+\infty$ ou ω.

1. Généralités sur $\lambda \mapsto \rho(R_\lambda \circ f)$ $(\lambda \in \mathbf{R})$.

(1.1) Soient $0 \leq r \leq \omega$ et $f \in D^r(T^1)$; alors, si $\lambda \in \mathbf{R}$, $R_\lambda \circ f \in D^r(T^1)$. Posons $\rho(R_\lambda \circ f) = h(\lambda)$; $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est continue par la continuité de ρ (II.2.7), et

$$h(\lambda + n) = n + h(\lambda) \quad \text{si} \quad n \in \mathbf{Z}.$$

(1.2) Si $g_1, g_2 \in C^0(\mathbf{R})$, on dit que $g_1 \leq g_2$ (resp. $g_1 < g_2$) si $g_2 - g_1 \geq 0$ (resp. $g_2 - g_1 > 0$). Si g_1 et g_2 sont strictement croissantes, et si $g_1 < g_2$ et $x \leq y$, alors pour chaque entier $n \geq 1$, $g_1^n(x) < g_2^n(y)$.

(1.3) Il en résulte la

Proposition. — *$\lambda \mapsto h(\lambda)$ est continue, non décroissante, et $h(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$.*

Démonstration. — On a, pour $\lambda_1 < \lambda_2$ et $n \geq 1$ entier, $(R_{\lambda_1} \circ f)^n < (R_{\lambda_2} \circ f)^n$, donc :

$$\rho(R_{\lambda_1} \circ f) = \lim_{n \to +\infty} \frac{(R_{\lambda_1} \circ f)^n - \mathrm{Id}}{n} \leq \lim_{n \to +\infty} \frac{(R_{\lambda_2} \circ f)^n - \mathrm{Id}}{n} = \rho(R_{\lambda_2} \circ f);$$

h est donc bien non décroissante, et la proposition résulte de (1.1). ∎

Proposition **(1.4)**. — *On a, pour tout entier n :*

si $\lambda > 0$ $\quad R_\lambda \circ f^n \leq (R_\lambda \circ f)^n$;

si $\lambda < 0$ $\quad (R_\lambda \circ f)^n \leq R_\lambda \circ f^n$.

Démonstration. — Supposons $\lambda > 0$ (la démonstration est analogue si $\lambda < 0$). On démontre la proposition par récurrence sur n. C'est vrai pour $n = 1$. Le cas $n - 1$ donne $R_\lambda \circ f^{n-1} \leq (R_\lambda \circ f)^{n-1}$. Comme $f < R_\lambda \circ f$, on a donc :

$$(R_\lambda \circ f^{n-1}) \circ f \leq (R_\lambda \circ f)^{n-1} \circ (R_\lambda \circ f),$$

soit $\quad R_\lambda \circ f^n \leq (R_\lambda \circ f)^{n+1}$.

La proposition suit par récurrence. ∎

2. Étude de $F^r_{p/q} = \{f \in D^r(T^1) \mid \rho(f) = p/q\}$, pour $0 \leq r \leq \omega$, $p/q \in \mathbf{Q}$.

(2.1) Si $f \in F^r_{p/q}$, alors $f^q - R_p$ s'annule par II.2.4.

Soit $U^r_{p/q} = \{f \in F^r_{p/q} \mid f^q - R_p$ s'annule en changeant de signe$\}$. Évidemment, $U^r_{p/q}$ est ouvert dans $D^r(T^1)$. Nous verrons en (3.2) et (3.3) que pour tout $0 \leq r \leq \omega$ et tout $p/q \in \mathbf{Q}$, $U^r_{p/q} \neq \emptyset$.

(2.2) Les définitions suivantes sont dues à Arnold [1] et donnent la frontière de Int $F^r_{p/q}$ dans $D^r(\mathbf{T}^1)$:

Définition. — Soient dans $F^r_{p/q}$ l'ensemble des *semi-stables en avant* :

$$F^r_{p+/q} = \{f \in F^r_{p/q} \mid f^q - R_p \geq 0\}$$

et celui des *semi-stables en arrière* :

$$F^r_{p-/q} = \{f \in F^r_{p/q} \mid f^q - R_p \leq 0\}.$$

(2.3) $F^r_{p+/q}$ et $F^r_{p-/q}$ sont fermés dans $D^r(\mathbf{T}^1)$ pour la C^r-topologie.

(2.4) La proposition suivante montre que $F^r_{p+/q} \cup F^r_{p-/q}$ est dans la frontière de $F^r_{p/q}$ dans $D^r(\mathbf{T}^1)$:

Proposition. — *Si* $f \in F^r_{p+/q}$ (resp. $F^r_{p-/q}$), *et* $\lambda > 0$ (resp. $\lambda < 0$), *alors* :

$$\rho(R_\lambda \circ f) > \rho(f) = p/q \qquad (\text{resp. } \rho(R_\lambda \circ f) < \rho(f)).$$

Démonstration. — On suppose que $f \in F^r_{p+/q}$ (l'autre cas étant analogue). Comme, pour $\lambda > 0$, on a $\rho(R_\lambda \circ f) \geq \rho(f)$, il suffit de voir que $\rho(R_\lambda \circ f) \neq R_{p/q}$. Or $(R_\lambda \circ f)^q > f^q \geq R_p$, donc comme $(R_\lambda \circ f)^q - R_p$ ne s'annule pas, on a $\rho(R_\lambda \circ f) \neq p/q$. Il suit que $\rho(R_\lambda \circ f) > \rho(f)$. ■

(2.5) On a $F^r_{p/q} = U^r_{p/q} \amalg (F^r_{p+/q} \cup F^r_{p-/q})$.

Proposition. — *La frontière de* $F^r_{p/q}$ *dans* $D^r(\mathbf{T}^1)$ *est* $F^r_{p+/q} \cup F^r_{p-/q}$.

Démonstration. — Comme $U^r_{p/q}$ est ouvert dans $D^r(\mathbf{T}^1)$ et que :

$$F^r_{p+/q} \cup F^r_{p-/q} \subset \text{Frontière de } (F^r_{p/q}),$$

on a bien la proposition. ■

(2.6) $f \in F^r_{p+/q} \cap F^r_{p-/q}$ est équivalent à $f^q = R_p$, donc, par II.6, $F^r_{p+/q} \cap F^r_{p-/q} = O^r_{p/q}$.

(2.7) Considérons la fonction $\lambda \mapsto h(\lambda) = \rho(R_\lambda \circ f)$. Comme $F^r_{p/q}$ a un intérieur non vide (voir (3.2)) et que $h(\lambda)$ est monotone et continue, $h^{-1}(p/q) = [a, b] \subset \mathbf{R}$ avec en général $a \neq b$. Bien entendu, $R_b \circ f$ est semi-stable en avant, et $R_a \circ f$ est semi-stable en arrière. Par conséquent, $h^{-1}(p/q)$ est réduit à un point si et seulement si $(R_a \circ f)^q = R_p$, ou encore $R_a \circ f \in O^r_{p/q}$. Soit f avec $\rho(R_\lambda \circ f) = p/q$ et $(R_\lambda \circ f)^q \neq R_p$; alors $h^{-1}(p/q) = [a, b]$ avec $a \neq b$ et de plus, pour $\lambda \in]a, b[$, $R_\lambda \circ f \in \mathrm{Int}(F^r_{p/q})$. D'où :

Proposition. — *Soit* $f \in D^r(\mathbf{T}^1)$, *tel que, pour tout* $p/q \in \mathbf{Q}$ *et tout* $\lambda \in \mathbf{R}$, $(R_\lambda \circ f)^q \neq R_p$; *alors, pour tout* $p/q \in \mathbf{Q}$, $h^{-1}(p/q)$ *est un intervalle d'intérieur non vide.*

Remarque. — En utilisant (2.7) et (4.4.3) on montre que pour tout $p/q \in \mathbf{Q}$ et $0 \leq r$, l'adhérence pour la C^r-topologie de $\mathrm{Int}(F^r_{p/q})$ est $F^r_{p/q}$.

3. Exemples de familles.

(3.1) Soit $\varphi \in C^{\omega}(\mathbf{T}^1)$; φ est *entière* si $\varphi(x)$ se prolonge en $\tilde{\varphi}(z)$ fonction holomorphe de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ avec $\mathbf{C}=\mathbf{R}\oplus i\mathbf{R}$, $i=\sqrt{-1}$ et $z=x+iy$ ($\tilde{\varphi}$ est la complexifiée de φ). Si $\sigma(z)=x-iy$, $\sigma\circ\tilde{\varphi}(z)=\tilde{\varphi}(\sigma(z))$. De plus $\varphi\equiv 0$ implique $\tilde{\varphi}\equiv 0$.

Proposition **(3.2)**. — *Soit* $f=\mathrm{Id}+\varphi\in D^{\omega}(\mathbf{T}^1)$, *où* $\varphi\in C^{\omega}(\mathbf{T}^1)$ *se prolonge en une fonction entière (par exemple* φ *polynôme trigonométrique). Si* φ *n'est pas constante et si* $\rho(f)=p/q\in\mathbf{Q}$, *alors* $f^q\neq R_p$.

Démonstration. — Par l'absurde; f se prolonge en une fonction holomorphe de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$, $f(z)=z+\tilde{\varphi}(z)$. Si, pour tout $x\in\mathbf{R}$, $f^q(x)=R_p(x)=x+p$, alors, pour tout $z\in\mathbf{C}$, $f^q(z)=z+p=R_p(z)$, d'où, sur $\mathbf{C}$, $(R_{-p}\circ f^{q-1})\circ f=\mathrm{Id}_{\mathbf{C}}$. Comme la composée de fonctions entières est entière, ceci implique que f est un difféomorphisme biholomorphe de $\mathbf{C}$. Or, il est classique que les seuls difféomorphismes biholomorphes de $\mathbf{C}$ sont de la forme

$$f(z)=\alpha z+b \quad \text{avec} \quad \alpha\in\mathbf{C}^* \quad \text{et} \quad b\in\mathbf{C}.$$

Comme $f=\mathrm{Id}+\varphi$, φ est constante et la proposition en résulte par l'absurde. ∎

(3.3) Soit $f=\mathrm{Id}+\varphi\in D^{\omega}(\mathbf{T}^1)$, où φ est un polynôme trigonométrique non constant; si $h(\lambda)=\rho(R_\lambda\circ f)$, alors, pour tout $p/q\in\mathbf{Q}$, $h^{-1}(p/q)$ est un intervalle d'intérieur non vide par (2.7). Par exemple, si $0<|a|<\frac{1}{2\pi}$, $f_a(x)=x+a\sin 2\pi x$ convient.

(3.4) *Exemple des fractions rationnelles.*

$\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})=\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})/\{-1,1\}$ agit sur $P_1(\mathbf{C})$ et aussi sur $D^2=\{z\in\mathbf{C}\mid |z|\leq 1\}$ par $z\mapsto e^{2\pi i\lambda}.\frac{(z-a)}{1-\bar{a}z}$, avec $\lambda\in\mathbf{R}$ et $|a|<1$. Considérons la fraction rationnelle :

$$g_\lambda : z\mapsto e^{2\pi i\lambda}.z.\frac{(z-a)}{(1-\bar{a}z)}.\frac{(1-\bar{b}z)}{(z-b)} \quad \text{avec} \quad \lambda\in\mathbf{R} \quad \text{et} \quad |a|<1,\ |b|<1;$$

g_λ laisse invariant $S^1=\{z\in\mathbf{C}\mid |z|=1\}$ et $g_\lambda : S^1\to S^1$ est une application de degré 1. Si a et b sont suffisamment voisins de 0, g_λ induit sur S^1 un difféomorphisme C^{ω}. Si λ varie dans $\mathbf{R}$, $\rho(g_\lambda)$ prend toutes les valeurs de $\mathbf{T}^1$.

Proposition. — *Soit* $g:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ *une fraction rationnelle qui induit sur* S^1 *un difféomorphisme* C^{ω} *préservant l'orientation. Si* $g\notin\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$ *et si* $\rho(g)\in\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ *avec* $\rho(g)=p/q(\mathrm{mod}\ 1)$, *alors on a* $g^q\neq\mathrm{Id}$.

Démonstration. — g définit une application holomorphe de $P_1(\mathbf{C})$ dans lui-même. Si $g|_{S^1}^q=\mathrm{Id}$, alors g est une application biholomorphe de $P_1(\mathbf{C})$, par conséquent $g\in\mathrm{PGL}(2,\mathbf{C})$ $\left(g(z)=\frac{az+b}{cz+d},\ ad-bc\neq 0\right)$, puisque g laisse invariant S^1, $g\in\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$; la proposition en résulte par l'absurde. (Attention à $z\mapsto 1/z$ qui ne préserve pas l'orientation sur S^1.) ∎

4. Topologie de F_α^r ($\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$) dans $D^r(\mathbf{T}^1)$.

(4.1) La proposition suivante, due à Arnold [1], permet d'affirmer qu'en un « sens intuitif » F_α^r ($\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$) est de codimension 1.

Proposition **(4.1.1)**. — *Si* $f \in D^0(\mathbf{T}^1)$ *avec* $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$, *alors* $\rho(R_\lambda \circ f) = \rho(f)$ *implique que* $\lambda = 0$.

Remarque **(4.1.2)**. — Cela signifie que la fonction $h(\lambda) = \rho(R_\lambda \circ f)$ prend chaque valeur $\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$ une et une seule fois.

Nous allons donner d'abord une démonstration lorsque f est C^0-conjugué à R_α. Pour cela, on a le

Lemme **(4.1.3)**. — *Soient* f_1 *et* $f_2 \in D^0(\mathbf{T}^1)$ *avec* $\rho(f_1) = \rho(f_2) = \alpha \in \mathbf{R}$. *Si* f_2 *est* C^0*-conjugué à* R_α, *alors* $f_1 \circ f_2^{-1}$ *a un point fixe.*

Démonstration. — Par conjugaison, il suffit de montrer que $f_1 \circ R_{-\alpha}$ a un point fixe; or cela résulte de II.2.4. ■

Démonstration de (4.1.1) *si f est C^0-conjugué à* R_α. — Par le lemme (4.1.3), on conclut alors, en posant $R_\lambda \circ f = f_1$ et $f = f_2$, que $R_\lambda = f_1 \circ f_2^{-1}$ a un point fixe, soit $\lambda = 0$. ■

Pour démontrer (4.1.1) si f n'est pas C^0-conjugué à R_α, nous allons utiliser la minimalité de $\bar{f}$ sur (l'unique) ensemble de Cantor minimal invariant.

On suppose dans le lemme suivant que f n'est pas C^0-conjugué à R_α, mais le lemme reste valable si f l'est.

Lemme **(4.1.4)**. — *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $x \in \mathbf{R}$, $p \in \mathbf{Z}$ *et* $n \in \mathbf{N}$ (resp. $p_1 \in \mathbf{Z}$ *et* $n_1 \in \mathbf{N}$) *tels que :*

(1) $$x - \varepsilon + p < f^n(x) < x + p$$

(2) $$(\text{resp. } x + p_1 < f^{n_1}(x) < x + \varepsilon + p_1).$$

Démonstration. — Par II.7.1 et 7.2, soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g = \mathrm{Id} + \varphi$, avec $\varphi \in C^0(\mathbf{T}^1)$, g continue, monotone non décroissante et telle que $g \circ f = R_\alpha \circ g$. On suppose que g n'est pas un homéomorphisme. Soit, sur $\mathbf{T}^1$, F l'unique ensemble minimal invariant par $\bar{f}$ (support de l'unique mesure de probabilité invariante par $\bar{f}$) ; $\bar{g}$ est constante sur chaque composante connexe de $\mathbf{T}^1 - F$; soit D l'ensemble des extrémités des composantes connexes de $\mathbf{T}^1 - F$. Soit $x \in F - D$. Comme F est un ensemble minimal pour $\bar{f}$, $\{\bar{f}^n(x) \mid n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans F. Comme $\bar{g}|_F$ est injective, sauf sur D, et que $\bar{g} \circ \bar{f}^n(x) = R_{n\alpha} \circ \bar{g}(x)$, on voit en ordonnant $\mathbf{T}^1$, que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbf{N}$ (resp. $n_1 \in \mathbf{N}$) tel que :

$$x - \varepsilon < \bar{f}^n(x) < x \quad (\text{resp. } x < \bar{f}^{n_1}(x) < x + \varepsilon).$$

Le lemme en résulte par relèvement à **R**.

Remarque. — La démonstration montre qu'on peut choisir $x \in \mathrm{F}-\mathrm{D}$ arbitrairement. On peut démontrer le lemme plus rapidement ainsi : d'après II.2.4, pour tout entier q, $f^q - \mathrm{Id} - q\alpha$ s'annule. Il suffit alors, par Dirichlet, de choisir des entiers $q_n \to +\infty$ tels que, si $n \to +\infty$, $q_n \alpha \to 0_{\pm}$ (mod 1).

Démonstration de (4.1.1) *si f n'est pas C^0-conjugué à R_α.* — Pour tout $\varepsilon > 0$ (resp. $\varepsilon < 0$), on va trouver λ_0 avec $0 < \lambda_0 \leq \varepsilon$ (resp. $\varepsilon \leq \lambda_0 < 0$) tel que :

$$\rho(\mathrm{R}_{\lambda_0} \circ f) \in \mathbf{Q}, \qquad \text{donc} \qquad \rho(\mathrm{R}_{\lambda_0} \circ f) \neq \rho(f) \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}.$$

Comme $\lambda \mapsto \rho(\mathrm{R}_\lambda \circ f)$ est monotone non décroissante, $\rho(\mathrm{R}_\lambda \circ f) = \rho(f)$ impliquera bien que $\lambda = 0$ (*i.e.*, pour $\lambda = 0$, $\lambda \mapsto \rho(\mathrm{R}_\lambda \circ f)$ est strictement monotone si $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$). Soit $\varepsilon > 0$ et considérons $(\mathrm{R}_\varepsilon \circ f)^n$. On a d'après (1.4), pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$(\mathrm{R}_\varepsilon \circ f)^n(x) \geq \varepsilon + f^n(x).$$

Le nombre $\varepsilon > 0$ étant donné, soient x et n donnés par le lemme (4.1.4); on a $\varepsilon + f^n(x) \geq x + p$, et aussi $f^n(x) < x + p$. Comme $\lambda \in [0, \varepsilon] \mapsto (\mathrm{R}_\lambda \circ f^n)(x) \in \mathbf{R}$ est continue en λ (par la continuité de $\lambda \mapsto (\mathrm{R}_\lambda \circ f)^n$) et comme $f^n(x) = (\mathrm{R}_0 \circ f)^n(x) < x + p$ et $(\mathrm{R}_\varepsilon \circ f)^n(x) \geq x + p$, il existe, d'après le théorème de la valeur intermédiaire, λ_0 tel que

$$(\mathrm{R}_{\lambda_0} \circ f)^n(x) = x + p.$$

Donc $\rho(\mathrm{R}_{\lambda_0} \circ f) = p/n \in \mathbf{Q}$.

La même démonstration marche si $\varepsilon < 0$, en utilisant (1.4) et le lemme (4.1.4). ■

Remarque **(4.1.5)**. — Soient $\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$ et $f_i \in \mathrm{F}^0_\alpha$ pour $i = 1, 2$; alors $f_1 \circ f_2^{-1}$ a un point fixe. (En effet, si $f_1 \circ f_2^{-1} - \mathrm{Id} > 0$, alors il existe $\lambda > 0$ tel que $f_1 > \mathrm{R}_\lambda \circ f_2$ et on applique (4.1.1). Si $f_1 \circ f_2^{-1} - \mathrm{Id} < 0$ on fait un raisonnement analogue.)

(4.2) *Les fonctions* λ_α, $\lambda_{p_+/q}$ *et* $\lambda_{p_-/q}$.

Soient $\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$ et $p/q \in \mathbf{Q}$ fixés. On définit les fonctions $\lambda_\alpha(f)$ (resp. $\lambda_{p_+/q}(f)$, $\lambda_{p_-/q}(f)$) qui à $f \in \mathrm{D}^r(\mathbf{T}^1)$ associent l'unique nombre réel $\lambda_\alpha(f)$ (resp. $\lambda_{p_+/q}(f)$, $\lambda_{p_-/q}(f)$) tel que $\mathrm{R}_{\lambda_\alpha(f)} \circ f \in \mathrm{F}^r_\alpha$ (resp. $\mathrm{R}_{\lambda_{p_+/q}(f)} \circ f \in \mathrm{F}^r_{p_+/q}$ et $\mathrm{R}_{\lambda_{p_-/q}(f)} \circ f \in \mathrm{F}^r_{p_-/q}$).

Remarquons que ces fonctions existent par (1.3) et sont univoques par (4.1.1) (resp. (2.7)).

Proposition **(4.2.1)**. — *Pour* $0 \leq r \leq \omega$, *les fonctions* λ_α (resp. $\lambda_{p_+/q}$, $\lambda_{p_-/q}$) *sont continues sur* $\mathrm{D}^r(\mathbf{T}^1)$ *pour la* C^r*-topologie.*

Pour démontrer la proposition, nous utiliserons le lemme suivant, dont nous laissons la démonstration en exercice.

Lemme **(4.2.2)**. — *Soient* X *un espace topologique métrisable,* K *un compact métrisable, et* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{K}$ *une application de graphe fermé; alors f est continue.*

Démonstration de (4.2.1). — On peut supposer que $\rho(f) \in [-1, 1]$ et que α ou $p/q \in [-1, 1]$. Puisque, pour tout $f \in \mathrm{D}^0(\mathbf{T}^1)$, $\rho(f+n) = n + \rho(f)$ pour $n \in \mathbf{Z}$, on voit alors que $\lambda_\alpha(f)$ (resp. $\lambda_{p_+/q}(f)$, $\lambda_{p_-/q}(f)$) est dans $[-2, +2]$. Montrons que le graphe de $\lambda_{p_+/q}(f)$ est fermé dans $A=(\rho^{-1}[-1, 1]\cap D^r(\mathbf{T}^1))\times[-2, +2]$. Si $(f, \lambda)\in A$, alors $(f, \lambda)\in$graphe de $(\lambda_{p_+/q})$ si et seulement si $R_\lambda\circ f\in F^r_{p_+/q}$. Comme $F^r_{p_+/q}$ est fermé dans $D^r(\mathbf{T}^1)$ pour la C^r-topologie et que l'application $(f, \lambda)\mapsto R_\lambda\circ f$ est continue, le graphe de $\lambda_{p_+/q}$ est bien fermé, donc $\lambda_{p_+/q}$ est une application continue de $\rho^{-1}[-1, +1]\cap D^r(\mathbf{T}^1)$ dans $\mathbf{R}$ (par (4.2.2)), et il suit que $\lambda_{p_+/q}: D^r(\mathbf{T}^1)\to\mathbf{R}$ est bien continue. On montre de même que λ_α (resp. $\lambda_{p_-/q}$) est continue. ∎

(4.3) *Connexité de* F^r_α, $\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$.

Pour la connexité de $F_{p_+/q}$ et $F_{p_-/q}$, etc., je renvoie à Arnold [1].
La proposition suivante est due à Sergeraert :

Proposition. — Si $\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ *et* $0\leq r\leq\omega$, F^r_α *est contractile dans la* C^r*-topologie.*

Démonstration. — On suppose que $\alpha\in]0, 1[$. Si $f=\mathrm{Id}+\varphi\in F^r_\alpha$, alors $\varphi>0$. Si $0\leq t\leq 1$, $f_t=\mathrm{Id}+t\varphi$ est un chemin continu pour la C^r-topologie dans $D^r(\mathbf{T}^1)$, et $0\leq\rho(f_t)\leq\rho(f)=\alpha$. ∎

L'application $(t, f)\mapsto R_{\lambda_\alpha(f_t)}\circ f_t$ est une rétraction par déformation de F^r_α (dans F^r_α) sur R_α.

(4.4) *Densité.*

(4.4.1) Soit $f_i\in D^\omega(\mathbf{T}^1)$ pour $i\in\mathbf{N}$, avec $f_i=\mathrm{Id}+\varphi_i$, les φ_i étant des polynômes trigonométriques non constants à coefficients rationnels. Alors la suite $\{f_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ est un ensemble dénombrable dense dans $D^r(\mathbf{T}^1)$ pour la C^r-topologie (r est supposé entier). On a la

Proposition **(4.4.2)**. — *Pour tout* $0\leq r\leq\omega$ *et tout* $\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$, *si* $r\leq k\leq\omega$, F^k_α *est dense dans* F^r_α *pour la* C^r*-topologie; plus précisément, considérons*

$$g_i=R_{\lambda_\alpha(f_i)}\circ f_i;$$

$(g_i)_{i\in\mathbf{N}}$ *est dense dans* F^r_α *pour la* C^r*-topologie.*

Démonstration. — Considérons l'application continue surjective :

$$\psi: f\in D^r(\mathbf{T}^n)\mapsto R_{\lambda_\alpha(f)}\circ f\in F^r_\alpha.$$

L'image par ψ d'un ensemble dense est dense; par conséquent, $\psi(D^k(\mathbf{T}^1))\subset F^k_\alpha$ est dense dans F^r_α, et de même $\psi((f_i)_{i\in\mathbf{N}})$ est donc dense dans F^r_α pour la C^r-topologie. ∎

Proposition **(4.4.3)**. — *Soient* $0\leq r\leq\omega$ *et* $p/q\in\mathbf{Q}$. *Soit* $g_i=R_{\lambda_{p_+/q}(f_i)}\circ f_i$ (resp. $R_{\lambda_{p_-/q}(f_i)}\circ f_i$). *Alors la suite* (g_i) *est dense dans* $F^r_{p_+/q}$ (resp. $F^r_{p_-/q}$) *pour la* C^r*-topologie.*

Démonstration. — Identique à celle de (4.4.2). ∎

Remarque. — Pour tout $i \in \mathbf{N}$, g_i a un nombre fini de points périodiques sur $[0, 1]$ (*i.e.* $g_i^q - R_p$ a un nombre fini de zéros sur $[0, 1]$, ceci par (3.2) et le fait que g_i est $\mathbf{R}$-analytique).

(4.5) *Une propriété générique : la propriété* A_0.

Soit $0 \leq r \leq \omega$. On dit que $f \in D^r(\mathbf{T}^1)$ *a la propriété* A_0 si, pour tout $p/q \in \mathbf{Q}$ et tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $(R_\lambda \circ f)^q \neq R_p$.

Remarque. — S'il existe λ tel que $(R_\lambda \circ f)^q = R_p$, λ est unique par (2.7) (et aussi par (4.1.3)).

Proposition. — *Pour* $0 \leq r \leq \omega$, *la propriété* A_0 *est générique dans* $D^r(\mathbf{T}^1)$ *pour la* C^r*-topologie.*

Démonstration. — Soient $p/q \in \mathbf{Q}$ et $G^r_{p/q} = \{f \in D^r(\mathbf{T}^1) \mid (R_{\lambda_{p+/q}(f)} \circ f)^q = R_p\}$; $G^r_{p/q}$ est fermé pour la C^r-topologie dans $D^r(\mathbf{T}^1)$. Remarquons, puisque la relation $(R_\lambda \circ f)^q = R_p$ ne peut être vérifiée que par au plus un λ, que $G^r_{p/q} = \{f \in D^r(\mathbf{T}^1) \mid$ il existe λ tel que $(R_\lambda \circ f)^q = R_p\}$; $V^r_{p/q} = D^r(\mathbf{T}^1) - G^r_{p/q}$ est donc un ouvert, dense par (3.2). L'ensemble des points de $D^r(\mathbf{T}^1)$ où A_0 est vraie est $\bigcap_{p/q \in \mathbf{Q}} V^r_{p/q}$, qui est donc résiduel dans $D^r(\mathbf{T}^1)$. ∎

5. Un ensemble de Cantor $K_f = [0, 1] - \mathrm{Int}\{\lambda \mid \rho(R_\lambda \circ f) \in \mathbf{Q}\}$ pour f ayant la propriété A_0.

(5.1) Soit $f \in D^r(\mathbf{T}^1)$, vérifiant la propriété A_0, par exemple $f = \mathrm{Id} + \varphi \in D^\omega(\mathbf{T}^1)$, où φ est un polynôme trigonométrique non constant. L'exemple « canonique » est, pour $0 < |a| < 1/2\pi$:

$$f_a(x) = x + a \sin 2\pi x.$$

On suppose que f n'est pas semi-stable.

Soit $h : \lambda \mapsto \rho(R_\lambda \circ f)$; h est continue, monotone non décroissante, $h(\lambda + n) = n + h(\lambda)$ pour $n \in \mathbf{Z}$, et, pour tout $p/q \in \mathbf{Q}$, $h^{-1}(p/q)$ est un intervalle d'intérieur non vide (par (2.7)); de plus, si $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, $h^{-1}(\alpha)$ est un point (*i.e.* h est strictement monotone en $h^{-1}(\alpha)$) par (4.1). Soit $K_f = [0, 1] - \mathrm{Int}(h^{-1}(\mathbf{Q}))$; K_f est fermé dans $[0, 1]$. Si $f_a(x) = x + a \sin 2\pi x$, on posera :

$$K_a = K_{f_a}.$$

Proposition **(5.2)**. — *Soit* $f \in D^r(\mathbf{T}^1)$, *ayant la propriété* A_0, *et non semi-stable; alors* $K_f = [0, 1] - \mathrm{Int}(h^{-1}(\mathbf{Q}))$ *est un ensemble de Cantor, et* $D = K_f \cap h^{-1}(\mathbf{Q})$ *est un ensemble dénombrable dense dans* K_f.

Démonstration. — K_f est fermé, sans point isolé ni point intérieur par (2.2), (2.7), (4.1.1) (0 et 1 ne sont pas isolés puisque f n'est pas semi-stable par hypothèse) ; K_f est donc un ensemble de Cantor de $[0, 1]$ (*i.e.* homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor). L'ensemble D est l'ensemble des valeurs de λ tel que $R_\lambda \circ f$ soit semi-stable : c'est l'ensemble des extrémités des composantes connexes de $\mathrm{Int}(h^{-1}(\mathbf{Q}))$; ainsi qu'il est bien connu, il est dense dans K_f. ■

(5.3) Soit f comme dans la proposition (5.2); $h : K_f \to [0, 1]$ est continue surjective; de plus (par (4.1.1)), $h : (K_f - D) \to ([0, 1] - \mathbf{Q})$ est injective.

Proposition. — a) *Soit* B *un ensemble dense dans* $[0, 1]$; *alors* $h^{-1}(B) \cap K_f$ *est dense dans* K_f;

b) *si* $G \subset K_f$ *est résiduel,* $h(G)$ *est résiduel dans* $[0, 1]$.

Démonstration. — *a)* Si $h^{-1}(B) \cap K_f$ n'est pas dense, il existe a et b dans $[0, 1]$, tels que $h(a) \neq h(b)$ et que $(h^{-1}(B) \cap K_f) \cap [a, b] = \emptyset$. Or, h étant monotone, on a $B \cap]h(a), h(b)[= \emptyset$. Comme $h(a) \neq h(b)$, B ne serait pas dense dans $[0, 1]$, ce qui est absurde.

b) On peut évidemment se limiter au cas où G est un G_δ dense. Soit $G_1 = G - D$ $(D = h^{-1}(\mathbf{Q}) \cap K_f)$; G_1 est résiduel et c'est même un G_δ puisque D est maigre (D étant dénombrable et K_f sans point isolé). L'ensemble G_1 étant dense dans K_f, $h(G_1)$ est dense dans $[0, 1]$; $K_f - G_1$ est un F_σ (une réunion dénombrable de compacts), d'où il résulte que $h(K_f - G_1)$ est un F_σ.

Comme $h(G_1) \cap h(K_f - G_1) = \emptyset$ (puisque h est injective sur $K_f - D$ et que $h(D) \cap h(K_f - D) = \emptyset$), $h(K_f - G_1)$ est un F_σ sans point intérieur dans $[0, 1]$. L'ensemble $h(G_1)$ est donc bien résiduel, et $h(G) \supset h(G_1)$ est aussi résiduel. ■

6. Topologie des difféomorphismes de nombres de rotation irrationnels.

(6.1) *Définition de* F^r.

Soit $0 \leq r \leq \omega$. On pose $F^r = D^r(\mathbf{T}^1) - \mathrm{Int}\, \rho^{-1}(\mathbf{Q})$; F^r est évidemment fermé dans $D^r(\mathbf{T}^1)$ pour la C^r-topologie. Pour tout $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, on a $F^r_\alpha \subset F^r$, et, pour tout $p/q \in \mathbf{Q}$, $F^r \cap F^r_{p/q} = F^r_{p+/q} \cup F^r_{p-/q}$.

Si $f \in D^r(\mathbf{T}^1)$ et si f est C^0-conjugué à une translation, $f \in F^r$ (voir II.6).

(6.2) *Topologie de* F^r *dans* $D^r(\mathbf{T}^1)$.

Proposition **(6.2.1)**. — *Pour tout* $0 \leq r \leq \omega$, F^r *est un fermé sans point intérieur dans* $D^r(\mathbf{T}^1)$. (*Autrement dit* $\mathrm{Int}\, \rho^{-1}(\mathbf{Q}) \cap D^r(\mathbf{T}^1)$ *est un ouvert dense pour la* C^r*-topologie.*)

Démonstration. — Supposons par l'absurde que F^r contienne un ouvert U non vide de $D^r(\mathbf{T}^1)$. Soit $f = \mathrm{Id} + \varphi \in U$, où φ est un polynôme trigonométrique non constant. Par (5.1) et (5.2), $\{\lambda \mid R_\lambda \circ f \in F^r\}$ est un fermé sans point intérieur égal à l'ensemble $\mathbf{R} - \mathrm{Int}\{\lambda \mid \rho(R_\lambda \circ f) \in \mathbf{Q}\}$. L'hypothèse $U \neq \emptyset$ entraînerait que $\{\lambda \mid R_\lambda \circ f \in U\}$ serait ouvert, donc, par l'absurde, F^r est sans point intérieur dans $D^r(\mathbf{T}^1)$. ■

Proposition **(6.2.2)**. — *Pour tout* $0 \leq r \leq \omega$ *et tout* $\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$ (resp. $p/q \in \mathbf{Q}$), F^r_α (resp. $F^r_{p+/q} \cup F^r_{p-/q}$) *est un fermé sans point intérieur dans* F^r *pour la* C^r*-topologie.*

Démonstration. — Cela résulte immédiatement de (2.4) et (4.1.1). ■

Proposition **(6.2.3)**. — *Pour* $0 \leq r \leq +\infty$, $F^r - \rho^{-1}(\mathbf{Q})$ *est résiduel dans* F^r *pour la* C^r*-topologie.*

Démonstration. — $\rho^{-1}(\mathbf{Q}) \cap F^r = \bigcup_{p/q \in \mathbf{Q}} (F^r_{p+/q} \cup F^r_{p-/q})$ est une réunion dénombrable de fermés sans point intérieur. Il en résulte que $F^r - \rho^{-1}(\mathbf{Q})$ est un G_δ, dense dans la C^r-topologie. ■

(6.3) *Densité.*

Soit $P(\mathbf{T}^1) = \{f = \mathrm{Id} + \varphi \in C^\omega(\mathbf{T}^1) \mid \varphi$ est un polynôme trigonométrique non constant$\}$.

Rappelons que, si $f \in P(\mathbf{T}^1)$ et $\rho(f) = p/q \in \mathbf{Q}$, alors, par (3.2), $f^q - R_p$ a un nombre fini de zéros sur $[0, 1]$ (ou encore, sur $\mathbf{T}^1$, $\bar{f}$ a un nombre fini de points périodiques).

Proposition **(6.3.1)**. — *Pour* $0 \leq r \leq \omega$, $P(\mathbf{T}^1) \cap F^r$ *est dense dans* F^r *pour la* C^r*-topologie.*

Démonstration. — Cela résulte immédiatement de (4.4). ■

Proposition **(6.3.2)**. — *Pour* $0 \leq r \leq \infty$, *l'ensemble des difféomorphismes de* F^r *qui ont un nombre de rotation rationnel et possèdent un nombre fini de points périodiques* (*sur* $\mathbf{T}^1$) *est dense dans* F^r *pour la* C^r*-topologie* (*et maigre dans la* C^r*-topologie par* (6.2.3)).

Démonstration. — D'après (6.3.1), il suffit de montrer que $P(\mathbf{T}^1) \cap F^r \cap \rho^{-1}(\mathbf{Q})$ est dense dans $P(\mathbf{T}^1) \cap F^r$ pour la C^r-topologie. Or ceci résulte de (5.1) et (5.2). ■

(6.3.3) Soit $D \subset \mathbf{R}-\mathbf{Q}$ un ensemble dénombrable dense; posons $F^r_D = \bigcup_{\alpha \in D} F^r_\alpha$.

Proposition. — *Pour* $0 \leq r \leq \omega$, F^r_D *est dense dans* F^r *pour la* C^r*-topologie.*

Démonstration. — Il suffit de voir que $P(\mathbf{T}^1) \cap F^r_D$ est dense dans $P(\mathbf{T}^1) \cap F^r$, par (6.3.1). Or ceci résulte de (5.3) *a)*. ■

IV. — INVARIANTS DE C^r-CONJUGAISON A DES ROTATIONS

Plan :

Commentaire :

En 1, on introduit l'invariant H_r pour tout entier r ($1 \leq r < +\infty$) (qui est semi-continu inférieurement pour la C^r-topologie), et alors, si f est C^r-conjugué à une translation, on a $H_r(f) < +\infty$.

Ce chapitre consiste à montrer la réciproque en (6.4) : $H_r(f) < +\infty$ est équivalent à ce que f soit C^r-conjugué à une translation.

2, 3 et 4 sont des rappels. Il est à noter que si w est un module de continuité, f est un homéomorphisme de classe C^w (par définition) si $f - \mathrm{Id} \in C^w$ et $f^{-1} - \mathrm{Id} \in C^w$. On ajoute comme toujours f^{-1} dans la définition.

En 5, on écrit l'homéomorphisme qui conjugue f à R_α (translation ergodique sur $\mathbf{T}^n$) comme limite de $\frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} (f^k - i\alpha)$ ($k \in \mathbf{N}$), la convergence ayant lieu dans la C^r-topologie si f est C^r-conjugué à R_α. Cette formule de l'homéomorphisme qui conjugue f à R_α est extrêmement commode pour les modules de continuité, ainsi que nous le montrerons en (6.3) et (6.5).

Le théorème (6.4) est plus subtil. Il résulte de (4.2), que l'on peut résumer ainsi : soient $\varphi \in C^0(\mathbf{T}^1)$ et $\psi \in L(\mathbf{T}^1, m)$ (m = mesure de Haar de $\mathbf{T}^1$), et $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, tels que $\varphi = \psi - \psi \circ R_\alpha$; alors ψ est m-presque partout égale à une fonction continue. C'est un théorème de régularité. Il me semble néanmoins que la démonstration de (6.4) reste trop compliquée.

La formule 5 sera utilisée en VIII.2; (6.3) et (6.5) seront utilisés en IX.3 et IX.4.2. La majoration de (6.2) sera utilisée en XI.4. Pour une formule analogue à 5, dans le cas des champs de vecteurs sur $\mathbf{T}^n$, voir T. Saito [1].

J. M. Strelcyn a trouvé indépendamment, dans un cas particulier, (6.6.1). Les résultats de ce chapitre ont été annoncés dans Herman [6].

Dans ce chapitre, si $0 \leq r \leq +\infty$, r est soit un entier, soit égal à $+\infty$.

1. L'invariant H_r.

Remarque (**1.1**). — Soit $f \in D^r(\mathbf{T}^n)$ avec $r \geq 1$ et r entier; si $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$, avec $g \in D^r(\mathbf{T}^n)$, $r \geq 1$, alors $t \in \mathbf{R}^n \mapsto D(g^{-1} \circ R_t \circ g)$ est une application $\mathbf{Z}^n$-périodique et continue en t. Elle définit donc une application continue de $\mathbf{T}^n$ dans $C^{r-1}(\mathbf{T}^n, \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n))$; $\{D(g^{-1} \circ R_t \circ g) \mid t \in \mathbf{R}^n\}$ est donc compact dans la C^{r-1}-topologie. D'où la

Proposition. — Soit $1 \leq r \leq +\infty$; *si* $f \in D^r(\mathbf{T}^n)$ *est* C^r*-conjugué à* R_α, *alors* :

$$\sup_{j \in \mathbf{Z}} |Df^j|_{C^k} < +\infty \quad \text{pour tout} \quad k < r$$

(*où, pour* $\varphi \in C^k(\mathbf{T}^n)$, $|\varphi|_{C^k} = \sum_{i=0}^{k} |D^i \varphi|_0$ *est une norme définissant la* C^k*-topologie.*)

C'est la réciproque que nous nous proposons de démontrer en (6.4).

(1.2) *L'invariant* H_r.

On introduit, pour $1 \leq r < +\infty$, l'invariant :

$$\boxed{\begin{aligned} H_r :\ & D^r(T^n) \to \overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty\} \\ & f \mapsto \sup_{j \in \mathbf{Z}} |Df^j|_{C^{r-1}}. \end{aligned}}$$

(**1.2.1**) Comme $D(R_p \circ f^j) = Df^j$ pour $p \in \mathbf{Z}^n$, H_r passe au quotient; on note $H_r : \mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n) \to \overline{\mathbf{R}}$ l'application ainsi définie.

(**1.2.2**) Pour $f \in D^r(\mathbf{T}^n)$, la propriété $H_r(f) < +\infty$ est invariante par C^r-conjugaison (ce qui se vérifie par un calcul direct en utilisant la formule de Faa-di Bruno).

(**1.2.3**) H_r *est une application semi-continue inférieurement pour la* C^r*-topologie.* En effet, H_r est l'enveloppe supérieure des fonctions continues $f \mapsto |Df^j|_{C^{r-1}}$, qui sont bien continues puisque $D^r(\mathbf{T}^n)$ est un groupe topologique.

(**1.2.4**) Pour $n = 1$, si $H_1(f) = \ell < +\infty$, on a, pour tout j, $1/\ell \leq Df^j \leq \ell$ (*i.e.* pour tout $x \in \mathbf{R}$, $1/\ell \leq Df^j(x) \leq \ell$). En effet, pour $j \in \mathbf{Z}$:

$$Df^j(f^{-j}(x)) = \frac{1}{Df^{-j}(x)},$$

d'où le résultat.

2. Rappels sur la composition.

On suppose que $r \geq 1$. Soient f et $g \in C^r(\mathbf{R})$. On a (voir Comtet [1], p. 150, th. C) (voir aussi Abraham et Robbin [1], p. 3) :

Proposition **(2.1)** *(Faa-di Bruno). — On a la formule :*

$$D^r(f \circ g) = \sum_{1 \leq k \leq r} (D^k f \circ g) B_{r,k}(D^1 g, \ldots, D^{r-k+1} g),$$

où les $B_{r,k}$ *sont les polynômes à* $r-k+1$ *variables suivants :*

$$B_{r,k}(x_1, \ldots, x_{r-k+1}) = \sum \frac{r!}{c_1!\, c_2! \ldots (1!)^{c_1}(2!)^{c_2} \ldots} x_1^{c_1} x_2^{c_2} \ldots,$$

la sommation ayant lieu sur tous les entiers $c_1, c_2, \ldots \geq 0$ *tels que :*

$$c_1 + 2c_2 + 3c_3 \ldots = r$$
$$c_1 + c_2 + c_3 \ldots = k.$$

Corollaire **(2.2)**. — *Soient* $f, g \in D^r(\mathbf{T}^1)$; *il existe des fonctions continues* $\varphi_k^r(x)$ $(1 \leq k \leq r)$, *qui sont des polynômes en les dérivées de* g, *telles que pour* $t \in \mathbf{R}$:

$$D^r(f(g(x)+t)) = \sum_{1 \leq k \leq r} D^k f(t + g(x)) \cdot \varphi_k^r(x) ;$$

si on a $|Dg|_{C^{r-1}} \leq \ell$, *il existe une constante* C_r *ne dépendant que de* r, *telle que :*

$$|\varphi_k^r|_0 \leq C_r \ell^r \quad \textit{pour} \quad 1 \leq k \leq r.$$

(2.3) On a aussi (voir Comtet [1], p. 161, th. D) la

Proposition (Formule d'inversion de Lagrange). — Soit $f \in \mathrm{Diff}^r(\mathbf{R})$; *alors on a, pour* $r \geq 2$:

$$D^r(f^{-1}) = \sum_{1 \leq k \leq r-1} (-r)_k (Df \circ f^{-1})^{-r-k} B_{r-1,k}\left(\frac{D^2 f \circ f^{-1}}{2}, \frac{D^3 f \circ f^{-1}}{3}, \ldots\right)$$

où $(x)_k = x(x-1) \ldots (x-k+1)$ *(ici, dans* $(Df \circ f^{-1})^{-r-k}$, $-r-k$ *est une puissance).*

On en déduit le

Corollaire **(2.4)**. — *Si* $f \in D^r(\mathbf{T}^1)$ *avec* $|Df|_{C^{r-1}} \leq \ell$ *et* $|Df^{-1}|_0 \leq \ell$, *il existe une constante* B_r *ne dépendant que de* r, *telle que :*

$$|D^r(f^{-1})|_0 \leq B_r \ell^{3r-2}.$$

(2.5) Si $f \in D^r(\mathbf{T}^1)$, on posera, pour $r \geq 1$:

$$\|f\|_r = |Df|_{C^{r-1}} + |Df^{-1}|_0.$$

La proposition suivante résulte immédiatement de (2.4) :

Proposition. — Pour $1 \leq r < +\infty$, *il existe une constante* $E_r > 0$ *telle que pour* $f \in D^r(\mathbf{T}^1)$ *vérifiant* $\|f\|_r \leq a$ $(a \geq 1)$, *alors* $\|f^{-1}\|_r \leq E_r a^{3r-2}$.

3. Rappels sur les modules de continuité et sur les fonctions lipschitziennes.

Rappelons que $C^0(\mathbf{T}^n)$ est l'espace des fonctions continues de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}^n$-périodiques.

(3.1) *Module de continuité.*

Soit $\varphi \in C^0(\mathbf{T}^n)$; *le module de continuité* de φ est $w(\delta) = \sup\limits_{|x-y| \leq \delta} |\varphi(x) - \varphi(y)|$. La fonction $\delta \mapsto w(\delta)$ est continue en 0 et $w(0) = 0$ puisque φ est uniformément continue. On a les propriétés :

a) $w(\delta_1 + \delta_2) \leq w(\delta_1) + w(\delta_2)$ si $\delta_1 > 0$ et $\delta_2 > 0$;
b) $w(p\delta) \leq pw(\delta)$ si $p \in \mathbf{N}$ et $\delta > 0$;
c) $w(a\delta) \leq ([a]+1)\, w(\delta)$ si $a \in \mathbf{R}_+$ ($[a]$ désigne la partie entière de a);
d) w est monotone non décroissante et continue.

Exemple. — Si $w(\delta) = O(\delta^\beta)$, $0 < \beta \leq 1$, alors φ est dans $\mathrm{Lip}_\beta(\mathbf{T}^n)$ (*i.e.* si $0 < \beta < 1$, φ est höldérienne d'exposant β et, si $\beta = 1$, φ est dite lipschitzienne).

Convention. — Pour $0 < \beta < 1$, on pose $\mathrm{Lip}_\beta(\mathbf{T}^n) \equiv C^\beta(\mathbf{T}^n)$ (fonctions $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $\mathbf{Z}^n$-périodiques höldériennes d'exposant β, *i.e.* telles que $\sup\limits_{x \neq y} \dfrac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x-y|^\beta} < +\infty$, où, pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $|x| = \sup\limits_i |x_i|$).

(3.2) *Espace* $C^w(\mathbf{T}^n)$.

Soit $w : [0, 1] \to [0, 1]$ continue strictement croissante, telle que $w(0) = 0$, $w(1) = 1$, et, pour $\delta \geq 1$, $w(\delta) = 1$; on suppose que si $\delta \geq 0$ et $\delta' \geq 0$:

$$w(\delta + \delta') \leq w(\delta) + w(\delta').$$

On pose :

$$C^w(\mathbf{T}^n) = \left\{ \varphi \in C^0(\mathbf{T}^n) \;\middle|\; |\varphi|_{C^w} = \sup_{x \neq y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{w(|x-y|)} < +\infty \right\}.$$

On vérifie que $C^w(\mathbf{T}^n)$ est une algèbre de Banach pour la norme $|\ |_0 + |\ |_{C^w}$, définissant ce qu'on appelle la C^w-*topologie*. Évidemment $C^w(\mathbf{T}^n)$ s'identifie à l'ensemble des fonctions $\mathbf{T}^n \to \mathbf{R}$ de « module de continuité » inférieur ou égal à un multiple de w pour la distance standard sur $\mathbf{T}^n$.

Proposition (3.3). — *Si* $f \in D^0(\mathbf{T}^n)$ *est lipschitzienne* (i.e. *s'il existe* $k \geq 1$ *tel que pour tous* $x, y \in \mathbf{R}^n$ *on ait* $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$), *et si* $\varphi \in C^w(\mathbf{T}^n)$, *alors* $\varphi \circ f \in C^w(\mathbf{T}^n)$.

Démonstration. — On a :

$$|\varphi(f(x)) - \varphi(f(y))| \leq ([k]+1)\, |\varphi|_{C^w}\, w(|x-y|). \ \blacksquare$$

Proposition **(3.4).** — *Soient* $\varphi : \mathbf{R}^n \to [a, b]$, $\varphi \in C^w(\mathbf{T}^n)$, *et* $\psi : [a, b] \to \mathbf{R}$, $\psi \in \mathrm{Lip}_1[a, b]$, *alors* $\psi \circ \varphi \in C^w(\mathbf{T}^n)$.

Démonstration. — Il existe $k > 0$ tel que, quels que soient x et $y \in [a, b]$,

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq k\,|x - y|,$$

donc

$$|\psi \circ \varphi(x) - \psi \circ \varphi(y)| \leq k\,|\varphi|_{C^w}\, w(|x - y|). \quad \blacksquare$$

(3.5) Si $\varphi \in C^w(\mathbf{T}^n)$ et $\varphi > 0$, $1/\varphi \in C^w(\mathbf{T}^n)$ (ceci résulte de (3.4)).

(3.6) Soient $1 \leq r < +\infty$ et w un module de continuité comme en (3.2). On pose $D^{r+w}(\mathbf{T}^n) = \{f \in D^r(\mathbf{T}^n) \mid D^r f \in C^w(\mathbf{T}^n)\}$. Il résulte de (2.1), (2.3) et (3.2)-(3.5) que $D^{r+w}(\mathbf{T}^1)$ est un groupe.

Remarques **(3.7)** :

— Soit $C^{w_+}(\mathbf{T}^n) = \{\varphi \in C^w(\mathbf{T}^n) \mid |\varphi(x) - \varphi(y)| = o(w|x - y|)$, si $|x - y| \to 0\}$; $C^{w_+}(\mathbf{T}^n)$ est un sous-espace fermé de $C^w(\mathbf{T}^n)$ pour la C^w-topologie.

— Posons $D^{r+w_+}(\mathbf{T}^n) = \{f \in D^r(\mathbf{T}^n) \mid D^r f \in C^{w_+}(\mathbf{T}^n)\}$, $r \geq 1$; alors $D^{r+w_+}(\mathbf{T}^n)$ est un groupe topologique pour la C^{r+w}-topologie, mais $D^{r+w}(\mathbf{T}^n)$ n'est pas un groupe topologique pour la C^{r+w}-topologie. Le fait que $D^{r+w}(\mathbf{T}^n)$ n'est pas un groupe topologique résulte de la remarque suivante, que le lecteur analysera :

Soit $\varphi \in C^{1/2}(\mathbf{T}^1)$ égale à $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, 1/2]$, C^∞ sur $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ et nulle sur $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$; si $\varepsilon \to 0$, $|\varphi \circ R_\varepsilon - \varphi|_{1/2}$ ne tend pas vers 0.

— $f \in D^0(\mathbf{T}^n)$ est un *homéomorphisme lipschitzien* si f et f^{-1} sont des fonctions lipschitziennes, ce qui est équivalent à ce que l'homéomorphisme induit $\bar{f} : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^n$ et son inverse soient des applications lipschitziennes de $\mathbf{T}^n$ dans $\mathbf{T}^n$ pour la distance standard.

(3.8) Si $0 \leq r < +\infty$ et $\varphi \in C^r(\mathbf{T}^1)$, avec $D^r\varphi \in \mathrm{Lip}_1(\mathbf{T}^1)$ et $\varphi > 0$, alors

$$D^r \operatorname{Log} \varphi \in \mathrm{Lip}_1(\mathbf{T}^1).$$

(Ceci résulte de (2.1) et de (3.2) à (3.5).)

(3.9) Soit $\varphi \in \mathrm{Lip}_1(\mathbf{T}^1)$; φ est alors à variation bornée sur tout intervalle compact (et même absolument continue) ; donc, par un célèbre théorème de Lebesgue, φ est m-presque partout dérivable ($m = dx$ = mesure de Lebesgue). Si $\ell = \sup\limits_{x \neq y} \dfrac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|}$, on a, en tout point $x \in \mathbf{R}$ où φ est dérivable, $|D\varphi(x)| \leq \ell$, donc

$$D\varphi \in L^\infty(\mathbf{T}^1, dx) \quad \text{et} \quad |D\varphi|_{L^\infty} = \ell.$$

Rappelons que, si $\varphi \in \mathrm{Lip}_1(\mathbf{T}^1)$, φ est absolument continue sur tout intervalle compact, et

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x D\varphi(t)\, dt.$$

Le lemme suivant est aussi valable pour les fonctions absolument continues sur tout intervalle compact de $\mathbf{R}$.

Lemme **(3.10)**. — *Soit* $\varphi \in \mathrm{Lip}_1(\mathbf{T}^1)$; *si* $D\varphi$ *est presque partout égale à* $g \in C^0(\mathbf{R})$, *alors* φ *est* C^1 (i.e. $\varphi \in C^1(\mathbf{T}^1)$).

Démonstration. — On a :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x D\varphi(t)\, dt = \varphi(0) + \int_0^x g(t)\, dt,$$

mais $\int_0^x g(t)\, dt$ est C^1 puisque g est continue, donc $\varphi \in C^1(\mathbf{T}^1)$. ■

4. Proposition de Gottschalk et Hedlund.

Rappelons la proposition (14.11) de Gottschalk et Hedlund [1].

Proposition **(4.1)**. — *Soient* X *un espace métrique compact et* f *un homéomorphisme minimal de* X *sur* X (i.e. *l'orbite de tout point de* X *par* f *est dense dans* X). *On se donne*

$$h \in C^0(X) = \{\text{fonctions continues sur } X\}.$$

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1) *il existe* $\varphi \in C^0(X)$ *tel que* $\varphi \circ f - \varphi = h$;

2) *il existe un* $x_0 \in X$ *tel que :*

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \Big| \sum_{i=0}^{n} h \circ f^i(x_0) \Big| < +\infty.$$

Comme nous utiliserons cette proposition, j'inclus une

Démonstration. — 1) *implique* 2), car $\sum_{i=0}^{n-1} h \circ f^i(x_0) = \varphi \circ f^n(x_0) - \varphi(x_0)$. Montrons que 2) *implique* 1).

Soit $F : X \times \mathbf{R} \to X \times \mathbf{R}$ défini par $F(x, t) = (f(x), t + h(x))$; F est un homéomorphisme de $X \times \mathbf{R}$ sur lui-même; considérons aussi, pour $\lambda \in \mathbf{R}$, l'homéomorphisme $R_\lambda(x, t) = (x, t + \lambda)$. On a $F^n(x_0, 0) = (f^n(x_0), \sum_{i=0}^{n-1} h \circ f^i(x_0))$. Il résulte de 2) que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\{F^n(x_0, 0) \mid n \in \mathbf{N}\}$ est un compact non vide invariant par F, et contient donc un ensemble M minimal (pour F) et compact. Soit $p : X \times \mathbf{R} \to X$ la projection; $p(M) = X$, puisque f est minimal sur X. Nous affirmons que M est un graphe de fonction; en effet, supposons que $(x, \varphi(x)) \in M$, et $(x, \varphi(x) + \lambda) \in M$. De la minimalité de M on déduit que $R_\lambda(M) = M$ (puisque $R_\lambda \circ F = F \circ R_\lambda$), donc, pour $n \in \mathbf{N}$, $R_{n\lambda}(M) = M$. Mais, puisque M est compact, λ est nécessairement nul. La fonction $\varphi : X \to \mathbf{R}$ dont M est le graphe est continue (puisque son graphe est compact) et on voit facilement que $\varphi \circ f - \varphi = h$. ■

Proposition **(4.2)**. — *Soient* X *un espace métrique compact,* f *un homéomorphisme minimal de* X *sur* X *et* μ *une mesure de probabilité sur* X, *invariante par* f *et pour laquelle* f *est ergodique.*

On se donne $h \in C^0(X)$, *et on suppose qu'il existe une fonction* $\varphi \in L^\infty(X, \mu)$ *telle que l'on ait* μ*-presque partout :*

(1) $$h = \varphi \circ f - \varphi.$$

Alors φ *est* μ*-presque partout égale à une fonction continue.*

Démonstration. — Soit φ une fonction définie partout. Soit A l'ensemble de μ-mesure nulle, réunion de l'ensemble où (1) n'est pas vraie, et du complémentaire du support essentiel de φ. Soit $B = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} f^n(A)$; B est de μ-mesure nulle; soit donc $x_0 \in X - B$; pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $f^n(x_0) \in X - B$, et de plus :

$$|h(x_0) + \ldots + h \circ f^n(x_0)| = |\varphi \circ f^{n+1}(x_0) - \varphi(x_0)| \leq 2 |\varphi|_{L^\infty}.$$

Donc, d'après la proposition précédente, il existe $\varphi_1 \in C^0(X)$ tel que $h = \varphi_1 \circ f - \varphi_1$, et on a μ-presque partout $(\varphi_1 - \varphi) \circ f = \varphi_1 - \varphi$.

Comme f est μ-ergodique,

$$\varphi - \varphi_1 = C (= \text{constante}) \ \mu\text{-presque partout},$$

donc φ est égale μ-presque partout à $\varphi_1 + C \in C^0(X)$. ■

Exemple. — Si R_α est une translation ergodique de $\mathbf{T}^n$ muni de la mesure de Haar, R_α est minimal (et strictement ergodique), donc satisfait aux hypothèses de (4.2).

5. Formule définissant l'homéomorphisme qui conjugue un difféomorphisme à une translation.

Soit $f \in D^r(\mathbf{T}^n)$, C^r-conjugué à R_α, ce qui s'écrit $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$ avec $g \in D^r(\mathbf{T}^n)$.

(5.1) *Cas où* R_α *est une translation ergodique sur* $\mathbf{T}^n$.

Soit μ l'unique mesure de probabilité invariante par le difféomorphisme $\tilde{f}$ induit par f sur $\mathbf{T}^n$; on a $\mu = g_*^{-1} m$ (m = mesure de Haar). Si $g = \mathrm{Id} + \psi$, $\psi \in C^r(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$, on peut supposer, quitte à composer g avec une translation, que $\int_{\mathbf{T}^n} \psi \, d\mu = 0$. Si $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 1$, posons :

$$S_k(f) = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} (f^i - i\alpha).$$

On a $S_k(f) = \mathrm{Id} + \psi_k$, avec $\psi_k \in C^r(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$.

Remarque **(5.1.1)**. — *Pour* $n = 1$ *et* $f \in D^r(\mathbf{T}^1)$, *on a* $S_k(f) \in D^r(\mathbf{T}^1)$. En effet, si $r = 0$, $S_k(f)$ est strictement monotone, donc $S_k(f) \in D^0(\mathbf{T}^1)$, et, si $r \geq 1$:

$$D(S_k(f)) = \left(\frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} Df^i \right) > 0, \quad \text{donc} \quad S_k(f) \in D^r(\mathbf{T}^1).$$

On a la proposition (voir T. Saito [1] pour le cas des champs de vecteurs) :

Proposition (**5.1.2**). — *Pour* $0 \leq r \leq +\infty$, *si* $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$, *avec* $g \in D^r(\mathbf{T}^n)$, $g = \mathrm{Id} + \psi$, $\int_{\mathbf{T}^n} \psi \, d\mu = 0$, *alors, si* $k \to +\infty$, $S_k(f) - g$ *converge vers* 0 *pour la* C^r-*topologie.*

Démonstration. — Puisque $g \circ f^i = R_{i\alpha} \circ g$ si $i \in \mathbf{N}$, et $g = \mathrm{Id} + \psi$, on a :

$$f^i - \mathrm{Id} - i\alpha = \psi - \psi \circ f^i,$$

soit
$$S_k(f) - \mathrm{Id} = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} (\psi - \psi \circ f^i) = \psi - \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \psi \circ f^i,$$

ou encore
$$S_k(f) - \mathrm{Id} - \psi \equiv S_k(f) - g = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \psi \circ f^i.$$

La proposition résulte du lemme suivant :

Lemme (**5.1.3**). — *Soient* $0 \leq r \leq +\infty$ *et* $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$ *avec* $g \in D^r(\mathbf{T}^n)$ *et* R_α *une translation ergodique sur* $\mathbf{T}^n$, μ *l'unique mesure de probabilité invariante par* f; *pour tout* $\varphi \in C^r(\mathbf{T}^n)$, *si* $k \to +\infty$, $\frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k} \varphi \circ f^i$ *converge vers* $\int_{\mathbf{T}^n} \varphi \, d\mu$ *dans la* C^r-*topologie.*

Démonstration. — On écrit :

$$\frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi \circ f^i = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi \circ g^{-1} \circ R_{i\alpha} \circ g.$$

Comme l'application $\psi \in C^r(\mathbf{T}^n) \mapsto \psi \circ g^{-1} \in C^r(\mathbf{T}^n)$ est linéaire continue (si $g \in D^r(\mathbf{T}^1)$), il suffit de voir que, si $k \to +\infty$, $\frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} (\varphi \circ g^{-1}) \circ R_{i\alpha}$ converge vers

$$\int_{\mathbf{T}^n} \varphi \circ g^{-1}(x) \, dx = \int_{\mathbf{T}^n} \varphi \, d\mu$$

(puisque $g_* \mu = dx \equiv$ mesure de Haar de $\mathbf{T}^n$). Pour $r = 0$, ceci résulte de la stricte ergodicité de R_α, et, pour $r \geq 1$, on applique encore la stricte ergodicité de R_α aux dérivées des sommes de Birkhoff. ■

(5.2) *Cas de* $\mathbf{T}^1$.

On suppose que $f \in D^0(\mathbf{T}^1)$ *et* $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$.

On peut supposer que f n'est pas C^0-conjugué à R_α. Il existe, par II.7.1, $g = \mathrm{Id} + \psi$, avec $\psi \in C^0(\mathbf{T}^1)$ et g monotone non décroissante, telle que $g \circ f = R_\alpha \circ g$. Soit μ l'unique mesure de probabilité invariante par f (unique par II.8.5). On peut supposer que $\int_{\mathbf{T}^1} \psi \, d\mu = 0$.

Proposition. — *Si* $k \to +\infty$, $S_k(f) - g$ *converge uniformément vers* 0.

Démonstration. — On a, de façon analogue à (5.1.2) :

$$S_k(f) - g = -\frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \psi \circ f^i.$$

Par l'unique ergodicité de f (II.8.4), si $k\to+\infty$, $\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\psi\circ f^i$ converge uniformément vers $\int_{\mathbf{T}^1}\psi\,d\mu=0$. ■

(5.3) *Cas des difféomorphismes périodiques.*

Soit $f\in \mathrm{D}^r(\mathbf{T}^n)$ tel que, pour un $q\in\mathbf{N}$, $f^q=\mathrm{R}_p$, $p\in\mathbf{Z}^n$ (sur $\mathbf{T}^n, \bar{f}$ est périodique). Posons :

$$\mathrm{S}_q(f)=g=\sum_{i=0}^{q-1}\frac{f^i-i\alpha}{q},$$

où $\alpha=p/q$, $g=\mathrm{Id}+\varphi$ avec $\varphi\in\mathrm{C}^r(\mathbf{T}^n,\mathbf{R}^n)$. En général, g n'est pas un difféomorphisme de $\mathbf{T}^n$. On a alors la

Proposition **(5.3.1)**. — *On a* $g\circ f=\mathrm{R}_{p/q}\circ g$.

Démonstration. — En effet :

$$g\circ f=\sum_{i=0}^{q-1}\frac{(f^i-i\alpha)\circ f}{q}=\frac{p}{q}+g \quad \text{puisque} \quad f^q=\mathrm{R}_p. \ ■$$

En particularisant à $\mathbf{T}^1$, on obtient :

Corollaire **(5.3.2)**. — *Pour* $0\leq r\leq\omega$, *si* $f\in\mathrm{D}^r(\mathbf{T}^1)$, $\rho(f)=p/q$ *et* $f^q=\mathrm{R}_p$, *alors f est* C^r*-conjugué à* $\mathrm{R}_{p/q}$ (i.e. $f\in\mathrm{O}^r_{p/q}$).

Démonstration. — On voit que g est strictement croissante, et, pour $r\geq 1$:

$$\mathrm{D}g=\sum_i\frac{\mathrm{D}f^i}{q}>0.$$

Comme $g\circ f=\mathrm{R}_{p/q}\circ g$, on a bien $f=g^{-1}\circ\mathrm{R}_{p/q}\circ g$, avec $g\in\mathrm{D}^r(\mathbf{T}^1)$. Par conséquent, pour $0\leq r\leq\omega$:

$$\mathrm{O}^0_{p/q}\cap\mathrm{D}^r(\mathbf{T}^1)=\mathrm{O}^r_{p/q}. \ ■$$

6. Théorèmes de C^r-conjugaison.

(6.1) *Cas de la* C^1*-conjugaison.*

On a le

Théorème **(6.1.1)**. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $f\in\mathrm{D}^1(\mathbf{T}^1)$ *soit* C^1*-conjugué à* R_α *avec* $\alpha=\rho(f)$, *est que* $\mathrm{H}_1(f)=\sup_{n\in\mathbf{Z}}|\mathrm{D}f^n|_0<+\infty$.

Démonstration. — La condition est nécessaire par (1.1). Nous allons voir qu'elle est suffisante. Puisque $\{f^n, n\in\mathbf{N}\}$ est équicontinue par II.9, f est C^0-conjugué à R_α.

Cas $\rho(f)=p/q\in\mathbf{Q}$. — Puisque f est C^0-conjugué à $R_{p/q}$ (*i.e.* $f^q=R_p$), par (5.3.2) f est C^1-conjugué à R_α.

Cas $\rho(f)=\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$. — Par (1.2.4), si $H_1(f)=\ell$, on a, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $1/\ell\leq Df^n\leq\ell$. Il en résulte que $\sup_n|\operatorname{Log} Df^n|_0<+\infty$. Or $\operatorname{Log} Df^n=\sum_{i=0}^{n-1}\operatorname{Log} Df\circ f^i$. Puisque $\bar f$ est C^0-conjugué à R_α, $\bar f$ est un homéomorphisme minimal de $\mathbf{T}^1$. Par la proposition de Gottschalk et Hedlund (4.1), il existe $\psi\in C^0(\mathbf{T}^1)$ tel que :

$$\operatorname{Log} Df=\psi-\psi\circ f.$$

Si ψ est une solution, $\psi+c$ $(c\in\mathbf{R})$ est aussi une solution. Choisissons c tel que :

$$\int_0^1 e^{\psi(x)+c}\,dx=1.$$

Si $h(x)=\int_0^x e^{\psi(t)+c}\,dt$, $h\in D^1(T^1)$, et $Dh\circ f.Df=Dh$, soit $h\circ f=R_\alpha\circ h$ avec $\alpha=\rho(f)$. f est donc bien C^1-conjugué à R_α. ∎

Remarque **(6.1.2)**. — *Supposons que* $\rho(f)=p/q\in\mathbf{Q}$ *et que* $f^q\neq R_p$; *alors* :

$$\lim_{n\to+\infty}|Df^n|_0=+\infty.$$

En effet, soit $f_1=f^q-p$; f_1 a sur $\mathbf{R}$ des points fixes. On a :

$$|Df_1^k|_0=|Df^{kq}|_0 \quad \text{pour} \quad k\in\mathbf{N}.$$

On va montrer d'abord que $\lim_{k\to+\infty}|Df_1^k|_0=+\infty$. Puisque $f_1\neq\mathrm{Id}$, soient $a, b\in\mathbf{R}$, $a<b$, tels que $f_1(x)-x\neq 0$ si $x\in]a,b[$ et $f_1(a)-a=f_1(b)-b=0$ ($f_1-\mathrm{Id}$ s'annule par II.2.4).

Supposons que $f_1-\mathrm{Id}>0$ sur $]a,b[$ (si $f-\mathrm{Id}<0$, on aurait un raisonnement analogue en échangeant a et b). Soient $A>0$ donné, et $c\in\mathbf{R}$, $a<c<b$, tel que $\frac{b-a}{2(c-a)}\geq A$. On détermine k_0 tel que :

$$f_1^{k_0}(c)\geq\frac{b+a}{2},$$

si $k\geq k_0$, on a aussi $f_1^k(c)\geq\frac{b+a}{2}$. Donc, par la formule de la moyenne, on a, pour $k\geq k_0$, $|Df_1^k|_0\geq A$. Comme A est arbitraire, $\lim_{k\to+\infty}|Df_1^k|_0=+\infty$. Si $n\in\mathbf{N}$, $n=kq+r$, avec $k, q\in\mathbf{N}$, $0\leq r<q$. On a donc :

$$Df^n=Df^{kq}\circ f^r.Df^r.$$

Comme $0\leq r<q$, et que $f\in D^1(\mathbf{T}^1)$, on a bien $\lim_{n\to+\infty}|Df^n|_0=+\infty$.

Remarque **(6.1.3)**. — *Si* $f\in D^1(\mathbf{T}^1)$ *et* $\sup_{n\in\mathbf{N}}|Df^n|_0<+\infty$, $H_1(f)<+\infty$.

Il faut montrer que $\operatorname{Inf}_{n\in\mathbf{N}}(\operatorname{Min}_{x\in\mathbf{R}} Df^n(x))>0$. On peut supposer que f est C^0-conjugué à R_α par II.9 et que $\rho(f)=\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$. Soit $\bar f$ le difféomorphisme induit par f sur $\mathbf{T}^1$.

L'adhérence G de $\{\bar{f}^n \mid n \in \mathbf{Z}\} \subset \mathrm{Diff}^0_+(\mathbf{T}^1)$ est un groupe compact; puisque $\bar{f}$ est C^0-conjugué à R_α, il suit que $\{\bar{f}^n \mid n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans G. Pour $k \in \mathbf{Z}$, $\bar{f}^k$ est limite dans la C^0-topologie d'une suite $\bar{f}^{n_i}$, $n_i \in \mathbf{N}$, $n_i \to +\infty$. Mais puisque $\ell = \sup_{n \in \mathbf{N}} |Df^n|_0 < +\infty$, $\bar{f}^n$ est une application lipschitzienne de $\mathbf{T}^1$ dans $\mathbf{T}^1$ (pour la distance $\| \; \|$ sur $\mathbf{T}^1$) de rapport $\leq 2\ell$. Comme limite uniforme de $(\bar{f}^{n_i})$, $\bar{f}^k$ est donc lipschitzienne; donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\bar{f}^{-n}$ est lipschitzienne de rapport 2ℓ, d'où il résulte que $\inf_{n \in \mathbf{N}} (\min_{x \in \mathbf{R}} Df^n(x)) > 0$. On montrerait de façon analogue que $\inf_{n \in \mathbf{N}} (\min_{x \in \mathbf{R}} Df^n(x)) > 0$ implique $H_1(f) < +\infty$.

(6.2) *Majoration de l'homéomorphisme qui conjugue.*

Proposition. — Soit $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$ *avec* $g \in D^r(\mathbf{T}^1)$ *et* $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, $1 \leq r < +\infty$. *Alors on a :*

$$|Dg|_{C^{r-1}} + |Dg^{-1}|_0 \leq (r+1)\ell,$$

avec $\ell = \sup_{n \in \mathbf{Z}} |Df^n|_{C^{r-1}} = H_r(f) < +\infty$.

(On pose $\|g\|_r = |Dg|_{C^{r-1}} + |Dg^{-1}|_0$.)

Démonstration. — Par (5.1.2), si $k \to +\infty$, $S_k(f) = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} (f^i - i\alpha)$ converge dans la C^r-topologie vers $g + c$, où $g = \mathrm{Id} + \psi$, $c = -\int_{\mathbf{T}^1} \psi \, d\mu$, μ étant l'unique mesure de probabilité invariante par $\bar{f}$. On a, pour tout $i \in \mathbf{N}$, $\frac{1}{\ell} \leq Df^i \leq \ell$ et, pour $1 \leq j \leq r$, $|D^j f^i|_0 \leq \ell$; donc $\frac{1}{\ell} \leq DS_k(f) \leq \ell$ et, pour $1 \leq j \leq r$, $|D^j S_k(f)|_0 \leq \ell$.

Il en résulte par passage à la limite que $\frac{1}{\ell} \leq Dg \leq \ell$ et, pour $1 \leq j \leq r$, $|D^j g|_0 \leq \ell$, soit $\|g\|_r = |Dg|_{C^{r-1}} + |Dg^{-1}|_0 \leq (r+1)\ell$. ■

(6.3) *Conjugaison « C^r plus module de continuité ».*

Soient w un module de continuité comme en (3.2), $r \geq 1$, r entier et $D^{r+w}(\mathbf{T}^1)$ l'ensemble des difféomorphismes C^r dont la dérivée r-ième a un module de continuité au plus égal à un multiple de w; sur $C^w(\mathbf{T}^1)$, considérons la semi-norme :

$$|\varphi|_{C^w} = \sup_{\substack{x \neq y \\ |x-y| \leq 1}} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{w(|x-y|)} < +\infty.$$

Soit $H_{r+w} : D^{r+w}(\mathbf{T}^1) \to \overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$f \mapsto H_r(f) + \sup_{n \in \mathbf{N}} |D^r f^n|_{C^w}.$$

Remarque 1 : $H_{r+w} : D^{r+1}(\mathbf{T}^1) \to \overline{\mathbf{R}}$ est semi-continue inférieurement dans la C^{r+1}-topologie.

Remarque 2 : $H_{r+w}(f) < +\infty$ équivaut à $\sup_{n \in \mathbf{N}} |D^r f^n|_{C^w} < +\infty$ puisque, pour tout entier $1 \leq k \leq r$, la fonction $D^k(f - \mathrm{Id})$ prend la valeur zéro.

Proposition **(6.3.1).** — *Soient* $1 \leq r < +\infty$ *et* $f \in \mathrm{D}^{r+w}(\mathbf{T}^1)$; *une condition nécessaire et suffisante pour que f soit* C^{r+w}*-conjugué à* R_α *est que* $\mathrm{H}_{r+w}(f) < +\infty$ (i.e. $\sup_{n \in \mathbf{N}} |\mathrm{D}^r f^n|_{\mathrm{C}^w} < +\infty$).

Démonstration. — La condition est nécessaire par (2.1), (2.3) et (3.4). Montrons que la condition est suffisante.

Puisque la suite $\{f^n\}_{n \in \mathbf{N}}$ est équicontinue, f est C^0-conjugué à R_α.

Si $\rho(f) = p/q$, ceci résulte de (5.3).

Si $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, considérons, pour $k \geq 1$:

$$\mathrm{S}_k(f) = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} (f^i - i\alpha);$$

alors, si $k \to +\infty$, $\mathrm{S}_k(f)$ converge dans la C^0-topologie vers $h \in \mathrm{D}^0(\mathbf{T}^1)$ tel que $f = h^{-1} \circ \mathrm{R}_\alpha \circ h$. Puisque $\mathrm{H}_{r+w}(f) < +\infty$, la suite $(\mathrm{S}_k(f) - \mathrm{Id})_{k \geq 1}$ est équicontinue et bornée dans $\mathrm{C}^r(\mathbf{T}^1)$ pour la C^r-topologie, donc d'adhérence compacte. Il suit que, si $k \to +\infty$, $\mathrm{S}_k(f) \to h$ dans la C^r-topologie et $h \in \mathrm{C}^r(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ (puisque h est la seule valeur d'adhérence possible de la suite $(\mathrm{S}_k(f))$ pour la C^r-topologie, h étant la limite de $(\mathrm{S}_k(f))$ dans la C^0-topologie).

En fait, $h \in \mathrm{C}^{r+w}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, car, si $\ell = \mathrm{H}_{r+w}(f) < +\infty$, on a, pour tous $x, y \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$, $|\mathrm{D}^r f^n(x) - \mathrm{D}^r f^n(y)| \leq \ell w(|x-y|)$, donc :

$$|\mathrm{D}^r \mathrm{S}_k(f)(x) - \mathrm{D}^r \mathrm{S}_k(f)(y)| \leq \ell w(|x-y|).$$

Or, si $k \to +\infty$, $\mathrm{D}^r \mathrm{S}_k(f)$ converge vers $\mathrm{D}^r h$ dans la C^0-topologie. Par passage à la limite simple, on a :

$$|\mathrm{D}^r h(x) - \mathrm{D}^r h(y)| \leq \ell w(|x-y|), \quad \text{donc} \quad \mathrm{D}^r h \in \mathrm{C}^w(\mathbf{T}^1).$$

Le fait que $h \in \mathrm{D}^{r+w}(\mathbf{T}^1)$ résulte du lemme suivant :

Lemme. — *Soit* $f \in \mathrm{D}^1(\mathbf{T}^1)$; *si* $f = h^{-1} \circ \mathrm{R}_\alpha \circ h$, $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, $h \in \mathrm{D}^0(\mathbf{T}^1)$ *et* $h \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, *alors h est un difféomorphisme de classe* C^1.

Démonstration. — On a $\mathrm{D}h \circ f^n . \mathrm{D}f^n = \mathrm{D}h$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Soit $x_0 \in \mathbf{R}$, tel que $\mathrm{D}h(x_0) = 0$; pour tout entier n, $0 = \mathrm{D}h(f^n(x_0))$; or $(f^n(x_0))_{n \in \mathbf{N}}$ est dense (modulo 1) puisque $f = h^{-1} \circ \mathrm{R}_\alpha \circ h$, $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$. Comme $\mathrm{D}h$ est continue, $\mathrm{D}h \equiv 0$, ce qui est contraire à $h \in \mathrm{D}^0(\mathbf{T}^1)$. Il suit par l'absurde que $\mathrm{D}h > 0$, donc $h \in \mathrm{D}^1(\mathbf{T}^1)$. ■

Corollaire **(6.3.2).** — *Soit* $f \in \mathrm{D}^r(\mathbf{T}^1)$, *avec* $r \geq 1$, *telle que* $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ *et* $\mathrm{H}_r(f) < +\infty$; *alors* $f = h^{-1} \circ \mathrm{R}_\alpha \circ h$, *où* $h \in \mathrm{D}^{r-1}(\mathbf{T}^1)$ *et* $\mathrm{D}^{r-1}h$ *est lipschitzienne* (*i.e. dans* $\mathrm{Lip}_1(\mathbf{T}^1)$) (*ce qui implique* $\mathrm{D}^{r-1}h^{-1} \in \mathrm{Lip}_1(\mathbf{T}^1)$ *par* (3.6)).

(6.3.3) Rappelons que si $0 < \beta < 1$, $\mathrm{C}^\beta(\mathbf{T}^1) = \mathrm{Lip}_\beta(\mathbf{T}^1)$. On pose, pour $\varphi \in \mathrm{C}^\beta(\mathbf{T}^1)$:

$$|\varphi|_\beta = \sup_{x \neq y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x-y|^\beta}.$$

Corollaire. — *Soit* $0<\beta<1$; *une condition nécessaire et suffisante pour que* $f \in \mathrm{D}^{1+\beta}(\mathbf{T}^1)$ *soit* $\mathrm{C}^{1+\beta}$*-conjugué à une translation est que* :

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} |\operatorname{Log} \mathrm{D}f^n|_\beta < +\infty.$$

Démonstration. — Il suffit de voir que l'on a $k = \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} |\operatorname{Log} \mathrm{D}f^n|_0 < +\infty$, car alors on applique (6.1.1) et la proposition (6.3.1) (puisque $x \mapsto e^x$ est lipschitzienne sur $[-k, k]$, on a bien, d'après (3.4), $\sup\limits_n |\mathrm{D}f^n|_\beta < +\infty$); or ceci résulte de ce que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\operatorname{Log} \mathrm{D}f^n$ s'annule. ∎

Théorème **(6.3.4).** — *Soit* $f \in \mathrm{D}^{r+\beta}(\mathbf{T}^1)$, *r entier* ≥ 1, $0<\beta<1$; *une condition nécessaire et suffisante pour que f soit* $\mathrm{C}^{r+\beta}$*-conjugué à* R_α $(\alpha = \rho(f))$ *est que* :

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} |\operatorname{Log} \mathrm{D}f^n|_{\mathrm{C}^{r-1+\beta}} < +\infty.$$

Démonstration. — Cela résulte de (6.3.2), (6.3.3) et de la formule de Faa-di-Bruno (2.1) appliquée à $\operatorname{Log} \mathrm{D}f^n$ et $\mathrm{D}f^n = e^{\log \mathrm{D}f^n}$. ∎

(6.4) C^r*-conjugaison et l'invariant* H_r.

On a le

Théorème. — *Soient* $1 \leq r \leq +\infty$ (*r entier*) *et* $f \in \mathrm{D}^r(\mathbf{T}^1)$; *une condition nécessaire et suffisante pour que f soit* C^r*-conjugué à une translation est, pour* $r<+\infty$, *que* $\mathrm{H}_r(f)<+\infty$, *et, pour* $r=+\infty$, *que* $\mathrm{H}_k(f)<+\infty$ *pour tout k.*

Démonstration :

a) *Cas* $\rho(f)=\alpha=p/q$.

Si $\mathrm{H}_r(f)<+\infty$, alors $\mathrm{H}_1(f)<+\infty$ par (6.1.1); f est C^0-conjugué à $\mathrm{R}_{p/q}$, donc, par (5.3), f est C^r-conjugué à $\mathrm{R}_{p/q}$.

b) *Cas* $\rho(f)=\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$ *et* $r<+\infty$.

Si $r=1$, par (6.1.1), f est C^1-conjugué à R_α. Montrons que si c'est vrai pour $r \geq 1$, alors c'est vrai pour $r+1$. Si $f \in \mathrm{D}^{r+1}(\mathbf{T}^1)$ et $\mathrm{H}_{r+1}(f)<+\infty$, par (6.3.2), f est C^r-conjugué à R_α, soit $f = g \circ \mathrm{R}_\alpha \circ g^{-1}$, avec $g \in \mathrm{D}^r(\mathbf{T}^1, 0)$ et $\mathrm{D}^r g \in \operatorname{Lip}_1(\mathbf{T}^1)$. Il suit que $\mathrm{D}^r g$ est m-presque partout dérivable et $\mathrm{D}^{r+1} g \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{T}^1, dx)$. *Montrons que* $\mathrm{D}^r g$ *est en fait* C^1. On a $f \circ g = g \circ \mathrm{R}_\alpha$, soit, puisque $r \geq 1$:

$$\mathrm{D}f \circ g . \mathrm{D}g = \mathrm{D}g \circ \mathrm{R}_\alpha,$$

et

$$\operatorname{Log} \mathrm{D}f \circ g = \operatorname{Log} \mathrm{D}g \circ \mathrm{R}_\alpha - \operatorname{Log} \mathrm{D}g.$$

Il suit de (3.8) que $\mathrm{D}^{r-1} \operatorname{Log} \mathrm{D}g$ est lipschitzienne. On a, puisque g est C^r :

$$\mathrm{D}^{r-1}(\operatorname{Log} \mathrm{D}f \circ g) = \mathrm{D}^{r-1} \operatorname{Log} \mathrm{D}g \circ \mathrm{R}_\alpha - \mathrm{D}^{r-1} \operatorname{Log} \mathrm{D}g.$$

Comme $D^{r-1}\operatorname{Log} Dg$ est lipschitzienne, elle est m-presque partout dérivable et :

$$D^r \operatorname{Log} Dg \in L^\infty(\mathbf{T}^1, m) \qquad (\text{par } (3.9)).$$

On a m-presque partout :

$$D^r(\operatorname{Log} Df \circ g) = (D^r \operatorname{Log} Dg) \circ R_\alpha - D^r \operatorname{Log} Dg.$$

On applique (4.2) (avec $X = \mathbf{T}^1$ et $f = R_\alpha$). On a bien $D^r(\operatorname{Log} Df \circ g) \in C^0(\mathbf{T}^1)$ puisque $f \in D^{r+1}(\mathbf{T}^1)$ et $g \in D^r(\mathbf{T}^1)$, et $D^r \operatorname{Log} Dg \in L^\infty(\mathbf{T}^1, dx)$, donc $D^r \operatorname{Log} Dg$ est m-presque partout égale à une fonction continue; comme $D^{r-1} \operatorname{Log} Dg$ est une fonction lipschitzienne, par le lemme (3.10), $D^{r-1} \operatorname{Log} Dg \in C^1(\mathbf{T}^1)$, et il suit que $g \in D^{r+1}(\mathbf{T}^1)$, donc f est C^{r+1}-conjugué à R_α.

c) $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, $r = +\infty$.

Alors f est C^r-conjugué à R_α par un unique $g \in D^r(\mathbf{T}^1, 0)$ pour tout r (puisque $H_r(f) < +\infty$ pour tout r fini), donc f est C^∞-conjugué à R_α. ■

(6.5) *Conjugaison « C^0 plus module de continuité ».*

On convient dans la suite que $w : [0, 1] \to [0, 1]$ est continue strictement croissante, $w(0) = 0$, $w(1) = 1$; si $\delta' + \delta \leq 1$, et si $\delta \geq 0$, $\delta' \geq 0$, $w(\delta + \delta') \leq w(\delta) + w(\delta')$. On a $0 < \delta < 2w(\delta)$. On suppose que $f \in D^0(\mathbf{T}^1)$; on a la

Définition **(6.5.1)**. — *f est un homéomorphisme de classe C^w si $f - \mathrm{Id} \in C^w(\mathbf{T}^1)$ et $f^{-1} - \mathrm{Id} \in C^w(\mathbf{T}^1)$ (ou ce qui revient au même f et f^{-1} sont de classe C^w).*

Si $w(t) = t^\beta$, $0 < \beta < 1$, on dira plus simplement que f est un homéomorphisme de classe C^β. Si $w(t) = t$, on dira que f est un homéomorphisme lipschitzien.

Proposition **(6.5.2)**. — *Les deux affirmations suivantes sont équivalentes :*

1) *f est un homéomorphisme de classe C^w;*

2) *il existe $C \geq 1$ tel que l'on ait, pour $|x - y| \leq 1$,*

$$w^{-1}\left(\frac{1}{C}|x-y|\right) \leq |f(x) - f(y)| \leq C w(|x-y|).$$

Démonstration. — 1) implique 2) avec $C = \sup(2 + |\varphi|_{C^w}, 2 + |\varphi_{-1}|_{C^w})$ et $f = \mathrm{Id} + \varphi$ et $f^{-1} = \mathrm{Id} + \varphi_{-1}$.

2) implique 1), car $|f(x) - f(y)| \leq C w(|x-y|)$ entraîne $f - \mathrm{Id} \in C^w(\mathbf{T}^1)$;

$$w^{-1}\left(\frac{1}{C}|x-y|\right) \leq |f(x) - f(y)|$$

entraîne de même, en prenant $x = f^{-1}(z)$ et $y = f^{-1}(t)$, que $f^{-1} - \mathrm{Id} \in C^w(\mathbf{T}^1)$. ■

Remarque **(6.5.3)**. — *Si f et g sont des homéomorphismes de classe C^w, $f \circ g$ est de classe C^{w^2}* $(w^2 = w \circ w)$.

(6.5.4) *Si* $f = g^{-1} \circ \mathrm{R}_\alpha \circ g$, *avec* g *de classe* C^w, *on a* $\sup_{n \in \mathbf{Z}} |f^n - \mathrm{Id} - n\rho(f)|_{\mathrm{C}^{w^2}} < +\infty$.

(6.5.5) *Si* f *est* C^1 *et si* w *est un module de continuité* :

$$f \in \mathrm{D}^1(\mathbf{T}^1) \mapsto \mathrm{H}_{w^2}(f) = \sup_{n \in \mathbf{Z}} |f^n - \mathrm{Id} - n\rho(f)|_{\mathrm{C}^{w^2}} \in \overline{\mathbf{R}}$$

est semi-continue inférieurement pour la C^1*-topologie.*

On a le

Théorème **(6.5.6).** — *Soient* f *un homéomorphisme lipschitzien et* w *un module de continuité. Si* $\sup_{n \in \mathbf{Z}} |f^n - \mathrm{Id} - n\rho(f)|_{\mathrm{C}^w} < +\infty$, f *est* C^0*-conjugué à* R_α $(\alpha = \rho(f))$ *par un homéomorphisme de classe* C^w.

Démonstration. — Puisque la suite $\{f^n\}_{n \in \mathbf{N}}$ est équicontinue, f est C^0-conjugué à R_α, soit $f = g^{-1} \circ \mathrm{R}_\alpha \circ g$ avec $g \in \mathrm{D}^0(\mathbf{T}^1)$. Quand $k \to +\infty$, $\mathrm{S}_k(f) = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} (f^i - i\alpha)$ converge dans la C^0-topologie vers g + constante (voir (5.1.2)).

Soient $\ell_1 = \sup_{n \in \mathbf{Z}} |f^n - \mathrm{Id} - n\alpha|_{\mathrm{C}^w} < +\infty$, et $\ell = \ell_1 + 1$. On a, pour tout $n \in \mathbf{Z}$ et pour tous x, y tels que $0 \leq x - y \leq 1$, $w^{-1}\left(\frac{1}{\ell}(x-y)\right) \leq f^n(x) - f^n(y) \leq \ell w(x-y)$, donc :

$$w^{-1}\left(\frac{1}{\ell}(x-y)\right) \leq \mathrm{S}_k(f)(x) - \mathrm{S}_k(f)(y) \leq \ell w(x-y),$$

et, par passage à la limite :

$$w^{-1}\left(\frac{1}{\ell}(x-y)\right) \leq g(x) - g(y) \leq \ell w(x-y)\,;$$

g est bien un homéomorphisme de classe C^w par (6.5.2). ■

Remarque **(6.5.7).** — Par le même raisonnement que dans (6.1.3), f est un homéomorphisme lipschitzien, et, si w est un module de continuité, $\sup_{n \in \mathbf{N}} |f^n - \mathrm{Id} - n\rho(f)|_{\mathrm{C}^w} < +\infty$ implique que $\sup_{n \in \mathbf{Z}} |f^n - \mathrm{Id} - n\rho(f)|_{\mathrm{C}^w} < +\infty$.

(6.5.8) *Critère de* C^β*-conjugaison* $(0 < \beta < 1)$.

Soit f *un homéomorphisme lipschitzien. Si, pour* $0 < \beta < 1$, $\sup_{n \in \mathbf{N}} |f^n - \mathrm{Id} - n\rho(f)|_\beta < +\infty$, *alors* f *est conjugué à* R_α $(\alpha = \rho(f))$ *par un homéomorphisme de classe* C^β.

Démonstration. — Par la remarque (6.5.7), on a $\sup_{n \in \mathbf{Z}} |f^n - \mathrm{Id} - n\alpha|_\beta < +\infty$, et on applique le théorème (6.5.6). ■

Proposition **(6.5.9).** — *Soit* f *un homéomorphisme lipschitzien. Une condition nécessaire et suffisante pour que* f *soit conjugué à* R_α $(\alpha = \rho(f))$ *par un homéomorphisme lipschitzien est que* $\ell = \sup_{n \in \mathbf{N}} |\mathrm{Log}\, \mathrm{D}f^n|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{T}^1, m)} < +\infty$.

Démonstration. — On a alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tous $x, y \in \mathbf{R}$:

$$e^{-\ell}|x-y| \leq |f^n(x)-f^n(y)| \leq e^{\ell}|x-y|,$$

et on raisonne comme dans la démonstration de (6.5.6). ■

(6.6) *Condition nécessaire et suffisante de* C^1*-conjugaison.*

Remarque **(6.6.1)**. — Si $f \in D^1(\mathbf{T}^1)$ est C^1-conjugué à R_α ($\alpha = \rho(f)$) :

$$\lim_{n\alpha \to 0} |Df^n - 1|_0 = 0$$

(*i.e.* pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, si $n \in \mathbf{N}$ vérifie $\|n\alpha\| \leq \eta$, alors $|Df^n - 1|_0 \leq \varepsilon$). En effet, $f^n = h^{-1} \circ R_{n\alpha} h$, et, si $t \to 0 \pmod 1$, $h^{-1} \circ R_t \circ h \to \mathrm{Id}$ dans la C^1-topologie.

(6.6.2) Soit $\alpha \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Posons, pour $\varphi \in C^0(\mathbf{T}^1)$, $\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ R_{i\alpha}$. La proposition suivante est due essentiellement à Veech [1, p. 9] :

Proposition. — *Soit* $\varphi \in C^0(\mathbf{T}^1)$; *une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe* $\psi \in C^0(\mathbf{T}^1)$ *vérifiant* $\psi - \psi \circ R_\alpha = \varphi$ *est que* $\lim_{n\alpha \to 0} |\varphi_n|_0 = 0$.

Démonstration. — La condition est nécessaire et résulte immédiatement de

$$\psi - \psi \circ R_{n\alpha} = \varphi_n.$$

Montrons que la condition est suffisante. Considérons l'application $\{n\alpha\} \to C^0(\mathbf{T}^1)$ définie par $h(n\alpha, \cdot) = \varphi_n(\cdot)$. On a la relation :

$$(1) \qquad h((m+n)\,\alpha, x) = h(n\alpha, x + m\alpha) + h(m\alpha, x).$$

On voit facilement que $\{n\alpha\} \to C^0(\mathbf{T}^1)$ est uniformément continue, donc se prolonge en une application continue $\mathbf{T}^1 \ni y \mapsto h(y) \in C^0(\mathbf{T}^1)$. La relation (1) devient

$$h(y+w, x) = h(y, x+w) + h(w, x).$$

D'où, si $y = \alpha$, $x = 0$ et $\psi(w) = h(w, 0)$,

$$\psi(\alpha + w) - \psi(w) = \varphi(w). \quad ■$$

Proposition **(6.6.3)**. — *Soient* $f \in D^1(\mathbf{T}^1)$, $\alpha = \rho(f)$. *Une condition nécessaire et suffisante pour que* f *soit* C^1*-conjugué à* R_α *est que* :

$$\lim_{n\alpha \to 0} |Df^n - 1|_0 = 0.$$

Démonstration. — La condition est nécessaire par (6.6.1). Montrons qu'elle est suffisante. Par II.9, f est C^0-conjugué à R_α. Si $\alpha = p/q \in \mathbf{Q}$, la proposition résulte de (5.3). Si $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, $f = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$ avec $h \in D^0(\mathbf{T}^1)$. De l'hypothèse, il résulte que

$$\lim_{n\alpha \to 0} |(\operatorname{Log} Df \circ h^{-1})_n|_0 = 0,$$

donc, par la proposition précédente, il existe $\psi_1 \in C^0(\mathbf{T}^1)$ tel que

$$\psi_1 - \psi_1 \circ R_\alpha = \operatorname{Log} Df \circ h^{-1}.$$

En posant $\psi = \psi_1 \circ h$, on conclut que $\psi - \psi \circ f = \operatorname{Log} Df$ et on raisonne alors comme en (6.1). ■

(6.7) *Remarque sur l'équation aux différences finies.*

On se donne $0 \leq r < +\infty$, r entier, $0 \leq \varepsilon < 1$, R_α une translation ergodique sur $\mathbf{T}^n$ et $\varphi \in C^{r+\varepsilon}(\mathbf{T}^n)$ avec $\int_{\mathbf{T}^n} \varphi(x)\, dx = 0$.

Proposition. — Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $\psi \in C^{r+\varepsilon}(\mathbf{T}^n)$ vérifiant $\psi - \psi \circ R_\alpha = \varphi$ est que :

$$\sup_{k \in \mathbf{N}} \Big| \sum_{i=0}^{k-1} \varphi \circ R_{i\alpha} \Big|_{C^{r+\varepsilon}} < +\infty.$$

Démonstration. — La condition est nécessaire par $\sum_{i=0}^{k-1} \varphi \circ R_{i\alpha} = \psi - \psi \circ R_{k\alpha}$.

La condition est suffisante pour $r = 0$ et $\varepsilon = 0$ par (4.1). Si $r \geq 1$ est entier et $\varepsilon = 0$, comme ψ est unique, si on impose que $\int_{\mathbf{T}^n} \psi(x)\, dx = 0$, la proposition résulte par dérivation de (4.1) (en utilisant un argument de séries de Fourier).

Si $\varepsilon > 0$, $0 \leq r < +\infty$ et entier et si $k \geq 1$, $k \in \mathbf{N}$, on pose :

$$\psi_k = \frac{1}{k}\Big(\sum_{i=0}^{k-1} \varphi_i\Big) \quad \text{avec} \quad \varphi_k = \sum_{i=0}^{k-1} \varphi \circ R_{i\alpha}.$$

Alors, si $k \to +\infty$, $\psi_k \to \psi$ dans C^r-topologie par le même raisonnement qu'en (5.1). La proposition résulte du même raisonnement qu'en (6.3.1). ■

V. — RAPPELS D'ARITHMÉTIQUE

Si $\frac{p}{q}\in\mathbf{Q}$, on suppose que $p\in\mathbf{Z}$, et $q\in\mathbf{N}$, et en général que p et q sont premiers entre eux.

Plan :

Commentaire :

Ce chapitre est constitué essentiellement de rappels. Pour des démonstrations, nous renvoyons le lecteur à Cassels [1], Khintchine [1] et Lang [1]. Pour le développement en fraction continue et la théorie ergodique, le lecteur pourra se rapporter à Billingsley [1, chap. 4]. Pour une étude plus détaillée de l'ordre des points $n\alpha$ (mod 1) sur $\mathbf{T}^1$ le lecteur consultera Slater [1] ainsi que les références citées dans cet article. D'ailleurs, le lecteur peut prendre ce chapitre comme une suite d'exercices. Le paragraphe 11, « Catégorie et nombre de rotation », montre que quand on fera au chapitre XII des raisonnements par catégorie de Baire, génériquement dans $F^\infty = D^\infty(\mathbf{T}^1) - \operatorname{Int}\rho^{-1}(\mathbf{Q})$, on obtiendra des nombres de rotation qui sont des nombres de Liouville et on ne pourra absolument rien conclure sur la mesure de Lebesgue de l'ensemble des nombres de rotation ainsi construits. Il se produit la dualité souvent rencontrée en analyse harmonique entre les ensembles résiduels et les ensembles de mesure de Lebesgue pleine.

1. Notations.

Soit, pour $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\in\mathbf{R}^n$ et $k=(k_1, \ldots, k_n)\in\mathbf{Z}^n$:

$$\langle k, \alpha\rangle = \sum_i k_i\alpha_i.$$

On pose $|k| = \sup_i |k_i|$ et, pour $x\in\mathbf{R}$, $||x|| = \operatorname*{Inf}_{p\in\mathbf{Z}} |x+p|$; $||x||$ définit une distance sur $\mathbf{T}^1$.

2. Principe de Dirichlet.

Soit $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\in\mathbf{R}^n$, tel que $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ soient indépendants sur $\mathbf{Q}$ (ce qui signifie que R_α sur $\mathbf{T}^n$ est une translation ergodique).

Alors l'inéquation :

$$\|\langle k, \alpha\rangle\|<\frac{1}{|k|^n}$$

a une infinité de solutions $k\in\mathbf{Z}^n-\{0\}$: il existe une suite $k_i\in\mathbf{Z}^n-\{0\}$ avec $|k_i|\to+\infty$ pour $i\to+\infty$, et vérifiant

$$\|\langle k_i, \alpha\rangle\|<\frac{1}{|k_i|^n}.$$

3. Condition diophantienne.

Définition **(3.1)**. — $\alpha\in\mathbf{R}^n$ *satisfait à une condition diophantienne,* s'il existe $\beta\geq 0$ et $C>0$ tels que pour tout $k\in\mathbf{Z}^n-\{0\}$, on ait :

$$\|\langle k, \alpha\rangle\|\geq\frac{C}{|k|^{n+\beta}}.$$

Définition **(3.2)**. — $\alpha\in\mathbf{T}^n$ satisfait à une condition diophantienne si un relèvement de α à $\mathbf{R}^n$ satisfait à une condition diophantienne (cela ne dépend pas du relèvement).

Le lecteur vérifiera que toutes les propriétés d'approximation par les rationnels que nous étudierons ne dépendent que de la classe modulo $\mathbf{Z}^n$ de $\alpha\in\mathbf{R}^n$.

Définition **(3.3)**. — Soit $\varphi:\mathbf{N}\to]0, +\infty[$, monotone non décroissante; on dit que $\alpha\in\mathbf{R}^n$ est *de type* φ, s'il existe $C>0$ tel que l'inéquation :

$$\|\langle k, \alpha\rangle\|<\frac{C}{|k|^n\varphi(|k|)}$$

ait seulement un nombre fini de solutions. Ce qui est équivalent à ce qu'il existe $C>0$ tel que pour tout $k\in\mathbf{Z}^n-\{0\}$ on ait $\|\langle k, \alpha\rangle\|\geq\dfrac{C}{|k|^n\varphi(|k|)}$.

Définition **(3.4)**. — On dit que $\alpha\in\mathbf{R}^n$ est *de type constant* si α est de type φ pour une fonction φ constante.

Remarques **(3.5)** :

— Si α est de type φ, R_α, sur $\mathbf{T}^n$, est une translation ergodique;

— α satisfait à une condition diophantienne si α est de type $\varphi(t)=t^\beta$, $\beta\geq 0$. En particulier tout nombre de type constant satisfait à une condition diophantienne.

— Si α satisfait à une condition diophantienne, la borne inférieure des β pour lesquelles on a l'inégalité (3.1) n'est pas en général atteinte (voir (4.2) à (4.4)).

— Nous avons choisi $n+\beta$ dans la définition (3.1) par le principe des tiroirs de Dirichlet.

(3.6) $\alpha\in\mathbf{R}^n$ n'est pas de type constant, s'il existe une fonction $\varphi:\mathbf{N}\to\mathbf{R}_+$ croissante, telle que $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)=+\infty$ et que :

$$\|\langle k,\alpha\rangle\|<\frac{1}{|k|^n\varphi(|k|)}$$

ait une infinité de solutions (en effet α est de type constant si $\operatorname*{Inf}\limits_{|k|\neq 0}|k|^n\|\langle k,\alpha\rangle\|>0$).

4. Mesure.

(4.1) L'ensemble des $\alpha\in\mathbf{T}^n$ qui sont de type t^ε pour un $\varepsilon>0$ est de mesure de Haar égale à 1.

(4.2) L'ensemble des $\alpha\in\mathbf{T}^n$ qui sont de type constant est de mesure de Haar nulle.

Définition **(4.3)**. — On dit que $\alpha\in\mathbf{R}^n$ est *du type de Roth* si, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $C_\varepsilon>0$ tel que, pour tout $k\in\mathbf{Z}^n-\{0\}$, on ait $\|\langle k,\alpha\rangle\|\geq\dfrac{C_\varepsilon}{|k|^{n+\varepsilon}}$.

(4.4) Par intersection dénombrable, il résulte de la propriété (4.1), que l'ensemble des vecteurs du type de Roth est de mesure de Lebesgue pleine.

5. Vecteurs de Liouville.

Définition **(5.1)**. — $\alpha\in\mathbf{R}^n$ est *de Liouville* si R_α sur $\mathbf{T}^n$ est une translation ergodique et si α ne satisfait à aucune condition diophantienne; autrement dit, pour tout $i\in\mathbf{N}$, il existe $k_i\in\mathbf{Z}^n-\{0\}$, tel que :

$$\|\langle k_i,\alpha\rangle\|<1/|k_i|^i \quad \text{et} \quad |k_i|\geq 2.$$

(5.2) Soit R l'ensemble des $\alpha\in\mathbf{R}^n$ tels que R_α ne soit pas une translation ergodique sur $\mathbf{T}^n$, ou encore, des $\alpha\in\mathbf{R}^n$ tels que $\pi(\alpha)\in\mathbf{T}^n$ satisfasse à une relation linéaire dans le $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{T}^n$.

Proposition **(5.3)**. — R *est maigre* (*c'est même un* F_σ).

Démonstration. — R est la réunion dénombrable des hyperplans de $\mathbf{R}^n$ d'équation $k_0+\langle k,x\rangle=0$ avec $k_0\in\mathbf{Z}$, $k\in\mathbf{Z}^n-\{0\}$. ■

Proposition **(5.4)**. — *L'ensemble des vecteurs de Liouville de* $\mathbf{R}^n$ *est résiduel* (*c'est un* G_δ *dense*).

Démonstration. — Soit $U_i=\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}^n-\{0\}}\left\{\alpha\in\mathbf{R}^n \mid \|\langle k,\alpha\rangle\|<\dfrac{1}{|k|^i}\right\}$; U_i est un ouvert dense puisqu'il contient $\mathbf{Q}^n$. L'ensemble des vecteurs de Liouville est $(\bigcap\limits_{i\in\mathbf{N}}U_i)-R$. ■

$\mathbf{R}^n$ est donc l'union disjointe de R, qui est maigre et de mesure nulle, de l'ensemble des vecteurs de Liouville, qui est résiduel et de mesure nulle, et de l'ensemble des vecteurs qui satisfont une condition diophantienne, qui est maigre de mesure de Lebesgue pleine.

6. Cas de $\mathbf{T}^1$.

Comme c'est sous la forme classique que nous les utiliserons, nous allons rapidement réécrire des définitions.

(6.1) *Le principe de Dirichlet.* — Si $\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$, l'inéquation $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$, $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$, $(p, q)=1$, a une infinité de solutions.

(6.2) $\alpha \in \mathbf{R}$ est *de type* φ s'il existe $C>0$ tel que $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^2 \varphi(q)}$.

(6.3) $\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$ n'est pas de *type constant* s'il existe $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{R}_+$ croissante, telle que $\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty$ et que l'inéquation $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2 \varphi(q)}$ ait une infinité de solutions $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$, avec $(p, q)=1$, $q \geq 1$.

(6.4) Rappelons le théorème de Khintchine [1].

Théorème. — Soit $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{R}_+$ *monotone croissante.*

— *Si* $\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q\varphi(q)} < +\infty$ (*par exemple* $\varphi(t) = \mathrm{Log}(t+1)^{1+\varepsilon}$), *pour presque tout* $\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$, *l'inéquation* $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2 \varphi(q)}$ *a un nombre fini de solutions.*

— *Si* $\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q\varphi(q)} = +\infty$ (*par exemple* $\varphi(t) = \mathrm{Log}(t+1)$), *pour presque tout* $\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$, *l'inéquation* $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2 \varphi(q)}$ *a une infinité de solutions.*

(6.5) Pour presque tout $\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$, on peut prendre $\varphi(t) = \mathrm{Log}(t+1)$ dans (6.3). Néanmoins, pour tout $\beta > 0$, il existe $\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$ satisfaisant une condition diophantienne, et tel que l'inéquation :

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{\beta+2}}$$

ait une infinité de solutions. Par exemple, 0,1234567891011... (voir Schneider [1]) (voir aussi (7.7)).

(6.6) $\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$ est un nombre de Liouville si pour tout $i \in \mathbf{N}$ il existe $\frac{p_i}{q_i} \in \mathbf{Q}$, $q_i \geq 2$, $(p_i, q_i)=1$, vérifiant :

$$\left|\alpha-\frac{p_i}{q_i}\right| < \frac{1}{q_i^i}$$

(il en résulte que si $i \to +\infty$, $q_i \to +\infty$).

(6.7) Soit α un nombre algébrique de degré d; si $d=2$ alors α est de type constant.

Si $d \geq 3$, par le *théorème de Thue-Siegel-Roth*, α est du type de Roth $\Big($*i.e.* pour tout $\varepsilon>0$, il existe $C_\varepsilon>0$ tel que, pour tout p/q, on ait $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right| \geq \frac{C_\varepsilon}{q^{2+\varepsilon}}\Big)$.

7. Fraction continue (voir Khintchine [1] et Lang [1] par exemple).

Si $\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$, la connaissance du développement en fraction continue de α donne de nombreux renseignements sur les approximations de α par les rationnels.

(7.1) Soit $G : [0, 1] \to [0, 1]$ définie par :

$$G(x)=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]=\frac{1}{x} \pmod 1 \quad \text{si} \quad x \neq 0,$$
$$G(0)=0.$$

Si $\alpha \in [0, 1]$ le développement en fraction continue revient à considérer la suite $\{G^n(\alpha)\}$ des itérées n-ièmes de G.

On pose :

$$a(x)=\begin{cases} \left[\frac{1}{x}\right] & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \infty & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$$

Si $\alpha \in [0, 1]-\mathbf{Q}$, on a, pour tout, n $G^n(\alpha) \neq 0$; on pose alors :

$$a_0=[\alpha]=0$$
$$a_n=a(G^{n-1}(\alpha)) \quad \text{si} \quad n \geq 1;$$

a_i est un entier ≥ 1.

On a :

$$\alpha=[a_0, a_1, a_2, \ldots]=a_0+1/(a_1+1/(a_2+\ldots)).$$

Si $\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$:

$$a_0=[\alpha], \qquad \alpha-[\alpha] \in [0, 1]-\mathbf{Q},$$

et α s'écrit donc de façon unique $\alpha=a_0+1/(a_1+1/(a_2+\ldots))$, les a_i sont appelés les quotients partiels de α; toute suite $(a_i)_{i \in \mathbf{N}}$, d'entiers ≥ 1 est la suite des quotients partiels d'un unique nombre α.

(7.2) *Les réduites.* — Si $\alpha=[a_0, a_1, \ldots]$, les réduites de α sont les rationnels :

$$\frac{p_n}{q_n}=[a_0, a_1, \ldots, a_n]=a_0+1/(a_1+1/(a_2+\ldots 1/(a_{n-1}+1/a_n)\ldots).$$

Par exemple :

$$\frac{p_0}{q_0}=\frac{a_0}{1} \quad \text{et} \quad \frac{p_1}{q_1}=\frac{a_0 a_1+1}{a_1}.$$

Les q_n sont appelés les dénominateurs de réduites ($q_n \geq 1$, $q_n \in \mathbf{N}$).

(7.2.1) p_n et q_n vérifient les relations de récurrence :

$$\begin{cases} p_n=a_n p_{n-1}+p_{n-2} & \text{pour} \quad n\geq 2,\ p_0=a_0,\ p_1=a_0 a_1+1 \\ q_n=a_n q_{n-1}+q_{n-2} & \text{pour} \quad n\geq 2,\ q_0=1,\ q_1=a_1. \end{cases}$$

(7.2.2) On a par récurrence la relation de Lagrange : $q_n p_{n-1}-p_n q_{n-1}=(-1)^n$; les p_n et q_n sont donc premiers entre eux.

(7.2.3) Si $n\geq 1$, on a $q_{n+1}>q_n$ ($q_1\geq q_0=1$), et aussi le

Lemme. — *Si* $n\geq 2$, $q_n\geq 2^{n/2}$.

Démonstration. — Comme $q_n\geq 2q_{n-2}$, le lemme résulte de $q_0=1$ et $q_3\geq 3\geq 2^{3/2}$. ■

(7.3) *Réduites et approximations par les rationnels.* — Si $n\geq 1$ et $0\leq t$, on a (par récurrence) :

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n+t]=\frac{p_n+tp_{n-1}}{q_n+tq_{n-1}}.$$

Or $$\alpha=[a_0, a_1, \ldots, a_n+\mathrm{G}^n(\alpha)],$$

soit $$\alpha=\frac{p_n+\mathrm{G}^n(\alpha)p_{n-1}}{q_n+\mathrm{G}^n(\alpha)q_{n-1}}.$$

Par (7.2.2) : $$\alpha-\frac{p_n}{q_n}=\frac{(-1)^n}{q_n\left(\dfrac{1}{\mathrm{G}^n(\alpha)}q_n+q_{n-1}\right)};$$

or $$a_{n+1}\leq\frac{1}{\mathrm{G}^n(\alpha)}\leq a_{n+1}+1.$$

On a donc les inégalités :

(7.3.1) $$(-1)^n\left(\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right)>0,$$

(7.3.2) $$\frac{1}{q_n(q_n+q_{n+1})}\leq\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|\leq\frac{1}{q_n q_{n+1}}<\frac{1}{q_n^2}.$$

(7.3.3) Il résulte de (7.3.2) que les réduites vérifient $(p_n, q_n)=1$, $q_n \geq 1$, et $|\alpha - p_n/q_n| < 1/q_n^2$, donc déterminent une famille de solutions $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$ $(q \geq 1,\ (p, q)=1)$ de l'inéquation $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < 1/q^2$. Si $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$, $(p, q)=1$, vérifie l'inéquation, $\frac{p}{q}$ s'appelle une *approximation rationnelle* de α. Toute approximation rationnelle de α est soit une réduite, soit de la forme $[a_0, a_1, \ldots, a_n \pm 1]$ (voir Oppenheim [1]).

(7.3.4) Puisque $q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1}$, on a :

$$\frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{a_{n+1} q_n^2}.$$

(7.4) Voici la propriété caractéristique des q_n :

Proposition. — *Soient* $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ *et* (q_n) *la suite des dénominateurs de ses réduites; si* $|q| > 0$ *est entier vérifiant* $|q| < q_{n+1}$, *alors* $\|q\alpha\| \geq \|q_n \alpha\|$. *Réciproquement, les* q_n *sont définies ainsi :* $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$ *et, si* $n \geq 1$, q_{n+1} *est le plus petit entier strictement positif tel que* $\|q_{n+1}\alpha\| < \|q_n \alpha\|$ (*attention, si* $a_1 = 1$, $\|q_0\alpha\| = \|q_1 \alpha\|$!).

Pour la démonstration, voir Lang [1].

Proposition **(7.5)**. — *Si* $n \geq 1$, $|q_n\alpha - p_n| = \|q_n\alpha\|$, *et, si* $n \geq 3$:

$$\|q_{n-2}\alpha\| = a_n \|q_{n-1}\alpha\| + \|q_n \alpha\|.$$

Démonstration. — Si $n \geq 2$, on déduit de (7.2.1), puisque $(-1)^n (q_n\alpha - p_n) > 0$, que:

(7.5.1) $$|q_{n-2}\alpha - p_{n-2}| = a_n |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| + |q_n\alpha - p_n|.$$

Donc $|q_n\alpha - p_n| < |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}|$ et, puisque $|q_n\alpha - p_n| < \frac{1}{q_{n+1}}$, si $n \geq 1$, on a bien $|q_n\alpha - p_n| = \|q_n\alpha\| \leq \frac{1}{2}$.

La relation s'écrit, si $n \geq 3$:

$$\|q_{n-2}\alpha\| = a_n \|q_{n-1}\alpha\| + \|q_n\alpha\|. \quad \blacksquare$$

Inégalité **(7.6)**. — Par (7.5.1) et $|q_n\alpha - p_n| < |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}|$, si $n \geq 2$, on a l'inégalité :

$$2 < \frac{|q_{n-2}\alpha - p_{n-2}|}{|q_n\alpha - p_n|} < (a_n + 1)(a_{n+1} + 1).$$

(L'inégalité $2 < |q_{n-2}\alpha - p_{n-2}| / |q_n\alpha - p_n|$ résulte de $|q_{n-2}\alpha - p_{n-2}| > (a_n + 1)|q_n\alpha - p_n|$.)

(7.7) *Approximation de* $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ *par les rationnels.*

Par (7.3.4) et (7.4), si $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, la connaissance des a_i et des q_i détermine les approximations de α par les rationnels. Ces deux propriétés permettent de construire des α ayant tel type d'approximation.

(7.8) *Exemples.*

(7.8.1) $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ *est de type constant si et seulement si* $\sup a_i < +\infty$.

Démonstration. — Si α est de type constant, $\sup_i a_i < +\infty$ par (7.3.4). Si $\sup_i a_i < +\infty$, on a pour les réduites $\frac{p_n}{q_n}$ de α :

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{C}{q_n^2} \quad \text{avec} \quad C = \operatorname{Inf}_n \frac{1}{a_{n+1}+2} > 0.$$

Si $q_n \leq q < q_{n+1}$, alors par (7.4) $\|q\alpha\| \geq \|q_n\alpha\| \geq \frac{C}{q_n} \geq \frac{C}{q}$. ■

(7.8.2) $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ *est du type de Roth si et seulement si pour tout* $\varepsilon > 0$ *on a, pour* $n \to +\infty$, $a_{n+1} = O(q_n^\varepsilon)$.

Proposition **(7.8.3)**. — $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ *est du type de Roth si et seulement si, pour tout* $\delta > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}/q_n^\delta < +\infty$.

Démonstration. — La condition est suffisante par (7.8.2). Elle est nécessaire, car si $\varepsilon < \delta$ (par (7.2.4)) :

$$\sum_n a_{n+1}/q_n^\delta = O\left(\sum_n 1/q_n^{\delta-\varepsilon}\right) = O\left(\sum_n 1/2^{(\delta-\varepsilon)n/2}\right) = O(1). \quad ■$$

8. Ordre de points $n\alpha$ sur $\mathbf{T}^1$.

(8.1) On se donne $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ et $p/q \in \mathbf{Q}$, $(p, q) = 1$, $q \geq 1$ et vérifiant $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$ (*i.e.* une approximation rationnelle de α).

Les intervalles $\left[\frac{ip}{q}, \frac{ip+1}{q}\right]$, $i = 0, \ldots, q-1$ sont d'intérieurs disjoints deux à deux et (mod 1) ils recouvrent $\mathbf{T}^1$.

Proposition. — *Pour chaque* $i \in \{0, \ldots, q-1\}$, *il y a un et un seul point de la suite* $\{j\alpha (\text{mod } 1)\}$, $j = 1, \ldots, q$ *dans chaque intervalle* $\left[\frac{i}{q}, \frac{i+1}{q}\right]$ (mod 1).

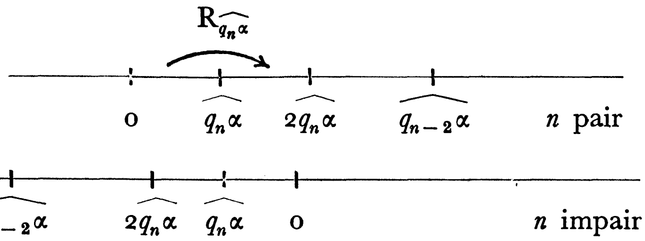
Démonstration. — On a soit $0 < \alpha - \frac{p}{q} < \frac{1}{q^2}$, soit $-\frac{1}{q^2} < \alpha - \frac{p}{q} < 0$. Il suit que, pour $i = 1, \ldots, q$:

$$0 < i\alpha - i\frac{p}{q} < \frac{i}{q^2} \leq \frac{1}{q} \quad \left(\text{resp. } -\frac{1}{q} < i\alpha - \frac{ip}{q} < 0\right),$$

donc $i\alpha \in \left]\frac{ip}{q}, \frac{ip}{q} + \frac{1}{q}\right[$ (mod 1) $\left(\text{resp. } i\alpha \in \left]\frac{ip}{q} - \frac{1}{q}, \frac{ip}{q}\right[\text{ (mod 1)}\right)$. La proposition résulte de ce que les intervalles $\left[\frac{i}{q}, \frac{i+1}{q}\right]$ recouvrent $\mathbf{T}^1$ (mod 1) et ont une longueur égale à $\frac{1}{q}$. ■

(8.2) Soient $\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$, $\dfrac{p_n}{q_n}$ les réduites de α et (a_i) la suite de ses quotients partiels. Posons $\widehat{q_n\alpha}=q_n\alpha-p_n$, $|\widehat{q_n\alpha}|\in[0, 1[$, et si $n\geq 1$, $|q_n\alpha-p_n|=||q_n\alpha||$. On désigne par $[0, \widehat{q_n\alpha}]$ l'intervalle compact de $\mathbf{R}$ déterminé par 0 et $\widehat{q_n\alpha}$.

Proposition. — Si $n\geq 2$, *alors les intervalles* $[0, \widehat{q_n\alpha}]$ *et* $R_{\widehat{q_n\alpha}}[0, \widehat{q_n\alpha}]=[\widehat{q_n\alpha}, 2\widehat{q_n\alpha}]$ *sont d'intérieurs disjoints, et on a* $[0, \widehat{q_n\alpha}]\subset]0, \widehat{q_{n-2}\alpha}[$ *et* $[\widehat{q_n\alpha}, 2\widehat{q_n\alpha}]\subset]0, \widehat{q_{n-2}\alpha}[$. *Les points sont dans le même ordre que sur la figure :*



Figure

Démonstration. — Cela résulte de (7.5) et (7.6), puisqu'on a :

$$|q_{n-2}\alpha-p_{n-2}|=a_n|q_{n-1}\alpha-p_{n-1}|+|q_n\alpha-p_n|>2|q_n\alpha-p_n|$$

et aussi : $$|q_{n-2}\alpha-p_{n-2}|>|q_{n-1}\alpha-p_{n-1}|>|q_n\alpha-p_n|. \quad \blacksquare$$

Proposition **(8.3)**. — *Si* $j\in[0, q_{n+1}[$ *est entier, les intervalles modulo* 1, $\{R_{j\alpha}([0, \widehat{q_n\alpha}])\}_{0\leq j<q_{n+1}}$, *sont modulo* 1 *d'intérieurs disjoints deux à deux.*

Démonstration. — On suppose que $q_{n+1}>1$, sinon il n'y a rien à démontrer. Supposons par l'absurde que les intervalles ne sont pas d'intérieurs disjoints deux à deux. Alors il existe un entier $k\in[0, q_{n+1}[$ tel que :

$$k\alpha\in]j\alpha, j\alpha+\widehat{q_n\alpha}[\pmod 1).$$

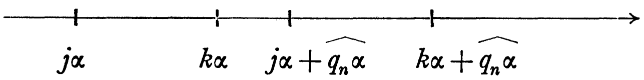


Figure si n est pair

Comme R_α est une isométrie préservant l'ordre sur $\mathbf{T}^1$, $(k-j)\,\alpha\in]0, \widehat{q_n\alpha}[\pmod 1)$, donc $0<||(k-j)\,\alpha||<||\widehat{q_n\alpha}||$; or $||(k-j)\,\alpha||=||\,|k-j|\,\alpha||$ et $0<|k-j|<q_{n+1}$, et ceci est contraire à (7.4). La proposition en résulte par l'absurde. $\blacksquare$

Remarques **(8.4)**. — Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur à Slater [1].

a) On suppose $q_{n+1}>1$. Alors les intervalles modulo 1 :

$$\{R_{j\alpha}[0, \widehat{q_n\alpha}]\}_{0\leq j<q_{n+1}} \quad \text{et} \quad \{R_{k\alpha}([0, \widehat{q_{n+1}\alpha}]\}_{0\leq k<q_n}$$

recouvrent $\mathbf{T}^1$ et de plus leurs intérieurs sont disjoints deux à deux.

b) Les intervalles suivants modulo 1 recouvrent $\mathbf{T}^1$ (mais leurs intérieurs ne sont pas disjoints) : $\{R_{j\alpha}([0, \widehat{2q_n\alpha}])\}_{0\leq j<q_{n+1}}$.

9. Fractions continues et mesure.

(9.1) La transformation $G(x)=\frac{1}{x}$ (mod 1) définie en (7.1) préserve la mesure $v=\frac{1}{\operatorname{Log} 2}\frac{dx}{(1+x)}$ sur $[0, 1[$ (*i.e.* si B est v-mesurable $v(G^{-1}(B))=v(B)$).

Noter que v est équivalente à la mesure de Lebesgue m de $[0, 1[$ et que $L^1(v)=L^1(m)$.

(9.2) G est v-ergodique et même « mixing » (voir Billingsley [1]).

(9.3) Si a est la fonction définie en (7.1) :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} a(G^i(x))=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i(x);$$

comme la fonction $a(x)>0$ est v-mesurable et non dans L^1, il résulte du théorème ergodique que pour presque tout $\alpha\in[0, 1]$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i(\alpha)=+\infty.$$

(9.4) Puisque $\operatorname{Log}(a(x)+1)$ est dans $L^1(v)$, on a pour m-presque tout α :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Log}(a_i(\alpha)+1)=\int_0^1\operatorname{Log}(a(x)+1)dv>0.$$

On conclut aussi du théorème ergodique que si $b\in\mathbf{N}$, pour m-presque tout α :

$$\lim_{b\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ a_i(\alpha)\geq b}}\operatorname{Log}(a_i(\alpha)+1)\Big/\sum_{1\leq i\leq n}\operatorname{Log}(a_i(\alpha)+1)\Big)=0.$$

(9.5) Pour m-presque tout α :

$$\lim_{n\to+\infty} q_n(\alpha)^{1/n}=e^{\pi^2/12\operatorname{Log} 2}\quad(\cong 15, 36\ldots)$$

(voir Billingsley [1]).

(9.6) Le théorème suivant est dû à F. Bernstein et E. Borel (pour la démonstration, voir Billingsley [1]) :

Théorème. — *Soit* $\varphi:\mathbf{N}_+\to\mathbf{R}_+$, *monotone non décroissante.*

— *Si* $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi(i)}=+\infty$ (*par exemple* $\varphi(i)=i\operatorname{Log}(1+i)$), *alors, pour m-presque tout* $\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$, *l'inéquation* $a_i(\alpha)<\varphi(i)$ *a une infinité de solutions.*

— *Si* $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi(i)}<+\infty$ (*par exemple* $\varphi(i)=i\operatorname{Log}(1+i)^{1+\varepsilon}$), *pour m-presque tout* $\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$, *l'inéquation* $a_i(\alpha)<\varphi(i)$ *a un nombre fini de solutions.*

10. Nombres de densité bornée et nombres satisfaisant à une condition A.

Définition (**10.1**). — *Soient* $\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$, *et* a_i *les quotients partiels de* α. *La densité* (*du développement en fraction continue de* α) *est* :

$$d_\alpha = \sup_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} a_{i+1}\right) \in \overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\cup\{+\infty\};$$

si $d_\alpha < +\infty$, α *est dit de densité bornée.*

Exemple de nombres de densité bornée.

Par (7.8.1), si α est un nombre de type constant, alors il est de densité bornée. En particulier tout nombre algébrique de degré 2 est de type constant, donc de densité bornée. Soit $\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$ ayant pour quotients partiels (a_i) avec $a_i = 1$ si $i \neq 2^k$ et $a_{2^k} = k$. Alors α est de densité bornée mais non de type constant.

Par (9.3), les nombres de densité bornée forment un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.

Si α est un nombre de densité bornée, il n'est pas difficile de voir que l'on a :

a) $\sup_n q_n^{1/n} < +\infty$;

b) il existe $C>0$, tel que pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$, $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^2 \operatorname{Log}(q+1)}$.

Définition (**10.2**). — $\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$ *satisfait à une condition* A, *si l'on a* :

$$\lim_{B\to+\infty}\ \limsup_{n\to+\infty}\Big(\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ a_i(\alpha)\geq B}} \operatorname{Log}(a_i(\alpha)+1)\Big/\sum_{1\leq i\leq n}\operatorname{Log}(a_i(\alpha)+1)\Big) = 0.$$

On définit $A = \{\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q} \mid \alpha \text{ satisfait à une condition } A\}$; A(mod 1) sera aussi noté A (si $p \in \mathbf{Z}$, $R_p(A) = A$). Pour simplifier l'écriture, on écrira a_i, étant sous-entendu que a_i dépend de α.

(**10.3**) Par (9.4), A est de mesure de Lebesgue pleine.

Proposition (**10.4**). — *On a* $\alpha \in A$ *si et seulement si* α *vérifie la condition suivante* :

($*$) $\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $B>0$ *tel que, si* $n \to +\infty$, *on ait* :

$$\prod_{\substack{1\leq i\leq n\\ a_i\geq B}} (1 + a_i(\alpha)) = O(q_{n-1}^{\varepsilon}).$$

Démonstration. — Comme on a $q_{n-1} \leq q_n \leq \prod_{1\leq i\leq n}(1+a_i)$, la condition ($*$) implique que $\alpha \in A$.

Réciproquement, si $\alpha \in A$, on choisit B_0 tel que, si $B \geq B_0$:

$$\limsup_{n\to+\infty}\Big(\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ a_i\geq B}} \operatorname{Log}(a_i+1)\Big/\sum_{1\leq i\leq n}\operatorname{Log}(a_i+1)\Big) \leq \frac{1}{2}.$$

Il existe alors $C>0$ tel que pour tout n on ait :

$$\prod_{1\leq i\leq n}(a_i+1)\leq C^n.$$

Il suit de $2^{(n-1)/2}\leq q_{n-1}\leq q_n\leq C^n$ (pour $n\geq 3$), qu'il existe $\delta>0$ tel que l'on ait :

$$\prod_{1\leq i\leq n}(a_i+1)\leq q_{n-1}^{\delta},$$

et il résulte de la définition de $\alpha\in A$ que α satisfait à la condition $(*)$. ■

Proposition **(10.5)**. — *La condition* $\alpha\in A$ *équivaut à la condition suivante :*
Pour tout $\varepsilon>0$, *il existe* $B>0$ *tel que l'on ait, pour* $n\to+\infty$,

$$(*)\qquad \prod_{\substack{(1+a_i)(1+a_{i+1})>B\\ 1\leq i\leq n}}(1+a_i)=O(q_n^{\varepsilon}).$$

Démonstration. — Si $\alpha\in A$, la condition précédente résulte de (10.4) et de l'inégalité :

$$\prod_{\substack{(1+a_i)(1+a_{i+1})>B\\ 1\leq i\leq n}}(1+a_i)\leq\prod_{\substack{(1+a_i)\geq\sqrt{B}\\ 1\leq i\leq n+1}}(1+a_i)^2;$$

en effet, si B est assez grand l'expression est majorée, si $n\to+\infty$, par $O(q_n^{\varepsilon})$. La réciproque résulte de (10.4) et de l'inégalité :

$$\prod_{\substack{1+a_i>B\\ 1\leq i\leq n}}(1+a_i)\leq\prod_{\substack{(1+a_i)(1+a_{i+1})\geq B\\ 1\leq i\leq n}}(1+a_i).\quad ■$$

Corollaire. — *Si* $\alpha\in A$, *pour tout* $c>0$, $c\in\mathbf{R}$, *il existe* $B>0$ *tel que, si* $n\to\infty$, *on ait :*

$$\prod_{\substack{(1+a_i)(1+a_{i+1})\geq B\\ 1\leq i\leq n}}c(a_i+1)(a_{i+1}+1)=O(q_n^{\varepsilon}).$$

(10.6) Par (10.4), si $\alpha\in A$, α est du type de Roth (*i.e.* pour tout $\varepsilon>0$, si $n\to+\infty$, $a_{n+1}=O(q_n^{\varepsilon})$) (voir (7.8.2)).

Noter aussi que, si $\alpha\in A$, on a $\sup_n q_n^{1/n}<+\infty$.

Il n'est pas difficile de voir que tout nombre de densité bornée satisfait à une condition A.

Le nombre e a pour quotients partiels $a_0=2$, et si $n\geq 1$:

$$a_{3n}=a_{3n-2}=1 \quad\text{et}\quad a_{3n-1}=2n \text{ (voir Lang [1])};$$

e est du type de Roth, mais ne satisfait pas à une condition A, car $\sup_n q_n^{1/n}(e)=+\infty$.

(10.7) *Invariance de* $\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ *par l'action de* $GL(2,\mathbf{Z})$.

β est un nombre équivalent à α $\left(i.e.\ \beta=\dfrac{a\alpha+b}{c\alpha+d}\text{ avec }\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in GL(2,\mathbf{Z})\right)$ si et seulement si, à partir d'un certain rang, α et β ont les mêmes quotients partiels (*i.e.* $a_i(\beta)=a_i(\alpha)$, $i\geq n_0$).

Il suit que $\alpha\in A$ (resp. α est de densité bornée) si et seulement si β l'est aussi; α, $-\alpha$ et $1/\alpha$ sont des nombres équivalents.

11. Catégorie et nombre de rotation.

Soient $0 \leq r \leq +\infty$ et $F^r = D^r(\mathbf{T}^1) - \operatorname{Int} \rho^{-1}(\mathbf{Q})$. D'après III (6.2.3), F^r est l'adhérence dans la C^r-topologie de l'ensemble des difféomorphismes de nombre de rotation irrationnel; F^r est un fermé sans point intérieur dans $D^r(\mathbf{T}^1)$.

Proposition (**11.1**). — *Pour* $0 \leq r \leq +\infty$, *l'ensemble des f de* F^r *tels que* $\rho(f)$ *soit un nombre de Liouville est résiduel dans* F^r *pour la* C^r*-topologie (c'est même un* G_δ *dense).*

Démonstration. — $F^r \cap \rho^{-1}(\mathbf{Q})$ est un F_σ sans point intérieur dense dans F^r pour la C^r-topologie (voir III (6.2.3)), et on raisonne comme en (5.4) en utilisant la continuité de ρ. ■

Soient $0 < |a| < \frac{1}{2\pi}$ fixé et $f_b(x) = x + a \sin 2\pi x + b \in D^\omega(\mathbf{T}^1)$.

L'ensemble $K_a = [0, 1] - \operatorname{Int}\{b \mid \rho(f_b) \in \mathbf{Q}\}$ est, par III.5.2, un ensemble de Cantor.

Proposition (**11.2**). — *L'ensemble* $\{b \in K_a \mid \rho(f_b)$ *est un nombre de Liouville*$\}$ *est résiduel dans* K_a *(c'est même un* G_δ *dense).*

Démonstration. — $K_a \cap \{b \mid \rho(f_b) \in \mathbf{Q}\}$ est dénombrable, dense dans K_a, et on raisonne alors comme en (5.4). ■

(**11.3**) Arnold [1] a montré que, si $|a| \to 0$, $m(K_a) =$ mesure de Lebesgue de $K_a \to 0$. (Pour une autre démonstration, voir Herman [1].)

Nous avons montré que, si $|a| < \frac{1}{2\pi}$, $m(K_a) > 0$.

VI. — REMARQUES SUR LE THÉORÈME DE DENJOY ET SUR LES MESURES σ-FINIES INVARIANTES

Plan :

Notation : s.e.d. = sauf sur un ensemble au plus dénombrable (l'ensemble pouvant être vide).

Commentaire :

Les résultats de 1 à 5 sont entièrement dus à Denjoy (voir Denjoy [1], Denjoy [2], et surtout Denjoy [3]). Il nous semble que l'introduction d'une mesure de probabilité invariante simplifie légèrement l'exposition. 1 à 5 sont extrêmement importants pour la suite. L'inégalité de Denjoy-Koksma et l'inégalité de Denjoy interviendront constamment en VII, VIII et IX. La définition d'un homéomorphisme de classe P se trouve en 4. Le fait que le théorème de Denjoy reste valable pour les homéomorphismes de classe P de nombre de rotation irrationnel a déjà été remarqué par Denjoy [3].

Nous utilisons ce fait en 7 en l'appliquant à des homéomorphismes PL. Nous montrons en 7 qu'il existe un homéomorphisme PL de $\mathbf{T}^1$ sans mesure σ-finie invariante absolument continue par rapport à la mesure de Haar m de $\mathbf{T}^1$. Cet exemple a été annoncé dans Herman [5].

Le problème de mesure σ-finie invariante et absolument continue est un problème classique. Le premier exemple (non continu) de bijection $f: [0, 1] \to [0, 1]$ bimesurable pour m et m-non singulière sans mesure σ-finie absolument continue par rapport à m a été donné par D. Ornstein, puis A. Brunel a donné un autre exemple. J. P. Conze me signale que l'on peut rendre l'exemple de Brunel continu en l'interprétant convenablement sur un ensemble de Cantor *ad hoc.* (Pour un exemple de classe C^∞ sur le cercle, cf. Katznelson [1].)

Il nous semble que le problème (7.6) devrait, une fois de plus, convaincre le lecteur que l'étude de la famille $b \mapsto f_b(x) = x + a \sin 2\pi x + b$ est loin d'être terminée.

En (7.7) on étudie la conjugaison lipschitzienne de la famille PL, $\{f_{\beta, b}\}$, à des rotations. On détermine même dans certains cas l'homéomorphisme qui conjugue $f_{\beta, b}$ à R_α $\left(\text{si } \dfrac{\beta}{1+\beta} \in \mathbf{Z}\alpha \pmod 1\right)$. C'est tellement rare que cela mérite d'être signalé. (7.7.3) donne une nouvelle démonstration d'un résultat de Kesten [1].

Je remercie J. P. Conze de m'avoir aidé dans le lemme (7.7.2). Je remercie Ledrappier, Strelcyn et Thouvenot de m'avoir signalé le problème des mesures σ-finies invariantes.

En 6 nous donnerons deux inégalités utiles au chap. IX. Dans ce chapitre $|\ |_{L^1}$ désigne la norme de $L^1(\mathbf{T}^1, dx)$.

1. Proposition de Denjoy.

La proposition suivante est due à Denjoy ([1] et [2]) :

Proposition (**1.1**). — *Soit* $f \in \mathrm{Diff}_+^0(\mathbf{T}^1)$ *avec* $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. *On suppose que :*

1) *f est dérivable sauf sur un ensemble au plus dénombrable (en abrégé* s.e.d.).

2) $\mathrm{D}f = h$ s.e.d., *où* $h : \mathbf{T}^1 \to \mathbf{R}$ *est* $\geq c > 0$ *et réglée. Soit μ l'unique mesure de probabilité invariante par f; on a :*

$$\int_{\mathbf{T}^1} (\mathrm{Log}\, h)\, d\mu = 0.$$

Démonstration du cas où $f \in \mathrm{D}^1(\mathbf{T}^1)$. — Puisque $\mathrm{Log}\, \mathrm{D}f^n = \sum_{i=0}^{n-1} (\mathrm{Log}\, \mathrm{D}f) \circ f^i$,

$$\frac{1}{n} \mathrm{Log}\, \mathrm{D}f^n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (\mathrm{Log}\, \mathrm{D}f) \circ f^i.$$

Comme f est uniquement ergodique (voir II.8.5), si $n \to +\infty$, $\frac{1}{n} \mathrm{Log}\, \mathrm{D}f^n$ converge uniformément vers $a = \int_{\mathbf{T}^1} (\mathrm{Log}\, \mathrm{D}f)\, d\mu$. Si $a > 0$ (resp. $a < 0$), quand $n \to +\infty$, $\mathrm{D}f^n$ converge uniformément vers $+\infty$ (resp. 0). Or

$$\int_{\mathbf{T}^1} \mathrm{D}f^n(x)\, dx = \int_0^1 \mathrm{D}f^n(x)\, dx = 1,$$

d'où nécessairement $a = \int_{\mathbf{T}^1} (\mathrm{Log}\, \mathrm{D}f)\, d\mu = 0$. ■

Remarque. — La même démonstration montre que si $f \in \mathrm{Diff}_+^1(\mathbf{T}^n)$ est un difféomorphisme de classe C^1 uniquement ergodique, de mesure de probabilité invariante μ, alors :

$$\int_{\mathbf{T}^n} \mathrm{Log}\, |\det(\mathrm{D}f)|\, d\mu = 0.$$

Démonstration de (1.1). — D'après Hewitt-Stromberg [1, 18.41 *d*] ou Dieudonné [1, 8.5.1], f et f^{-1} sont absolument continues et f est même un homéomorphisme lipschitzien puisque $\mathrm{D}f$ et $\mathrm{D}f^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{T}^1, dx)$. Donc, pour $n \in \mathbf{Z}$, f^n est absolument continue $\left(\textit{i.e.}\ f^n(x) - f^n(0) = \int_0^x \mathrm{D}f^n(t)\, dt\right)$. La fonction $\mathrm{Log}\, h$ est réglée (rappelons qu'une fonction est dite réglée si en tout point elle a une limite à gauche et droite, elle est alors limite uniforme de fonctions en escalier et réciproquement (voir Dieudonné [1])). Notons qu'en chaque point où h est continue, f est dérivable et qu'en tout point f a une dérivée à gauche $\mathrm{D}_g f$ et une dérivée à droite $\mathrm{D}_d f$. De plus, $\mathrm{Log}\, \mathrm{D}_d f$ est une fonction réglée, avec $\mathrm{Log}\, \mathrm{D}_d f \geq \mathrm{Log}\, c$, et les points de discontinuité de $\mathrm{Log}\, \mathrm{D}_d f$ forment un ensemble au plus dénombrable, donc de μ-mesure nulle. Enfin, $\mathrm{Log}\, \mathrm{D}_d f$ et $\mathrm{Log}\, h$ sont réglées et donc boréliennes, et on a

$$a = \int_{\mathbf{T}^1} \mathrm{Log}\, \mathrm{D}f\, d\mu = \int_{\mathbf{T}^1} \mathrm{Log}\, \mathrm{D}_d f\, d\mu = \int_{\mathbf{T}^1} \mathrm{Log}\, h\, d\mu.$$

Comme f est uniquement ergodique, les mesures $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{f^i(x)}$ convergent vaguement vers μ; par Bourbaki [4, chap. IV, § 5, n° 12], si $n\to+\infty$, $\frac{1}{n}\operatorname{Log} D_d f^n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\operatorname{Log} D_d f\circ f^i$ converge simplement vers a, donc uniformément sur un compact K avec $m(K)\geq 1-\varepsilon$ (m étant la mesure de Lebesgue).

Si $a>0$, puisque f est absolument continue, ceci contredit $\int_{\mathbf{T}^1} D_d f^n(x)\,dm = 1$. Si $a<0$, $-a=\int_{\mathbf{T}^1}\operatorname{Log} Df^{-1}\,d\mu$ avec $-a>0$. Ceci est absurde par le même raisonnement que précédemment. (En fait on peut montrer que, si $n\to+\infty$, $\frac{1}{n}\operatorname{Log} D_d f^n$ converge uniformément sur $\mathbf{T}^1$ vers a.) ■

Remarque. — Pour le rapport avec la convergence uniforme, voir XII (1.5), que le lecteur appliquera à $f\in\operatorname{Diff}_+^\omega(\mathbf{T}^1)$ lorsque f a un unique point fixe (donc est uniquement ergodique).

2. Rappels sur les fonctions à variation bornée.

Soit $\varphi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}$-périodique; φ est dite une fonction *à variation bornée sur* $\mathbf{T}^1$ si φ est à variation bornée sur $[0, 1]$. On note $\operatorname{Var}(\varphi)$ la variation totale de φ sur $[0, 1]$ (*i.e.* $\operatorname{Var}(\varphi)=\operatorname{Var}_{[0,1]}(\varphi)$). Rappelons que la variation totale de φ sur $[0, 1]$ est

$$\operatorname{Var}(\varphi)=\sup_{0\leq x_0\leq\cdots\leq x_n\leq 1}\sum_{i=0}^{n-1}|\varphi(x_{i+1})-\varphi(x_i)|.$$

Si φ est à variation bornée et continue sur $[0, 1]$, sa dérivée au sens des distributions est une mesure sans masse atomique, de norme $\operatorname{Var}(\varphi)$.

On a les lemmes suivants :

Lemme (**2.1**). — *Soit* $\varphi:\mathbf{T}^1\to[a, b]$ *une fonction à variation bornée; soit* $\psi:[a, b]\to\mathbf{R}$ *une fonction lipschitzienne* (i.e. *il existe* k, *tel que pour tous* $x, y\in[a, b]$, *on ait* :

$$|\psi(x)-\psi(y)|\leq k|x-y|);$$

alors $\psi\circ\varphi$ *est à variation bornée et* $\operatorname{Var}(\psi\circ\varphi)\leq k\operatorname{Var}(\varphi)$.

Lemme (**2.2**). — *Soient* $\varphi:\mathbf{T}^1\to\mathbf{R}$ *une fonction à variation bornée et* $f:\mathbf{T}^1\to\mathbf{T}^1$ *un homéomorphisme. Alors* $\varphi\circ f$ *est à variation bornée sur* $\mathbf{T}^1$ *et* $\operatorname{Var}(\varphi\circ f)=\operatorname{Var}(\varphi)$.

Démonstration. — Il est élémentaire de voir que $\operatorname{Var}(\varphi\circ R_\alpha)=\operatorname{Var}(\varphi)$. On peut donc supposer que $f(0)=0$ (quitte à remplacer f par $f\circ R_c$). Puisque $f:[0, 1]\to[0, 1]$ est un homéomorphisme qui est strictement monotone, f définit une permutation de l'ensemble des partitions finies.

La proposition résulte alors de la définition de $\operatorname{Var}(\varphi)$ et de :

$$\sum_{i=0}^{n-1}|\varphi\circ f\circ f^{-1}(x_{i+1})-\varphi\circ f\circ f^{-1}(x_i)|=\sum_{i=0}^{n-1}|\varphi(x_{i+1})-\varphi(x_i)|. \quad ■$$

Notations. — On définit :

$$D^{1+vb}(\mathbf{T}^1)=\{f\in D^1(\mathbf{T}^1) \mid Df\in C^0(\mathbf{T}^1) \text{ est à variation bornée}\},$$

et de façon analogue $\mathrm{Diff}_+^{1+vb}(\mathbf{T}^1)$.

3. Inégalité de Denjoy-Koksma.

Pour $\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$, $\frac{p}{q}\in\mathbf{Q}$ est une approximation rationnelle de α si $p\in\mathbf{Z}$, $q\in\mathbf{N}$, $(p,q)=1$, et $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}$.

Il en est ainsi des réduites $\frac{p_n}{q_n}$ de α. Noter que si $n\to+\infty$, $q_n\alpha\to 0 \pmod 1$.

Théorème **(3.1)** (*Inégalité de Denjoy-Koksma*). — *Soient* $f\in D^0(\mathbf{T}^1)$ *avec* $\rho(f)=\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$, *et* $\frac{p}{q}$ *une approximation rationnelle de* α. *Soit* $\varphi:\mathbf{T}^1\to\mathbf{R}$ *une fonction à variation bornée* (*non nécessairement continue*) *et soit* μ *une mesure de probabilité sur* $\mathbf{T}^1$ *invariante par* $\bar{f}$ (i.e. $\bar{f}_*\mu=\mu$). *Alors, pour tout* $x\in\mathbf{T}^1$, *on a* :

$$\left|\sum_{i=0}^{q-1}\varphi\circ\bar{f}^i(x)-q\int_{\mathbf{T}^1}\varphi\,d\mu\right|\leq \mathrm{Var}(\varphi).$$

Remarque. — L'inégalité de Denjoy-Koksma implique que μ est unique. En effet, si $n\to+\infty$, $\frac{1}{q_n}\sum_{i<q_n}\varphi\circ\bar{f}^i$ converge uniformément vers $\mu(\varphi)$; par conséquent, deux mesures de probabilité invariantes par $\bar{f}$ coïncident sur le sous-espace dense de $C^0(\mathbf{T}^1)$ formé des fonctions continues à variation bornée, donc coïncident.

Démonstration. — Soit $h(x)=\int_0^x d\mu$; h est continue (μ est sans masse atomique), monotone non décroissante et, pour tout $x\in\mathbf{R}$, $h(x+1)=h(x)+1$; $h\circ f=R_\alpha\circ h$. Sur $\mathbf{T}^1$, on a $\bar{h}\circ\bar{f}=R_\alpha\circ\bar{h}$, $\bar{h}:\mathbf{T}^1\to\mathbf{T}^1$ préserve l'ordre et est continue, surjective et de degré 1, et h est injective sauf sur un ensemble de μ-mesure nulle. Si $i\in\mathbf{N}$, $\bar{h}\circ\bar{f}^i=R_{i\alpha}\circ\bar{h}$. Fixons $x\in\mathbf{T}^1$; on a $\bar{h}(\bar{f}^i(x))=i\alpha+\bar{h}(x) \bmod 1$. On choisit $y_0=y_q=\bar{f}^0(x)=x$ et $y_i\in\mathbf{T}^1$ tels que $\bar{h}(y_i)=\frac{i}{q}+\bar{h}(x) \bmod 1$ pour $1\leq i\leq q-1$. On a, pour $0\leq k\leq q-1$:

$$(*)\qquad \int_{[y_k,\,y_{k+1}]}d\mu=\frac{1}{q}=\left(h(y_{k+1})-h(y_k)=\frac{1}{q}\right)$$

et $(*)$ ne dépend pas du choix des y_i.

Il suffit de démontrer l'inégalité pour i variant de 1 à q :

$$\left(i.e.\ \left|\sum_{i=1}^{q}\varphi\circ\bar{f}^i(x)-q\int_{\mathbf{T}^1}\varphi\,d\mu\right|\leq\mathrm{Var}(\varphi)\right)$$

quitte à composer à droite avec $\bar{f}^{-1}$. Par V.8.1, pour chaque $1 \leq i \leq q$, il existe un unique intervalle $I_i = [y_{k_i}, y_{k_i+1}]$ tel que $i\alpha \in I_i$. On a :

$$\left|\sum_{i=1}^{q} \varphi \circ \bar{f}^i(x) - q\int_0^1 \varphi(t)\,d\mu(t)\right| = \left|\sum_{i=1}^{q}\left(\varphi \circ \bar{f}^i(x) - q\int_{I_i} \varphi(t)\,d\mu(t)\right)\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{q} q\left|\int_{I_i} (\varphi \circ \bar{f}^i(x) - \varphi(t))\,d\mu(t)\right| \leq \sum_{i=1}^{q} \sup_{t \in I_i} |\varphi \circ \bar{f}^i(x) - \varphi(t)| \leq \sum_{i=1}^{q} \mathrm{Var}_{I_i}(\varphi) \leq \mathrm{Var}(\varphi).$$

Comme x est arbitraire dans $\mathbf{T}^1$, l'inégalité est démontrée. ■

Remarque. — On désigne par $D_n(\alpha)$ la discrépance de α (voir Kuipers et Niederreiter [1]); il n'est pas difficile de montrer, en suivant Denjoy [3], que si $\varphi : \mathbf{T}^1 \to \mathbf{R}$ est à variation bornée, $f \in D^0(\mathbf{T}^1)$, et $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, on a :

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ \bar{f}^i(x) - n\int_{\mathbf{T}^1} \varphi\,d\mu\right| \leq \mathrm{Var}(\varphi)(nD_n(\alpha)).$$

De plus, si $\frac{p}{q}$ est une approximation rationnelle de α, $qD_q(\alpha) < 2$ par un argument analogue à V.8.1. Si f est C^0-conjugué à R_α, c'est précisément, par changement de variable, l'inégalité de Koksma.

(3.2) Soit $\varphi : \mathbf{T}^1 \to \mathbf{R}$ continue, et w son module de continuité. On a, pour tous x, y dans $\mathbf{T}^1$, $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq w(|x-y|)$.

Proposition. — Soient $\varphi : \mathbf{T}^1 \to \mathbf{R}$ *continue, w son module de continuité, et $\frac{p}{q}$ une approximation rationnelle de* $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$. *On a :*

$$\left|\frac{1}{q}\sum_{i=0}^{q-1} \varphi \circ R_{i\alpha} - \int_{\mathbf{T}^1} \varphi(x)\,dx\right|_0 \leq w\left(\frac{1}{q}\right).$$

La démonstration est presque identique à (3.1) (voir aussi Kuipers et Niederreiter [1, p. 146]).

4. Inégalité de Denjoy et classe P.

Définition de la classe P **(4.1)**. — Soit $f \in D^0(\mathbf{T}^1)$: on dit que *f est un homéomorphisme de classe* P si f est dérivable sauf sur un ensemble au plus dénombrable et si sa dérivée est égale, sauf sur un ensemble au plus dénombrable, à une fonction **Z**-périodique $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, minorée par un réel $a > 0$, et à variation bornée sur $[0, 1]$.

Remarques **(4.2)**. — 1) Si $f \in D^0(\mathbf{T}^1)$ est de classe P, alors par Hewitt-Stromberg [1, 18.41 *d*], f et f^{-1} sont absolument continues et f est un homéomorphisme lipschitzien (f et f^{-1} sont des applications lipschitziennes) puisque Df et $Df^{-1} \in L^\infty(\mathbf{T}^1, dx)$.

2) Si f est de classe P, f^{-1} l'est aussi.

3) Les homéomorphismes de classe P forment un groupe.

4) $\operatorname{Log} h$ est à variation bornée et on pose :

$$V = \operatorname{Var}(\operatorname{Log} Df) = \operatorname*{Inf}_{\substack{h = Df \\ \text{s.e.d.}}} (\operatorname{Var}(\operatorname{Log} h)).$$

5) $f \in D^0(\mathbf{T}^1)$ est un homéomorphisme de classe P si et seulement si, pour tout $x \in \mathbf{R}$, f a une dérivée à gauche $D_g f(x)$ et la fonction $\operatorname{Log} D_g f$ est à variation bornée sur $[0, 1]$.

Exemples **(4.3)**. — 1) Si $f \in D^1(\mathbf{T}^1)$ et si Df est à variation bornée, f est de classe P.

2) Si f est un homéomorphisme PL de $\mathbf{T}^1$, f est de classe P (PL = continue et linéaire par morceaux en nombre fini).

Proposition **(4.4)** (*Inégalité de Denjoy*). — *Soient* $f \in D^0(\mathbf{T}^1)$ *de classe* P, $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, $\frac{p_n}{q_n}$ *les réduites de* α. *Sauf sur un ensemble au plus dénombrable, on a* :

$$e^{-V} \leq Df^{\pm q_n} \leq e^V \quad \textit{avec} \quad V = \operatorname{Var}(\operatorname{Log} Df).$$

Démonstration. — On a s.e.d. :

$$\operatorname{Log} Df^n = \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{Log} Df \circ f^i = \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{Log} h \circ f^i.$$

D'après la proposition (1.1) :

$$\int_{\mathbf{T}^1} \operatorname{Log} Df \, d\mu \equiv \int_{\mathbf{T}^1} \operatorname{Log} h \, d\mu = 0$$

(en fait cela résulte aussi de l'inégalité de Denjoy-Koksma 3).

Par l'inégalité de Denjoy-Koksma, on a :

$$\sup_{x \in \mathbf{T}^1} \left| \sum_{i=0}^{q_n - 1} \operatorname{Log} h \circ f^i(x) - q_n \int_{\mathbf{T}^1} \operatorname{Log} h \, d\mu \right| \leq \operatorname{Var}(\operatorname{Log} Dh).$$

On a donc sauf sur ensemble au plus dénombrable :

$$-V \leq \operatorname{Log} Df^{q_n} \leq V,$$

soit : $\quad e^{-V} \leq Df^{q_n} \leq e^V$ s.e.d.;

comme $Df^{-q_n} = \dfrac{1}{Df^{q_n} \circ f^{-q_n}}$, on a bien l'inégalité. ∎

Corollaire **(4.5)**. — *Soient* $f \in D^0(\mathbf{T}^1)$ *de classe* P, $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ *et* $\frac{p_n}{q_n}$ *les réduites de* α, *pour tous* $x, y \in \mathbf{R}$, *on a l'inégalité* :

$$e^{-V} |x - y| \leq |f^{q_n}(x) - f^{q_n}(y)| \leq e^V |x - y|.$$

Démonstration. — Immédiate par l'inégalité de Denjoy (4.4) et le fait que f et f^{-1} sont absolument continues. ∎

5. Le théorème de Denjoy.

(5.1) m désigne la mesure de Haar de $\mathbf{T}^1$. Un homéomorphisme $f : \mathbf{T}^1 \to \mathbf{T}^1$ est m-non singulier si $m(\mathrm{A}) = 0$ équivaut à $m(f(\mathrm{A})) = 0$. Autrement dit, f et f^{-1} laissent la mesure m quasi-invariante. Si $f : \mathbf{T}^1 \to \mathbf{T}^1$ est un homéomorphisme lipschitzien (*i.e.* il existe $k > 0$ tel que $\frac{1}{k}\|x-y\| \leq \|f(x)-f(y)\| \leq k\|x-y\|$), alors f est m-non singulier. Tout homéomorphisme de $\mathbf{T}^1$ de classe P est m-non singulier.

Définition **(5.2)**. — Un homéomorphisme f de $\mathbf{T}^1$ m-non singulier est *m-incompressible* si, pour aucun ensemble A m-mesurable avec $m(\mathrm{A}) > 0$ les ensembles $f^n(\mathrm{A})$, $n \in \mathbf{N}$, ne sont disjoints deux à deux (m-presque partout). On a la proposition de Denjoy [3] :

Proposition **(5.3)**. — *Soit* $f \in \mathrm{Diff}^0_+(\mathbf{T}^1)$ *un homéomorphisme de classe* P *avec*

$$\rho(f) = \alpha \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

Alors f est m-incompressible.

Démonstration. — Soient $\frac{p_n}{q_n}$ les réduites de α. Soit $\mathrm{A} \subset \mathbf{T}^1$, m-mesurable et errant pour f (*i.e.* les ensembles $(f^n(\mathrm{A}))_{n \in \mathbf{N}}$ sont disjoints deux à deux m-presque partout).

On a donc $\sum_{n=0}^{\infty} m(f^n(\mathrm{A})) < +\infty$. Or, par (4.4), $m(f^{q_n}(\mathrm{A})) \geq e^{-\mathrm{V}} m(\mathrm{A})$; comme $q_n \to +\infty$ avec n, il suit que $m(\mathrm{A}) = 0$. ■

Le théorème suivant est dû à Denjoy ([2], [3], 1932 et 1946) :

Théorème **(5.5)**. — *Si* $f \in \mathrm{Diff}^0_+(\mathbf{T}^1)$ *est de classe* P, *avec* $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, *$f$ est* C^0-*conjugué à* R_α.

Démonstration. — Par l'absurde. Soit μ l'unique mesure de probabilité invariante par f; $h(x) = \int_0^x d\mu$ est continue non décroissante et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h(x+1) = h(x) + 1$. On a, sur $\mathbf{T}^1$, $\bar{h} \circ f = \mathrm{R}_\alpha \circ \bar{h}$; $\bar{h}$ est un homéomorphisme si et seulement si $\mathrm{supp}(\mu) = \mathbf{T}^1$. Si $\mathrm{supp}(\mu) \neq \mathbf{T}^1$, f n'est pas C^0-conjugué à R_α, puisque $\mathrm{supp}(\mu)$ est un fermé invariant par f et que f n'est donc pas minimal. Si $\mathrm{supp}(\mu) \neq \mathbf{T}^1$, l'ouvert $\mathrm{U} = \mathbf{T}^1 - \mathrm{supp}(\mu)$ est invariant par f; soit I_0 une composante connexe de $\mathrm{U} \neq \emptyset$. Les intervalles $f^n(\mathrm{I}_0)$ pour $n \in \mathbf{Z}$ sont deux à deux disjoints (*i.e.* I_0 est errant ou wandering) puisque f est sans point périodique ; f n'est donc pas m-incompressible, ce qui est contraire à (5.3). ■

Remarques **(5.6)**. — 1) La démonstration du théorème de Denjoy se faisant par l'absurde, on ne peut rien dire de l'homéomorphisme h qui conjugue f à R_α (*i.e.* $f = h^{-1} \circ \mathrm{R}_\alpha \circ h$).

Problème. — *Si f est de classe* P *avec* $f = h^{-1} \circ \mathrm{R}_\alpha \circ h$, *est-ce que les modules de continuité de h et h^{-1} ne dépendent que de la nature arithmétique de α* (i.e. *des approximations de α par les rationnels*) ?

Nous donnerons en VII.4 une réponse partielle à cette question. Voir aussi XII.2.2.

2) Toujours sous les mêmes hypothèses que le théorème de Denjoy, par (4.5) $(f^{q_n})_{n\in\mathbf{N}}$ est une famille équicontinue (avec $q_n\to+\infty$ si $n\to+\infty$) et on pouvait aussi appliquer II.9. Ceci implique par X.1.1 que

$$\mathrm{K}_0(f)=\operatorname*{Inf}_{n\geq 1} d(f^n, \mathrm{Id})=0$$

avec $d(f^n, \mathrm{Id})=\operatorname*{Max}_{x\in\mathbf{T}^1} \|f^n(x)-x\|$. On montrera en VIII.2.1 qu'alors il existe une constante C dépendant de f telle que :

$$d(f^{q_n}, \mathrm{Id})\leq \mathrm{C}\lambda^n \quad \text{avec} \quad \lambda=(1+e^{-\mathrm{V}})^{-1/2}<1.$$

3) D'après XII.2.3, a tel que $0<|a|<\dfrac{1}{2\pi}$ étant fixé, il existe b tel que si $f_b=x+a\sin 2\pi x+b$, on ait $\alpha=\rho(f_b)\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ et $\sup_{n\in\mathbf{Z}}|\mathrm{D}f_b^n|_0=\mathrm{H}_1(f_b)=+\infty$ (*i.e.* f_b n'est pas C^1-conjugué à R_α, mais est C^0-conjugué à R_α par le théorème de Denjoy).

Donc, l'inégalité de Denjoy (4.4) est qualitativement la meilleure, en ce sens qu'il faut en général se limiter à la sous-suite (q_n).

Rappelons que $\mathrm{H}_1(f)<+\infty$ est équivalent à ce que f soit C^1-conjugué à une rotation.

4) Pour des remarques sur le théorème de Denjoy dans le cas où on remplace C^1 plus « à variation bornée » par C^1 plus « module de continuité », voir X.4.

6. Une inégalité.

Notations **(6.1)**. — On se donne $f\in\mathrm{D}^0(\mathbf{T}^1)$, $\rho(f)=\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$; soient $\dfrac{p_n}{q_n}$ les réduites de α. On pose $\hat{f}^{q_n}=f^{q_n}-p_n$ et $m_{q_n}=\operatorname*{Min}_{x\in\mathbf{R}}|\hat{f}^{q_n}(x)-x|>0$. On note $[x,\hat{f}^{q_n}(x)]$ l'intervalle compact déterminé par x et $\hat{f}^{q_n}(x)$.

(6.2) L'inégalité suivante est due à A. Finzi.

Proposition. — Si $f\in\mathrm{D}^{1+vb}(\mathbf{T}^1)$ et si z_1 et z_2 sont dans $[z,\hat{f}^{q_n}(z)]$, on a, pour $0\leq i<q_{n+1}$:

$$e^{-\mathrm{V}}\leq\frac{\mathrm{D}f^i(z_1)}{\mathrm{D}f^i(z_2)}\leq e^{\mathrm{V}} \quad \textit{avec} \quad \mathrm{V}=\mathrm{Var}(\mathrm{Log}\,\mathrm{D}f).$$

Démonstration. — On a :

$$|\mathrm{Log}\,\mathrm{D}f^i(z_1)-\mathrm{Log}\,\mathrm{D}f^i(z_2)|\leq\sum_{j=0}^{i-1}|\mathrm{Log}\,\mathrm{D}f(f^j(z_1))-\mathrm{Log}\,\mathrm{D}f(f^j(z_2))|.$$

Puisque f est C^0-conjugué à R_α par le théorème de Denjoy, il résulte de V.8.3 que les intervalles (modulo 1) $\{f^j([z,\hat{f}^{q_n}(z)])\}_{0\leq j<q_{n+1}}$ sont d'intérieurs disjoints deux à deux; par conséquent :

$$|\mathrm{Log}\,\mathrm{D}f^i(z_1)-\mathrm{Log}\,\mathrm{D}f^i(z_2)|\leq\mathrm{V}=\mathrm{Var}(\mathrm{Log}\,\mathrm{D}f). \quad \blacksquare$$

Proposition **(6.3)**. — *Si* $f \in D^{1+\mathrm{vb}}(\mathbf{T}^1)$ *et* $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, *on a l'inégalité* :

$$\sup_{0 \leq i < q_{n+1}} |Df^i|_0 \leq e^V |f^{q_n} - \mathrm{Id} - p_n|_0 / m_{q_n}.$$

Démonstration. — Soient y_n et j $(0 \leq j < q_{n+1})$ tels que :

$$Df^j(y_n) = \sup_{0 \leq i < q_{n+1}} |Df^i|_0.$$

D'après la formule des accroissements finis :

$$(\hat{f}^{q_n} - \mathrm{Id}) \circ f^j(y_n) = (f^j \circ \hat{f}^{q_n} - f^j)(y_n) = Df^j(z_n) \cdot (\hat{f}^{q_n}(y_n) - y_n)$$

pour un $z_n \in [y_n, \hat{f}^{q_n}(y_n)]$.

On a :

$$Df^j(z_n) = |(\hat{f}^{q_n} - \mathrm{Id}) \circ f^j(y_n)| / |\hat{f}^{q_n}(y_n) - y_n| \leq |f^{q_n} - \mathrm{Id} - p_n|_0 / m_{q_n}$$

et on conclut par (6.2). ■

7. Sur les mesures σ-finies invariantes.

Rappel **(7.1)**. — m est la mesure de Haar de $\mathbf{T}^1$. La définition suivante montre que la m-ergodicité ne dépend que des ensembles de m-mesure nulle.

Définition. — Si f est m-non singulier, f est dit *m-ergodique* si pour tout $A \subset \mathbf{T}^1$ m-mesurable, invariant par f (*i.e.* tel que $f(A) = A$ m-presque partout), on a $m(A) = 0$ ou 1.

— Une condition nécessaire est évidemment que f soit m-incompressible et que $\rho(f) \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$.

— Soit f un homéomorphisme lipschitzien. Si $\varphi : \mathbf{T}^1 \to \mathbf{R}$ est m-mesurable, et si $\varphi_1 = \varphi$ m-presque partout, alors $\varphi \circ f = \varphi_1 \circ f$ m-presque partout; de plus, $\varphi \in L^1(\mathbf{T}^1, m)$ si et seulement si $\varphi \circ f \in L^1(\mathbf{T}^1, m)$. En effet, on a :

$$|\varphi \circ f|_{L^1} = \int_{\mathbf{T}^1} |\varphi \circ f(x)|\, dx = \int_{\mathbf{T}^1} |\varphi \circ f(x)| \left| Df(x) \frac{1}{Df(x)} \right| dx \leq |\varphi|_{L^1} \left| \frac{1}{Df} \right|_{L^\infty},$$

$\left| \dfrac{1}{Df} \right|_{L^\infty} < +\infty$ puisque f est un homéomorphisme lipschitzien.

(7.2) *Mesure σ-finie invariante.*

Soit f un homéomorphisme lipschitzien de $\mathbf{T}^1$. Rappelons que, par le théorème de Radon-Nikodym, f a une mesure invariante σ-finie, positive et absolument continue par rapport à m, si et seulement s'il existe $\varphi : \mathbf{T}^1 \to \mathbf{R}_+$, m-mesurable, telle que, si $A = \varphi^{-1}(]0, +\infty[)$, on ait $m(A) > 0$ et :

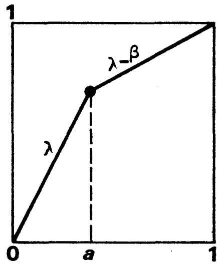
$$\boxed{\varphi \circ f . Df = \varphi \ m\text{-presque partout.}}$$

Remarquons que, puisque f est un homéomorphisme lipschitzien, $f(A) = A$ m-presque partout.

(7.3) *Un exemple d'homéomorphisme* PL.

Soient $\lambda>1$ fixé et $\beta>0$ deux paramètres réels. On pose, pour $x\in[0,1]$:

$$f_\beta(x)=\begin{cases}\lambda x & \text{si} \quad 0\leq x\leq a,\\ \lambda^{-\beta}(x-1)+1 & \text{si} \quad a\leq x\leq 1,\end{cases}$$



avec $\lambda a=\lambda^{-\beta}(a-1)+1$.

Pour $x\in[0,1]$ et $n\in\mathbf{Z}$, on pose $f_\beta(x+n)=f_\beta(x)+n$; $f_\beta\in\mathrm{D}^0(\mathbf{T}^1)$ est un homéomorphisme PL. Soit :

$$f_{\beta,b}=\mathrm{R}_b\circ f_\beta=f_\beta+b$$

et $\bar{f}_{\beta,b}$ l'homéomorphisme PL induit sur $\mathbf{T}^1$. Quand b varie dans $\mathbf{R}$, $\rho(f_{\beta,b})$ est continue monotone non décroissante et $\rho(f_{\beta,b+1})=\rho(f_{\beta,b})+1$, donc $\rho(f_{\beta,b})$ prend toutes les valeurs réelles.

Théorème **(7.4)**. — *Si* $\beta=1$, *soit* $b\in\mathbf{R}$ *tel que* $\alpha=\rho(\bar{f}_{1,b})\in\mathbf{T}^1-(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$; *alors* $\bar{f}_{1,b}$ *n'a pas de mesure* σ*-finie invariante absolument continue par rapport à la mesure de Haar* m.

Pour démontrer le théorème, nous avons besoin des lemmes suivants :

(7.4.1) Supposons que $\bar{f}_{\beta,b}$ ait une mesure σ-finie invariante; d'après (7.2), il existe une solution non triviale $\varphi:\mathbf{T}^1\to\mathbf{R}_+$ de

$$\varphi\circ\bar{f}_{\beta,b}\,\mathrm{D}\bar{f}_{\beta,b}=\varphi,$$

m mesurable, et telle que, si $\mathrm{A}=\varphi^{-1}(]0,+\infty[)$, on ait $m(\mathrm{A})>0$; de plus, A est invariant par $\bar{f}_{\beta,b}$. Soit :

$$g(x)=\begin{cases}\exp\left(2\pi i\dfrac{\operatorname{Log}\varphi(x)}{(1+\beta)\operatorname{Log}\lambda}\right) & \text{si} \quad x\in\mathrm{A}\\ 0 & \text{si} \quad x\in\mathbf{T}^1-\mathrm{A}.\end{cases}$$

g est m-mesurable, $g\in\mathrm{L}^\infty(\mathbf{T}^1,m,\mathbf{C})$ et $|g|_{\mathrm{L}^1}=m(\mathrm{A})$ (si $x\in\mathrm{A}$, $g(x)\in\mathbf{S}^1\subset\mathbf{C}$).

Lemme (7.4.2). — *On a* $g\circ\bar{f}_{\beta,b}=e^{\frac{2\pi i\beta}{1+\beta}}.g$, *m-presque partout.*

Démonstration. — Comme A est invariant par $\bar{f}_{\beta,b}$ (et m-mesurable), $\mathbf{T}^1-A$ est invariant par $\bar{f}_{\beta,b}$ et on a bien (7.4.2) pour m-presque tout $x\in\mathbf{T}^1-A$. Si $x\in A$,

$$(*)\qquad \operatorname{Log}\varphi\circ\bar{f}_{\beta,b}(x)+\operatorname{Log} D\bar{f}_{\beta,b}(x)=\operatorname{Log}\varphi(x)\quad m\text{-presque partout.}$$

Or, sauf en deux points :

$$\frac{\operatorname{Log} D\bar{f}_{\beta,b}(x)}{(1+\beta)\operatorname{Log}\lambda}=\chi_{[0,a]}-\frac{\beta}{1+\beta},$$

où $\chi_{[0,a]}$ est la fonction caractéristique de $[0,a]$ $(\lambda a=\lambda^{-\beta}(a-1)+1)$.

Donc, pour m-presque tout $x\in A$, $(*)$ implique que

$$g\circ\bar{f}_{\beta,b}(x)=e^{\frac{2\pi i\beta}{1+\beta}}g(x).\quad\blacksquare$$

Lemme (7.4.3). — *Soit* $f\in\operatorname{Diff}^0_+(\mathbf{T}^1)$ *un homéomorphisme de classe* P, *tel que*

$$\rho(f)=\alpha\in\mathbf{T}^1-(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}),$$

et soient $\frac{p_n}{q_n}$ *les réduites de* α; *si* $\varphi\in L^1(\mathbf{T}^1,m)$, $\lim\limits_{n\to+\infty}|\varphi\circ f^{q_n}-\varphi|_{L^1}=0$.

Démonstration. — Soit $\varepsilon>0$; il faut déterminer n_0 tel que si $n\geq n_0$, on ait

$$|\varphi\circ f^{q_n}-\varphi|_{L^1}\leq\varepsilon.$$

Soit $\varphi_1:\mathbf{T}^1\to\mathbf{R}$, continue et telle que

$$|\varphi-\varphi_1|_{L^1}\leq\frac{\varepsilon}{2(e^V+1)}$$

avec $V=\operatorname{Var}(\operatorname{Log} Df)$.

On a : $|\varphi\circ f^{q_n}-\varphi|_{L^1}\leq|(\varphi-\varphi_1)\circ f^{q_n}|_{L^1}+|\varphi-\varphi_1|_{L^1}+|\varphi_1\circ f^{q_n}-\varphi_1|_{L^1}$.

Par l'inégalité de Denjoy et la formule de changement de variable :

$$|(\varphi-\varphi_1)\circ f^{q_n}|\leq|\varphi-\varphi_1|_{L^1}\left|\frac{1}{Df^{q_n}}\right|_{L^\infty}\leq\frac{\varepsilon}{2(e^V+1)}e^V.$$

On a : $\qquad |\varphi_1\circ f^{q_n}-\varphi_1|_{L^1}\leq|\varphi_1\circ f^{q_n}-\varphi_1|_0$.

Par le théorème de Denjoy, $f=h^{-1}\circ R_\alpha\circ h$, où h est un homéomorphisme de $\mathbf{T}^1$; si $n\to\infty$, $f^{q_n}\to\operatorname{Id}$ dans la C^0-topologie puisque $q_n\alpha\to0\pmod 1$, par conséquent, si $n\to+\infty$, $|\varphi_1\circ f^{q_n}-\varphi_1|_0\to0$ (puisque φ_1 est continue).

Soit n_0 tel que, pour $n\geq n_0$, on ait $|\varphi_1\circ f^{q_n}-\varphi_1|_0\leq\frac{\varepsilon}{2}$; pour $n\geq n_0$, on a :

$$|\varphi\circ f^{q_n}-\varphi|_{L^1}\leq\varepsilon.\quad\blacksquare$$

Lemme **(7.4.4).** — *Soient* $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, *et* $\frac{p_n}{q_n}$ *les réduites de* α; *une infinité de* q_n *sont impairs.*

Démonstration. — D'après la relation de Lagrange :

$$q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n,$$

si q_{n-1} est pair q_n est impair. ■

(7.4.5) *Démonstration du théorème* (7.4). — Par l'absurde.

Supposons que $\beta = 1$ et que $\rho(\bar{f}_{1,b}) = \alpha \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Par (7.4.2), il existe $g \in L^\infty(\mathbf{T}^1, m, \mathbf{C})$, avec $|g|_{L^1} = m(A) > 0$ et

$$g \circ \bar{f}_{1,b} = e^{i\pi} g = -g.$$

On a :

$$g \circ f^n_{1,b} - g = ((-1)^n - 1)\, g$$

donc :

$$|g \circ \bar{f}^n_{1,b} - g|_{L^1} = \begin{cases} 2m(A) & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

D'après (7.4.3) :

$$\lim_{n \to \infty} |g \circ \bar{f}^{q_n}_{1,b} - g|_{L^1} = 0.$$

Si q_n est impair :

$$|g \circ \bar{f}^{q_n}_{1,b} - g|_{L^1} = 2m(A).$$

Par le lemme (7.4.4), il existe une infinité de q_n impairs; le théorème en résulte par l'absurde. ■

Remarque **(7.4.6).** — Soit $\rho(\bar{f}_{\beta,b}) = \alpha \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$; soient q_n les dénominateurs des réduites de α; si $\frac{q_n \beta}{1+\beta}$ ne tend pas vers $0 \pmod 1$ quand $n \to +\infty$, alors $\bar{f}_{\beta,b}$ n'a pas de mesure σ-finie invariante absolument continue par rapport à m.

(7.4.7) *On peut aussi formuler les choses ainsi : soit f un difféomorphisme de classe* P, *tel que* $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$; *si $\bar{f}$ a une mesure invariante σ-finie équivalente à la mesure de Haar m,* $|Df^{q_n} - 1|_{L^1(m)} \to 0$ *quand* $n \to \infty$.

En effet on a montré que si $\lambda \in \mathbf{R}$, $e^{2\pi i \lambda \operatorname{Log} Df^{q_n}} \to 1$ dans $L^1(m)$. Or, par l'inégalité de Denjoy, $|\operatorname{Log} Df^{q_n}|_0 \leq V$; si $\lambda \neq 0$ est assez petit, on conclut que, quand $n \to +\infty$:

$$|Df^{q_n} - 1|_{L^1} = O(|e^{2\pi i \lambda \operatorname{Log} Df^{q_n}} - 1|_{L^1}).$$

(7.4.8) *On montrera en* VII.1.14 *et* VII.2.5.2 *que si* $f \in D^2(\mathbf{T}^1)$, $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, *alors on a* $\lim_{n \to +\infty} |Df^{q_n} - 1|_{L^1} = 0$.

Problème **(7.5)** (¹). — *Si* $f \in \mathrm{Diff}^0_+(\mathbf{T}^1)$ *est un homéomorphisme de classe* P *avec* $\rho(f) \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, *est-ce que* f *est* m*-ergodique?*

On montrera (VII.1.4) que si f est un difféomorphisme de classe C^2, la réponse est oui (C^1 plus Lipschitz suffit).

Problème **(7.6)**. — *Soit* $0 < a < \frac{1}{2\pi}$ *fixé. Est-ce qu'il existe* $b \in \mathbf{R}$ *tel que :*

$$\bar{f}_b(x) = x + a \sin 2\pi x + b$$

n'ait pas de mesure σ-finie invariante absolument continue par rapport à m? (Voir XII.1.)

(7.7) *Conjugaison lipschitzienne de* $\bar{f}_{\beta,b}$.

On a la

Proposition **(7.7.1)**. — *Soit* $\rho(\bar{f}_{\beta,b}) = \alpha \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$; *les trois affirmations suivantes sont équivalentes :*

1) $\bar{f}_{\beta,b}$ *est conjugué à* R_α *par un homéomorphisme lipschitzien (en fait* C^∞ *par morceaux finis).*
2) $\bar{f}_{\beta,b} = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$, *où* h *et* h^{-1} *sont des homéomorphismes de* $\mathbf{T}^1$ *absolument continus.*
3) $\frac{\beta}{1+\beta} \in \mathbf{Z}\alpha \pmod 1$.

Démonstration. — 1) implique 2) trivialement. Montrons que 2) implique 3) : si l'on suppose 2), $\bar{f}_{\beta,b}$ a une mesure de probabilité invariante équivalente à la mesure de Haar, donc par Radon-Nikodym, il existe $\varphi : \mathbf{T}^1 \to]0, +\infty[$, m-intégrable et vérifiant

$$\varphi \circ f_{\beta,b} . Df_{\beta,b} = \varphi \quad m\text{-presque partout.}$$

Par (7.4.1) et (7.4.2), il existe $g \in L^\infty(\mathbf{T}^1, m, \mathbf{C})$, vérifiant $|g|_{L^1} = 1$ et

$$(*) \qquad g \circ \bar{f}_{\beta,b} = e^{\frac{2\pi i\beta}{1+\beta}} g \quad m\text{-presque partout.}$$

Comme par hypothèse $\bar{f}_{\beta,b} = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$, où h et h^{-1} sont absolument continues, $g \circ h^{-1}$ est m-mesurable et $|g \circ h^{-1}|_{L^1} = 1$. En composant l'égalité (*) à droite avec h^{-1}, on a $g \circ h^{-1} \circ R_\alpha = e^{\frac{2\pi i\beta}{1+\beta}} g \circ h^{-1}$ m-presque partout; $g \circ h^{-1}$ est un vecteur propre dans $L^2(\mathbf{T}^1, m, \mathbf{C})$ de la transformation $\varphi \mapsto \varphi \circ R_\alpha$, de valeur propre $e^{\frac{2\pi i\beta}{1+\beta}}$, donc $\frac{\beta}{1+\beta} \in \mathbf{Z}\alpha \pmod 1$.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme **(7.7.2)**. — *Soit* $\gamma = j\alpha$, $j \in \mathbf{Z}$; *il existe* $\varphi : \mathbf{T}^1 \to \mathbf{R}$ *dérivable sauf sur un ensemble fini et de dérivée constante* (φ *n'est pas continue*), *vérifiant :*

$$\varphi \circ R_\alpha - \varphi = \chi_{[0,\gamma[} - \gamma \qquad 0 < \gamma < 1 \qquad (\gamma = j\alpha \pmod 1)).$$

(¹) La réponse à ce problème est positive et implique aussi le théorème (7.4) puisque $f_{1,b}$ et $f^2_{1,b}$ sont m-ergodiques et le g de (7.4.1) ne peut pas exister.

Démonstration. — Soit $\psi(x)=x-[x]$ ($[x]$ désigne le plus grand entier $\leq x$). Si $0<\gamma<1$ sur $\mathbf{T}^1$:

$$\psi(x-\gamma)-\psi(x)=\chi_{[0,\gamma[}-\gamma$$

ce qui prouve l'affirmation si $\gamma=\pm\alpha \pmod 1$. Si $\gamma=j\alpha \pmod 1$, $0<\gamma<1$, $j\geq 2$ (1) on a $\varphi_1\circ R_\gamma-\varphi_1=\chi_{[0,\gamma[}-\gamma$, $\varphi_1(x)=-\psi(x-\gamma)$. Soit $\varphi=\varphi_1+\ldots+\varphi_1\circ R_{(j-1)\alpha}$. On a :

$$\varphi\circ R_\alpha-\varphi=\chi_{[0,\gamma[}-\gamma. \quad \blacksquare$$

Fin de la démonstration de « 3) *implique* 1) ».

Par le théorème de Denjoy, il existe $h\in \mathrm{Diff}_+^0(\mathbf{T}^1)$, tel que $h(0)=0$ et

$$\bar{f}_{\beta,b}=h^{-1}\circ R_\alpha\circ h.$$

On a : $$\mathrm{Log}\, D\bar{f}_{\beta,b}\circ h^{-1}(x)=\begin{cases}\mathrm{Log}\,\lambda & \text{si} \quad 0<x<\dfrac{\beta}{1+\beta}\\ -\beta\,\mathrm{Log}\,\lambda & \text{si} \quad \dfrac{\beta}{1+\beta}<x<1.\end{cases}$$

D'après la proposition (1.1) :

$$\int_{\mathbf{T}^1}\mathrm{Log}\, D\bar{f}_{\beta,b}\,d\mu=\int_{\mathbf{T}^1}\mathrm{Log}\, D\bar{f}_{\beta,b}\circ h^{-1}(x)\,dx=0;$$

on en déduit que :

$$\mathrm{Log}\, D\bar{f}_{\beta,b}\circ h^{-1}=(\mathrm{Log}\,\lambda)(1+\beta)\left(\chi_{\left[0,\frac{\beta}{1+\beta}\right[}-\frac{\beta}{1+\beta}\right).$$

Si $\dfrac{\beta}{1+\beta}\in\mathbf{Z}\alpha \pmod 1$, par (7.7.2), il existe φ linéaire par morceaux finis (mais non continue) telle que :

$$\varphi\circ R_\alpha-\varphi=\mathrm{Log}\, D\bar{f}_{\beta,b}\circ h^{-1}.$$

On pose $\mathrm{Log}\, Dh^{-1}=\varphi+c$, soit : $h^{-1}(x)=\int_0^x e^{\varphi(x)+c}\,dx$. On choisit c tel que $\int_0^1 e^{\varphi(x)+c}\,dx=1$; $h\in D^0(\mathbf{T}^1)$ est de classe P (mais non PL).

On a $D\bar{f}_{\beta,b}\circ h^{-1}.Dh^{-1}=Dh^{-1}\circ R_\alpha$, donc $\bar{f}_{\beta,b}=h^{-1}\circ R_\alpha\circ h$. $\blacksquare$

(7.7.3) Le résultat suivant implique le résultat de Kesten [1]. (Pour une autre démonstration (très élégante) voir Petersen [1].)

Proposition. — *Les affirmations suivantes sont équivalentes* :

1) *Il existe* x_0 *tel que* :

$$\sup_{n\in\mathbf{Z}}|\mathrm{Log}\, Df^n_{\beta,b}(x_0)|<+\infty.$$

2) $k=\sup_{n\in\mathbf{Z}}|Df^n_{\beta,b}|_{L^\infty}<+\infty.$

(1) Je remercie J.-P. Conze de m'avoir signalé ce cas.

3) $\bar{f}_{\beta, b}$ *est conjugué à* R_α $(\alpha=\rho(\bar{f}_{\beta, b}))$ *par un homéomorphisme lipschitzien.*

4) $\dfrac{\beta}{1+\beta} \in \mathbf{Z}\alpha \pmod 1$.

Démonstration. — « 1) implique 2) » est élémentaire (voir Petersen [1]).

« 3) implique 1) » est élémentaire puisque

$$D\bar{f}_{\beta, b}=Dh^{-1} \circ R_\alpha \circ h . Dh$$

avec h lipschitzien et Dh^{-1} et $Dh \in L^\infty(\mathbf{T}^1, m)$.

3) est équivalent à 4) par la proposition (7.7.1). Il reste à voir que 2) implique 3).

Si 2) est vérifiée, on a pour tous $x, y \in \mathbf{R}$ et tout n :

$$\frac{1}{k}|x-y| \leq |f_{\beta, b}^n(x)-f_{\beta, b}^n(y)| \leq k|x-y| .$$

Si l'on pose $S_n(f)=\sum_{i=0}^{n-1} \dfrac{f_{\beta, b}^i-i \alpha}{n}$, par IV.5.2, $S_n(f)$ converge uniformément sur tout compact, quand $n \rightarrow \infty$, vers un $h \in D^0(\mathbf{T}^1)$ tel que :

$$f_{\beta, b}=h^{-1} \circ R_\alpha \circ h .$$

On a $\dfrac{1}{k}|x-y| \leq |S_n(f)(x)-S_n(f)(y)| \leq k|x-y|$, donc, par passage à la limite :

$$\frac{1}{k}|x-y| \leq |h(x)-h(y)| \leq k|x-y| ;$$

h est bien un homéomorphisme lipschitzien. ∎

Remarque. — En utilisant (7.4.6) et (7.7.1), on peut montrer par des arguments de catégorie de Baire que, pour tout $\alpha \in \mathbf{T}^1-(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, il existe β et b tels que $\rho(\bar{f}_{\beta, b})=\alpha$, que $\bar{f}_{\beta, b}$ soit m-ergodique, et que $\bar{f}_{\beta, b}$ n'ait pas de mesure σ-finie invariante absolument continue par rapport à la mesure de Haar m. (On montre d'une part que les β qui satisfont à (7.4.6) forment un ensemble résiduel, et d'autre part, en utilisant le théorème de Chacon-Ornstein, que l'ensemble des β pour lesquels $\bar{f}_{\beta, b}$ (où $\rho(\bar{f}_{\beta, b})=\alpha$) est m-ergodique est un G_δ dense par (7.7.1).)

VII. — CONSÉQUENCES DE L'INÉGALITÉ DE DENJOY : ERGODICITÉ PAR RAPPORT A LA MESURE DE HAAR; COMMENT REVENIR PAR CONJUGAISON A UNE ROTATION

Plan :

Commentaire :

Le problème de savoir si un homéomorphisme de $\mathbf{T}^1$ de classe P est ergodique par rapport à la mesure de Haar m si son nombre de rotation est irrationnel a été posé par A. Denjoy. C'est ce qu'il appelle la « transitivité forte de Birkhoff ». Si j'ai bien compris, Denjoy l'avait déjà posé en 1932 dans une note aux Comptes Rendus (voir Denjoy [4], p. 580). Denjoy pose le problème plus explicitement et clairement dans (Denjoy [4], observations et commentaires (2^e partie), p. 88) (voir aussi Denjoy [5]).

Nous donnons une réponse partielle en (1.4) : c'est vrai si le difféomorphisme est C^2 (et même C^1 « plus Lipschitz ») et de nombre de rotation irrationnel.

Le théorème capital pour la suite est (2.5) que nous utiliserons plusieurs fois en IX. La théorie des petits dénominateurs (*i.e.* Annexe) est résumée (et améliorée) dans le théorème (2.8).

Je remercie tout particulièrement Ledrappier, Strelcyn et Thouvenot pour m'avoir aussi posé le problème de la m-ergodicité.

Nous avons tenu compte en (1.12) et (2.5) de simplifications apportées par P. Deligne [1].

A. B. Katok [1] a donné une démonstration bien plus élémentaire de (1.4) (la m-ergodicité). Il reste que notre démonstration est très naturelle pour démontrer le théorème capital (2.5), et elle donne en plus de façon presque formelle la démonstration de (1.4).

0. Notations.

$m=dx$ est la mesure de Haar (ou de Lebesgue) sur $\mathbf{T}^1$ (sur $\mathbf{R}$) et, dans ce chapitre, $|\ |_{L^p}$ sera la norme de $L^p(\mathbf{T}^1, m)$ pour $1 \leq p \leq +\infty$ $\Big($avec, pour $1 \leq p < +\infty$, $|\varphi|_{L^p} = \left(\int_{\mathbf{T}^1} |\varphi(x)|^p\, dx\right)^{1/p}\Big)$. Dans la suite, L^1 veut toujours dire $L^1(\mathbf{T}^1, m)$.

1. m-ergodicité.

(1.1) Soit $f: \mathbf{T}^1 \to \mathbf{T}^1$ un homéomorphisme m-non singulier : f et f^{-1} sont absolument continues (par exemple $f: \mathbf{T}^1 \to \mathbf{T}^1$ est un homéomorphisme lipschitzien; f et f^{-1} sont alors des applications lipschitziennes de $\mathbf{T}^1$ dans $\mathbf{T}^1$ pour la distance standard de $\mathbf{T}^1$). Soit $A \subset \mathbf{T}^1$, m-mesurable; $f(A)$ et $f^{-1}(A)$ sont m-mesurables, et :

$$m(f(A)) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad m(A) = 0.$$

Définition. — *f est m-ergodique si, pour toute partie* A *de* $\mathbf{T}^1$, *m-mesurable et invariante par f* (i.e. $f(\mathrm{A})=\mathrm{A}$ *m-presque partout*), *on a* $m(\mathrm{A})=0$ *ou* 1.

Remarques (**1.2**) :

— Une condition nécessaire pour qu'un homéomorphisme f de $\mathbf{T}^1$, m-non singulier, soit m-ergodique, est que f soit m-incompressible.

— Une condition nécessaire est donc que $\rho(f)=\alpha\in\mathbf{T}^1-(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ et que f soit C^0-conjugué à R_α.

— Rappelons (ainsi que nous le verrons en X.3.1) que, pour tout $\alpha\in\mathbf{T}^1-(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ il existe un difféomorphisme f de classe C^1, avec $\rho(f)=\alpha$, et un ensemble de Cantor $\mathrm{K}\subset\mathbf{T}^1$ tel que $f(\mathrm{K})=\mathrm{K}$: un tel f n'est pas m-ergodique ni même m-incompressible.

— Si $f\in\mathrm{Diff}^0_+(\mathbf{T}^1)$ avec $\rho(f)=\alpha\in\mathbf{T}^1-(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, f est uniquement ergodique par II.8, *i.e.* f a une unique mesure de probabilité invariante μ; f est alors μ-ergodique.

— Nous verrons en XII.1.13 qu'il existe $f\in\mathrm{Diff}^\omega_+(\mathbf{T}^1)$ avec $\rho(f)=\alpha\in\mathbf{T}^1-(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, tel que $f=h^{-1}\circ\mathrm{R}_\alpha\circ h$ (h étant unique si on impose $h(0)=0$) où h est un homéomorphisme de $\mathbf{T}^1$ qui envoie un ensemble borélien de m-mesure nulle sur un ensemble de m-mesure 1 ; il suit que si μ est l'unique mesure de probabilité invariante par f, μ est étrangère à la mesure de Haar m; la μ-ergodicité de f ne nous renseigne aucunement sur sa m-ergodicité!

— L'exemple suivant est dû à Katznelson [1].

Soient $\alpha\in\mathbf{T}^1-(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ et K un ensemble de Cantor dans $\mathbf{T}^1$ tel que les ensembles $\{\mathrm{R}_{n\alpha}(\mathrm{K})\}_{n\in\mathbf{Z}}$ soient deux à deux disjoints. Soient $\mathbf{Z}\ni n\mapsto c_n>0$ une suite telle que $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n=1$, et μ une mesure de probabilité sans masse atomique, de support K; on considère alors la mesure de probabilité $v=\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n(\mathrm{R}_{n\alpha})_*\mu$. Si $h(x)=\int_0^x dv$, h est un homéomorphisme ainsi que $f=h\circ\mathrm{R}_\alpha\circ h^{-1}$, f est m-non singulier (puisque la rotation R_α est v-non singulière), f est C^0-conjugué à R_α, mais f n'est pas m-incompressible, puisque $h(\mathrm{K})$ est de m-mesure positive et que les ensembles $f^n(h(\mathrm{K}))$, $n\in\mathbf{Z}$ sont deux à deux disjoints et de m-mesure positive; f n'est donc pas *(a fortiori)* m-ergodique.

(**1.3**) Soit f un homéomorphisme de classe P de $\mathbf{T}^1$ avec $\rho(f)=\alpha\in\mathbf{T}^1-(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, par exemple un homéomorphisme PL, un difféomorphisme C^1 dont la dérivée est à variation bornée; alors f est m-incompressible et f est C^0-conjugué à R_α.

On a le problème suivant (aussi posé par A. Denjoy [4], observations et commentaires, II[e] partie, p. 88).

Problème. — *Est-ce que f est m-ergodique* (1) ?

La réponse partielle que nous donnerons est le

Théorème (**1.4**). — *Si* $f\in\mathrm{Diff}^2_+(\mathbf{T}^1)$ *avec* $\rho(f)=\alpha\in\mathbf{T}^1-(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, *alors f est m-ergodique.*

(1) La réponse à ce problème est positive (ce que nous montrerons ailleurs en nous inspirant de A. B. Katok [1] et en utilisant VI.6.2).

(1.5) En fait, la démonstration que nous donnerons marche sans changement si *f est un difféomorphisme de classe* C^1 *avec* Df *lipschitzienne.* On a alors $D^2 f \in L^\infty(\mathbf{T}^1, m)$ et on remplace la norme $|\ |_0$ par la norme de L^∞ ainsi que le lecteur le vérifiera.

Pour démontrer (1.4), nous aurons besoin des paragraphes (1.6) à (1.17).

(1.6) *Un outil.*

Il nous semble très naturel d'introduire le théorème ergodique de W. Hurewicz [1], qui est un cas particulier du théorème ergodique de Chacon-Ornstein (voir Garsia [1]), théorème qui, précisément, ne suppose pas de mesure invariante (absolument continue).

Soit f un homéomorphisme de $\mathbf{T}^1$ de classe P avec $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Alors f est m-incompressible (f est aussi un homéomorphisme lipschitzien de $\mathbf{T}^1$). Considérons l'opérateur (changement de variable) :

$$G : \varphi \in L^1(\mathbf{T}^1, m) \mapsto G(\varphi) = \varphi \circ f . Df \in L^1(\mathbf{T}^1, m);$$

on a $|G| = 1$ (norme dans $\mathscr{L}(L^1, L^1)$), et G est positif (*i.e.* si $\varphi \geqslant 0$, $G(\varphi) \geqslant 0$). Considérons, pour $n \geq 1$:

$$S_n^f(\varphi) \equiv \frac{\sum_{i=0}^{n-1} G^i(\varphi)}{\sum_{i=0}^{n-1} G^i(1)} \equiv \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i . Df^i}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i}.$$

Par Hurewicz [1], si $n \to +\infty$, $S_n^f(\varphi)$ converge m-presque partout vers une limite $\tilde{\varphi} \in L^1(\mathbf{T}^1, m)$, et, puisque f est m-incompressible, $\tilde{\varphi} \circ f = \tilde{\varphi}$, et on a aussi :

$$\int_{\mathbf{T}^1} \tilde{\varphi}(x)\,dx = \int_{\mathbf{T}^1} \varphi(x)\,dx.$$

On a donc la condition nécessaire (et aussi suffisante) de m-ergodicité pour f : pour toute $\varphi \in L^1(\mathbf{T}^1, m)$ avec $\int_{\mathbf{T}^1} \varphi(x)\,dx = 0$, si $n \to +\infty$, $S_n^f(\varphi) \to 0$ m-presque partout.

(1.7) *Une fo1mule.*

Soit $f \in D^2(\mathbf{T}^1)$. Alors on a, pour n entier $(n \geq 1)$:

$$\boxed{D^2 f^n = Df^n . \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{D^2 f}{Df} \circ f^i . Df^i \right).}$$

Voici une démonstration : on a :

$$\operatorname{Log} Df^n = \sum_{i=0}^{n-1} (\operatorname{Log} Df) \circ f^i.$$

En dérivant les deux membres, on obtient :

$$\frac{D^2 f^n}{Df^n} = \sum_{i=0}^{n-1} (D \operatorname{Log} Df) \circ f^i . Df^i, \qquad \text{avec} \qquad D \operatorname{Log} Df = \frac{D^2 f}{Df},$$

soit précisément la formule voulue. ■

(1.8) *Un cas particulier du théorème de W. Hurewicz.*

Le caractère « un peu mystérieux » de ce que nous allons faire disparaîtra en (2.5). Soit $f \in \mathrm{Diff}^2_+(\mathbf{T}^1)$ avec $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Considérons, pour $n \geq 1$:

$$S_n^f\left(\frac{D^2 f}{Df}\right) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{D^2 f}{Df} \circ f^i . Df^i}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i}.$$

Nous poserons $\psi_n = S_n^f\left(\frac{D^2 f}{Df}\right)$.

D'après le théorème ergodique de Hurewicz, si $n \to +\infty$, $\psi_n \to \psi$ m-presque partout. Comme, pour tout n, on a :

$$|\psi_n|_0 \leq \left|\frac{D^2 f}{Df}\right|_0,$$

$\psi \in L^\infty(\mathbf{T}^1, m)$ et, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, si $n \to +\infty$, $\psi_n \to \psi$ m-presque partout et dans $L^1(\mathbf{T}^1, m)$.

Nous nous proposons de démontrer que $\psi = 0$ m-presque partout (c'est une condition nécessaire de m-ergodicité de f par (1.6)). Pour cela, nous avons besoin des lemmes qui suivent :

(1.9) On suppose dans la suite que $f \in \mathrm{Diff}^2_+(\mathbf{T}^1)$ et que $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Les q_n sont les dénominateurs des réduites de α. On a alors, par l'inégalité de Denjoy :

$$e^{-V} \leq Df^{\pm q_n} \leq e^V,$$

avec $V = \mathrm{Var}(\mathrm{Log}\, Df)$.

(1.10) On rappelle que $\psi_n = \dfrac{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{D^2 f}{Df} \circ f^i . Df^i}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i}$ et que $\psi = \lim_{n \to +\infty} \psi_n$ (limite m-presque partout).

On pose $\varphi_n = D\left(\dfrac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i}\right)$.

Proposition. — On a, pour tout n :

$$|\varphi_n|_0 \leq \left|\frac{D^2 f}{Df}\right|_0,$$

et, si $n \to +\infty$, $\varphi_n \to -\frac{1}{2}\psi$ *m-presque partout et dans* $L^1(\mathbf{T}^1, m)$.

Démonstration. — On a :

$$\varphi_n = \mathrm{D}\left(\frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{D}f^i}\right) = -\frac{\sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{D}^2 f^i}{\left(\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{D}f^i\right)^2} \quad (\mathrm{D}^2 f^0 = 0).$$

Par la formule (1.7) :

$$\varphi_n = -\frac{\sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{D}f^i \left(\sum_{j=0}^{i-1} \frac{\mathrm{D}^2 f}{\mathrm{D}f} \circ f^j . \mathrm{D}f^j\right)}{\left(\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{D}f^i\right)^2}.$$

Il suit que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$|\varphi_n|_0 \leq \left|\frac{\mathrm{D}^2 f}{\mathrm{D}f}\right|_0.$$

Si, quand $n \to +\infty$, $\varphi_n \to -\frac{1}{2}\psi$ *m*-presque partout, alors, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, **on** aura $\varphi_n \to -\frac{1}{2}\psi$ dans L^1. Montrons que, si $n \to +\infty$, $\varphi_n \to -\frac{1}{2}\psi$ *m*-presque partout. Pour cela, introduisons ψ dans l'expression de φ_n. On a :

$$-\varphi_n = \mathrm{A}_n + \mathrm{B}_n,$$

avec $\mathrm{A}_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{D}f^i . \left(\sum_{j=0}^{i-1} \mathrm{D}f^j\right)(\psi_i - \psi)}{\left(\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{D}f^i\right)^2}$ et $\mathrm{B}_n = \psi . \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{D}f^i . \left(\sum_{j=0}^{i-1} \mathrm{D}f^j\right)\right)}{\left(\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{D}f\right)^2}$.

Montrons que, si $n \to +\infty$, $\mathrm{A}_n \to 0$ *m-presque partout.*

Soit $x \in \mathbf{T}^1$, tel que $\psi(x)$ existe et $\lim_{n \to +\infty} |\psi_i(x) - \psi(x)| = 0$. On a :

$$|\mathrm{A}_n(x)| \leq \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{D}f^i(x) \, |\psi_i(x) - \psi(x)|}{\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{D}f^i(x)}.$$

Par l'inégalité de Denjoy, on a $\mathrm{D}f^{q_i}(x) \geq e^{-\mathrm{V}}$, donc, si $n \to +\infty$, $\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{D}f^i(x) \to +\infty$. Par le lemme bien connu suivant, si $c_i > 0$, $\sum_{i=0}^{\infty} c_i = +\infty$ et si (b_i) est une suite de nombres réels avec $\lim_{i \to +\infty} b = 0$, alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} c_i b_i}{\sum_{i=0}^{n-1} c_i} = 0$$

(*i.e.* la convergence implique la convergence Cesàro); on en conclut que :

$$\lim_{n\to+\infty} |A_n(x)| = 0.$$

Par suite, si $n\to+\infty$, $A_n\to 0$ m-presque partout.

Pour montrer que si $n\to+\infty$, $-\varphi_n\to\frac{1}{2}\psi$, il nous reste donc à *montrer que* $B_n\to\frac{1}{2}\psi$ *m-presque partout*, et la proposition en résultera. On a $B_n=\psi.D_n$, avec

$$D_n=\frac{\sum_{i=1}^{n-1} Df^i.\left(\sum_{j=0}^{i-1} Df^j\right)}{\left(\sum_{i=0}^{n-1} Df^i\right)^2}.$$

Montrons que si $n\to+\infty$, $D_n\to 1/2$ *uniformément* :

$$D_n=\frac{\frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} Df^i\right)^2-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(Df^i)^2}{\left(\sum_{i=0}^{n-1} Df^i\right)^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sum_{i=0}^{n-1}(Df^i)^2}{\left(\sum_{i=0}^{n-1} Df^i\right)^2}.$$

Soit $x\in\mathbf{T}^1$; on a :

$$\frac{\sum_{i=0}^{n-1}(Df^i)^2(x)}{\left(\sum_{i=0}^{n-1} Df^i(x)\right)^2}\leq\sup_{0\leq p\leq n-1}\frac{Df^p(x)}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i(x)}\leq\sup_{0\leq p\leq n-1}\left|\frac{Df^p}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i}\right|_0$$

et le lemme suivant (1.11) montre bien que si $n\to+\infty$, $D_n\to 1/2$ uniformément; il en résulte que $\lim_{n\to+\infty}\varphi_n=\lim_{n\to+\infty}(-B_n)=-\frac{1}{2}\psi$ m-presque partout. ∎

Lemme (**1.11**). — *Si* $n\to+\infty$, $\sup_{0\leq p\leq n-1}\left|\frac{Df^p}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i}\right|_0\to 0.$

Démonstration. — Pour $x\in\mathbf{T}^1$, on a, puisque $Df^i(x)=Df^{i-p}(f^p(x)).Df^p(x)$:

$$\frac{Df^p(x)}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i(x)}=\frac{Df^p(x)}{Df^p(x).\left(\sum_{i=0}^{n-1} Df^{i-p}(f^p(x))\right)}=\frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^{i-p}(f^p(x))}.$$

Or, si $|i-p|=q_k$, par l'inégalité de Denjoy $Df^{\pm q_k}\geq e^{-V}$, on a :

$$\frac{Df^p}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i}\leq\frac{e^V}{1+\operatorname{card}\left\{k\,|\,q_k\leq\frac{n-1}{2}\right\}}=C_n,$$

et, si $n\to+\infty$, $C_n\to 0$ (C_n est indépendant de x et p). ∎

(1.12) Rappelons que $\psi = \lim_{n\to+\infty} \psi_n$. On a la

Proposition. — $\psi = 0$ *m-presque partout.*

Démonstration. — Si $n \to +\infty$, $1/\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{D}f^i$ converge uniformément vers 0 puisque $\mathrm{D}f^{q_i} \geq e^{-\mathrm{V}}$. Donc, si $n\to+\infty$, $\mathrm{D}(1/\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{D}f^i) \to 0$ au sens des distributions. Or, par (1.10), $\mathrm{D}(1/\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{D}f^i) \to -\frac{1}{2}\psi$ *m*-presque partout et dans L^1. Donc $\psi = 0$ *m*-presque partout. ■

Corollaire **(1.13)**. — *Pour tout* $\varphi \in \mathrm{C}^1(\mathbf{T}^1)$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \mathrm{D}\left(\frac{\varphi}{\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{D}f^i}\right)\right|_{\mathrm{L}^1} = 0,$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} |\psi_n|_{\mathrm{L}^1} = 0.$$

Démonstration. — En effet, par (1.12), si $n\to+\infty$, $\psi_n \to \psi = 0$ *m*-presque partout et dans L^1, et, si $n\to+\infty$, $\mathrm{D}\left(\frac{\varphi}{\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{D}f^i}\right) \to -\frac{1}{2}\varphi.\psi = 0$ *m*-presque partout et dans L^1 (par (1.10) et (1.12)). ■

(1.14). — La proposition suivante sera améliorée en (2.5.1).

Proposition. — *Si* $f \in \mathrm{D}^2(\mathbf{T}^1)$ *et* $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, $\lim_{n\to+\infty} |\mathrm{D}f^{q_n} - 1|_{\mathrm{L}^1} = 0$.

Démonstration. — Comme on a $|\mathrm{D}f^{q_n} - 1|_0 \leq e^{\mathrm{V}}$, il suffit de montrer que $\lim_{n\to+\infty} |\mathrm{D}f^{q_n} - 1|_{\mathrm{L}^2} = 0$ (L^p, $1 \leq p < +\infty$, convient aussi). On a :

$$\int_{\mathbf{T}^1} (\mathrm{D}f^{q_n}(x) - 1)^2 dx = -\int_{\mathbf{T}^1} \mathrm{D}^2 f^{q_n}(x) . (f^{q_n}(x) - x - p_n) dx \quad \text{(en intégrant par parties)}$$

$$= -\int_{\mathbf{T}^1} \frac{\mathrm{D}f^{q_n} . (\sum_{i=0}^{q_n-1} (\mathrm{D}\log \mathrm{D}f)\circ f^i . \mathrm{D}f^i)}{\sum_{i=0}^{q_n-1} \mathrm{D}f^i} (f^{q_n} - \mathrm{Id} - p_n)(\sum_{i=0}^{q_n-1} \mathrm{D}f^i) dx.$$

Donc
$$|\mathrm{D}f^{q_n} - 1|^2_{\mathrm{L}^2} \leq e^{\mathrm{V}} |\psi_{q_n}|_{\mathrm{L}^1} |(\sum_{i=0}^{q_n-1} \mathrm{D}f^i (f^{q_n} - \mathrm{Id} - p_n)|_0,$$

et la proposition résulte du corollaire (1.13) et du lemme suivant :

Lemme. — *Si* $f \in \mathrm{D}^{1+vb}(\mathbf{T}^1)$, $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, *on a, pour tout* $x \in \mathbf{R}$:

$$\sum_{i=0}^{q_{n+1}-1} \mathrm{D}f^i(x) |f^{q_n}(x) - x - p_n| \leq e^{\mathrm{V}}.$$

Démonstration. — Par VI.6.2 et la formule des accroissements finis, on a, pour $0 \leq i < q_{n+1}$ et $x \in \mathbf{R}$:

$$|f^{q_n+i}(x) - p_n - f^i(x)| \geq e^{-\mathrm{V}} \mathrm{D}f^i(x) |f^{q_n}(x) - x - p_n|.$$

Par V.8.3 et le théorème de Denjoy on a :

$$\sum_{i=0}^{q_{n+1}-1} |(f^{q_n+i}(x)-p_n)-f^i(x)| \leq 1. \quad \blacksquare$$

Remarque. — L'exemple VI.7.3 et (7.4) est un homéomorphisme PL, C^0-conjugué à une rotation irrationnelle mais tel que, si $n \to +\infty$, $|Df^{q_n}-1|_{L^1}$ ne tende pas vers 0.

(1.15) *Démonstration de la m-ergodicité de f (théorème* (1.4)). — Soit $A \subset \mathbf{T}^1$, m-mesurable, avec $f(A)=A$.

Soit :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1-m(A), & \text{si} \quad x \in A; \\ -m(A), & \text{si} \quad x \in \mathbf{T}^1 - A. \end{cases}$$

On a $\chi_A \in L^\infty(\mathbf{T}^1, m)$ et $\chi_A \circ f = \chi_A$ (χ_A est invariante par f).

Soit $\Phi(x) = \int_0^x \chi_A(x)\,dx$, $0 \leq x \leq 1$. Puisque $\int_0^1 \chi_A(x)\,dx = 0$, on a $\Phi \in C^0(\mathbf{T}^1)$, et Φ est une fonction lipschitzienne. Soient μ l'unique mesure de probabilité invariante par f (*i.e.* $f_*\mu = \mu$) sur $\mathbf{T}^1$, et $\Phi_A(x) = \Phi(x) - \mu(\Phi)$.

Par l'inégalité de Denjoy-Koksma VI.3, on a :

$$\left|\sum_{i=0}^{q_n-1} \Phi_A \circ f^i\right|_0 \leq \operatorname{Var}(\Phi) = \int_{\mathbf{T}^1} |\chi_A(x)|\,dx = 2(1-m(A))\,m(A) \leq \frac{1}{2}.$$

Soit $\varphi \in C^1(\mathbf{T}^1)$. On a (puisque $\chi_A \circ f^i = \chi_A$) :

$$\int_{\mathbf{T}^1} \chi_A \cdot \varphi\,dm = \int_{\mathbf{T}^1} \varphi \cdot \frac{\left(\sum_{i=0}^{q_n-1} \chi_A \circ f^i . Df^i\right)}{\left(\sum_{i=0}^{q_n-1} Df^i\right)}\,dm.$$

Intégrons par parties : $\int_{\mathbf{T}^1} \chi_A \cdot \varphi\,dm = -\int_{\mathbf{T}^1} D\left(\frac{\varphi}{\sum_{i=0}^{q_n-1} Df^i}\right)\left(\sum_{i=0}^{q_n-1} \Phi_A \circ f^i\right)dm$, d'où on a :

$$\left|\int_{\mathbf{T}^1} \chi_A \cdot \varphi\,dm\right| \leq \frac{1}{2}\left|D\left(\frac{\varphi}{\sum_{i=0}^{q_n-1} Df^i}\right)\right|_{L^1}.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient par (1.13) que :

$$\left|\int_{\mathbf{T}^1} \chi_A \cdot \varphi\,dm\right| = 0.$$

Comme φ est arbitraire dans $C^1(\mathbf{T}^1)$, χ_A est orthogonal à $C^1(\mathbf{T}^1)$ dans $L^2(\mathbf{T}^1, m)$. Il suit que $\chi_A = 0$ m-presque partout, et donc $m(A) = 0$ ou 1. $\blacksquare$

2. Comment revenir par conjugaison à une rotation.

(2.1) Soient $0 \leq r \leq \omega$ et $f \in D^r(\mathbf{T}^1)$ avec $\rho(f) = \alpha$. On pose, pour $n \geq 1$:

$$g_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f^i - i\alpha).$$

On a $g_n \in D^r(\mathbf{T}^1)$. Rappelons (IV.5.1) que, si f est C^k-conjugué à R_α (pour $0 \leq k \leq r$), quand $n \to +\infty$, $g_n \to g \in D^k(\mathbf{T}^1)$ dans la C^k-topologie, et on a $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$. Le problème de la C^k-conjugaison de f à R_α est finalement réduit au *problème de savoir dans quelle topologie la suite* (g_n) *converge.*

Si f est C^r-conjugué à R_α, quand $n \to +\infty$, $g_n \circ f \circ g_n^{-1} \to R_\alpha$ dans la C^r-topologie. Posons $f_n = g_n \circ f \circ g_n^{-1}$. Si $f \in D^r(\mathbf{T}^1)$, alors $f_n \in D^r(\mathbf{T}^1)$ et $\rho(f_n) = \rho(f)$; $g_n \in D^r(\mathbf{T}^1)$, et de plus

$$g_n \circ f = \alpha + g_n + \frac{f^n - \mathrm{Id} - n\alpha}{n}.$$

On a donc :

$$\boxed{f_n = g_n \circ f \circ g_n^{-1} = R_\alpha + \frac{f^n - \mathrm{Id} - n\alpha}{n} \circ g_n^{-1}.}$$

Nous allons montrer que $f_n \to R_\alpha$ en général dans une topologie plus fine que celle pour laquelle f est conjugué à R_α; par exemple on a la

Proposition **(2.2)**. — *Soit* $f \in D^0(\mathbf{T}^1)$, *avec* $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R}$ (*non nécessairement dans* $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$). *Alors, si* $n \to +\infty$, $f_n \to R_\alpha$ *dans la* C^0*-topologie.*

Remarquons que f n'est pas nécessairement C^0-conjugué à R_α (par exemple $\rho(f) = 0$ et $f \neq \mathrm{Id}$).

Démonstration. — Par II.2.5, on a, pour tout n, l'inégalité du nombre de rotation :

$$|f^n - \mathrm{Id} - n\alpha|_0 < 1.$$

Il en résulte que $|f_n - R_\alpha|_0 < \frac{1}{n}$. ■

Proposition **(2.3)**. — *Soit* $f \in D^{1+vb}(\mathbf{T}^1)$ (i.e. Df *est à variation bornée*); *si* $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, $f_n \to R_\alpha$ *dans la* C^1*-topologie quand* $n \to +\infty$.

Démonstration. — On a :

$$Df_n - DR_\alpha = D\left(\frac{f^n - \mathrm{Id} - n\alpha}{n} \circ g_n^{-1}\right) = \frac{(Df^n - 1) \circ g_n^{-1}}{n} \cdot Dg_n^{-1},$$

et $Dg_n^{-1} = \dfrac{1}{Dg_n \circ g_n^{-1}} = \dfrac{n}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i} \circ g_n^{-1}$, d'où $Df_n - DR_\alpha = \dfrac{Df^n - 1}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i} \circ g_n^{-1}$.

En écrivant $Df^n = Df \circ f^{n-1} . Df^{n-1}$, on obtient donc :

$$|Df_n - DR_\alpha|_0 \leq |Df|_0 \left| \frac{Df^{n-1}}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i} \right|_0 + \left| \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i} \right|_0$$

et la proposition (2.3) résulte du lemme (1.11) et de (2.2). ■

Remarque **(2.4)**. — Nous construirons, en XII.1.13, $f \in D^\omega(\mathbf{T}^1)$ avec $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, C^0-conjugué à R_α par le théorème de Denjoy, mais non C^1-conjugué à R_α.

On peut facilement voir que, si $n \to +\infty$, $g_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f^i - i\alpha) \to g$ dans la C^0-topologie, mais ne converge pas dans la C^1-topologie, et même que $|Dg_n|_0$ n'est pas bornée; néanmoins la proposition (2.3) montre que $f_n \to R_\alpha$ dans la C^1-topologie (!).

(2.5) Soit $f \in D^2(\mathbf{T}^1)$ avec $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$. On pose

$$V = \mathrm{Var}(\mathrm{Log}\, Df), \quad \text{et} \quad V_n = \mathrm{Var}(\mathrm{Log}(Df_n)).$$

Alors on a le théorème suivant, capital pour la suite.

Théorème **(2.5.1)**. — *Si* $n \to +\infty$, $V_n \to 0$ (*ou encore, si* $n \to +\infty$, $f_n \to R_\alpha$ *dans la* $C^{1+\mathrm{vb}}$*-topologie*).

Démonstration. — Puisque, si $n \to +\infty$, $|f_n - R_\alpha|_{C^1} \to 0$, pour prouver le théorème, il suffit de montrer que, si $n \to +\infty$, $\mathrm{Var}(Df_n) \to 0$. Rappelons que, si $\varphi \in C^1(\mathbf{T}^1)$:

$$\mathrm{Var}(\varphi) = |D\varphi|_{L^1} = \int_{\mathbf{T}^1} |D\varphi(x)|\, dx.$$

On a
$$Df_n - 1 = \frac{Df^n - 1}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i} \circ g_n^{-1},$$

et, puisque $\mathrm{Var}(\varphi \circ h) = \mathrm{Var}(\varphi)$ si h est un homéomorphisme du cercle (voir VI.2.2) :

$$\mathrm{Var}(Df_n - 1) = \mathrm{Var}(Df_n) = \mathrm{Var}\left(\frac{Df^n - 1}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i} \right) \leq \mathrm{Var}\left(\frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i} \right) + \mathrm{Var}\left(\frac{Df^n}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i} \right).$$

Si $n \to +\infty$, $\mathrm{Var}\left(\frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i} \right) = |D(1/\sum_{i=0}^{n-1} Df^i)|_{L^1} \to 0$ par (1.12). On a :

$$\frac{Df^n}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i} = \frac{Df \circ f^{n-1} . Df^{n-1}}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^{i-n+1} \circ f^{n-1} . Df^{n-1}} = \frac{Df}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^{-i}} \circ f^{n-1},$$

donc $\mathrm{Var}(Df^n / \sum_{i=0}^{n-1} Df^i) = \mathrm{Var}(Df / \sum_{i=0}^{n-1} Df^{-i})$ et le théorème résulte de (1.13). ■

Remarque. — Ce qui est important pour la démonstration de (2.5.1) est (1.12), et (1.12) implique, par (1.15), la m-ergodicité de f.

Corollaire **(2.5.2).** — *Soit* $f \in \mathrm{D}^2(\mathbf{T}^1)$ *avec* $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ *et soit* (q_k) *la suite des dénominateurs des réduites de* α. *On a* $\lim_{k \to +\infty} |\mathrm{D}f^{q_k} - 1|_0 = 0$.

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$ donné; on détermine par le théorème (2.5.1) un entier n tel que $|e^{\mathrm{V}_n} - e^{-\mathrm{V}_n}| \leq \varepsilon/2$ (avec $f_n = g_n \circ f \circ g_n^{-1}$ et $\mathrm{V}_n = \mathrm{Var}(\mathrm{Log}\,\mathrm{D}f_n)$).

De l'inégalité de Denjoy, il suit que l'on a, pour tout entier k :

$$|\mathrm{D}f^{q_k} - 1|_0 \leq \varepsilon/2.$$

En dérivant $f^{q_k} = g_n^{-1} \circ f_n^{q_k} \circ g_n$, on a :

$$\mathrm{D}f^{q_k} = \frac{\mathrm{D}g_n^{-1} \circ f_n^{q_k} \circ g_n}{\mathrm{D}g_n^{-1} \circ g_n} \cdot \mathrm{D}f_n^{q_k} \circ g_n.$$

Pour n fixé, si $k \to +\infty$, on a $\dfrac{\mathrm{D}g_n^{-1} \circ f_n^{q_k} \circ g_n}{\mathrm{D}g_n^{-1} \circ g_n} \to 1$ dans la C^0-topologie (puisque, par le théorème de Denjoy, si $k \to +\infty$, $f_n^{q_k} \to \mathrm{Id} \pmod 1$ dans la C^0-topologie). Il en résulte que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe k_0 tel que, si $k \geq k_0$, on ait :

$$|\mathrm{D}f^{q_k} - 1|_0 \leq \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Corollaire **(2.5.3).** — *Soit* $f \in \mathrm{D}^2(\mathbf{T}^1)$ *avec* $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$. *On pose :*

$$\mathrm{C}_k = \sup_{0 \leq i < q_{k+1}} \left(\operatorname*{Max}_{x \in \mathrm{T}^1} \left(\operatorname*{Max}_{y, z \in [x, f^{q_k}(x)]} \frac{\mathrm{D}f^i(y)}{\mathrm{D}f^i(z)} \right) \right).$$

Si $k \to +\infty$, *on a* $\mathrm{C}_k \to 1$.

Démonstration. — Identique à celle de (2.5.1) en utilisant VI.6 et le théorème de Denjoy. $\blacksquare$

Proposition **(2.6).** — *Soit* $f \in \mathrm{D}^2(\mathbf{T}^1)$ *avec* $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$; *on suppose que* f *est* C^1*-conjugué à* R_α. *Alors, si* $n \to +\infty$, $f_n \to \mathrm{R}_\alpha$ *dans la* C^2*-topologie.*

Démonstration. — On a :

$$\mathrm{D}^2 f_n = \mathrm{D}\left(1 + \frac{\mathrm{D}f^n - 1}{\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{D}f^i} \circ g_n^{-1}\right), \qquad \mathrm{D}g_n^{-1} = \frac{1}{\mathrm{D}g_n \circ g_n^{-1}} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{D}f^i} \circ g_n^{-1},$$

soit :

$$\mathrm{D}^2 f_n = \left[\frac{\mathrm{D}^2 f^n}{\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{D}f^i} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{D}f^i\right)} - (\mathrm{D}f^n - 1) \cdot \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{D}^2 f^i}{\left(\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{D}f^i\right)^2} \, \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{D}f^i\right)} \right] \circ g_n^{-1};$$

par conséquent :

$$|D^2 f_n|_0 \leq \left|\frac{D^2 f^n}{n}\right|_0 \cdot \left|\frac{n}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i}\right|_0^2 + |Df^n - 1|_0 \left|\frac{\sum_{i=0}^{n-1} D^2 f^i}{n^2}\right|_0 \cdot \left|\frac{n}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i}\right|_0^3.$$

Pour démontrer que, si $n \to +\infty$, $|D^2 f_n|_0 \to 0$, il suffit de vérifier :

a) $\quad \sup_{n \in \mathbf{N}} |Df^n - 1|_0 < +\infty;$

b) $\quad \sup_{n \in \mathbf{N}} \left|\frac{n}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i}\right|_0 < +\infty;$

c) $\quad \lim_{n \to \infty} \left|\frac{D^2 f^n}{n}\right|_0 = 0.$

Il en résulte alors que :

d) $\quad \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left|\frac{D^2 f^i}{n^2}\right|_0 = 0.$

En effet : $\quad \frac{1}{n}\left|\sum_{i=0}^{n-1} \frac{D^2 f^i}{n}\right|_0 \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left|\frac{D^2 f^i}{i}\right|_0.$

c) implique *d)* par le fait que la convergence implique la convergence Cesàro.

Vérification de a) et b).

Puisque f est C^1-conjugué à R_α ($f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$), si $k = \sup_{n \in \mathbf{Z}} |Df^n|_0$, on a $1 < k < +\infty$ et, pour tout n,

$$\frac{1}{k} \leq Df^n \leq k.$$

On a donc $\quad \sup_{n \in \mathbf{N}} |Df^n - 1|_0 \leq k + 1, \quad$ d'où *a)*, $\quad$ et $\quad \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Df^i \geq \frac{1}{k},$

soit *b)* : $\quad \sup_{n \in \mathbf{N}} \left|\frac{n}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i}\right|_0 \leq k.$

Vérification de c).

Soit $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$, avec $g \in D^1(\mathbf{T}^1, 0)$. On a $f^i = g^{-1} \circ R_{i\alpha} \circ g$, donc :

$$Df^i = (Dg^{-1} \circ R_{i\alpha} \circ g) \,.\, Dg.$$

Comme, par (1.8), $D^2 f^n = Df^n . \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{D^2 f}{Df} \circ f^i . Df^i\right)$, on a :

$$\left|\frac{D^2 f^n}{n}\right|_0 \leq |Df^n|_0 \cdot \left|\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{D^2 f}{Df} \circ f^i . Df^i\right|_0 \leq k \left|\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{D^2 f}{Df} \circ f^i . Df^i\right|_0$$

avec $k = \sup_{n \in \mathbf{Z}} |Df^n|_0 < +\infty$. Il suit que :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{D^2 f}{Df} \circ f^i . Df^i = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{D^2 f}{Df}\circ g^{-1}\circ R_{i\alpha}\circ g\right).(Dg^{-1}\circ R_{i\alpha}\circ g).Dg.$$

Pour démontrer *c)*, il suffit de voir que, si $n \to +\infty$, $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ R_{i\alpha}$ converge uniformément vers 0, si $\varphi = \frac{D^2 f}{Df} \circ g^{-1}.Dg^{-1}$. Or, ceci résulte de l'unique ergodicité de R_α et de $\int_0^1 \varphi(t)dt = 0$. La proposition résulte alors de (2.2), (2.3) et du fait que nous venons de prouver que $\lim_{n\to+\infty} |D^2 f_n - D^2 R_\alpha|_0 = 0$. ■

(2.7) Rappelons que, pour $0 < \varepsilon < 1$, $C^\varepsilon(\mathbf{T}^1)$ est l'espace des fonctions $\varphi \in C^0(\mathbf{T}^1)$ qui sont höldériennes d'exposant ε, *i.e.* telles que :

$$|\varphi|_\varepsilon = \sup_{x \neq y} \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x-y|^\varepsilon} \right| < +\infty.$$

Pour la norme $|||\varphi|||_\varepsilon = |\varphi|_0 + |\varphi|_\varepsilon$, $C^\varepsilon(\mathbf{T}^1)$ est une algèbre de Banach, et sa topologie s'appelle la C^ε-topologie. On a les lemmes suivants :

Lemme **(2.7.1)**. — *Soit* $\varphi \in C^\varepsilon(\mathbf{T}^1)$, *et soit* $f \in D^0(\mathbf{T}^1)$ *une application lipschitzienne (il existe* $k > 0$ *tel que, pour tous* x, y, *on ait* $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$); *alors* $\varphi \circ f \in C^\varepsilon(\mathbf{T}^1)$, *et on a* :

$$|\varphi \circ f|_\varepsilon \leq k^\varepsilon |\varphi|_\varepsilon.$$

Démonstration. — $|\varphi \circ f(x) - \varphi \circ f(y)| \leq |\varphi|_\varepsilon |f(x) - f(y)|^\varepsilon \leq k^\varepsilon |\varphi|_\varepsilon |x-y|^\varepsilon$. ■

Lemme **(2.7.2)**. — *Soit* $\varphi \in C^\varepsilon(\mathbf{T}^1)$ *avec* $a \leq \varphi \leq b$. *Soit* $\psi : [a, b] \to \mathbf{R}$ *une fonction lipschitzienne de rapport* k. *Alors* $\psi \circ \varphi \in C^\varepsilon(\mathbf{T}^1)$ *et* :

$$|\psi \circ \varphi|_\varepsilon \leq k |\varphi|_\varepsilon.$$

Démonstration. — $|\psi \circ \varphi(x) - \psi \circ \varphi(y)| \leq k|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq k|\varphi|_\varepsilon |x-y|^\varepsilon$. ■

Lemme **(2.7.3)**. — *Soit* (φ_n) *une suite à valeurs dans* $C^\varepsilon(\mathbf{T}^1)$, *convergeant uniformément vers* 0. *Supposons que* $\sup_{n \in \mathbf{N}} |\varphi_n|_\varepsilon < +\infty$ *Alors, pour tout* $\varepsilon' \in [0, \varepsilon[$:

$$\lim_{n\to+\infty} |\varphi_n|_{\varepsilon'} = 0.$$

Démonstration. — On a l'inégalité de convexité VIII.3.1.1 :

$$|\varphi_n|_{\varepsilon'} \leq 2 |\varphi_n|_0^{1-(\varepsilon'/\varepsilon)} |\varphi_n|_\varepsilon^{(\varepsilon'/\varepsilon)};$$

comme $0 \leq \varepsilon' < \varepsilon$, $1 - (\varepsilon'/\varepsilon) > 0$ et par conséquent, si $n \to +\infty$, $|\varphi_n|_0^{1-(\varepsilon'/\varepsilon)} \to 0$, d'où le lemme. ■

Remarque. — Le lemme implique que l'injection de la boule unité de $C^\varepsilon(\mathbf{T}^1)$ dans $C^{\varepsilon'}(\mathbf{T}^1)$ est compacte.

(2.7.4) Si $r \geq 1$ n'est pas entier, on pose :

$$D^r(\mathbf{T}^1) = \{f \in D^{[r]}(\mathbf{T}^1) \mid D^{[r]}f \in C^{r-[r]}(\mathbf{T}^1)\}$$

$D^r(\mathbf{T}^1)$ est alors un groupe. On définit la C^r-topologie comme la topologie borne supérieure de la $C^{[r]}$-topologie et de la topologie $C^{r-[r]}$ sur $D^{[r]}f$.

(2.7.5) On a la

Proposition. — Soient $0<\varepsilon<1$ *et* $f \in D^{2+\varepsilon}(\mathbf{T}^1)$ *avec* $\rho(f)=\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$; *on suppose que* f *est* $C^{1+\varepsilon}$*-conjugué à* R_α; *alors, pour tout* $\varepsilon'<\varepsilon$, *si* $n \to +\infty$, $f_n \to R_\alpha$ *dans la* $C^{2+\varepsilon'}$*-topologie.*

Démonstration. — Par (2.6), $f_n \to R_\alpha$ dans la C^2-topologie. Si on montre que $\sup_{n \in \mathbf{N}} |D^2 f_n|_\varepsilon < +\infty$, alors, par (2.7.3), on en déduit que, pour tout $\varepsilon'<\varepsilon$:

$$\lim_{n \to +\infty} |D^2 f_n|_{\varepsilon'} = 0,$$

donc $f_n \to R_\alpha$ dans la $C^{2+\varepsilon'}$-topologie. Il suffit donc de montrer que $\sup_{n \in \mathbf{N}} |D^2 f_n|_\varepsilon < +\infty$.

On a : $$D^2 f_n = \left[\frac{D^2 f^n}{n} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} Df^i\right)^2} - (Df^n - 1) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{D^2 f^i}{n^2}\right) \cdot \frac{1}{\frac{1}{n^3}\left(\sum_{i=0}^{n-1} Df^i\right)^3}\right] \circ g_n^{-1},$$

et, par (2.7.1) :

$$|||D^2 f_n|||_\varepsilon \leq C \left[\left|\left|\left|\frac{D^2 f^n}{n}\right|\right|\right|_\varepsilon \cdot \left|\left|\left|\frac{1}{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} Df^i\right)}\right|\right|\right|_\varepsilon^2 + |||Df^n - 1|||_\varepsilon \cdot \left|\left|\left|\sum_{i=0}^{n-1} \frac{D^2 f^i}{n^2}\right|\right|\right|_\varepsilon \cdot \left|\left|\left|\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} Df^i}\right|\right|\right|_\varepsilon^3\right]$$

avec $$C = \sup_{n \in \mathbf{N}} |Dg_n^{-1}|_0^\varepsilon.$$

Il suffit de montrer que toutes les $|||\ \ |||_\varepsilon$ dans cette expression sont bornées; nous laissons ces vérifications immédiates (en utilisant les hypothèses) au lecteur. ■

(2.8) Rappelons que $\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$ est un nombre du type de Roth si, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $C_\varepsilon>0$ tel que, pour tout $p/q \in \mathbf{Q}$, on ait $|\alpha-(p/q)| \geq C_\varepsilon/q^{2+\varepsilon}$. Presque tout nombre (pour la mesure de Lebesgue) est du type de Roth.

On a le théorème suivant, qui utilise le théorème de conjugaison locale de l'annexe, et apparaît comme un théorème de régularité.

Théorème. — Soit α *un nombre du type de Roth. Soit* $f \in D^r(\mathbf{T}^1)$ *avec* $3 \leq r \leq \omega$ *(*r *n'est pas nécessairement entier) et* $\rho(f)=\alpha$. *Supposons qu'il existe* $\varepsilon>0$ *tel que* f *soit* $C^{1+\varepsilon}$*-conjugué à* R_α. *Alors* f *est* C^{r-2}*-conjugué à* R_α *(en fait* $C^{r-1-\beta}$ *pour tout* $\beta>0$*). Si* f *est* C^∞ *(resp.* C^ω*), alors* f *est* C^∞*- (resp.* C^ω*-)conjugué à* R_α.

Démonstration. — Par l'annexe A.2 et III.4.1.1 il suit que si $\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$ est tel qu'il existe $\beta \geq 0$ et $C>0$ vérifiant pour tout $p/q \in \mathbf{Q}$, $|\alpha-(p/q)| \geq C/q^{2+\beta}$ (*i.e.* si α satisfait une condition diophantienne), alors, pour tout $\beta'>\beta$, il existe un voisinage $V_{R_\alpha}^{2(1+\beta')}$ dans $F_\alpha^{2(1+\beta')}$ muni de la $C^{2(1+\beta')}$-topologie, tel que tout $f \in F_\alpha^r \cap V_{R_\alpha}^{2(1+\beta')}$ avec $2(1+\beta') \leq r \leq \omega$, soit $C^{r-\beta-1}$-conjugué à R_α (si $r=+\infty$ ou ω, f est C^∞- ou C^ω-conjugué à R_α respectivement). (On rappelle que nous avons posé, pour $r \geq 1$, $F_\alpha^r = \{f \in D^r(\mathbf{T}^1) \mid \rho(f) = \alpha\}$.) Puisque par hypothèse f est $C^{1+\varepsilon}$-conjugué à R_α, par (2.7.5), $f_n = g_n \circ f \circ g_n^{-1} \to R_\alpha$ dans la $C^{2+\varepsilon'}$-topologie pour tout $\varepsilon' < \varepsilon$; de plus, si $f \in D^r(\mathbf{T}^1)$, alors $g_n \in D^r(\mathbf{T}^1)$, donc, si $f \in D^r(\mathbf{T}^1)$, $f_n \in F_\alpha^r$. Soit ε_1 tel que $0 < 2\varepsilon_1 < \varepsilon' < \varepsilon$. Puisque α est du type de Roth, il existe, par ce que nous avons rappelé, un voisinage $V_{R_\alpha}^{2(1+\varepsilon_1)}$ de R_α dans la $C^{2(1+\varepsilon_1)}$-topologie tel que, si $f \in V_{R_\alpha}^{2(1+\varepsilon_1)} \cap F_\alpha^r$, on ait la conclusion du théorème. Comme $2(1+\varepsilon_1) < 2+\varepsilon' < 2+\varepsilon$ et que $f_n \to R_\alpha$ dans la $C^{2+\varepsilon'}$-topologie, pour n assez grand, on a la conclusion pour f_n; or, $g_n \in D^r(\mathbf{T}^1)$, et le théorème en résulte par conjugaison. ■

VIII. — INÉGALITÉ GÉOMÉTRIQUE ET CONJUGAISON HÖLDÉRIENNE

Plan :

Commentaire :

Le paragraphe 1 est l'idée classique ([1]), qui consiste, dans l'étude des sommes :

$$\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i,$$

à grouper les expressions $\varphi_{q_i} = \sum_{j=0}^{q_i-1} \varphi \circ f^j$ et à utiliser l'inégalité de Denjoy-Koksma. Cette idée a été utilisée par Denjoy [3] pour obtenir des majorations de φ_n que nous reproduisons.

Nous utiliserons ces groupements au chapitre suivant dans nos critères de $C^{1+\varepsilon}$-conjugaison.

Le paragraphe (2.1) n'est pas sans rapport avec Finzi [1] (mais la démonstration et l'énoncé sont de nous). Le théorème (2.2) est de P. Deligne [1].

Le paragraphe (4.4) est une amélioration, un peu étonnante, du théorème de Denjoy : si $f \in D^{1+vb}(\mathbf{T}^1)$ et si $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ est de densité bornée, alors $f = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$ avec h homéomorphisme de classe C^β pour un β dépendant de V. Pour ceci, voir aussi XII.2, et X.3.19. En X.3.19 on verra que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, il existe $f \in D^{2-\varepsilon}(\mathbf{T}^1)$ tel que f ne soit pas C^0-conjugué à une rotation. A propos de (4.5) le lecteur se rapportera à XI.4.3.

1. Inégalité de Denjoy-Koksma et majoration de la dérivée première des itérés d'un difféomorphisme.

(1.1) *Rappels.*

Soit $f \in D^0(\mathbf{T}^1)$ avec $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$. Soit μ l'unique mesure de probabilité invariante par $\bar{f}$ sur $\mathbf{T}^1$. Soient $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$ avec $(p, q) = 1$, $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$ et $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

([1]) Lerch, question 1547, *L'intermédiaire math.*, *11* (1904), p. 144-148.

$\mathbf{Z}$-périodique à variation bornée sur $[0, 1]$ avec $\mathrm{Var}(\varphi)=\mathrm{Var}_{[0,1]}(\varphi)$; on a l'inégalité de Denjoy-Koksma (voir VI.3) :

$$\left|\sum_{i=0}^{q-1} \varphi \circ f^i - q\int_{\mathbf{T}^1} \varphi \, d\mu\right|_0 \leq \mathrm{Var}(\varphi).$$

Nous nous proposons d'obtenir, pour n entier, une majoration de

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i - n\int_{\mathbf{T}^1} \varphi \, d\mu\right|_0$$

en fonction de $\mathrm{Var}(\varphi)$ et du développement en fraction continue de $\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$. Dans la suite, on supposera pour simplifier que $\int_{\mathbf{T}^1} \varphi \, d\mu = 0$.

(1.2) *Décomposition canonique de* $\sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i$.

(1.2.1) Posons pour n entier ≥ 1 :

$$\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i.$$

Soit $\alpha = \rho(f) \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$. Soit (pour ce qui va suivre, voir V.7) $\alpha = [a_0, a_1, \ldots]$ son développement en fraction continue : $a_0 = [\alpha]$ et si $i \geq 1$, a_i est un entier ≥ 1.

Soient $\dfrac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ les réduites de α. On a :

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}$$

avec $\dfrac{p_0}{q_0} = \dfrac{a_0}{1}$, $\dfrac{p_1}{q_1} = \dfrac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$, et si $n \geq 2$:

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2},$$
$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}.$$

Dans la suite, les q_n seront toujours les dénominateurs des réduites de α. Rappelons que l'on a, si $n \geq 2$ (par V.7.2.3), $q_n \geq 2^{n/2}$.

(1.2.2) *Décomposition de n.*

Soit n un entier tel que $q_k \leq n < q_{k+1}$; divisons n par q_k :

$$n = b_k q_k + r_k \quad \text{avec} \quad 1 \leq b_k \leq a_{k+1}$$

et $r_k < q_k$. Si on divise r_k par q_{k-1} et ainsi de suite, on obtient $(q_0 = 1)$:

$$\boxed{\begin{array}{l} n = b_k q_k + \ldots + b_i q_i + \ldots + b_0 q_0 \\ \text{avec pour tout } i,\ 0 \leq b_i \leq a_{i+1}, \text{ et :} \\ r_i = \sum_{j=0}^{i-1} b_j q_j < q_i. \end{array}}$$

(1.2.3) *Décomposition canonique de* φ_n.

Pour $q_k \leq n < q_{k+1}$, nous allons grouper dans φ_n les $\varphi_{q_i} = \sum_{j=0}^{q_i-1} \varphi \circ f^j$ en utilisant l'égalité $n = \sum_{i=0}^{k} b_i q_i$.

On a :	$\varphi_n = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{b_i-1} (\varphi_{q_i} \circ f^{r_i + jq_i})$
avec	$r_i = \sum_{j=0}^{i-1} b_j q_j, \quad r_0 = 0,$
et, si $b_i = 0$, on convient que la sommation vide est nulle.	

(1.3) *Inégalités.*

On a la

Proposition **(1.3.1)**. — *Soient* $f \in \mathrm{D}^0(\mathbf{T}^1)$, $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, *et* μ *l'unique mesure de probabilité invariante par* $\bar{f}$ *sur* $\mathbf{T}^1$. *Soient* $q_k \leq n < q_{k+1}$ *et* $n = \sum_{i=0}^{k} b_i q_i$ *comme en* (1.2.1) *et* (1.2.2). *Soit* $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\mathbf{Z}$-*périodique à variation bornée, avec* $\int_{\mathbf{T}^1} \varphi \, d\mu = 0$; *on a*

$$\Big| \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i \Big|_0 \leq \Big(\sum_{i=0}^{k} b_i \Big) \operatorname{Var}(\varphi).$$

Démonstration. — On a par (1.2.3) et l'inégalité de Denjoy-Koksma (1.1) :

$$|\varphi_n|_0 \leq \Big(\sum_{i=0}^{k} b_i \Big) \big(\sup_i |\varphi_{q_i}|_0 \big) \leq \Big(\sum_{i=0}^{k} b_i \Big) \operatorname{Var}(\varphi). \quad \blacksquare$$

(1.3.2) Comme $b_i \leqslant a_{i+1}$, il résulte de l'inégalité précédente que :

$$\boxed{\Big| \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i \Big|_0 \leq \Big(\sum_{i=0}^{k} a_{i+1} \Big) \operatorname{Var}(\varphi).}$$

(1.3.3) Rappelons que $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ est dit de densité bornée d_α si

$$\sup_{k \geq 1} \frac{1}{k} \Big(\sum_{i=0}^{k} a_{i+1} \Big) = d_\alpha < +\infty.$$

L'inégalité (1.3.2) donne, pour $n \geq q_1$ et $q_k \leq n < q_{k+1}$:

$$\boxed{\Big| \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i \Big|_0 \leq k \, d_\alpha \operatorname{Var}(\varphi).}$$

(1.3.4) Soit $\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$, $d_\alpha<+\infty$; si $k\geq 2$, comme $q_k\geq 2^{k/2}$, et $q_k\leq n<q_{k+1}$, on a finalement, si $n\geq q_2$, l'inégalité :

$$\boxed{\left|\sum_{i=0}^{n-1}\varphi\circ f^i\right|_0\leq d_\alpha\,\mathrm{Var}(\varphi)k\leq\frac{d_\alpha}{\operatorname{Log}\sqrt{2}}\mathrm{Var}(\varphi)\operatorname{Log} n.}$$

Remarques **(1.4)**. — *a)* Les nombres de densité bornée sont des nombres qui ont une discrépance en $O(\operatorname{Log} n)$ et on ne peut faire mieux sans autre hypothèse sur φ et f. (Je ne sais pas s'il y a d'autres nombres qui ont une discrépance en $O(\operatorname{Log} n)$.)

b) Pour presque tout α au sens de la mesure de Lebesgue, $d_\alpha=+\infty$ (pour des majorations, voir Kuipers et Niederreiter [1, p. 128]). (Voir aussi XIII.4.10.)

c) Denjoy dans [3] propose une autre inégalité mais il nous semble qu'elle ne change que les constantes.

(1.5) *Majoration de* $|\mathrm{D}f^n|_0$ *pour* f *de classe* P.

Soit $f\in\mathrm{D}^0(\mathbf{T}^1)$ de classe P, $\alpha=\rho(f)\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ et $\mathrm{V}=\mathrm{Var}(\operatorname{Log}\mathrm{D}f)$.

(1.5.1) On a, par (1.2), $\left(\int_{\mathbf{T}^1}\operatorname{Log}\mathrm{D}f\,d\mu=0\right.$ par $\left.\mathrm{VI}.1.1\right)$:

$$\boxed{\begin{array}{ll}\text{si} & q_k\leq n<q_{k+1}\quad\text{et}\quad n=\sum_{i=0}^{k}b_iq_i\\ \text{alors} & \operatorname{Log}\mathrm{D}f^n=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{b_i-1}(\operatorname{Log}\mathrm{D}f^{q_i})\circ f^{r_i+jq_i}\quad\text{s.e.d.}\\ \text{avec} & r_i=\sum_{j=0}^{i-1}b_jq_j\qquad 0\leq b_i\leq a_{i+1}.\end{array}}$$

(1.5.2) On conclut par (1.3.2) et (1.3.4) que si $d_\alpha<+\infty$ et si $q_k\leq n<q_{k+1}$, on a sauf sur un ensemble au plus dénombrable :

$$\boxed{\begin{array}{l}\operatorname{Log}\mathrm{D}f^n\underset{\text{s.e.d.}}{\leq} d_\alpha\mathrm{V}k\leq\dfrac{d_\alpha}{\operatorname{Log}\sqrt{2}}\mathrm{V}\operatorname{Log} n,\\ \text{pour}\quad n\geq q_2.\end{array}}$$

(1.5.3) Ainsi si f est de classe P, $q_k\leq n<q_{k+1}$, $n\geq q_2$:

$$\mathrm{D}f^n\leq e^{d_\alpha\mathrm{V}k}\leq n^{2d_\alpha\mathrm{V}/\operatorname{Log}2}\quad\text{s.e.d.}$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$\boxed{|\mathrm{D}f^n|_{\mathrm{L}^\infty}\leq e^{d_\alpha\mathrm{V}k}\leq n^{2d_\alpha\mathrm{V}/\operatorname{Log}2}.}$$

(1.5.4) Donc, si f est dans $D^{1+vb}(\mathbf{T}^1)$, $q_k \leq n < q_{k+1}$, et $n \geq q_2$, on a :

$$\boxed{|Df^n|_0 \leq e^{d_\alpha Vk} \leq n^{2d_\alpha V/\mathrm{Log}\,2}.}$$

Remarque **(1.6)**. — Par (1.4) *b)* il est vrai, pour presque tout $\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$, que si f est dans $D^{1+vb}(\mathbf{T}^1)$, $\rho(f)=\alpha$, $|Df^n|_0$ croît *a priori* plus vite que tout polynôme en n; ceci compliquera notre démonstration du théorème fondamental en IX.

Théorème **(1.7)**. — *Soit* $f \in D^2(\mathbf{T}^1)$, $\rho(f)=\alpha$ *de densité bornée*; *pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* C_ε *tel que, pour tout entier* $n \geq q_2$, *on ait* :

$$\boxed{|Df^n|_0 \leq C_\varepsilon n^\varepsilon.}$$

(*Si* $\varepsilon \to 0$, *a priori* $C_\varepsilon \to \infty$).

Démonstration. — Par (1.5.4), si $\dfrac{d_\alpha V}{\mathrm{Log}\sqrt{2}} \leq \varepsilon$, où d_α est la densité de α, on a, pour tout $n \geq q_2$:

$$|Df^n|_0 \leq n^\varepsilon.$$

Soit $f_k = g_k \circ f_k \circ g_k^{-1}$ avec $g_k = \dfrac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}(f^i - i\alpha)$. Si $f \in D^r(\mathbf{T}^1)$, alors $g_k \in D^r(\mathbf{T}^1)$, $f_k \in D^r(\mathbf{T}^1)$, et $\rho(f_k)=\alpha$. Nous avons montré en VII.2.5.1, que si $k \to +\infty$, $V_k = \mathrm{Var}(\mathrm{Log}\, Df_k) \to 0$. Soient $\varepsilon > 0$ et k assez grand (mais fixé) pour que $\dfrac{d_\alpha V_k}{\mathrm{Log}\sqrt{2}} \leq \varepsilon$. On a alors, pour tout $n \geq q_2$:

$$|Df_k^n|_0 \leq n^\varepsilon.$$

Or on a $f^n = g_k^{-1} \circ f_k^n \circ g_k$, donc :

$$|Df^n|_0 \leq |Dg_k^{-1}|_0 \, |Dg_k|_0 \, n^\varepsilon. \quad \blacksquare$$

2. Inégalité géométrique.

On suppose dans ce paragraphe que :

$$f \in D^{1+vb}(\mathbf{T}^1), \qquad V = \mathrm{Var}(\mathrm{Log}\, Df) \qquad \rho(f) = \alpha = [a_0, a_1, \ldots] \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}.$$

Les $\dfrac{p_n}{q_n}$ sont les réduites de α. On pose :

$$\hat{f}^{q_n} = f^{q_n} - p_n;$$

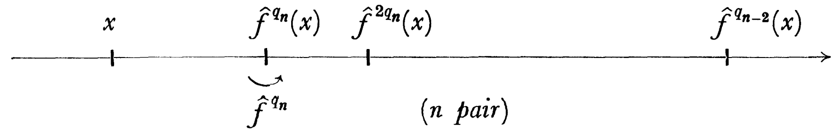
$\hat{f}^{iq_n}$ est l'itérée i-ème de $\hat{f}^{q_n}$.

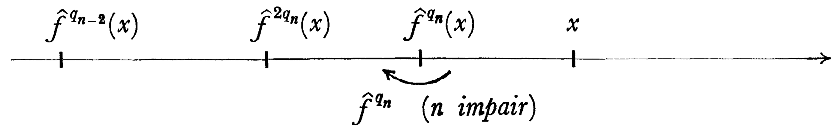
Le théorème suivant, ainsi que (2.2.1), restent valables si on suppose seulement que f est un homéomorphisme de classe P (voir VI.4).

Théorème **(2.1)**. — *Il existe* $C > 0$ *dépendant de* f (*mais non de* n) *tel que*

$$|f^{q_n} - \mathrm{Id} - p_n|_0 \leq C\lambda^n \quad \textit{avec} \quad \lambda = (1+e^{-V})^{-1/2}.$$

Démonstration. — Par V.8.2, les points sont ordonnés comme dans les figures suivantes :





puisque c'est vrai pour R_α, et que f est C^0-conjugué à R_α par un $h \in D^0(\mathbf{T}^1)$ qui préserve l'ordre (théorème de Denjoy). On a donc :

$$|\hat f^{q_n}(x) - x| + |\hat f^{q_n}(\hat f^{q_n}(x)) - \hat f^{q_n}(x)| \leq |\hat f^{q_{n-2}}(x) - x|.$$

Or $Df^{q_n} \geq e^{-V}$, donc (voir VI.4.5) :

$$(*) \qquad (1 + e^{-V})|\hat f^{q_n}(x) - x| \leq |\hat f^{q_{n-2}}(x) - x|.$$

En multipliant les inégalités $(*)$ on obtient :

$$|\hat f^{q_n}(x) - x| \leq \lambda^n \sup(|\hat f^{q_1} - \mathrm{Id}|_0, |f - R_{p_0}|_0). \quad \blacksquare$$

(2.2.1) Le théorème suivant est dû à P. Deligne [1].

Théorème. — *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *et tout entier* $B \geq 2$, *il existe* $W_0 > 0$ *ayant la propriété suivante : si* $f \in D^{1+vb}(\mathbf{T}^1)$, *avec* $\rho(f) = \alpha = [a_0, a_1, \ldots] \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, *vérifie pour un entier* $n_0 \geq 2$, $\sup\limits_{n \geq n_0 - 2} (|\mathrm{Log}\, Df^{q_n}|_0) = W < W_0$, *alors, si l'entier* $n \geq n_0$ *vérifie* $(a_n + 1)(a_{n+1} + 1) \leq B$, *on a, pour tout* $x \in \mathbf{R}$:

$$\left(\frac{b_n}{b_{n-2}}\right)^{1+\varepsilon} \leq \frac{|\hat f^{q_n}(x) - x|}{|\hat f^{q_{n-2}}(x) - x|} \leq \left(\frac{b_n}{b_{n-2}}\right)^{1-\varepsilon}.$$

Idée de la démonstration. — Si W est petit et si $n \geq n_0 - 2$, $\hat f^{q_n}$ a un rapport de Lipschitz voisin de 1 ; donc $\hat f^{kq_n}$, pour k borné, $1 \leq k \leq C$, transforme approximativement les longueurs comme l'isométrie $\hat R^k_{q_n \alpha}$, et, par le théorème de Denjoy, les points

$$x, \hat f^{q_n}(x), \hat f^{2q_n}(x), \ldots, \hat f^{q_{n-2}}(x), \hat f^{2q_{n-2}}(x), \ldots$$

sont enlacés dans le même ordre que les points :

$$0, \hat R_{q_n \alpha}(0), \hat R^2_{q_n \alpha}(0), \ldots, \hat R_{q_{n-2}\alpha}(0), \hat R^2_{q_{n-2}\alpha}(0), \ldots$$

Noter aussi que pour $f = R_\alpha$ on a, même pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\frac{|\hat R_{q_n \alpha}(x) - x|}{|\hat R_{q_{n-2}\alpha}(x) - x|} = \frac{b_n}{b_{n-2}}.$$

Démonstration. — **1)** Rappelons (voir V.7.6) que l'on a :

$$2<\frac{b_{n-2}}{b_n}<(a_n+1)(a_{n+1}+1) \quad \text{et si } n\geq 1, \quad |q_n\alpha-p_n|=\|q_n\alpha\|.$$

2) Pour $1>\varepsilon>0$ et $B\geq 2$, il existe C tel que, pour tout y, $2\leq y\leq B$, il existe des entiers r_1, s_1, r_2, s_2, $1\leq r_i\leq C$, $1\leq s_i\leq C$, pour $i=1,2$, tels que l'on ait :

$$y^{1-\frac{\varepsilon}{2}}\leq\frac{r_1}{s_1}\leq y, \qquad y\leq\frac{r_2}{s_2}\leq y^{1+\frac{\varepsilon}{2}} \quad \text{et} \quad 2\leq\frac{r_i}{s_i} \quad \text{pour } i=1,2.$$

(On considère $q\geq 1$, $q\in\mathbf{N}$ tel que $\frac{1}{q}\leq\frac{1}{4}\operatorname*{Inf}_{2\leq y\leq B}(\mathrm{Min}(y^{1+\frac{\varepsilon}{2}}-y,y-y^{1-\frac{\varepsilon}{2}}))$. Alors, pour $2\leq y\leq B$ il existe $j\in\mathbf{N}$ borné, tel que $\left[\frac{j}{q},\frac{j+1}{q}\right]\subset[y,y^{1+\frac{\varepsilon}{2}}]$. Un raisonnement analogue marche pour $[y^{1-\frac{\varepsilon}{2}},y]$).

3) Soient α et $n\geq n_0$ tels que $(a_n+1)(a_{n+1}+1)\leq B$. On choisit $y=\frac{b_{n-2}}{b_n}$ et on détermine, par **2)**, $\frac{r_1}{s_1}$ tel que l'on ait :

(i) $$\left(\frac{b_{n-2}}{b_n}\right)^{1-\frac{\varepsilon}{2}}\leq\frac{r_1}{s_1}\leq\frac{b_{n-2}}{b_n},$$

avec $1\leq r_1$, $s_1\leq C$ et $2\leq r_1/s_1$.

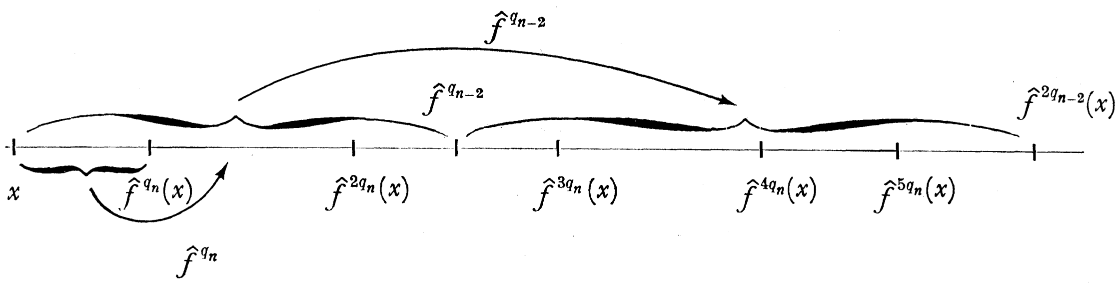
On a alors :

$$|s_1(q_{n-2}\alpha-p_{n-2})|=s_1|q_{n-2}\alpha-p_{n-2}|\geq r_1|q_n\alpha-p_n|.$$

Comme f est C^0-conjugué à R_α par un $h\in D^0(\mathbf{T}^1)$ préservant l'ordre des points, les points suivants :

$$x,\ \hat{f}^{q_{n-2}}(x),\ \ldots,\ \hat{f}^{s_1q_{n-2}}(x),\ \hat{f}^{q_n}(x),\ \ldots,\ \hat{f}^{r_1q_n}(x)$$

sont enlacés, pour x donné, dans le même ordre que les points correspondants pour la rotation R_α $\left(\text{voir dessin pour } r_1=5,\ s_1=2 \text{ et } n \text{ pair } \left(\text{et } \frac{r_1}{s_1}\leq\frac{b_{n-2}}{b_n}\right)\right)$:



De l'inégalité $e^{-W}\leq Df^{q_n}\leq e^{W}$ lorsque $n\geq n_0-2$, et de l'ordre des points, on déduit :

(ii) $$\left(\sum_{i=0}^{r_1-1}e^{-iW}\right)|\hat{f}^{q_n}(x)-x|\leq\left(\sum_{i=0}^{s_1-1}e^{iW}\right)|\hat{f}^{q_{n-2}}(x)-x|.$$

4) Pour $\varepsilon>0$ et $C>0$ donnés, il existe W_0 tel que, si $W<W_0$, on ait, pour les entiers strictement positifs r_i, $s_i \leq C$ $(i=1,2)$, $\frac{r_i}{s_i}\geq 2$ $(i=1,2)$, les inégalités :

$$\text{(iii)} \qquad \frac{s_1}{r_1} \leq \sum_{i=0}^{s_1-1} e^{iW} \Big/ \sum_{i=0}^{r_1-1} e^{-iW} \leq \left(\frac{s_1}{r_1}\right)^{1-\frac{\varepsilon}{2}};$$

$$\text{(iv)} \qquad \frac{s_2}{r_2} \geq \sum_{i=0}^{s_2-1} e^{-iW} \Big/ \sum_{i=0}^{r_2-1} e^{iW} \geq \left(\frac{s_2}{r_2}\right)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}.$$

5) *Soient* $\varepsilon>0$ *et* $B>0$ *donnés; on détermine* $C>0$ *en* 2) *et* W_0 *en* 4). Si $W<W_0$, on déduit de (i), (ii), (iii) :

$$\frac{|\hat{f}^{q_n}(x)-x|}{|f^{q_{n-2}}(x)-x|} \leq \left(\frac{s_1}{r_1}\right)^{1-\frac{\varepsilon}{2}} \leq \left(\frac{b_n}{b_{n-2}}\right)^{\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} \leq \left(\frac{b_n}{b_{n-2}}\right)^{1-\varepsilon}$$

$\left(\text{car } \dfrac{b_n}{b_{n-2}} \leq \dfrac{1}{2}\right)$.

Nous avons démontré l'inégalité :

$$\frac{|\hat{f}^{q_n}(x)-x|}{|f^{q_{n-2}}(x)-x|} \leq \left(\frac{b_n}{b_{n-2}}\right)^{1-\varepsilon}.$$

6) Par le même raisonnement qu'en 3), en remplaçant $\frac{r_1}{s_1}$ par $\frac{r_2}{s_2}$

(*i.e.* $s_2|q_{n-2}\alpha-p_{n-2}| \leq r_2|q_n\alpha-p_n|$),

on a, pour $n \geq n_0$,

$$\text{(v)} \qquad \Big(\sum_{i=0}^{s_2-1} e^{-iW}\Big)\,|\hat{f}^{q_{n-2}}(x)-x| \leq \Big(\sum_{i=0}^{r_2-1} e^{iW}\Big)\,|\hat{f}^{q_n}(x)-x|$$

et

$$\text{(vi)} \qquad \frac{b_{n-2}}{b_n} \leq \frac{r_2}{s_2} \leq \left(\frac{b_{n-2}}{b_n}\right)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}.$$

L'inégalité $\dfrac{|\hat{f}^{q_n}(x)-x|}{|f^{q_{n-2}}(x)-x|} \geq \left(\dfrac{b_n}{b_{n-2}}\right)^{1+\varepsilon'}$, avec $1+\varepsilon' = \left(1+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^2$, résulte du même raisonnement qu'en 5) en utilisant (iv) à (vi). ■

Remarques **(2.2.2)**. — *a)* Il suit de l'inégalité de Denjoy, si $n_0=2$, que :

$$\sup_{n\geq 0} |\mathrm{Log}\, Df^{q_n}|_0 \leq V = \mathrm{Var}(\mathrm{Log}\, Df);$$

donc le théorème (2.2.1) sera valable si $n_0=2$ (*i.e.* : $q_0=1$) et si $V<W_0$.

b) Soit $f \in D^{1+vb}(\mathbf{T}^1)$, $\rho(f)=\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$; si $V=\mathrm{Var}(\mathrm{Log}\, Df) \to 0$, alors $f \to R_\alpha$ dans la C^{1+vb}-topologie (voir X.3.15).

Corollaire **(2.2.3).** — *Soit* $f \in D^2(\mathbf{T}^1)$, $\rho(f) = \alpha = [a_0, a_1, \ldots] \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$. *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *et tout entier* $B > 0$, *il existe un entier* n_0 *tel que, si* $n \geq n_0$ *vérifie* $(a_n + 1)(a_{n+1} + 1) \leq B$, *alors on ait pour tout* $x \in \mathbf{R}$:

$$\left(\frac{b_n}{b_{n-2}}\right)^{1+\varepsilon} \leq \frac{|\hat{f}^{q_n}(x) - x|}{|\hat{f}^{q_{n-2}}(x) - x|} \leq \left(\frac{b_n}{b_{n-2}}\right)^{1-\varepsilon}.$$

Démonstration. — Par VII.2.5.2, si $n \to +\infty$, alors $|Df^{q_n} - 1|_0 \to 0$. Pour $\varepsilon > 0$ et $B > 0$ donnés, on détermine n_0 tel que, si $n \geq n_0 - 2$, $\sup\limits_{n \geq n_0 - 2} |\operatorname{Log} Df^{q_n}| \leq W_0$ et on applique (2.2.1). ■

(2.3) Rappelons (voir V.10.5) que l'on dit que $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, $\alpha = [a_0, a_1, \ldots]$ satisfait à une condition A si :

$$(*) \qquad \begin{cases} \text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } B > 0 \text{ tel que l'on ait, si } n \to +\infty : \\ \displaystyle\prod_{\substack{(1+a_i)(1+a_{i+1}) > B \\ 1 \leq i \leq n}} (1 + a_i)(1 + a_{i+1}) = O(q_n^\varepsilon). \end{cases}$$

Théorème. — *Soit* $f \in D^{1+vb}(\mathbf{T}^1)$; *si* $\rho(f) = \alpha$ *satisfait à une condition* A, *il existe* $W_0 > 0$ *tel que, si* $V = \operatorname{Var}(\operatorname{Log} Df) < W_0$, *on ait, pour* $n \to +\infty$:

$$|f^{q_n} - \mathrm{Id} - p_n|_0 \leq O\left(\frac{1}{q_n^{1-\varepsilon}}\right).$$

Démonstration. — On se donne $\varepsilon > 0$. On choisit B dans la condition $(*)$ (puisque $\alpha \in A$), et W_0 comme en (2.2.2). On a, par (2.2.2) :

$$\textbf{(2.3.1)} \qquad |f^{q_n}(x) - x - p_n| \leq \left(\frac{b_n}{b_{n-2}}\right)^{1-\varepsilon} |f^{q_{n-2}}(x) - x - p_{n-2}|$$

si $(a_n + 1)(a_{n+1} + 1) \leq B$.

On a toujours la majoration triviale :

$$\textbf{(2.3.2)} \qquad |f^{q_n}(x) - x - p_n| \leq |f^{q_{n-2}}(x) - x - p_{n-2}|, \quad \text{si } (a_n + 1)(a_{n+1} + 1) > B$$

(on rappelle que $\dfrac{b_{n-2}}{b_n} < (a_n + 1)(a_{n+1} + 1)$).

On multiplie les inégalités (2.3.1) et (2.3.2). On a, si $n \to +\infty$:

$$|f^{q_n}(x) - x - p_n| \leq C(b_n)^{1-\varepsilon} \prod_{\substack{(a_i+1)(a_{i+1}+1) > B \\ 1 \leq i \leq n}} (1 + a_i)(1 + a_{i+1})$$

avec C une constante (dépendant de $|f^{q_1} - R_{p_1}|_0$ et $|f^{q_0} - R_{p_0}|_0$). On a d'une part :

$$(b_n)^{1-\varepsilon} = |q_n \alpha - p_n|^{1-\varepsilon} < \left(\frac{1}{q_n}\right)^{1-\varepsilon},$$

et de l'autre la condition $(*)$.

On obtient finalement, si $n \to +\infty$:

$$|f^{q_n} - p_n - \mathrm{Id}| = O\left(\frac{1}{q_n^{1-2\varepsilon}}\right). \quad \blacksquare$$

Remarque. — Il n'existe pas de minoration triviale comme (2.3.2). Nous verrons au chapitre suivant (IX.4) qu'il en existe dans certains cas.

Corollaire **(2.4)**. — *Soit* $f \in \mathrm{D}^2(\mathbf{T}^1)$ *avec* $\rho(f) = \alpha$ *satisfaisant à une condition* A. *Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$, *on a, si* $n \to +\infty$:

$$|f^{q_n} - \mathrm{Id} - p_n|_0 = O\left(\frac{1}{q_n^{1-\varepsilon}}\right).$$

Démonstration. — Soit $g_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f^i - i\alpha) \in \mathrm{D}^2(\mathbf{T}^1)$; posons $f_n = g_n \circ f \circ g_n^{-1}$. (On a $\rho(f_n) = \rho(f) = \alpha$.)

Par VII.2.5.1, si $n \to +\infty$, $\mathrm{V}_n = \mathrm{Var}(\mathrm{Log}(\mathrm{D}f_n)) \to 0$. Soit $\varepsilon > 0$ et W_0 déterminé par (2.3).

On choisit n_0 tel que $\mathrm{V}_{n_0} < \mathrm{W}_0$; on déduit de (2.3) que, si $k \to +\infty$:

$$|f_{n_0}^{q_k} - \mathrm{Id} - p_k|_0 \leq O\left(\frac{1}{q_k^{1-\varepsilon}}\right).$$

Or, pour n_0 fixé, g_{n_0} est un difféomorphisme de classe C^1, et

$$f^{q_k} = g_{n_0}^{-1} \circ f_{n_0}^{q_k} \circ g_{n_0}, \quad \text{où} \quad k \to \infty.$$

L'inégalité résulte de

$$\begin{aligned}|f^{q_k} - \mathrm{Id} - p_k|_0 &= |g_{n_0}^{-1} \circ f_{n_0}^{q_k} \circ g_{n_0} - g_{n_0}^{-1} \circ \mathrm{R}_{p_k} \circ g_{n_0}|_0 \\ &\leq |\mathrm{D}g_{n_0}^{-1}|_0 \, |f_{n_0}^{q_k} - \mathrm{Id} - p_k|_0 = O\left(\frac{1}{q_k^{1-\varepsilon}}\right). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Remarque **(2.5)**. — Dans (2.4), même si $f \in \mathrm{D}^\infty(\mathbf{T}^1)$, *a priori*, si $n \to +\infty$:

$$|\mathrm{D}^2 f_n|_0 \to +\infty \quad (!).$$

Néanmoins, étant donné $\varepsilon > 0$, on détermine l'entier n_0 comme dans la démonstration de (2.4), et si $f \in \mathrm{D}^3(\mathbf{T}^1)$, alors $|\mathrm{D}^2 f_{n_0}|_0$ et $|\mathrm{D}^3 f_{n_0}|_0$ sont finis mais peuvent être très grands.

3. Inégalités de convexité.

(3.1) *Inégalité d'interpolation.*

Rappelons que si $0 < \beta < 1$, $\mathrm{C}^\beta(\mathbf{T}^1) = \mathrm{Lip}_\beta(\mathbf{T}^1)$ est l'ensemble des $\varphi \in \mathrm{C}^0(\mathbf{T}^1)$ telles que :

$$|\varphi|_\beta = \sup_{x \neq y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^\beta} < +\infty;$$

(fonctions périodiques höldériennes d'exposant β).

Soit $\mathrm{Lip}_1(\mathbf{T}^1)$ l'ensemble des fonctions périodiques lipschitziennes. On a, pour $\varphi\in\mathrm{Lip}_1(\mathbf{T}^1)$:

$$|\varphi|_{\mathrm{Lip}_1}=\sup_{x\neq y}\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y}\right|=|D\varphi|_{L^\infty}.$$

Proposition **(3.1.1)**. — *Soient* $0<\beta<1$ *et* $\varphi\in\mathrm{Lip}_1(\mathbf{T}^1)$; *on a* :

$$|\varphi|_\beta\leq 2|\varphi|_0^{1-\beta}|\varphi|_{\mathrm{Lip}_1}^\beta,$$

en particulier, si $\varphi\in C^1(\mathbf{T}^1)$:

$$\boxed{|\varphi|_\beta\leq 2|\varphi|_0^{1-\beta}|D\varphi|_0^\beta.}$$

Démonstration. — Soit $t>0$. On a :

$$|\varphi|_\beta=\sup_{x\neq y}\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^\beta}\leq \mathrm{Max}\left(\sup_{|x-y|\geq t}\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|^\beta}\right|,\ \sup_{\substack{|x-y|\leq t\\ x\neq y}}\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|^\beta}\right|\right)$$

$$\leq \mathrm{Max}\left(\frac{2|\varphi|_0}{t^\beta},|D\varphi|_{L^\infty}t^{1-\beta}\right).$$

On choisit t tel que $\dfrac{2|\varphi|_0}{t^\beta}=|D\varphi|_{L^\infty}t^{1-\beta}$, c'est-à-dire $t=\dfrac{2|\varphi|_0}{|D\varphi|_{L^\infty}}$ (si $|D\varphi|_{L^\infty}\neq 0$).

On substitue t, et on obtient la proposition (noter que si $|D\varphi|_{L^\infty}=0$, alors φ est constante et on a la proposition). ∎

Proposition **(3.1.2)**. — *Soient* $0<\beta<1$ *et* $\varphi\in C^\beta(\mathbf{T}^1)$; *si* $\beta'<\beta$, *on a* :

$$\boxed{|\varphi|_{\beta'}\leq 2|\varphi|_0^{1-\frac{\beta'}{\beta}}|\varphi|_\beta^{\frac{\beta'}{\beta}}.}$$

Démonstration. — Analogue à (3.1.1). ∎

(3.2) *Inégalités de Hadamard* (voir Dieudonné ([1], VIII, 14, exercice 2))

Si $\varphi\in C^1(\mathbf{T}^1)$ *et* $D\varphi\in\mathrm{Lip}_\beta(\mathbf{T}^1)$ *avec* $0<\beta\leq 1$, *on a* :

$$\boxed{|D\varphi|_0\leq C_\beta(|\varphi|_0^\beta|D\varphi|_\beta)^{1/(1+\beta)},}$$

où $C_\beta>0$ *est une constante universelle* (*dépendant de* β).

On a aussi, pour $\varphi\in C^2(\mathbf{T}^1)$, *l'inégalité de Hadamard appliquée à* φ :

$$\boxed{|D\varphi|_0\leq(2|\varphi|_0|D^2\varphi|_0)^{1/2}.}$$

Démonstration. — Par la formule des accroissements finis, si $x \in \mathbf{R}$ et $a \in \mathbf{R}_+$, on a (pour $\varphi \in C^2(\mathbf{T}^1)$ on écrit la formule de Taylor à l'ordre 2) :

$$\varphi(x+a)-\varphi(x)=D\varphi(\xi_1)a, \quad \xi_1 \in]x, x+a[$$

$$\varphi(x-a)-\varphi(x)=-D\varphi(\xi_2)a, \quad \xi_2 \in]x-a, x[.$$

Donc $$\varphi(x+a)-\varphi(x-a)=2a\,D\varphi(x)+(D\varphi(\xi_1)-D\varphi(x))a+(D\varphi(\xi_2)-D\varphi(x))a$$

soit

$$(*) \qquad 2a\,|D\varphi(x)| \leq M_0+2M_\beta a^{1+\beta}$$

avec $$M_0=\operatorname*{Max}_{x,a}|\varphi(x+a)-\varphi(x-a)| \leq 2|\varphi|_0 \quad \text{et} \quad M_\beta=|D\varphi|_\beta.$$

On suppose que $M_\beta \neq 0$, sinon φ est constante et on a bien la proposition.

En remplaçant dans $(*)$ a par $(M_0/M_\beta)^{1/(1+\beta)}$, on obtient, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$|D\varphi(x)| \leq \frac{3}{2}((2|\varphi|_0)^\beta |D\varphi|_\beta)^{1/(1+\beta)}.$$

Le $2^{1/2}$, dans le cas où $\varphi \in C^2(\mathbf{T}^1)$, suit par le même raisonnement de la formule de Taylor. ■

4. Conjugaison höldérienne des homéomorphismes de classe P à nombre de rotation de densité bornée.

Lemme **(4.1)**. — $|f^{q_n}-\mathrm{Id}-q_n\alpha|_0 \leq |f^{q_n}-\mathrm{Id}-p_n|_0$.

Démonstration. — Par II.2.4, $f^{q_n}-\mathrm{Id}-q_n\alpha$ s'annule et $f^{q_n}-\mathrm{Id}-p_n$ garde un signe constant puisque f est sans point périodique. On a donc :

$$|f^{q_n}-\mathrm{Id}-q_n\alpha|_0 \leq \operatorname*{Max}_x(\hat{f}^{q_n}(x)-x)-\operatorname*{Min}_x(\hat{f}^{q_n}(x)-x)$$
$$\leq |\hat{f}^{q_n}-\mathrm{Id}|_0. \ ■$$

Proposition **(4.2)**. — *Si* $f \in D^0(\mathbf{T}^1)$ *est de classe* P, $\rho(f)=\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$, *et si* $0<\beta<1$, *il existe une constante* C *dépendant de* f *telle que, pour tout entier* n, *on ait* :

$$|f^{q_n}-\mathrm{Id}-q_n\alpha|_\beta \leq C\lambda^{n(1-\beta)} \quad \textit{avec} \quad \lambda=(1+e^{-V})^{-\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. — L'inégalité de convexité (3.1.1) donne :

$$|f^{q_n}-\mathrm{Id}-q_n\alpha|_\beta \leq 2|f^{q_n}-\mathrm{Id}-q_n\alpha|_0^{1-\beta}.|Df^{q_n}-1|_{L^\infty}^\beta.$$

Or par (2.1) et l'inégalité de Denjoy, on a bien :

$$|f^{q_n}-\mathrm{Id}-q_n\alpha|_\beta \leq 2C(f)^{1-\beta}e^{\beta V}\lambda^{n(1-\beta)}=C\lambda^{n(1-\beta)}$$

avec $C=2C(f)^{1-\beta}e^{\beta V}$, une constante dépendant de f. ■

(4.3) *Homéomorphisme de classe* C^β.

Rappelons que pour $0<\beta<1$, $h\in D^0(\mathbf{T}^1)$ est un homéomorphisme de classe C^β si $h-\mathrm{Id}\in C^\beta(\mathbf{T}^1)$ et $h^{-1}-\mathrm{Id}\in C^\beta(\mathbf{T}^1)$. Ceci équivaut, par IV.6.5.2, à ce qu'il existe $C\geq 1$, tel que pour $0\leq x-y\leq 1$, on ait :

$$\left(\frac{1}{C}(x-y)\right)^{\frac{1}{\beta}}\leq h(x)-h(y)\leq C(x-y)^\beta.$$

On a le

Théorème **(4.4)**. — *Soit* $f\in D^0(\mathbf{T}^1)$ *de classe* P, *avec* $\rho(f)=\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ *de densité bornée* d_α. *Alors* f *est conjugué à* R_α *par un homéomorphisme de classe* C^β, *pour tout* $\beta<\dfrac{|\mathrm{Log}\,\lambda|}{|\mathrm{Log}\,\lambda|+Vd_\alpha}$, *avec* $V=\mathrm{Var}(\mathrm{Log}(Df))$, $\lambda=(1+e^{-V})^{-\frac{1}{2}}$. *De plus* $\beta\to 1$ *si* $V=\mathrm{Var}(\mathrm{Log}\,Df)\to 0$.

Démonstration. — Par IV.6.5.8, il suffit de montrer que

$$\sup_{n\in\mathbf{N}}|f^n-\mathrm{Id}-n\alpha|_\beta<+\infty \quad \text{pour} \quad \beta<\frac{|\mathrm{Log}\,\lambda|}{|\mathrm{Log}\,\lambda|+Vd_\alpha};$$

car ceci implique :

$$\sup_{n\in\mathbf{Z}}|f^n-\mathrm{Id}-n\alpha|_\beta<+\infty \quad \text{par IV.6.5.7}$$

(on peut aussi faire le même raisonnement pour f^{-1}, $\rho(f^{-1})=-\alpha$, puisque, si α est de densité bornée, $-\alpha$ l'est aussi, et que l'on a $V=\mathrm{Var}(\mathrm{Log}\,Df^{-1})=\mathrm{Var}(\mathrm{Log}\,Df)$).

Vérification de $\sup_{n\in\mathbf{N}}|f^n-\mathrm{Id}-n\alpha|_\beta<+\infty$, *si* $\beta<\dfrac{|\mathrm{Log}\,\lambda|}{|\mathrm{Log}\,\lambda|+Vd_\alpha}$. Posons $f-\mathrm{Id}-\alpha=\varphi$; on a :

$$f^n-\mathrm{Id}-n\alpha=\sum_{i=0}^{n-1}\varphi\circ f^i=\varphi_n.$$

On utilise la décomposition canonique de φ_n donné par (1.2.3). Si $q_k\leq n<q_{k+1}$, on a :

$$\varphi_n=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{b_i-1}\varphi_{q_i}\circ f^{r_i+jq_i}$$

avec $r_i=\sum_{i=0}^{i-1}b_jq_j<q_i$ et $n=\sum_{i=0}^{k}b_iq_i$ (si $b_i=0$, on convient que la sommation vide $\sum_{i=0}^{b_i-1}$ est nulle). Donc :

$$|\varphi_n|_\beta\leq\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{b_i-1}|\varphi_{q_i}\circ f^{r_i+jq_i}|_\beta.$$

Par VII.2.7.1, on a :

$$|\varphi_{q_i}\circ f^{r_i+jq_i}|_\beta\leq|Df^{r_i+jq_i}|_{L^\infty}^\beta\,.\,|\varphi_{q_i}|_\beta.$$

Par (4.2), on a :

$$|f^{q_i}-\mathrm{Id}-q_i\alpha|_\beta\equiv|\varphi_{q_i}|_\beta\leq C\lambda^{i(1-\beta)}.$$

Par (1.5.3), puisque $r_i+jq_i<q_{i+1}$ et $0\leq j\leq b_i-1$, pour $i\geq 2$, on a :

$$|Df^{r_i+jq_i}|_{L^\infty}\leq e^{d_\alpha Vi},$$

donc
$$|\varphi_{q_i}\circ f^{r_i+jq_i}|_\beta\leq C\lambda^{i(1-\beta)}e^{\beta d_\alpha Vi}=Ce^{i[(\mathrm{Log}\,\lambda)(1-\beta)+Vd_\alpha\beta)]}$$
$$\leq Ce^{i\gamma}$$

avec $\gamma=(\mathrm{Log}\,\lambda)(-\beta+1)+Vd_\alpha\beta$. On a donc :

$$|\varphi_n|_\beta\leq C\sum_{i=0}^{k}a_{i+1}e^{i\gamma},$$

C étant une constante indépendante de k. Puisque $\lambda=(1+e^{-V})^{-\frac{1}{2}}$, on a $\mathrm{Log}\,\lambda<0$, donc on aura :

$$\gamma<0 \quad \text{si} \quad -|\mathrm{Log}\,\lambda|(1-\beta)+Vd_\alpha\beta<0,$$

soit
$$\beta<\frac{|\mathrm{Log}\,\lambda|}{|\mathrm{Log}\,\lambda|+Vd_\alpha}.$$

On a alors
$$|\varphi_n|_\beta\leq C\sum_{i=0}^{k}a_{i+1}e^{i\gamma}\leq C\sum_{i=0}^{\infty}a_{i+1}e^{i\gamma}=B<+\infty$$

($B<+\infty$, puisque α est de densité bornée).

Donc, puisque B est indépendant de n :

$$\sup_{n\in\mathbf{N}}|f^n-\mathrm{Id}-n\alpha|_\beta<+\infty.$$

Finalement, puisque $\lambda=(1+e^{-V})^{-\frac{1}{2}}$ tend vers $\frac{1}{\sqrt{2}}$ si V tend vers 0, il en résulte que, si $V\to 0$:

$$\frac{|\mathrm{Log}\,\lambda|}{|\mathrm{Log}\,\lambda|+Vd_\alpha}\to 1. \quad \blacksquare$$

Théorème **(4.5)**. — *Soit* $f\in D^2(\mathbf{T}^1)$ *avec* $\rho(f)=\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ *de densité bornée* d_α; *alors pour tout* $\beta<1$, f *est conjugué à* R_α *par un homéomorphisme de classe* C^β.

Remarque. — La fonction $(\sin 2\pi x).\mathrm{Log}|\sin 2\pi x|\in C^\beta(\mathbf{T}^1)$ pour tout $\beta<1$, mais cette fonction n'est pas C^1, ni lipschitzienne.

Démonstration. — Cela résulte de VII.2.5.1 et (4.4) par le même raisonnement qu'en (1.7) (ou (2.4)). ■

On obtient dans un cas particulier une autre démonstration de (2.4).

Corollaire **(4.6)**. — *Soit* $f\in D^2(\mathbf{T}^1)$ *avec* $\rho(f)=\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ *de densité bornée; alors pour* $1>\varepsilon>0$, *il existe* $C_\varepsilon>0$ *tel que, pour tout entier n, on ait :*

$$\boxed{|f^{q_n}-\mathrm{Id}-p_n|_0\leq\frac{C_\varepsilon}{q_n^{1-\varepsilon}}.}$$

Démonstration. — On déduit du théorème (4.5) que $f = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$, où h^{-1} est un homéomorphisme de classe C^β pour tout $\beta < 1$. Donc, par (4.3), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que, si $0 \leq |x-y| \leq 1$, on ait :

$$|h^{-1}(x) - h^{-1}(y)| \leq C_\varepsilon |x-y|^{1-\varepsilon}.$$

On a :

$$f^{q_n} - \mathrm{Id} - p_n = (h^{-1} \circ R_{q_n\alpha - p_n} \circ h) - (h^{-1} \circ h);$$

donc pour $x \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} |f^{q_n}(x) - x - p_n| &\leq |h^{-1}(q_n\alpha - p_n + h(x)) - h^{-1}(h(x))| \\ &\leq C_\varepsilon |q_n\alpha - p_n|^{1-\varepsilon} \leq C_\varepsilon / q_n^{1-\varepsilon}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

IX. — DÉRIVÉE SECONDE DES ITÉRÉES : DU THÉORÈME DE DENJOY AU THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA CONJUGAISON DIFFÉRENTIABLE DES DIFFÉOMORPHISMES DU CERCLE A DES ROTATIONS

Plan :

Commentaire :

En 1, nous introduisons un critère de $C^{1+\varepsilon}$-conjugaison qui est trivialement nécessaire. Le 2 est un peu miraculeux : c'est une identité qui donne l'inégalité, C étant une constante :

$$|D^2 f^{q_n}|_0 \leq C q_n^{1/2} \sup_{0 \leq i < q_n} |Df^i|_0, \qquad (f \in D^3(\mathbf{T}^1), \rho(f) = \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}).$$

Il faut utiliser, pour démontrer la C^1-conjugaison à R_α, le fait que f appartient à $D^r(\mathbf{T}^1)$, $r > 2$, et que $\rho(f) = \alpha$ est bon, car en XI nous montrerons que, pour tout α qui n'est pas de type constant, il existe un $f \in D^2(\mathbf{T}^1)$ avec $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, qui n'est pas C^1-conjugué à R_α. On peut raisonnablement conjecturer que ce résultat de non-C^1-conjugaison est même vrai si α est de type constant.

Il est aussi très probable que, pour presque tout $\alpha = \rho(f)$, l'appartenance de f à $D^{2+\varepsilon}(\mathbf{T}^1)$ implique que f est C^1-conjugué à R_α.

En 3 et 4, nous obtenons l'inégalité :

$$\text{si } f \in D^3(\mathbf{T}^1), \quad \rho(f) = \alpha \in A, \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0, \quad \text{on a } \sup_{0 \leq i < q_n} |Df^i|_0 = O(q_n^\varepsilon)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Le paragraphe 5 est le théorème fondamental de la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. Il démontre une conjecture de V. I. Arnold [1].

Des problèmes analogues ont été posés par de nombreux mathématiciens sous forme de problèmes et de questions, par exemple A. Denjoy, F. John, J. Moser, etc. Il est clair que le problème s'est posé à partir du théorème d'A. Denjoy en 1932, mais surtout à partir des travaux de Kolmogorov, Arnold et Moser.

Si $f \in D^3(\mathbf{T}^1)$, $\rho(f) = \alpha \in A$, on a, pour tout $\varepsilon > 0$:

a) $\qquad |f^{q_n} - R_{p_n}|_0 = O(q_n^{-1+\varepsilon})$ (par VIII.2.4),

b) $\qquad |Df^{q_n}|_0 = O(q_n^\varepsilon)$ (par 4),

donc

c) $\qquad |D^2 f^{q_n}|_0 = O(q_n^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ (par 2).

Par l'inégalité de convexité de Hadamard, on obtient finalement :

$$|Df^{q_n}-1|_0=O(q_n^{-\frac{1}{4}+\varepsilon});$$

on peut appliquer le critère 1 et obtenir que f est $C^{1+\delta}$-conjugué à R_α pour tout $\delta<1/5$. Puis on applique VII.2.8 pour obtenir le théorème fondamental.

Le lecteur trouvera cette démonstration sous forme de plan dans Herman [3] (voir aussi Herman [4] et P. Deligne [1]). (Il est à noter que *a)* et *b)* sont vrais pour $f\in D^2(\mathbf{T}^1)$ si $\rho(f)=\alpha$ est de densité bornée, donc quelque chose comme 2 est nécessaire par XI.4.3.)

En 6, nous donnerons une démonstration entièrement élémentaire du théorème fondamental avec l'exclusion des cas $r\in]3,4[$ et $r=\omega$. La démonstration est basée sur l'identité (2.1). Il reste que l'annexe A.2 est mieux adaptée aux cas où il y a des paramètres et surtout qu'elle donne un théorème local pour $\mathbf{T}^n$, $n\geq 1$, $n\in\mathbf{N}$.

Je remercie tout particulièrement L. Carleson et P. Deligne pour une simplification dans la démonstration de (2.2).

L. Carleson [1] a donné une bien meilleure majoration que 4 pour presque tout nombre $\alpha=\rho(f)$, avec $f\in D^2(\mathbf{T}^1)$ seulement. Elle est basée sur une démonstration effective de VII.1 (pour presque tout nombre de rotation).

Nota. — On appliquera constamment VII.2.7.1 à (2.7.4) sans référence (voir aussi IV.3).

Convention. — On désigne aussi la sommation $\sum_{i=0}^{n-1}$ par $\sum_{i<n}$.

1. Critères de $C^{1+\varepsilon}$-conjugaison à une rotation.

$(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ désigne dans la suite les dénominateurs des réduites de $\alpha=\rho(f)\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$, et les p_n/q_n sont les réduites de α.

Proposition (**1.1**). — *Soit* $f=h^{-1}\circ R_\alpha\circ h$, *avec* $h\in D^1(\mathbf{T}^1)$ *et* $\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$. *Si* $n\to+\infty$, *on a* :

$$|f^{q_n}-\mathrm{Id}-p_n|_0=O\left(\frac{1}{q_{n+1}}\right)<O(1/q_n).$$

Démonstration. — On écrit :

$$(*)\qquad f^{q_n}-\mathrm{Id}-p_n=h^{-1}\circ R_{q_n\alpha-p_n}\circ h-h^{-1}\circ h.$$

Donc, puisque h est un difféomorphisme C^1 :

$$|f^{q_n}-\mathrm{Id}-p_n|_0\leq|Dh^{-1}|_0\,|q_n\alpha-p_n|.\quad\blacksquare$$

Proposition (**1.2**). — *Soient* $0<\beta\leq 1$ *et* $f\in h^{-1}\circ R_\alpha\circ h$ *avec* $h\in D^{1+\beta}(\mathbf{T}^1)$, $\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$. *Si* $n\to+\infty$, *on a* :

$$|Df^{q_n}-1|_0=O(q_{n+1}^{-\beta})\leq O(q_n^{-\beta}).$$

Démonstration. — Il suffit de dériver $(*)$. $\blacksquare$

Proposition (**1.3**). — *Si* $f\in D^{1+vb}(\mathbf{T}^1)$, *il existe* $C>0$ *tel que l'on ait pour tout* n :

$$\frac{1}{C}|\mathrm{Log}\,Df^{q_n}|_0\leq|Df^{q_n}-1|_0\leq C|\mathrm{Log}\,Df^{q_n}|_0.$$

Démonstration. — Cela résulte de l'inégalité de Denjoy et de ce que e^x (resp. $\mathrm{Log}\, x$) est lipschitzienne sur l'intervalle $[-V, V]$ (resp. $[e^{-V}, e^V]$). Noter que la fonction $Df^{q_n}-1$ s'annule en au moins un point. ∎

Proposition **(1.4)**. — *Si* $0<\beta<1$ *et* $f\in D^{1+\beta}(\mathbf{T}^1)$ *vérifient* $\sup_{n\in\mathbf{N}} |\mathrm{Log}\, Df^{q_n}|_\beta<+\infty$ *ou* $\lim_n |Df^{q_n}-1|_\beta=0$, *il existe* $C>0$ *tel que l'on ait pour tout* n :

$$\frac{1}{C}|\mathrm{Log}\, Df^{q_n}|_\beta\leq|Df^{q_n}-1|_\beta\leq C|\mathrm{Log}\, Df^{q_n}|_\beta.$$

Démonstration. — Même argument que pour (1.3). ∎

(1.5) Rappelons (voir V.7.8.3) que $\alpha=[a_0, a_1, \ldots]\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ est du type de Roth si, pour tout $\delta>0$, on a :

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1}q_i^{-\delta}<+\infty.$$

Nous nous proposons de prouver les réciproques des conditions nécessaires précédentes de $C^{1+\beta}$-conjugaison.

Proposition **(1.6)**. — *Soit* $f\in D^1(\mathbf{T}^1)$; *si* $\rho(f)=\alpha$ *est du type de Roth et s'il existe* $\beta>0$ *tel que l'on ait, pour* $n\to+\infty$:

$$|Df^{q_n}-1|_0=O(q_n^{-\beta})$$

f *est* C^1*-conjugué à* R_α.

Démonstration. — Par le même argument qu'en (1.3) il existe une constante $C>0$ telle que l'on ait pour tout n :

$$|\mathrm{Log}\, Df^{q_n}|_0\leq Cq_n^{-\beta}.$$

Par IV.6.1, il est nécessaire et suffisant de démontrer :

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} |\mathrm{Log}\, Df^n|_0<+\infty.$$

Si $q_k\leq n<q_{k+1}$, on écrit la décomposition canonique VIII.1.5.1, c'est-à-dire :

(1.6.1)
$$\boxed{\begin{array}{l} n=\sum_{i=0}^{k} b_i q_i \quad \text{et} \quad \mathrm{Log}\, Df^n=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{b_i-1}(\mathrm{Log}\, Df^{q_i})\circ f^{r_i+jq_i} \\ \text{avec} \quad r_i=\sum_{j=0}^{i-1} b_j q_j;\quad 0\leq b_i\leq a_{i+1}. \end{array}}$$

Il suit que $$|\mathrm{Log}\, Df^n|_0\leq C\sum_{i=0}^{k} a_{i+1}q_i^{-\beta}\leq C\sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1}q_i^{-\beta}=B<+\infty$$

($B<+\infty$ puisque α est du type de Roth). On a bien, puisque B est indépendant de n :

$$\sup_n |\mathrm{Log}\, Df^n|_0<+\infty. \quad ∎$$

Remarque. — Si on remplace dans (1.6) la majoration $|Df^{q_n}-1|_0=O(q_n^{-\beta})$ par $|Df^{q_n}-1|_0=O(q_{n+1}^{-1})$, (1.6) devient vrai pour tout $\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$.

Proposition **(1.7)**. — *Soient* $0<\beta<1$, $\gamma>0$, *et* $f\in D^{1+\beta}(\mathbf{T}^1)$ *avec* $\rho(f)=\alpha$ *du type de Roth; si, pour* $n\to+\infty$, *on a* :

$$|Df^{q_n}-1|_\beta=O(q_n^{-\gamma}),$$

f *est* $C^{1+\beta}$*-conjugué à* R_α.

Démonstration. — La condition implique que :

$$|Df^{q_n}-1|_0=O(q_n^{-\gamma}).$$

On a donc par (1.6) :

(1.7.1) $$\sup_n|Df^n|_0=k<+\infty.$$

Par IV.6.3.3, pour que f soit $C^{1+\beta}$-conjugué à R_α, il faut et il suffit que l'on ait :

$$\sup_n|\operatorname{Log} Df^n|_\beta<+\infty.$$

On écrit, pour $q_k\leq n<q_{k+1}$, $n=\sum_{i=0}^{k}b_iq_i$, $0\leq b_i\leq a_{i+1}$, et la décomposition canonique (1.6.1).

Par (1.7.1), (1.4) et IV.3.3, il existe $C>0$ tel que pour tout i et tout j on ait :

$$|\operatorname{Log} Df^{q_i}\circ f^j|_\beta\leq Cq_i^{-\gamma}.$$

Il en résulte que :

$$|\operatorname{Log} Df^n|_\beta\leq C\sum_{i=0}^{k}a_{i+1}q_i^{-\gamma}\leq C\sum_{i=0}^{\infty}a_{i+1}q_i^{-\gamma}<+\infty. \quad \blacksquare$$

Théorème **(1.8)**. — *Soit* $f\in D^2(\mathbf{T}^1)$ *avec* $\rho(f)=\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ *du type de Roth. S'il existe* $\delta>0$ *tel que, pour* $n\to+\infty$, *on ait* :

$$|Df^{q_n}-1|_0=O(q_n^{-\delta}),$$

f *est* $C^{1+\varepsilon}$*-conjugué à* R_α *pour tout* $\varepsilon<\delta/(1+\delta)$.

Démonstration. — Par (1.6), f est C^1-conjugué à R_α. Comme :

$$D^2f^n=Df^n\Big(\sum_{i<n}(D\operatorname{Log} Df)\circ f^i.Df^i\Big),$$

on déduit de (1.7.1) que, pour $n\to+\infty$, on a :

(1.8.1) $$|D^2f^n|_0=O(n).$$

En appliquant l'inégalité de convexité VIII.3.1.1 (*i.e.* pour $\varphi\in C^1(\mathbf{T}^1)$,

$$|\varphi|_\varepsilon\leq 2|\varphi|_0^{1-\varepsilon}|D\varphi|_0^\varepsilon)$$

à la fonction $Df^{q_n}-1$, on obtient :

$$|Df^{q_n}-1|_\varepsilon\leq 2|Df^{q_n}-1|_0^{1-\varepsilon}|D^2f^{q_n}|_0^\varepsilon.$$

Par (1.8.1) et l'hypothèse, on a, si $n \to +\infty$:

$$|Df^{q_n} - 1|_\varepsilon = O(q_n^{-\delta(1-\varepsilon)} q_n^\varepsilon) = O(q_n^{-\delta(1-\varepsilon)+\varepsilon}).$$

Donc, pour $-\delta(1-\varepsilon)+\varepsilon<0$ (*i.e.* $\varepsilon<\delta/(1+\delta)$) on a, si $n\to+\infty$, $|Df^{q_n}-1|_\varepsilon = O(q_n^{-\gamma})$ avec $\gamma>0$ et on applique (1.7). ■

Proposition **(1.9)**. — *Soient* $0<\beta<1$, $\varphi \in C^\beta(\mathbf{T}^1)$, *et* α *du type de Roth. On suppose qu'il existe* $\delta>0$ *tel que, si* $n\to+\infty$, *on ait* :

$$|\varphi_{q_n}|_0 = |\sum_{i<q_n} \varphi\circ R_{i\alpha}|_0 = O(q_n^{-\delta}).$$

Alors il existe $\psi \in C^\varepsilon(\mathbf{T}^1)$ *pour tout* $\varepsilon<\gamma=\delta\beta/(1+\delta)$, *tel que l'on ait* :

$$\psi - \psi\circ R_\alpha = \varphi.$$

Démonstration. — On raisonne comme en (1.8) en utilisant la décomposition canonique, la majoration triviale $|\sum_{i<n} \varphi\circ R_{i\alpha}|_\beta = O(n)$, l'inégalité de convexité VIII.3.1.2 et IV.6.7. ■

2. Dérivée seconde des itérées.

Théorème **(2.1)** (*Identité remarquable*). — *Si* $f \in D^3(\mathbf{T}^1)$, *on a* :

$$D^2(\operatorname{Log} Df^n) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi\circ f^i . (Df^i)^2 + \frac{1}{2}(D \operatorname{Log} Df^n)^2$$

avec $\varphi = D^2(\operatorname{Log} Df) - \frac{1}{2}(D\operatorname{Log} Df)^2$.

Démonstration. — On a :

(2.1.1) $$\operatorname{Log} Df^n = \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{Log} Df\circ f^i.$$

Soit en dérivant :

(2.1.2) $$\frac{D^2 f^n}{Df^n} = D\operatorname{Log} Df^n = \sum_{i=0}^{n-1} D(\operatorname{Log} Df\circ f^i) = \sum_{i=0}^{n-1} (D\operatorname{Log} Df)\circ f^i . Df^i.$$

Si on dérive de nouveau, on obtient :

$$D^2 \operatorname{Log} Df^n = \sum_{i=0}^{n-1} (D^2\operatorname{Log} Df)\circ f^i (Df^i)^2 + \sum_{i=0}^{n-1} (D\operatorname{Log} Df)\circ f^i . D^2 f^i.$$

Or par (2.1.2) :

$$\sum_{i=0}^{n-1} (D\operatorname{Log} Df)\circ f^i . D^2 f^i = \sum_{i=1}^{n-1} (D\operatorname{Log} Df)\circ f^i . Df^i (\sum_{j=0}^{i-1} (D\operatorname{Log} Df)\circ f^j . Df^j).$$

On voit apparaître (!!) $\frac{1}{2}$ fois les termes croisés de $(\sum_{i=0}^{n-1}(\mathrm{D}\operatorname{Log}\mathrm{D}f)\circ f^i.\mathrm{D}f^i)^2$. On a finalement :

$$\sum_{i=0}^{n-1}(\mathrm{D}\operatorname{Log}\mathrm{D}f)\circ f^i.\mathrm{D}^2f^i=\frac{1}{2}[\sum_{i=0}^{n-1}(\mathrm{D}\operatorname{Log}\mathrm{D}f)\circ f^i.\mathrm{D}f^i]^2-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}((\mathrm{D}\operatorname{Log}\mathrm{D}f)\circ f^i)^2(\mathrm{D}f^i)^2$$

$$=\frac{1}{2}(\mathrm{D}\operatorname{Log}\mathrm{D}f^n)^2-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}((\mathrm{D}\operatorname{Log}\mathrm{D}f)\circ f^i)^2(\mathrm{D}f^i)^2. \quad \blacksquare$$

Corollaire **(2.2)**. — *Si* $f\in\mathrm{D}^3(\mathbf{T}^1)$, *on a l'inégalité* :

$$|\mathrm{D}\operatorname{Log}\mathrm{D}f^n|_0\leq \mathrm{C}n^{\frac{1}{2}}\sup_{0\leq i<n}|\mathrm{D}f^i|_0$$

avec $$\mathrm{C}=(2|\varphi|_0)^{1/2} \quad \textit{et} \quad \varphi=\mathrm{D}^2\operatorname{Log}\mathrm{D}f-\frac{1}{2}(\mathrm{D}\operatorname{Log}\mathrm{D}f)^2.$$

Démonstration. — En un point x_0 où $\frac{1}{2}(\mathrm{D}\operatorname{Log}\mathrm{D}f^n)^2$ est maximum, on a :

$$\mathrm{D}^2(\operatorname{Log}\mathrm{D}f^n)(x_0)=0\ !!$$

Donc, par (2.1) :

$$\frac{1}{2}|\mathrm{D}\operatorname{Log}\mathrm{D}f^n|_0^2\leq|\sum_{i=0}^{n-1}\varphi\circ f^i.(\mathrm{D}f^i)^2|_0\leq|\varphi|_0 n\sup_{0\leq i<n}|\mathrm{D}f^i|_0^2. \quad \blacksquare$$

Remarque. — C'est le facteur $n^{\frac{1}{2}}$ qui n'est pas immédiat, un terme n serait trivial à partir de (2.1.2).

Théorème **(2.3)**. — *Si* $f\in\mathrm{D}^3(\mathbf{T}^1)$, $\rho(f)=\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$, *on a, pour tout* n :

$$|\mathrm{D}^2f^{q_n}|_0\leq e^{\mathrm{V}}\mathrm{C}q_n^{\frac{1}{2}}\sup_{0\leq i<q_n}|\mathrm{D}f^i|_0$$

(C *est défini en* (2.2)).

Démonstration. — On a $\mathrm{D}^2f^{q_n}=\mathrm{D}f^{q_n}.\mathrm{D}\operatorname{Log}\mathrm{D}f^{q_n}$ et on applique (2.2) et l'inégalité de Denjoy. ■

Proposition **(2.4)**. — *Si* $f\in\mathrm{D}^3(\mathbf{T}^1)$ *est* C^1*-conjugué à* R_α,

$$|\mathrm{D}\operatorname{Log}\mathrm{D}f^{q_n}|_0\leq(\mathrm{C}_1q_n|\operatorname{Log}\mathrm{D}f^{q_n}|_0)^{\frac{1}{2}}$$

avec $\mathrm{C}_1=4|\varphi|_0\sup_{i\in\mathbf{N}}|\mathrm{D}f^i|_0^2<+\infty$ *et* $\varphi=\mathrm{D}^2(\operatorname{Log}\mathrm{D}f)-\frac{1}{2}(\mathrm{D}\operatorname{Log}\mathrm{D}f)^2$.

Démonstration. — On applique l'inégalité de Hadamard VIII.3.2 à la fonction $\mathrm{D}\operatorname{Log}\mathrm{D}f^{q_n}$. On a :

$$|\mathrm{D}\operatorname{Log}\mathrm{D}f^{q_n}|_0\leq(2|\operatorname{Log}\mathrm{D}f^{q_n}|_0|\mathrm{D}^2\operatorname{Log}\mathrm{D}f^{q_n}|_0)^{\frac{1}{2}}.$$

Or, par (2.1) et la démonstration de (2.2) :

$$|\mathrm{D}^2 \operatorname{Log} \mathrm{D}f^{q_n}|_0 \leq 2\,\Big|\sum_{i=0}^{q_n-1} \varphi\circ f^i.(\mathrm{D}f^i)^2\Big|_0.$$

Puisque f est C^1-conjugué à R_α, on a $\sup\limits_{i\in\mathbf{N}} |\mathrm{D}f^i|_0^2 < +\infty$, donc

$$|\mathrm{D}^2 \operatorname{Log} \mathrm{D}f^{q_n}|_0 \leq 2q_n |\varphi|_0 \sup_{0\leq i<q_n} |\mathrm{D}f^i|_0^2$$

avec $\mathrm{C}_1 < +\infty$. ■

3. Notations et rappels.

(3.1) On suppose que $f\in\mathrm{D}^0(\mathbf{T}^1)$, $\rho(f)=\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$, $\alpha=[a_0, a_1, \ldots]$; on note $\dfrac{p_n}{q_n}$ les réduites de α.

On pose $\hat{f}^{q_n}=f^{q_n}-p_n$, et $\hat{f}^{iq_n}$ l'itérée i-ème de $\hat{f}^{q_n}$.

On pose $m_{q_n}=\min\limits_{x\in\mathbf{R}} |f^{q_n}(x)-x-p_n| = \min\limits_{x\in\mathbf{R}} |\hat{f}^{q_n}(x)-x|>0$.

(3.2) Pour tout entier n, *on choisit* $y_n\in\mathbf{R}$, tel que $m_{q_n}=|\hat{f}^{q_n}(y_n)-y_n|$.

(3.3) Si $i\geq 1$, on pose (cela dépend du choix de y_n et de f) :

$$m_{iq_n}=|\hat{f}^{iq_n}(y_n)-\hat{f}^{(i-1)q_n}(y_n)| \quad \text{et} \quad m_{-q_n}=|y_n-\hat{f}^{-q_n}(y_n)|.$$

Noter que l'on a, pour $i\geq 0$:

$$\hat{f}^{q_n}([\hat{f}^{iq_n}(y_n), \hat{f}^{(i-1)q_n}(y_n)])=[\hat{f}^{(i+1)q_n}(y_n), \hat{f}^{iq_n}(q_n)],$$

où $[\hat{f}^{iq_n}(y_n), \hat{f}^{(i-1)q_n}(y_n)]$ désigne l'intervalle compact de $\mathbf{R}$ d'extrémités $\hat{f}^{iq_n}(y_n)$ et $\hat{f}^{(i-1)q_n}(y_n)$.

(3.4) Noter que, puisque $m_{q_n}=\min\limits_{x\in\mathbf{R}} |\hat{f}^{q_n}(x)-x|$, on a pour $i=-1, 1, \ldots$, l'inégalité :

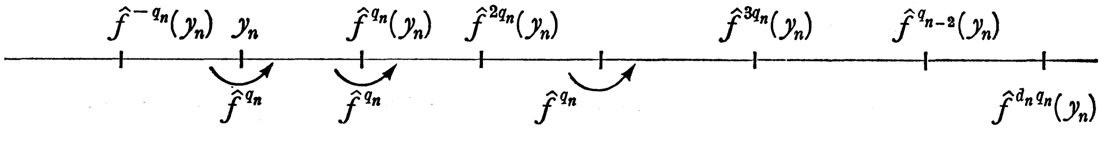
$$m_{iq_n}\geq m_{q_n}.$$

(3.5) On pose $|q_n\alpha-p_n|=b_n$ et $(a_n+1)(a_{n+1}+1)=d_n$. On a par V.7.6 :

$$2<\frac{b_{n-2}}{b_n}<d_n.$$

(3.6) Si f est C^0-conjugué à R_α, les points $\hat{f}^{iq_n}(y_n)$ sont dans le même ordre que dans la figure où l'on a représenté le cas n pair (si n est impair, on fait une symétrie par rapport à y_n).

Pour R_α cet ordre des points résulte de (3.5) (*i.e.* $|q_{n-2}\alpha-p_n|<d_n|q_n\alpha-p_n|$).



(3.7) Par V.10.5, si α satisfait à une condition A, pour tout $C>0$ et tout $\varepsilon>0$, il existe $B>0$ tel que, si $n\to+\infty$:

$$\prod_{\substack{d_i\geq B\\ 1\leq i\leq n}} C(d_i+C)=O(q_n^{\varepsilon}).$$

On rappelle que l'on a posé $d_n=(a_n+1)(a_{n+1}+1)$.

(3.8) Ceci implique que α est du type de Roth et aussi que, pour tout $\varepsilon>0$ et tout $C>0$, si $n\to+\infty$, $C(d_n+C)=O(q_n^{\varepsilon})$.

Enfin pour tout $\varepsilon>0$, il existe $C_\varepsilon>0$, tel que l'on ait $|q_n\alpha-p_n|\geq C_\varepsilon q_n^{-1-\varepsilon}$.

(3.9) Par VIII.2.4, si $f\in D^2(\mathbf{T}^1)$, et si $\rho(f)=\alpha$ satisfait à une condition A, il existe, pour tout $\varepsilon_1>0$, une constante C_1 dépendant de ε_1 et de f telle que, pour tout n, on ait :

$$\boxed{|f^{q_n}-\mathrm{Id}-p_n|_0\leq C_1/q_n^{1-\varepsilon_1}.}$$

(3.10) *A priori* si $\varepsilon_1\to 0$, $C_1\to+\infty$.

On supposera dans la suite que $\varepsilon_1\leqslant 1/100$ $\left(\text{en fait } \varepsilon_1<\frac{1}{2} \text{ convient}\right)$.

(3.11) Par VI.6.3, si $f\in D^{1+vb}(\mathbf{T}^1)$, $\rho(f)=\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$, on a :

$$\boxed{\sup_{0\leq i<q_{n+1}} |Df^i|_0\leq e^V|f^{q_n}-\mathrm{Id}-p_n|_0/m_{q_n}.}$$

($V=\mathrm{Var}(\mathrm{Log}\, Df)$).

(3.12) Soient x et z dans $\mathbf{R}$; on définit $k\in\mathbf{R}_+$ par :

$$|x-z|=km_{q_n}.$$

Par (2.2), (3.9), (3.11) et la formule de la moyenne, si $f\in D^3(\mathbf{T}^1)$ et si $\rho(f)=\alpha$ satisfait à une condition A, on a l'inégalité :

$$\boxed{\frac{Df^{q_n}(x)}{Df^{q_n}(z)}\leq\exp(Eq_n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_1}k)}$$

avec $E=CC_1e^V$ (C étant la constante de (2.2) et C_1 celle de (3.9)). On suppose que $\varepsilon_1\leqslant 1/100$; pour ceci voir (3.10).

(3.13) Pour ε_1 fixé, E est peut-être très grand (voir (3.10)) mais est fini.

(3.14) Par VIII.2.2.3; si $f \in D^2(\mathbf{T}^1)$, $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $B > 0$, il existe un entier $N_0 \geq 2$ tel que, si $n \geq N_0$ vérifie $d_n \leq B$, on ait l'inégalité :

$$\boxed{m_{q_n} \geq \left(\frac{b_n}{b_{n-2}}\right)^{1+\varepsilon} m_{q_{n-2}}.}$$

4. Majoration de $|Df^n|_0$.

(4.1) Dans la suite de ce paragraphe, on suppose que $f \in D^3(\mathbf{T}^1)$ et que $\rho(f) = \alpha$ satisfait à une condition A. Si $i \geq 2$, on pose (voir (3.3)) :

$$C_i(n) = \sup_{2 \leq j \leq i} (m_{jq_n} / m_{q_n}).$$

On a évidemment $C_i(n) \geq 1$ et $C_i(n) \leq C_{i+1}(n)$. On se propose de démontrer le

Théorème **(4.2)**. — *Il existe un entier n_0 (dépendant de f, $|D^2 f|_0$, $|D^3 f|_0$ et de α) tel que, si $n \geq n_0$, on ait :*

$$C_{d_n+1}(n) \leq e^{q_n^{-\delta}} \quad \textit{où} \quad d_n = (a_n + 1)(a_{n+1} + 1) \quad \textit{et} \quad \delta = 1/16.$$

Remarque. — Le n_0 dépend de la constante E de (3.12) et donc du choix de ε_1 dans (3.9) (cf. (3.10) et (3.13)).

Pour démontrer (4.2) nous avons besoin des propositions qui suivent :

Proposition **(4.3)**. — *Il existe un entier n_1 tel que, si $n \geq n_1$, on ait :*

$$m_{2q_n} / m_{q_n} \leq e^{q_n^{-\delta_1}} \quad \textit{avec} \quad \delta_1 = 1/4.$$

Démonstration. — Par la formule des accroissements finis (utiliser (3.3) et $D\hat{f}^{q_n} = Df^{q_n}$) on a :

$$\frac{m_{2q_n}/m_{q_n}}{m_{q_n}/m_{-q_n}} = \frac{Df^{q_n}(z_1)}{Df^{q_n}(z_2)}$$

avec $z_1 \in [y_n, \hat{f}^{q_n}(y_n)]$ et $z_2 \in [\hat{f}^{-q_n}(y_n), y_n]$.

Or, par l'inégalité de Denjoy, $e^{-V} \leq Df^{q_n} \leq e^V$, donc $|z_2 - z_1| \leq (e^V + 1) m_{q_n}$. Par (3.12) on a :

$$\frac{Df^{q_n}(z_1)}{Df^{q_n}(z_2)} \leq \exp(E(e^V + 1) q_n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_1}),$$

(ε_1 est fixé, $\varepsilon_1 \leqslant 1/100$).

Si $n \geq n_1$ (n_1 dépend de E, voir (3.13)) on a :

$$E(e^V + 1) q_n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_1} \leq q_n^{-\delta_1}.$$

La proposition en résulte car on déduit de (3.4) :

$$\frac{m_{2q_n}}{m_{q_n}} \leq \frac{m_{2q_n}/m_{q_n}}{m_{q_n}/m_{-q_n}}. \quad \blacksquare$$

Proposition **(4.4).** — *Il existe un entier* n_2 *tel que, si* $n \geq n_2$, *on ait, pour* $i \geq 3$, *les inégalités* :

$$\textbf{(4.5)}\ (i) \qquad \frac{m_{iq_n}}{m_{(i-1)q_n}} \leq \exp((i-1)C_{i-1}(n)q_n^{-\delta_1});$$

$$\textbf{(4.6)}\ (i) \qquad \frac{C_i(n)}{C_{i-1}(n)} \leq \exp((i-1)C_{i-1}(n)q_n^{-\delta_1})$$

avec $\delta_1 = 1/4$. ($C_i(n)$ *est défini en* (4.1).)

Démonstration. — Nous allons démontrer la proposition par récurrence sur i. Comme la démonstration du cas $i=3$ est presque identique, à partir de (4.3), à celle du cas $i \geq 3$, nous traiterons seulement le cas « i implique $i+1$ et $i \geq 3$ ». On montre d'abord que (4.5) (i) et (4.6) (i) impliquent (4.5) $(i+1)$.

Par (3.3) et la formule des accroissements finis, on a :

$$\frac{m_{(i+1)q_n}/m_{iq_n}}{m_{iq_n}/m_{(i-1)q_n}} = \frac{Df^{q_n}(z_1)}{Df^{q_n}(z_2)}$$

où $z_1 \in [\hat{f}^{iq_n}(y_n), \hat{f}^{(i-1)q_n}(y_n)]$ et $z_2 \in [\hat{f}^{(i-1)q_n}(y_n), \hat{f}^{(i-2)q_n}(y_n)]$. Ce qui entraîne, par (4.1) :

$$|z_2 - z_1|/m_{q_n} \leq C_i(n) + C_{i-1}(n) \leq 2C_i(n).$$

Par (3.12), on a :

$$\textbf{(4.7)} \qquad \frac{Df^{q_n}(z_1)}{Df^{q_n}(z_2)} \leq \exp(2Eq_n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_1}C_i(n)).$$

On suppose que n est assez grand pour que :

$$\textbf{(4.8)} \qquad 2Eq_n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_1} \leq 1/q_n^{\delta_1} \quad \text{avec} \quad \delta_1 = 1/4 \quad (\varepsilon_1 \leq 1/100)$$

(cela ne dépend pas de $i = 3, 4, \ldots$).

Il suit de l'hypothèse de récurrence, de (4.7), (4.8), et (4.1), que l'on a :

$$\textbf{(4.5)}\ (i+1) \qquad m_{(i+1)q_n}/m_{iq_n} \leq \exp(C_i(n)q_n^{-\delta_1} + (i-1)C_{i-1}(n)q_n^{-\delta_1})$$
$$\leq \exp(iC_i(n)q_n^{-\delta_1}).$$

Il faut démontrer (4.6) $(i+1)$.

Par (4.5) $(i+1)$ on a :

$$\textbf{(4.9)}\ (i+1) \qquad \frac{m_{(i+1)q_n}}{m_{q_n}} \leq \exp(iC_i(n)q_n^{-\delta_1})\frac{m_{iq_n}}{m_{q_n}}$$
$$\leq \exp(iC_i(n)q_n^{-\delta_1})C_i(n).$$

Il y a deux cas :

a) Soit $C_{i+1}(n)=C_i(n)$; alors (4.6) $(i+1)$ est trivialement vérifiée.

b) $C_{i+1}(n)=m_{(i+1)q_n}/m_{q_n}$; dans ce cas (4.6) $(i+1)$ est précisément (4.9).

(Pour le cas $i=3$, noter que l'on a par le même raisonnement (4.9) (3), et le cas $i=3$ résulte de (4.3).) ■

Proposition **(4.10)**. — *Il existe un entier n_3 tel que, si $n\geq n_3$, on ait, pour $2\leq i\leq d_n+1$, l'inégalité :*

$$\operatorname{Log} C_i(n)\leq(i-1)q_n^{-\delta_2}$$

avec $\delta_2=1/8$.

Démonstration. — *Par récurrence sur i.*

Pour $i=2$, c'est une conséquence directe de (4.3). Montrons que si la proposition est vraie pour i, elle est vraie pour $i+1$. Par (4.6) $(i+1)$ on a (si $n\geq \sup(n_1, n_2)$) :

$$\operatorname{Log} C_{i+1}(n)\leq iC_i(n)q_n^{-\delta_1}+\operatorname{Log} C_i(n) \tag{4.11}$$

et par l'hypothèse de récurrence :

$$C_i(n)\leq e^{(i-1)q_n^{-\delta_2}}\leq e^{d_n q_n^{-\delta_2}}.$$

Puisque α est du type de Roth (voir (3.8)), si n est assez grand (mais indépendant de i), on a :

$$d_n q_n^{-\delta_2}\leq 1.$$

(4.11) donne alors, avec l'hypothèse de récurrence :

$$\operatorname{Log} C_{i+1}(n)\leq ieq_n^{-\delta_1}+(i-1)q_n^{-\delta_2}\leq d_n eq_n^{-\delta_1}+(i-1)\, q_n^{-\delta_2} \tag{4.12}$$

avec $\delta_1=1/4$, $\delta_2=1/8$.

On choisit, par (3.8), n assez grand pour que l'on ait $d_n eq_n^{-\delta_1}\leq q_n^{-\delta_2}$. En remplaçant dans (4.12) on obtient :

$$\operatorname{Log} C_{i+1}(n)\leq iq_n^{-\delta_2},$$

et ceci achève la récurrence pour $n\geq n_3$ assez grand (mais indépendant de i). ■

(4.13) *Démonstration de* (4.2). — Par (4.10) on a, si $n\geq \sup(n_1, n_2, n_3)$:

$$C_{d_n+1}(n)\leqslant e^{d_n q_n^{-\delta_2}} \quad \text{avec} \quad \delta_2=1/8.$$

Il suffit de choisir $n_0\geq \sup(n_1, n_2, n_3)$ et assez grand pour que l'on ait $d_n q_n^{-\delta_2}\leq q_n^{-\delta}$ avec $\delta_2=1/8$ et $\delta=1/16$; c'est possible puisque α est du type de Roth (voir (3.8)). ■

Proposition **(4.14)**. — *Si* $n\geq n_0$, *on a :*

$$m_{q_{n-2}}\leq e^{q_n^{-\delta}}(d_n+1)m_{q_n}\leq e(d_n+1)m_{q_n}.$$

Démonstration. — Par (3.6) on a :

$$\sum_{j=1}^{d_n+1} |\hat{f}^{jq_n}(y_n) - \hat{f}^{(j-1)q_n}(y_n)| \geq |\hat{f}^{q_{n-2}}(y_n) - y_n| \geq m_{q_{n-2}}$$

et la proposition résulte de (4.2). ■

Proposition **(4.15)**. — *Soit* $f \in D^3(\mathbf{T}^1)$, $\rho(f) = \alpha \in A$. *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $C_\varepsilon \geq 0$ *tel que, pour tout entier* n, *on ait* :

$$m_{q_n} \geq C_\varepsilon / q_n^{1+\varepsilon}.$$

Démonstration. — On se donne $\varepsilon' > 0$.

1) Par (3.7) on détermine B et $D_{\varepsilon'} > 0$ pour que l'on ait (ici $C = e$) :

$$\prod_{\substack{d_i \geq B \\ 1 \leq i \leq n}} e(d_i + 1) = O(q_n^{\varepsilon'}) \quad \text{et} \quad |q_n \alpha - p_n| \geq D_{\varepsilon'} q_n^{-1-\varepsilon'}.$$

2) Ceci détermine l'entier N_0 de (3.14), tel que si l'entier n vérifie $n \geq N_0$ et $d_n \leq B$, alors on ait :

$$m_{q_n} \geq \left(\frac{b_n}{b_{n-2}}\right)^{1+\varepsilon'} m_{q_{n-2}}.$$

3) On choisit ε_1 dans (3.9) tel que $\varepsilon_1 \leq 1/100$. Par (3.9), ceci détermine n_0 dans (4.2).

4) On pose $m_{q_n} = \min_{x \in \mathbf{R}} |f(x)^{q_n} - p_n - x|$. On a, par (4.14) :

$$\textbf{(4.16)} \qquad m_{q_n} \geq e^{-1}(d_n + 1)^{-1} m_{q_{n-2}} \geq e^{-1}(d_n + 1)^{-1} \left(\frac{b_n}{b_{n-2}}\right)^{1+\varepsilon'} m_{q_{n-2}}$$

pour $n \geq n_0$ et $(a_n + 1)(a_{n+1} + 1) > B$.

On a, par (3.14) (ou **2)**) :

$$\textbf{(4.17)} \qquad m_{q_n} \geq \left(\frac{b_n}{b_{n-2}}\right)^{1+\varepsilon'} m_{q_{n-2}} \quad \text{si} \quad (a_n + 1)(a_{n+1} + 1) \leq B \quad \text{et si} \quad n \geq N_0.$$

Si on multiplie les inégalités (4.16) et (4.17), on a :

$$m_{q_n} \geq C_2 b_n^{1+\varepsilon'} \Big(\prod_{\substack{d_i > B \\ 1 \leq i \leq n}} e(d_i + 1) \Big)^{-1}$$

C_2 étant une constante dépendant des petites valeurs de n (*i.e.* $n \leq \sup(n_0, N_0)$).

L'inégalité avec $1 + \varepsilon = (1 + \varepsilon')^2 + \varepsilon'$ résulte alors de **1)**. ■

Théorème **(4.18)**. — *Soit* $f \in D^3(\mathbf{T}^1)$ *avec* $\rho(f) = \alpha \in A$. *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *on a, si* $n \to +\infty$:

$$\sup_{0 \leq i < q_n} |Df^i|_0 = O(q_n^\varepsilon).$$

Démonstration. — Cela résulte immédiatement de (3.9), (3.11) et (4.15). ■

5. Théorème fondamental de la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations.

Le théorème suivant démontre la conjecture de V. I. Arnold [1].

(5.1) *Théorème fondamental. — Soient* $3 \leq r \leq \omega$ *(non nécessairement entier), et* $f \in \mathrm{D}^r(\mathbf{T}^1)$ *tel que* $\rho(f) = \alpha$ *satisfasse à une condition* A; *alors, pour tout* $\beta > 0$, f *est* $\mathrm{C}^{r-1-\beta}$*-conjugué à* R_α; *de plus, si* f *est un difféomorphisme de classe* C^∞ (resp. C^ω), *alors* f *est* C^∞-(resp. C^ω)*-conjugué à* R_α.

Démonstration. — Commençons par montrer que f est $\mathrm{C}^{1+\varepsilon}$-conjugué à R_α pour tout $\varepsilon < 1/5$. Par VIII.2.4 on a, pour tout $\varepsilon > 0$, si $n \to +\infty$:

$$|f^{q_n} - \mathrm{Id} - p_n|_0 = O(q_n^{-1+\varepsilon}).$$

Par (4.18), pour tout $\varepsilon > 0$, on a, si $n \to +\infty$:

$$\sup_{0 \leq i < q_n} |\mathrm{D}f^i|_0 = O(q_n^\varepsilon).$$

Par (2.3), pour tout $\varepsilon > 0$, si $n \to +\infty$:

$$|\mathrm{D}^2 f^{q_n}|_0 = O(q_n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

Appliquons l'inégalité de Hadamard VIII.3.2 à $f^{q_n} - \mathrm{Id} - p_n$:

$$|\mathrm{D}f^{q_n} - 1|_0 \leq (2\,|f^{q_n} - \mathrm{Id} - p_n|_0\,|\mathrm{D}^2 f^{q_n}|_0)^{1/2}.$$

En remplaçant, on obtient finalement, pour tout $\varepsilon > 0$, si $n \to +\infty$:

$$|\mathrm{D}f^{q_n} - 1|_0 = O(q_n^{-\frac{1}{4}+\varepsilon}).$$

On applique (1.8) d'où il suit que f est $\mathrm{C}^{1+\varepsilon}$-conjugué à R_α pour tout $\varepsilon < \frac{1}{4}\Big/\left(1 + \frac{1}{4}\right) = 1/5$. Le théorème résulte alors de VII.2.8. ∎

Corollaire **(5.2)** *(Décomposition du groupe des difféomorphismes du cercle). — Soit* α *un nombre satisfaisant à une condition* A $\left(\textit{par exemple le nombre d'or } \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. *Alors tout* $f \in \mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbf{T}^1)$ (resp. $f \in \mathrm{Diff}_+^\omega(\mathbf{T}^1)$) *s'écrit de façon unique comme* $f = \mathrm{R}_\lambda \circ g^{-1} \circ \mathrm{R}_\alpha \circ g$ *avec* $g \in \mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbf{T}^1, 0)$. *De plus, l'application* $f \mapsto (\lambda, g)$ *est continue pour la* C^∞*-topologie (et même dépend de façon* C^∞ *de paramètres variant dans une variété* C^∞ *de dimension finie).*

Démonstration. — Soient $f \in \mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbf{T}^1)$, $\lambda_\alpha(f)$ l'unique élément de $\mathbf{T}^1$ tel que $\rho(\mathrm{R}_{-\lambda_\alpha(f)} \circ f) = \alpha$ (*i.e.* $f_1 = \mathrm{R}_{-\lambda_\alpha(f)} \circ f \in \mathrm{F}_\alpha^\infty = \{f \in \mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbf{T}^1) \mid \rho(f) = \alpha\}$). L'application $f \mapsto \lambda_{\alpha(f)}$ est continue pour la C^∞-topologie et bien définie par III.4.1. Par (5.1), $f_1 = g^{-1} \circ \mathrm{R}_\alpha \circ g$

avec $g \in \mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbf{T}^1, 0)$ (resp. $g \in \mathrm{Diff}_+^\omega(\mathbf{T}^1, 0)$). Il faut voir que l'application $f_1 \mapsto g$ est continue, pour la C^∞-topologie, de F_α^∞ dans $\mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbf{T}^1, 0)$. Pour montrer que cette application est continue, par conjugaison, il suffit de voir qu'elle est continue en un point $f_0 \in F_\alpha^\infty = O_\alpha^\infty(\mathbf{T}^1) = \{g^{-1} \circ R_\alpha \circ g \mid g \in \mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbf{T}^1)\}$. Or F_α^∞ est un fermé de $\mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbf{T}^1)$; c'est un espace topologique polonais qui est donc un espace topologique de Baire. Soient $f_1 \in F_\alpha^\infty$, et $\widetilde{S}_n(f_1) = S_n(f_1) - S_n(f_1)(0)$, avec $S_n(f_1) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f_1^i - i\alpha)$; $n \geq 1$, $n \in \mathbf{N}$. Noter que $f_1 \in F_\alpha^\infty \mapsto \widetilde{S}_n(f_1) \in \mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbf{T}^1, 0)$ est continu pour la C^∞-topologie. Par IV.5.1.2 (et (5.1)), pour tout $f_1 \in F_\alpha^\infty$, si $n \to \infty$, on a $\widetilde{S}_n(f_1) \to g$, dans la C^∞-topologie. Donc l'application $f_1 \in F_\alpha^\infty \mapsto g \in \mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbf{T}^1, 0)$ est de première classe de Baire sur F_α^∞ et a donc un point de continuité.

Pour la dépendance C^∞ de paramètres C^∞ variant dans une variété C^∞ voir Sergeraert [1] et Herman [2] (où il suffit d'ajouter un paramètre). Dans le cas C^ω, pour la dépendance C^ω de paramètres C^ω variant dans une variété C^ω de dimension finie, voir V. I. Arnold [1]. ■

Corollaire **(5.3)**. — *Tout* $f \in \mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbf{T}^1)$ (resp. $\mathrm{Diff}_+^\omega(\mathbf{T}^1)$) *s'écrit comme le produit de deux commutateurs dans* $\mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbf{T}^1)$ (resp. $\mathrm{Diff}_+^\omega(\mathbf{T}^1)$).

Démonstration. — Cela résulte de (5.2) et du fait que tout R_α s'écrit dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ comme un commutateur $(\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R}) \subset \mathrm{Diff}_+^\omega(\mathbf{T}^1))$. ■

Remarque. — $D^\infty(\mathbf{T}^1)$ (resp. $D^\omega(\mathbf{T}^1)$) *est égal à son groupe des commutateurs.* En effet il suffit de voir que les éléments du centre $C = \{R_p \mid p \in \mathbf{Z}\}$ s'écrivent comme des commutateurs. Or $C \subset \widetilde{\mathrm{PSL}}(2, \mathbf{R}) \subset D^\omega(\mathbf{T}^1)$, où $\widetilde{\mathrm{PSL}}(2, \mathbf{R})$ est le revêtement universel de

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R}) \subset \mathrm{Diff}_+^\omega(\mathbf{T}^1).$$

Or $\widetilde{\mathrm{PSL}}(2, \mathbf{R})$ est égal à son groupe des commutateurs.

6. Démonstration élémentaire de la conjecture d'Arnold en C^∞.

(6.1) Dans la démonstration de (5.1) nous avons démontré que f est $C^{1+\varepsilon}$-conjugué à R_α puis nous avons appliqué VII.2.8 qui s'appuie sur l'annexe A.2. Nous allons donner une démonstration élémentaire sans utiliser A.2. Mais nous n'obtiendrons pas les cas suivants : $r \in]3, 4[$, et $r = \omega$ (en fait je pense qu'il ne doit pas être difficile d'obtenir ces cas par ce qui suit; surtout pour $r = \omega$ il suffirait de suivre les constantes mais cela alourdirait la démonstration) (1).

(1) Le cas $r \in]3, 4[$ résulte aussi des méthodes qui suivent.

Les théorèmes suivants vont apparaître comme des théorèmes de régularité (comme d'ailleurs l'est VII.2.8).

Hypothèse **(6.2)**. — *On suppose dans la suite que* $r=3$, $r=4$ *ou* $4 \leq r < +\infty$, *et* $f \in \mathrm{D}^r(\mathbf{T}^1)$, *que* $f = h^{-1} \circ \mathrm{R}_\alpha \circ h$ *avec* $h \in \mathrm{D}^1(\mathbf{T}^1)$, *et que* α *est du type de Roth.*

Nous allons voir que $h \in \mathrm{D}^{r-1-\varepsilon}(\mathbf{T}^1)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Théorème **(6.3)**. — *Si* $f \in \mathrm{D}^3(\mathbf{T}^1)$, *alors* $h \in \mathrm{D}^{2-\varepsilon}(\mathbf{T}^1)$ *pour tout* $\varepsilon > 0$.

Démonstration. — *a)* Il faut d'abord voir que $h \in \mathrm{D}^{1+\varepsilon}(\mathbf{T}^1)$ pour un $\varepsilon > 0$. Puisque f est C^1-conjugué à R_α on a par (1.1) :

$$|f^{q_n} - \mathrm{Id} - p_n|_0 = O\left(\frac{1}{q_{n+1}}\right) < O\left(\frac{1}{q_n}\right),$$

et par (2.3) $|\mathrm{D}^2 f^{q_n}|_0 = O(q_n^{\frac{1}{2}})$.

Par l'inégalité de Hadamard appliquée à $f^{q_n} - \mathrm{Id} - p_n$ on a :

$$|\mathrm{D}f^{q_n} - 1|_0 \leq (2\,|f^{q_n} - \mathrm{Id} - p_n|_0\,|\mathrm{D}^2 f^{q_n}|_0)^{1/2} = O(q_n^{-1/4}).$$

On applique (1.8) et on conclut que f est $\mathrm{C}^{1+\varepsilon}$-conjugué (pour tout $\varepsilon < 1/5$) à R_α.

Lemme **(6.3.1)**. — *Si* $h \in \mathrm{D}^{1+\beta}(\mathbf{T}^1)$, $0 < \beta < 1$, *alors* $h \in \mathrm{D}^{1+\delta}(\mathbf{T}^1)$ *pour tout*

$$\delta < g(\beta) = \beta \Big/ \left(\frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}\right).$$

Démonstration. — Par (1.2) on a :

1) $$|\mathrm{Log}\, \mathrm{D}f^{q_n}|_0 = O(q_n^{-\beta}).$$

Par (2.4) on a :

2) $$|\mathrm{D}\, \mathrm{Log}\, \mathrm{D}f^{q_n}|_0 \leq \mathrm{C}(q_n\,|\mathrm{Log}\, \mathrm{D}f^{q_n}|_0)^{1/2},$$

C étant une constante. **1)** et **2)** donnent :

$$|\mathrm{D}\, \mathrm{Log}\, \mathrm{D}f^{q_n}|_0 = O(q_n^{-\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2}}).$$

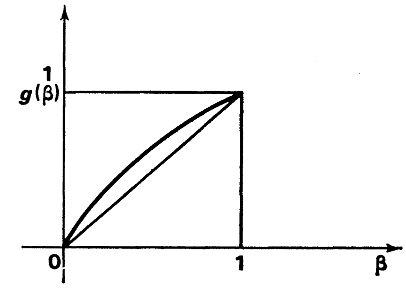
Evaluons $|\mathrm{Log}\, \mathrm{D}f^{q_n}|_\delta$ par l'inégalité de convexité VIII.3.1.1. On a :

$$\begin{aligned}|\mathrm{Log}\, \mathrm{D}f^{q_n}|_\delta &\leq 2\,|\mathrm{Log}\, \mathrm{D}f^{q_n}|_0^{1-\delta}\,|\mathrm{D}\, \mathrm{Log}\, \mathrm{D}f^{q_n}|_0^{\delta} \\ &= O(q_n^{-\left(\beta(1-\delta) - \left(-\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2}\right)\delta\right)}) = O(q_n^{-\gamma}).\end{aligned}$$

Or, $\gamma > 0$ si $\delta < \beta \Big/ \left(\frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}\right)$. On applique alors (1.7). ■

Fin de la démonstration de (6.3).

b) L'application $g:[0,1]\to[0,1]$ définie par $g(\beta)=\beta\Big/\left(\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2}\right)$ est croissante, et 1 est son unique point fixe attractif. Il suffit d'itérer le lemme (6.3.1) pour obtenir le théorème. ■



Lemme **(6.4).** — *Soient* $\varphi\in C^{1-\varepsilon}(\mathbf{T}^1)$ *pour tout* $\varepsilon>0$, *vérifiant* $\int_0^1\varphi(x)\,dx=0$, *et* α *du type de Roth. Si* $n\to+\infty$, *on a, pour tout* $\varepsilon>0$:

$$\Big|\sum_{i=0}^{n-1}\varphi\circ R_{i\alpha}\Big|_0=O(n^{\varepsilon}).$$

Démonstration. — Par VI.3.2 on a, pour tout $\varepsilon'>0$, si $k\to+\infty$:

$$\Big|\sum_{i=0}^{q_k-1}\varphi\circ R_{i\alpha}\Big|_0=O(q_k^{\varepsilon'}).$$

On déduit de la décomposition canonique VIII.1.2.3 que, si $q_{k-1}\leq n<q_k$:

$$\Big|\sum_{i=0}^{n-1}\varphi\circ R_{i\alpha}\Big|_0\leq\Big(\sum_{i=0}^{k-1}a_{i+1}\Big)O(q_{k-1}^{\varepsilon'})\leq\Big(\sum_{i=0}^{k-1}a_{i+1}\Big)O(n^{\varepsilon'}).$$

Or $\sum_{i=0}^{k-1}a_i\leq k\sup_{1\leq i\leq k}a_i\leq O(n^{\varepsilon'}\,\mathrm{Log}\,n)$ puisque $a_{i+1}=O(q_i^{\varepsilon'})$ (α est du type de Roth et par V.7.2.3). ■

Théorème **(6.5).** — *Si* $f\in D^4(\mathbf{T}^1)$, *il existe* $\varepsilon>0$ *tel que* $h\in D^{2+\varepsilon}(\mathbf{T}^1)$.

Démonstration. — Rappelons que :

1) $$\mathrm{Log}\,Df^n=\sum_{i<n}\mathrm{Log}\,Df\circ f^i,$$

2) $$D\,\mathrm{Log}\,Df^n=\sum_{i<n}(D\,\mathrm{Log}\,Df)\circ f^i.Df^i;$$

par (2.1) :

3) $$D^2\,\mathrm{Log}\,Df^n=\sum_{i<n}\varphi\circ f^i.(Df^i)^2+\frac{1}{2}(D\,\mathrm{Log}\,Df^n)^2,$$

avec $\varphi=D^2(\mathrm{Log}\,Df)-\frac{1}{2}(D\,\mathrm{Log}\,Df)^2$.

En dérivant (6.3) $(r=4)$ on obtient :

4) $$\mathrm{D}^3 \operatorname{Log} \mathrm{D}f^n = \sum_{i<n} \mathrm{D}\varphi\circ f^i . (\mathrm{D}f^i)^3 + 2\sum_{i<n} \varphi\circ f^i . (\mathrm{D}f^i . \mathrm{D}^2 f^i) + (\mathrm{D} \operatorname{Log} \mathrm{D}f^n)(\mathrm{D}^2 \operatorname{Log} \mathrm{D}f^n).$$

Par **3)** on a $h \in \mathrm{D}^{2-\varepsilon}(\mathbf{T}^1)$, d'où il suit :

5) $$\sup_n |\mathrm{D}f^n|_0 < +\infty, \quad \text{et aussi} \quad \sup_n |\operatorname{Log} \mathrm{D}f^n|_0 < +\infty \quad (\text{voir IV.1});$$

6) $$\sup_n |\operatorname{Log} \mathrm{D}f^n|_{1-\varepsilon} < +\infty;$$

7) $$|\operatorname{Log} \mathrm{D}f^{q_n}|_0 = O(q_n^{-1+\varepsilon}) \quad (\text{voir } (1.2)).$$

Puisque $f^i = h^{-1}\circ \mathrm{R}_{i\alpha}\circ h$, on a $\mathrm{D}f^i = \mathrm{D}h^{-1}\circ \mathrm{R}_{i\alpha}\circ h . \mathrm{D}h$.

On remplace dans **2)** et on obtient :

8) $$(\mathrm{D} \operatorname{Log} \mathrm{D}f^n)\circ h^{-1} = \mathrm{D}h\circ h^{-1} . (\sum_{i<n} \psi\circ \mathrm{R}_{i\alpha})$$

avec $\psi = (\mathrm{D} \operatorname{Log} \mathrm{D}f)\circ h^{-1} . \mathrm{D}h^{-1}$. Noter que $\int_0^1 \psi(x)\,dx = 0$, et que ψ et $\mathrm{D}h\circ h^{-1}$ sont dans $\mathrm{C}^{1-\varepsilon}(\mathbf{T}^1)$ pour tout $\varepsilon>0$, puisque $h\in \mathrm{D}^{2-\varepsilon}(\mathbf{T}^1)$ et que $f\in \mathrm{D}^4(\mathbf{T}^1)$.

Par (6.4), on a, pour tout $\varepsilon>0$, si $n\to+\infty$:

9) $$|\mathrm{D} \operatorname{Log} \mathrm{D}f^n|_0 = O(n^\varepsilon).$$

On a donc trivialement par **9)**, **3)** (et **5)**) :

10) $$|\mathrm{D}^2 \operatorname{Log} \mathrm{D}f^n|_0 = O(n),$$

et par **4)**, **9)** et **10)** :

11) $$|\mathrm{D}^3 \operatorname{Log} \mathrm{D}f^n|_0 = O(n^{1+\varepsilon}).$$

En appliquant l'inégalité de Hadamard à la fonction $\mathrm{D} \operatorname{Log} \mathrm{D}f^n$, on a :

12) $$|\mathrm{D}^2 \operatorname{Log} \mathrm{D}f^n|_0 \leq (2\,|\mathrm{D} \operatorname{Log} \mathrm{D}f^n|_0\, |\mathrm{D}^3 \operatorname{Log} \mathrm{D}f^n|_0)^{1/2},$$

d'où par **9)** et **10)** :

13) $$|\mathrm{D}^2 \operatorname{Log} \mathrm{D}f^n|_0 = O(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

En appliquant l'inégalité de Hadamard à la fonction $\operatorname{Log} \mathrm{D}f^n$, et en utilisant **13)** et **7)**, on obtient finalement :

$$|\mathrm{D} \operatorname{Log} \mathrm{D}f^{q_n}|_0 = O(q_n^{-\frac{1}{4}+\varepsilon}).$$

Maintenant on applique la proposition (1.9) à ψ défini en **8)**; puisque $\psi \in C^{1-\varepsilon}(\mathbf{T}^1)$ pour tout $\varepsilon > 0$, et que $Dh \circ h^{-1} \in C^{1-\varepsilon}(\mathbf{T}^1)$ pour tout $\varepsilon > 0$, il en résulte qu'il existe $0 < \gamma < 1$ tel que l'on ait :

14) $$\sup_n |D \operatorname{Log} Df^n|_\gamma < +\infty.$$

Le théorème résulte alors de IV.6.3.4. ■

Théorème **(6.6)**. — *Si* $f \in D^4(\mathbf{T}^1)$, *alors* $h \in D^{3-\varepsilon}(\mathbf{T}^1)$ *pour tout* $\varepsilon > 0$.

Démonstration. — Par le même argument qu'en (6.3), tout revient à montrer que si $0 < \beta < 1$:

$$h \in D^{2+\beta}(\mathbf{T}^1) \text{ implique } h \in D^{2+\beta'}(\mathbf{T}^1) \text{ pour tout } \beta' < g(\beta) = \beta \Big/ \left(\frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}\right).$$

Or, puisque $h \in D^{2+\beta}(\mathbf{T}^1)$, on a :

1) $$|D \operatorname{Log} Df^{q_n}|_0 = O(q_n^{-\beta}).$$

Par (6.5), **4)** et **10)**, on a aussi :

2) $$|D^3 \operatorname{Log} Df^n|_0 = O(n).$$

Par l'inégalité de Hadamard appliquée à la fonction $D \operatorname{Log} Df^{q_n}$ on a donc :

3) $$|D^2 \operatorname{Log} Df^{q_n}|_0 = O(q_n^{\frac{1}{2} - \frac{\beta}{2}}).$$

En interpolant par VIII.3.1.1 la fonction $D \operatorname{Log} Df^{q_n}$, on obtient :

$$\begin{aligned} |D \operatorname{Log} Df^{q_n}|_\delta &= O\left(q_n^{-\left(\beta(1-\delta) - \delta\left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{2}\right)\right)}\right) \\ &= O(q_n^{-\gamma}). \end{aligned}$$

Or, $\gamma > 0$ si $\delta < \beta \Big/ \left(\frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}\right)$ et on conclut, appliquant (1.8) à (6.5) **8)**, que :

$$\sup_n |D \operatorname{Log} Df^n|_{\beta'} < +\infty \quad \text{pour} \quad \beta' < g(\beta);$$

d'où il suit par IV.6.3.4 que $h \in D^{2+\beta'}(\mathbf{T}^1)$. ■

(6.7) *L'équation linéaire.*

Lemme **(6.7.1)**. — *Soient* $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, *et* Φ *une fonction positive* (>0) *monotone non décroissante, telle que, pour tout* $p/q \in \mathbf{Q}$, *on ait* $|\alpha - (p/q)| \geq 1/q^2\Phi(q)$. *Alors il existe une constante universelle* C *telle que* :

$$S_n(\alpha) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\|p\alpha\|} < C n \Phi(2n) \operatorname{Log} n,$$

avec, pour $x \in \mathbf{R}$, $\|x\| = \operatorname{Inf}_{p \in \mathbf{Z}} |x - p|$.

Démonstration (d'après Kuipers et Niederreiter [1]; voir des mêmes auteurs : chap. 2, exercice (3.10), p. 131). — Si $0 \leq p < q \leq n$, on a $p\alpha \pm q\alpha = (p \pm q)\,\alpha (\text{mod } 1)$. Donc :

$$\|(p\pm q)\alpha\| \geq \frac{1}{|p\pm q|\,\Phi(|p\pm q|)} \geq \frac{1}{2n\Phi(2n)},$$

d'où
$$|\,\|p\alpha\| - \|q\alpha\|\,| \geq \frac{1}{2n\Phi(2n)},$$

puisque $|\,\|p\alpha\| - \|q\alpha\|\,| \geq \operatorname{Inf}(\|(p+q)\alpha\|, \|(p-q)\alpha\|)$.

Si on considère pour $1 \leq j \leq n+1$, les intervalles $\left[\frac{j}{2n\Phi(2n)}, \frac{j+1}{2n\Phi(2n)}\right[$, il y a au plus un point $\|p\alpha\|$, $1 \leq p \leq n$, dans chaque intervalle et aucun dans $\left[0, \frac{1}{2n\Phi(2n)}\right[$. On a donc :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\|p\alpha\|} \leq 2n\Phi(2n) \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \leq Cn\Phi(2n) \operatorname{Log} n. \quad \blacksquare$$

(6.7.2) *Lemme 2. — Soit* $\alpha \in \mathbf{R}$; *s'il existe* $\beta > 0$, $C > 0$, *tels que, pour tout* $p/q \in \mathbf{Q}$, *on ait* $|\alpha - (p/q)| \geq C/q^{2+\beta}$, *alors on a, pour tout* $\beta' > \beta$:

$$\sum_{|n| \neq 0} \frac{1}{|n|^{1+\beta'}} \frac{1}{\|n\alpha\|} < +\infty.$$

Démonstration. — Soit $\beta < \beta'' < \beta'$. On a :

$$S_n(\alpha) = \sum_{|p|=1}^{n} \frac{1}{\|p\alpha\|} = O(n^{1+\beta''})$$

d'après le lemme 1; le O dépend de β'' et de α. Appliquons la règle de sommation d'Abel :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1+\beta'}\|n\alpha\|} \leq \sum_{n=1}^{N-1} \left(\left| \frac{1}{(n+1)^{1+\beta'}} - \frac{1}{n^{\beta'+1}} \right| S_n \right) + \frac{1}{N^{\beta'+1}} S_N$$
$$\leq O\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\beta'-\beta''}} \right) < +\infty. \quad \blacksquare$$

(6.7.3) *Lemme 3. — Soient* α *et* $\delta > 0$, *et* $C > 0$ *tels que pour tout* $p/q \in \mathbf{Q}$ *on ait* :

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^2(\operatorname{Log}(q+1))^{1+\delta}}.$$

Pour tout $\delta' > \delta$, *on a* :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\operatorname{Log} n)^{3+\delta'}} \frac{1}{\|n\alpha\|} < +\infty.$$

Démonstration. — La même que pour le lemme 2. $\blacksquare$

Remarque. — *Si on ne précise pas les nombres, on peut très facilement voir que pour presque tout x (pour la mesure de Lebesgue) et pour tout* $\beta>0$, *on a* :

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^{1+\beta}\|qx\|}<+\infty.$$

En effet, soient $\beta>0$ et $0<\delta<1$ tels que $1/\delta<1+\beta$; on a :

$$\sum_q \left|\frac{1}{q^{(1+\beta)\delta}\|qx\|^\delta}\right|_{L^1(dx)}<+\infty$$

$\left(\text{puisque } \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\|qx\|^\delta}=\int_0^1 \frac{dx}{\|x\|^\delta}<+\infty \text{ si } \delta<1\right)$, donc pour presque tout x :

$$\sum_q \frac{1}{q^{(1+\beta)\delta}\|qx\|^\delta}<+\infty.$$

Or, si (α_q) est une suite de nombres vérifiant $\alpha_q>0$ et $\sum_{q=1}^{\infty}\alpha_q<+\infty$, on a, pour tout $\gamma>0$:

$$\sum_q \alpha_q^{1+\gamma}<+\infty.$$

Il suit que, pour presque tout $x\in\mathbf{R}$, on a, en choisissant $1+\gamma=1/\delta$:

$$\sum_q \frac{1}{q^{1+\beta}}\frac{1}{\|qx\|}<+\infty,$$

et la remarque suit par intersection dénombrable d'ensembles de mesure 1, en choisissant $\beta=1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{n}\ldots$

Proposition **(6.7.4)**. — *Soient* $0<\varepsilon<1$, $\psi\in C^{1+\varepsilon}(\mathbf{T}^1)$, *et* α *du type de Roth. On pose* $C=\int_0^1\psi(x)dx$.

Alors, pour tout $\varepsilon'<\varepsilon$ *il existe* $\eta\in C^{\varepsilon'}(\mathbf{T}^1)$, *tel que l'on ait* :

$$\psi-C=\eta-\eta\circ R_\alpha.$$

Démonstration. — On écrit $\psi-C=\sum_{n\in\mathbf{Z}-\{0\}}\hat\psi(n)e^{2\pi inx}$.

Puisque $\psi\in C^{1+\varepsilon}(\mathbf{T}^1)$, on a, si $|n|\to+\infty$:

$$|\hat\psi(n)|=O\left(\frac{1}{|n|^{1+\varepsilon}}\right).$$

On écrit η comme série de Fourier. On obtient formellement :

$$\eta=\sum_{n\in\mathbf{Z}-\{0\}}\frac{\hat\psi(n)}{1-e^{2\pi in\alpha}}e^{2\pi inx}.$$

Par (6.7.2) on a :

$$|\eta|_0\leq C\sum_{n\in\mathbf{Z}-\{0\}}\frac{1}{|n|^{1+\varepsilon}\|n\alpha\|}<+\infty \text{ avec une constante } C$$

(η est une série de Fourier absolument convergente).

On a $|e^{2\pi i n x}|_{\varepsilon'} = O(|n|^{\varepsilon'})$, donc par (6.7.2) :

$$|\eta|_{\varepsilon'} \leq C_{\varepsilon'} \sum_{n \in \mathbf{Z}-\{0\}} \frac{1}{|n|^{1+\varepsilon-\varepsilon'}} \frac{1}{\|n\alpha\|} < +\infty \text{ avec } C_{\varepsilon'} \text{ une constante.} \quad \blacksquare$$

Théorème **(6.8)**. — *Soit* $f \in D^{r+\varepsilon}(\mathbf{T}^1)$ *avec* $r \geq 4$, $r \in \mathbf{N}$ *et* $0 < \varepsilon < 1$; *alors* $h \in D^{r-1+\varepsilon'}(\mathbf{T}^1)$ *pour tout* $\varepsilon' < \varepsilon$.

(6.8.1) On se fixe $0 < \varepsilon < 1$ donné. On choisit, pour tout entier $r \geq 4$, ε_r vérifiant $0 < \varepsilon_{r+1} < \varepsilon_r \ldots < \varepsilon$ mais à part cela arbitrairement. Nous allons démontrer le théorème par récurrence sur l'entier $r \geq 4$. Nous prouverons que si $r+2+\varepsilon$ est la classe de différentiabilité de f, l'hypothèse $h \in D^{r+\varepsilon_{r+1}}(\mathbf{T}^1)$ implique que $h \in D^{r+1+\varepsilon_{r+2}}(\mathbf{T}^1)$. Le cas $r=3$ est un cas particulier à partir de (6.6). Tout revient, par IV.6.3.4, à montrer que :

1) $$\sup_n |D^r(\operatorname{Log} Df^n)|_{\varepsilon_{r+2}} < +\infty.$$

On part de (2.1), soit :

2) $$D^2 \operatorname{Log} Df^n = \sum_{i<n} \varphi \circ f^i . (Df^i)^2 + \frac{1}{2} (D \operatorname{Log} Df^n)^2.$$

Si $f \in D^{r+2+\varepsilon}(\mathbf{T}^1)$, $\varphi = D^2(\operatorname{Log} Df) - \frac{1}{2}(D \operatorname{Log} Df)^2$ est $C^{r-1+\varepsilon}$. En dérivant $r-2$ fois **2)**, on obtient :

3) $$D^r \operatorname{Log} Df^n = D^{r-2}\Big(\sum_{i<n} \varphi \circ f^i . (Df^i)^2\Big) + \frac{1}{2} D^{r-2}(D \operatorname{Log} Df^n)^2.$$

Par l'hypothèse de récurrence et la formule de Leibniz on a

4) $$|D^{r-2}(D \operatorname{Log} Df^n)^2|_{\varepsilon_{r+1}} = O(1).$$

Il faut évaluer

$$D^{r-2}\Big(\sum_{i<n} \varphi \circ f^i . (Df^i)^2\Big).$$

Or, on déduit de la formule de Faa di Bruno (IV.2.1) et de la formule de Leibniz que, pour tout n (r est fixé),

5) $$D^{r-2}\Big(\sum_{i<n} \varphi \circ f^i . (Df^i)^2\Big)$$

est une somme finie (pouvant être vide ou avoir un nombre fini de répétitions dépendant seulement de r), d'expressions :

6) $$\sum_{i<n} D^{k_0}\varphi \circ f^i . (Df^i)^{k_1} \ldots (D^{r-1}f^i)^{k_{r-1}},$$

avec $0 \leq k_0 \leq r-2$ et si $1 \leq j \leq r-1$, $k_j \in \mathbf{N}$ et $0 \leq k_j \leq A_r$, A_r étant un entier qui ne dépend que de r.

Proposition **(6.8.2)**. — *Il existe* $g \in C^{1+\varepsilon_{r+1}}(\mathbf{T}^1)$, *tel que, pour tout* $\varepsilon' < \varepsilon_{r+1}$, *on ait* :

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \Big|D^{r-2}\Big(\sum_{i<n} \varphi \circ f^i (Df^i)^2\Big) - ng\Big|_{\varepsilon'} < +\infty.$$

Démonstration. — On écrit :

$$f^i = h^{-1} \circ R_{i\alpha} \circ h$$

avec $h \in D^{r+\varepsilon_{r+1}}(\mathbf{T}^1)$ par l'hypothèse de récurrence. On dérive $r-1$ fois et on remplace dans **5)** et **6)**; on obtient, pour tout n (r est fixé), que

7) $$\sum_{i<n} D^{k_0}\varphi \circ f^i . (Df^i)^{k_1} \dots (D^{r-1}f^i)^{k_{r-1}}$$

est une somme finie d'expressions de la forme

8) $$(\psi_2(\sum_{i<n} \psi_1 \circ R_{i\alpha})) \circ h$$

où ψ_1 et ψ_2 sont indépendants de n et de classe $C^{1+\varepsilon_{r+1}}$, car les termes les plus mauvais sont $D^{r-2}\varphi$, qui est $C^{1+\varepsilon}$, et celui lié à $D^{r-1}f^i = D^{r-1}(h^{-1} \circ R_{i\alpha} \circ h)$; mais $h \in D^{r+\varepsilon_{r+1}}(\mathbf{T}^1)$.

Par (6.7.4) on a :

$$\sum_{i<n} \psi_1 \circ R_{i\alpha} = nC + \eta - \eta \circ R_{n\alpha}$$

avec $C = \int_0^1 \psi(x)\,dx$ et $\eta \in C^{\varepsilon'}(\mathbf{T}^1)$, pour tout $\varepsilon' < \varepsilon_{r+1}$. Il suit que

9) $$\psi_2(\sum_{i<n} \psi_1 \circ R_{i\alpha}) = nC\psi_2 + \eta_n$$

avec pour tout $\varepsilon' < \varepsilon_{r+1}$, $\sup_{n \in \mathbf{N}} |\eta_n|_{\varepsilon'} < +\infty$.

La proposition résulte de **5)**, **7)**, **8)**, et **9)**. ∎

Fin de la démonstration de (6.8.1).

Si on montre que g, dans la proposition (6.8.2), est nul, on déduit de (6.8.1), **3)** et **4)** en choisissant $\varepsilon' = \varepsilon_{r+2}$ que

$$\sup_n |D^r \operatorname{Log} Df^n|_{\varepsilon_{r+2}} < +\infty,$$

et on conclut par IV.6.3.2. Nous allons montrer que $g = 0$ par l'absurde. Soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $g(x) = c \neq 0$. Alors par (6.8.2) et (6.8.1) **4)** on a :

10) $$\lim_{n \to +\infty} \frac{|D^r \operatorname{Log} Df^n(x)|}{n} = |c| \neq 0.$$

Par (6.8.1), **3)** et **4)** on a :

11) $$|D^r \operatorname{Log} Df^n|_0 = O(n).$$

Nous allons montrer qu'en fait on a :

12) $$|D^r \operatorname{Log} Df^n|_0 = O(n^{1/2});$$

il en résultera que **10)** est absurde, d'où il suivra que $g = 0$.

Par **3)** (se rappeler que $f \in D^{r+2+\varepsilon}(\mathbf{T}^1)$), on a :

13) $$|D^{r+1}(\operatorname{Log} Df^n)|_0 \leq |D^{r-1}(\sum_{i<n} \varphi \circ f^i . (Df^i)^2)|_0 + \frac{1}{2} |D^{r-1}(D \operatorname{Log} Df^n)^2|_0.$$

Puisque f est C^r-conjugué à R_α (par l'hypothèse de récurrence), on a, si $i \to +\infty$:

$$D^{r-1}(\varphi \circ f^i . (Df^i)^2) = O(1).$$

Il suit que :

14) $$|D^{r-1}(\sum_{i<n} \varphi \circ f^i . (Df^i)^2)|_0 = O(n).$$

Par **11)** et **14)** remplacé dans **13)** on a :

15) $$|D^{r+1}(\mathrm{Log}\, Df^n)|_0 = O(n).$$

On écrit l'inégalité de Hadamard pour la fonction $D^{r-1}\, \mathrm{Log}\, Df^n$.

On a par **15)** et les hypothèses de récurrence :

$$|D^r\, \mathrm{Log}\, Df^n|_0 \leq (2\,|D^{r-1}\, \mathrm{Log}\, Df^n|_0\, |D^{r+1}\, \mathrm{Log}\, Df^n|_0)^{1/2} = O(n^{1/2}).$$

Ceci montre que $g \neq 0$ (*i.e.* **10)**) est impossible, donc $g = 0$. ■

X. — INVARIANT DE C^0-CONJUGAISON A DES ROTATIONS

Plan :

Commentaire :

Nous introduisons en 1 l'invariant K_0 semi-continu supérieurement et tel que $K_0(f)=0$ si et seulement si f est C^0-conjugué à une rotation. Grâce à cet invariant, on montre en 2 que, pour tout $\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$, O^0_α est résiduel dans F^0_α. En 3, nous reprenons les contre-exemples C^1 de Denjoy. Nous montrons que, pour tout $\alpha\in\mathbf{T}^1-(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, $F^1_\alpha-O^0_\alpha$ est dense dans F^1_α pour la C^1-topologie. En (3.19), nous montrons que, pour tout $\varepsilon>0$ et tout $\alpha\in\mathbf{T}^1-(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, on peut construire des contre-exemples de Denjoy $C^{2-\varepsilon}$ et $C^{2-\varepsilon}$-proches de R_α. De plus, nous montrons que pour le module de continuité $w(x)=O(x(\mathrm{Log}\ 1/x)^{1+\varepsilon})$ (si $x\to0$ et $\varepsilon>0$) et pour tout $\alpha\in\mathbf{T}^1-(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, il existe $f\in F^{1+w}_\alpha-O^0_\alpha$. Je remercie F. Sergeraert de m'avoir signalé l'existence de contre-exemples de Denjoy de classe $C^{2-\varepsilon}$.

En 4, nous montrons que, pour presque tout $\alpha\in\mathbf{T}^1-(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, si $w(x)=O(x(\mathrm{Log\ Log\ Log}\ 1/x)^{1-\varepsilon})$ (si $x\to0$ et $\varepsilon>0$) et $f\in F^{1+w}_\alpha$, alors f est C^0-conjugué à R_α.

En 5, nous construisons des contre-exemples de Denjoy C^0 et commutant deux à deux, ce qui a des applications aux feuilletages par plans de $\mathbf{T}^n$: il existe un feuilletage par plans de $\mathbf{T}^n$, de classe C^0, ayant un ensemble minimal non trivial.

Finalement, en 6, nous montrons que l'application réciproque de la bijection :

$$\Phi^0_\alpha : g\in\mathrm{Diff}^0_+(\mathbf{T}^1,0)\mapsto g^{-1}\circ R_\alpha\circ g\in O^0_\alpha$$

est continue pour la C^0-topologie. Nous verrons au chapitre suivant qu'en classe C^r ce n'est plus le cas (*i.e.* elle n'est plus continue pour la C^r-topologie).

Dans le cas C^0, pour la conjugaison des homéomorphismes qui ont un ensemble de Cantor invariant, voir Markeley [1]. On peut aussi prouver 5 en suivant Markeley [1].

Certains des résultats de ce chapitre ont été annoncés dans Herman [6].

1. Invariant de C^0-conjugaison.

Remarque (**1.1**). — Soient $0\le r\le\omega$ (entier), et $f\in\mathrm{Diff}^r_0(\mathbf{T}^n)$. On suppose que f est C^r-conjugué à $R_\alpha\in\mathbf{T}^n$, soit $f=g^{-1}\circ R_\alpha\circ g$ avec $g\in\mathrm{Diff}^r_0(\mathbf{T}^n)$. Il existe alors une suite d'entiers (n_i) tendant vers $+\infty$ avec i, tels que $n_i\alpha\to0$ (mod $\mathbf{Z}^n$). Si $i\to+\infty$, $f^{n_i}=g^{-1}\circ R_{n_i\alpha}\circ g\to\mathrm{Id}$ dans la C^r-topologie ($\mathrm{Diff}^r_0(\mathbf{T}^n)$ est un groupe topologique).

(1.2) *L'invariant* K_r. — Soient $0 \leq r \leq +\infty$, et d_r une distance définissant la C^r-topologie de $\mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n)$. Soit $K_r : \mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n) \to \mathbf{R}_+$, défini par :

$$K_r(f) = \operatorname*{Inf}_{k \geq 1} d_r(f^k, \mathrm{Id}).$$

Si $f \in D^r(\mathbf{T}^n)$ on pose $K_r(f) = K_r(\pi(f))$ $(\pi(f) = \bar{f})$.

Remarques **(1.3)**. — *a)* Si f est C^r-conjugué à une translation, on a alors $K_r(f) = 0$.

b) $f \in D^r(\mathbf{T}^n)$ est C^r-conjugué à une translation si et seulement si $\pi(f)$ l'est.

c) Comme $\mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n)$ est un groupe topologique pour la C^r-topologie,

$$f \mapsto d_r(f^k, \mathrm{Id}) \in \mathbf{R}_+$$

est une fonction continue.

d) $K_r : \mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n) \to \mathbf{R}_+$ *est donc une fonction semi-continue supérieurement pour la* C^r*-topologie.*

e) Il en résulte que $K_r^{-1}(0)$ est un G_δ dans $\mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n)$ pour la C^r-topologie (voir I.4).

f) Puisque $K_r \geq 0$, si $f \in \mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n)$ est tel que $K_r(f) = 0$, alors K_r est continue en f. En effet, $K_r^{-1}[-\infty, a[= K_r^{-1}([0, a[)$ est ouvert pour tout $a > 0$.

Proposition **(1.4)**. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $f \in \mathrm{Diff}_+^0(\mathbf{T}^1)$ *soit* C^0*-conjugué* (i.e. *dans* $\mathrm{Diff}_+^0(\mathbf{T}^1)$) *à une rotation est que* $K_0(f) = 0$.

Démonstration. — La condition est nécessaire par (1.1). Montrons qu'elle est suffisante. Si $K_0(f) = 0$, il existe une suite d'entiers n_i telle que si $i \to +\infty$, $n_i \to +\infty$ et $d_0(f^{n_i}, \mathrm{Id}) \to 0$, *i.e.* $f^{n_i} \to \mathrm{Id}$ dans la C^0-topologie; la suite $\{f^{n_i}\}_i$ est donc équicontinue, et la proposition résulte de II.9. ■

2. Orbites par C^0-conjugaison.

Rappelons que nous avons posé, pour $0 \leq r \leq \omega$ et $\alpha \in \mathbf{R}$:

$$F_\alpha^r = \{f \in D^r(\mathbf{T}^1) \mid \rho(f) = \alpha\}$$

et

$$O_\alpha^r = \{g^{-1} \circ R_\alpha \circ g \mid g \in D^r(\mathbf{T}^1)\},$$

ainsi que, pour $0 \leq k \leq r$:

$$O_\alpha^{r,k} = O_\alpha^k \cap F_\alpha^r.$$

Evidemment : $O_\alpha^r \subset F_\alpha^r$. On a le

Théorème **(2.1)**. — *Si* $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, O_α^0 (resp. $O_\alpha^{1,0}$) *est résiduel dans* F_α^0 (resp. F_α^1) *pour la* C^0 (resp. C^1)*-topologie.*

Démonstration. — D'après (1.4) :

$$O_\alpha^0 = K_0^{-1}(0) \cap F_\alpha^0 \qquad \text{et} \qquad O_\alpha^{1,0} = K_0^{-1}(0) \cap F_\alpha^1.$$

Or, $K_0^{-1}(0)$ est un G_δ (pour la C^0-topologie) (voir I.4), donc O_α^0 (resp. $O_\alpha^{1,0}$) est un G_δ dans F_α^0 (resp. F_α^1) pour la C^0-(resp. C^1-)topologie. Comme F_α^2 est dense dans F_α^0 (resp. F_α^1) pour la C^0-(resp. C^1-)topologie par III.4.4, on conclut par le théorème de Denjoy (*i.e.* $F_\alpha^2=O_\alpha^{2,0}$) que O_α^0 (resp. $O_\alpha^{1,0}$) est dense dans F_α^0 (resp. F_α^1) pour la C^0-(resp. C^1-)topologie, d'où le théorème. ■

(2.2) Rappelons que nous avons posé

$$F^r=D^r(\mathbf{T}^1)-\mathrm{Int}\,\rho^{-1}(\mathbf{Q})$$

qui est donc fermé dans $D^r(\mathbf{T}^1)$ pour la C^r-topologie. En utilisant III.6.3, le même raisonnement qu'en (2.1) conduit à la

Proposition. — $K_0^{-1}(0)\cap F^0$ (resp. $K_0^{-1}(0)\cap F^1$) *est résiduel dans* F^0 (resp. F^1) *pour la* C^0 (resp. C^1)-*topologie.*

3. Exemples de Denjoy.

En suivant Denjoy [2] nous allons montrer que $F_\alpha^1-O_\alpha^{1,0}$ est non seulement non vide pour tout $\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$, mais dense dans F_α^1 pour la C^1-topologie.

Théorème **(3.1)**. — *Pour tout* $\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$, $F_\alpha^1-O_\alpha^{1,0}$ *est dense dans* F_α^1 *pour la* C^1-*topologie.*

Corollaire **(3.2)**. — *Pour tout* $\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$, $F_\alpha^0-O_\alpha^0$ *est dense dans* F_α^0 *pour la* C^0-*topologie.*

Démonstration de (3.2). — Cela résulte de III.4.4.

On peut aussi le voir ainsi : si $f\in F_\alpha^0$, on pose, pour $n\geq 1$, $n\in\mathbf{N}$, $h_n=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f^i-i\alpha)$; d'après VII.2.2, si $n\to+\infty$, $f_n=h_n\circ f\circ h_n^{-1}\to R_\alpha$ dans la C^0-topologie.

Si l'on montre qu'il existe un $f\in F_\alpha^0-O_\alpha^0$ (ce qu'on verra en (3.11)), on conclut que $F_\alpha^0-O_\alpha^0$ est adhérent à R_α, et il suit que $F_\alpha^0-O_\alpha^0$ est dense dans F_α^0. ■

Commençons par deux lemmes pour démontrer (3.1).

Lemme **(3.3)**. — *Soient* D_1 *et* D_2 *deux ensembles denses dans* $[0, 1]$ (resp. *dans* $\mathbf{R}$), *et* $f: D_1\to D_2$ *une application surjective non décroissante* (resp. *strictement croissante*) ; f *se prolonge en une fonction monotone non décroissante* (resp. *strictement croissante*), *continue de* $[0, 1]$ (resp. $\mathbf{R}$) *sur* $[0, 1]$ (resp. $\mathbf{R}$).

Démonstration. — Il est élémentaire que f se prolonge en une fonction non décroissante (resp. strictement croissante), qui est continue puisque $f(D_1)=D_2$ est dense, et que l'image de toute fonction monotone sur $[0, 1]$ non continue évite un intervalle. ■

Lemme **(3.4)** (d'après Mañé). — *Pour tout* $f \in \mathrm{Diff}^1_+(\mathbf{T}^1)$, *il existe un* $x_0 \in \mathbf{R}$ *tel que* $\sup_{n \in \mathbf{Z}} (\mathrm{D}f^n(x_0)) = k < +\infty$.

Attention : Si f est C^0-conjugué mais non C^1-conjugué à une rotation irrationnelle, $\sup_{n \in \mathbf{N}} |\mathrm{Log}\, \mathrm{D}f^n(x_0)| = +\infty$; cf. IV.4.1 et IV.6.1.

Démonstration. — Soit F l'ensemble des $f \in \mathrm{Diff}^1_+(\mathbf{T}^1)$ qui ont cette propriété. Montrons que F est fermé pour la C^1-topologie. Soit $(f_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans F et tendant vers $f \in \mathrm{Diff}^1_+(\mathbf{T}^1)$ dans la C^1-topologie. Soient x_i et $n_i \in \mathbf{Z}$ tels que

$$\mathrm{D}f_i^{n_i}(x_i) > \mathrm{M}_i/2, \qquad \text{avec} \qquad \sup_{n \in \mathbf{Z}} (\mathrm{D}f_i^n(x_i)) = \mathrm{M}_i < +\infty.$$

Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que la suite $(f_i^{n_i}(x_i))_{i \in \mathbf{N}}$ converge vers $y \in \mathbf{T}^1$. On a alors $\sup_{n \in \mathbf{Z}} (\mathrm{D}f^n(y)) \leq 2$. En effet, sinon, il existerait un $n \in \mathbf{Z}$ tel que $\mathrm{D}f^n(y) > 2$, et, pour i assez grand, on aurait $\mathrm{D}f_i^n(f_i^{n_i}(x_i)) > 2$. Il en résulterait que

$$\mathrm{D}f_i^{n+n_i}(x_i) = \mathrm{D}f_i^n(f_i^{n_i}(x_i)) \, . \, \mathrm{D}f_i^{n_i}(x_i) > 2 \frac{\mathrm{M}_i}{2} > \mathrm{M}_i,$$

ce qui est absurde. Il suit que $f \in \mathrm{F}$, et que F est bien fermé. Or, si $f \in \mathrm{Diff}^1_+(\mathbf{T}^1)$ et $\rho(f) \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, on voit facilement que $f \in \mathrm{F}$ (cf. XII.1.5); par III.6.2.1, F est donc un fermé dense dans $\mathrm{Diff}^1_+(\mathbf{T}^1)$ pour la C^1-topologie, et $\mathrm{F} = \mathrm{Diff}^1_+(\mathbf{T}^1)$. ∎

(3.5) Pour démontrer (3.1), il suffit de montrer que, pour tout $f \in \mathrm{F}^1_\alpha$ qui est C^0-conjugué à R_α, il existe une suite $(f_i)_{i \in \mathbf{N}} \subset \mathrm{F}^1_\alpha - \mathrm{O}^0_\alpha$ qui tend vers f dans la C^1-topologie.

Par (3.4), quitte à considérer $\mathrm{R}_\lambda \circ f \circ \mathrm{R}_{-\lambda}$ pour un λ, *on peut supposer que*

$$\sup_{n \in \mathbf{Z}} (\mathrm{D}f^n(0)) = k < +\infty.$$

C'est ce que nous ferons par la suite.

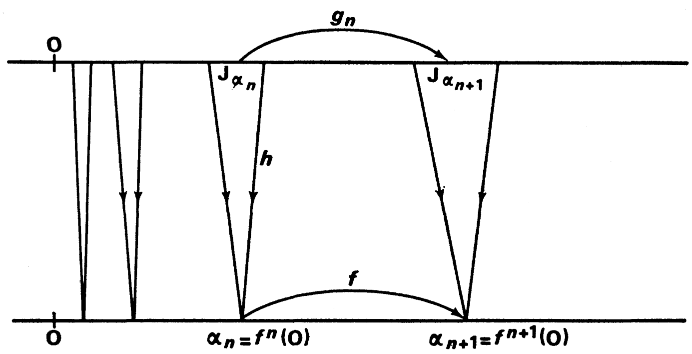
On posera $\alpha_n = f^n(0)$ et $\bar{\alpha}_n = \alpha_n - [\alpha_n] \in [0, 1[$, où $[\alpha_n]$ est le plus grand entier $\leq \alpha_n$. La suite $(\bar{\alpha}_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est dense dans $[0, 1]$ puisque f est supposé C^0-conjugué à R_α.

(3.6) *Principe de la construction.*

Nous suivons Denjoy [2], ainsi que l'exposé de Rosenberg [1] (d'après Milnor et Schweitzer). Rappelons que si $g \in \mathrm{D}^0(\mathbf{T}^1)$, $\rho(g) = \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, et si f est C^0-conjugué à R_α, alors il existe $h = \mathrm{Id} + \varphi$ ($\varphi \in \mathrm{C}^0(\mathbf{T}^1)$), continue, non décroissante, et telle que $h \circ g = f \circ h$ (voir II.7.1).

Si g n'est pas C^0-conjugué à R_α, h est constante sur chaque composante connexe d'un ouvert U, dense dans $\mathbf{R}$; $\mathbf{R} - \mathrm{U}$ (mod 1) est un ensemble de Cantor. Remarquons qu'alors $h(\mathrm{U})$ est un ensemble dénombrable dense invariant par f.

On construit d'abord $\mathbf{R} - \mathrm{U}$ (mod 1), puis h.



On posera :

$$J_{\alpha_n+p} = I_n \pmod{1}$$

$$g|_{I_n} = g_n : \ I_n \to I_{n+1} \pmod{1} \qquad \text{et} \qquad h \circ f = f \circ h.$$

Ensuite U sera $\operatorname{Int} \bigcup_{n,p} h^{-1}(\alpha_n + p)$ avec $n, p \in \mathbf{Z}$. Puis on déterminera g par $h \circ g = f \circ h$ (*i.e.* g envoie $J_{\alpha_n} = h^{-1}(\{\alpha_n\})$ sur $J_{\alpha_{n+1}}$); on prouvera le théorème grâce à un choix convenable de l'ensemble de Cantor.

(3.7) *Construction d'une suite.*

On se donne $\frac{1}{2} > \eta > 0$; il existe une suite $(\ell_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ de réels positifs qui vérifie :

a) $$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \ell_n \, Df^n(0) = \ell < +\infty;$$

b) $$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = 1;$$

c) $$\sup_{n \in \mathbf{Z}} \left| \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} - 1 \right| < \eta < \frac{1}{2}.$$

Exemple **(3.7.1)**. — Il suffit de prendre $\varepsilon > 0$, $k > 0$ grand, $a > 0$, et de considérer $\ell_n = \dfrac{a}{(k + |n|)(\operatorname{Log}(|n| + k))^{1+\varepsilon}}$ $\left(\text{noter que, si } n \to \pm\infty, \left| \dfrac{\ell_{n+1}}{\ell_n} - 1 \right| = O\left(\dfrac{1}{|n| + k}\right) \text{ et aussi que } \sum_{n \in \mathbf{Z}} \ell_n \, Df^n(0) < +\infty \text{ puisque } \sup_{n \in \mathbf{Z}} (Df^n(0)) < +\infty\right)$.

(3.8) *Construction d'un ensemble de Cantor de mesure nulle dans* $[0, 1]$.

On suppose, ici, que la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est telle que $\ell = 1$ $\left(\text{on s'y ramène en considérant la suite } \left(\frac{\ell_n}{\ell}\right)_{n\in\mathbf{Z}}\right)$.

Considérons la mesure $\lambda = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \ell_n \mathrm{D}f^n(0)\delta_{\bar{\alpha}_n}$ (où $\delta_{\bar{\alpha}_n}$ est la mesure de Dirac concentrée en $\bar{\alpha}_n$).

On pose $\mathrm{I}_n = [b_n, c_n]$, avec $b_n = \lambda([0, \bar{\alpha}_n[)$ et $c_n = (b_n + \ell_n \mathrm{D}f^n(0)) = \lambda([0, \bar{\alpha}_n])$ $(b_0 = 0,\ c_0 = \ell_0,\ b_n = \sum_{\{p \mid \bar{\alpha}_p < \bar{\alpha}_n\}} \ell_p \mathrm{D}f^p(0))$.

$\mathrm{K} = [0, 1] - (\bigcup_{n\in\mathbf{Z}} \operatorname{Int} \mathrm{I}_n)$ est de mesure de Lebesgue nulle; de plus, c'est un ensemble de Cantor dans $[0, 1]$, puisque $(\bar{\alpha}_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est dense dans $[0, 1]$. On pose, pour $x \in [0, 1] - \{\bar{\alpha}_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$, $h^{-1}(x) = \lambda([0, x])$; h^{-1} est strictement croissante et sa fonction réciproque h se prolonge, par (3.3), en $h : [0, 1] \to [0, 1]$, continue, monotone non décroissante et telle que $\mathrm{I}_n = h^{-1}(\{\bar{\alpha}_n\})$.

(3.9) *Construction d'un ensemble de Cantor de mesure positive dans* $[0, 1]$.

On considère toujours la mesure

$$\lambda = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \ell_n \mathrm{D}f^n(0)\delta_{\bar{\alpha}_n},$$

mais on prend ici $h^{-1}(x) = \frac{1}{1+\ell}(x + \lambda([0, x]))$ pour $x \notin \{\bar{\alpha}_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ et $\mathrm{I}_n = [b_n, c_n]$, avec

$$b_n = \frac{1}{1+\ell}(\bar{\alpha}_n + \lambda([0, \bar{\alpha}_n[) \qquad \text{et} \qquad c_n = b_n + \frac{\ell_n \mathrm{D}f^n(0)}{1+\ell}.$$

On définit alors h et K comme précédemment.

(3.9.1) Noter que h a les propriétés suivantes :

a) Pour tout $\varepsilon_1 > 0$, il existe $\theta > 0$ tel que, si $\ell < \theta$, alors $|h - \mathrm{Id}|_{\mathrm{C}^0} < \varepsilon_1$.

b) Si $\mathrm{A} \subset [0, 1]$ est m-mesurable (m = mesure de Lebesgue), $m(h^{-1}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{K}) = \frac{1}{1+\ell} m(\mathrm{A})$ (il suffit de le vérifier pour un intervalle).

c) Si $\mathrm{B} \subset \mathrm{K}$ est borélien, alors $m(\mathrm{B}) = 0$ si et seulement si $m(h(\mathrm{B})) = 0$.

d) h et h^{-1} sont m-presque partout dérivables et on a m-presque partout $\mathrm{D}h^{-1} = \frac{1}{1+\ell}$ et $\mathrm{D}h = (1+\ell)\chi_\mathrm{K}$, où χ_K est la fonction caractéristique de K. Remarquons aussi que h est lipschitzienne.

(3.10) *Définition de h et* U *dans les cas* (3.8) *et* (3.9).

On pose, pour $x \in [0, 1]$ et $p \in \mathbf{Z}$, $h(x+p) = h(x) + p$ et $\mathrm{J}_{\alpha_n + p} = h^{-1}(\alpha_n + p)$ pour n et $p \in \mathbf{Z}$.

On a $J_{\alpha_n+p}=I_n \pmod 1$; de plus, les intervalles J_{α_n+p} sont deux à deux disjoints, et d'intérieurs non vides; $U=\bigcup_{n,p}\operatorname{Int}(J_{\alpha_n+p})$ est un ouvert dense dans $\mathbf{R}$, et $\mathbf{R}-U=\overline{K} \pmod 1$ est un ensemble de Cantor. (Si $\pi:\mathbf{R}\to\mathbf{T}^1$ est la projection canonique, $\pi(\mathbf{R}-U)=\overline{K}=\pi(K)$ est un ensemble de Cantor de $\mathbf{T}^1$.)

(3.11) *Construction d'un homéomorphisme.*

Pour tout $n\in\mathbf{Z}$, on choisit un homéomorphisme croissant g_n de J_{α_n} sur $J_{\alpha_{n+1}}$. On définit g_n, pour $p\in\mathbf{Z}$, par $g_n|_{J_{\alpha_n+p}}=g_n+p$ (*i.e.* $g_n(x+p)=g_n(x)+p$). On définit ainsi une application g de $\bigcup_{n,p}J_{\alpha_n+p}$ dans $\mathbf{R}$ qui est strictement monotone; d'après (3.3), g se prolonge en un homéomorphisme de $\mathbf{R}$. Evidemment, $g(x)+1=g(x+1)$ pour tout $x\in\mathbf{R}$, donc $g\in D^0(\mathbf{T}^1)$. De plus, $h\circ g=f\circ h$ (puisque cette égalité est vraie sur U, qui est dense dans $\mathbf{R}$). Or, cela implique par II.2.10 que $\rho(g)=\rho(f)=\alpha$. Soit $\bar{f}$ l'homéomorphisme induit par f sur $\mathbf{T}^1$. On vérifie sans peine que l'ensemble de Cantor $\overline{K}=\mathbf{R}-U \pmod 1$ est l'unique ensemble minimal invariant par $\bar{f}$, donc $f\in F_\alpha^0-O_\alpha^0$. ∎

(3.12) *Construction d'un difféomorphisme de classe* C^1.

Rappelons que g_n est un homéomorphisme croissant de J_{α_n} sur $J_{\alpha_{n+1}}$ et que l'on a posé :

$$g_n|_{J_{\alpha_n+p}}=g_n|_{J_{\alpha_{n+1}}}+p \quad \text{si} \quad p\in\mathbf{Z}.$$

On note les extrémités de l'intervalle J_{α_n+p} par $\partial(J_{\alpha_n+p})$.

On peut prendre pour g_n un difféomorphisme de classe C^1 vérifiant, si $\psi_n(x)=\dfrac{Dg_n(x)}{Df(\alpha_n)}$, les conditions suivantes :

a) si $x\in\partial J_{\alpha_n+p}$, $\psi_n(x)=1$;

b) si $n\to\pm\infty$, alors $|\psi_n(x)-1|_{I_n}=\sup_{x\in I_n}|\psi_n(x)-1|\to 0$;

c) les ensembles de Cantor sont construits comme en (3.8) et (3.9).

Proposition **(3.13)**. — *g est un difféomorphisme de classe* C^1 (i.e. $f\in F_\alpha^1-O_\alpha^{0,1}$) *et* $Dg(x)=\eta(x)$, *où* :

$$\eta(x)=Dg_n(x) \quad \textit{si} \quad x\in J_{\alpha_n+p}, \quad n \textit{ et } p\in\mathbf{Z};$$
$$\eta(x)=Df\circ h(x) \quad \textit{si} \quad x\in\mathbf{R}-U.$$

Démonstration. — On vérifie sans peine que Dg existe sur l'ouvert dense U et se prolonge par continuité en la fonction proposée.

Cas de l'ensemble de Cantor de mesure nulle construit en (3.8).

Il faut d'abord vérifier que g est absolument continue sur tout intervalle compact; comme g est à variation bornée sur tout intervalle compact il suffit de vérifier que, pour tout borélien A de m-mesure nulle, $m(g(A))=0$. Or, sur l'ouvert U de m-mesure pleine de $\mathbf{R}$, g est un difféomorphisme de classe C^1, $m(\mathbf{R}-U)=0$ et $g(\mathbf{R}-U)=\mathbf{R}-U$; g est donc absolument continue sur tout intervalle compact de $\mathbf{R}$. Il en résulte que $g(x)=g(0)+\int_0^x Dg(t)dt$. Or, $Dg=Dg_n$ sur J_{α_n+p}, donc $Dg(t)$ est m-presque partout égale à la fonction $\eta(t)$ proposée (puisque c'est vrai sur U qui est de m-mesure pleine). Par conséquent $g(x)=g(0)+\int_0^x \eta(t)dt$, mais $\eta(t)$ est continue et $\eta(t)>0$, donc $g\in D^1(\mathbf{T}^1)$, et même $Dg(x)=\eta(x)$ si $x\in\mathbf{R}$.

Cas de l'ensemble de Cantor de mesure positive construit en (3.9).

D'après (3.11), $h\circ g=f\circ h$. Pour montrer que g est absolument continue sur tout intervalle compact le même argument est valable, puisque, si $A\subset\mathbf{R}-U$ est un borélien de m-mesure nulle, alors, par (3.9.1) *c)*, $m(g(A))=0$. De plus, par (3.9.1) *d)*, $Dg(x)=Df\circ h(x)$ pour m-presque tout $x\in\mathbf{R}-U$. Le même argument que pour l'ensemble de Cantor de mesure nulle montre que g est un difféomorphisme de classe C^1 et $Dg=\eta$. ∎

(3.13) Noter qu'avec les notations de (3.12) on peut écrire :

$$Dg(x)=\psi(x).Df\circ h(x),$$

avec $\psi(x)=\psi_n(x)$ si $x\in J_{\alpha_n+p}$

et $\psi(x)=1$ si $x\in\mathbf{R}-U$.

ψ est continue, positive, et l'on a (la limite étant uniforme) :

$$\psi(x)-1=\sum_{n\in\mathbf{Z}}(\psi_n(x)-1)\in C^0(\mathbf{T}^1).$$

(3.14) *Démonstration de* (3.1).

Proposition. — Pour tout $\varepsilon>0$ *et tout* f *comme en* (3.5), *il existe* $g\in F^1_\alpha-O^0_\alpha$ *tel que* $|Dg-Df|_{C^0}\leq\varepsilon$.

Démonstration. — On choisit la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ comme en (3.7), et telle que l'on ait $\ell=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\ell_n Df^n(0)<\theta$, θ étant définie en (3.9.1) *a)*. On construit l'ensemble de Cantor comme en (3.9). On suppose que le ε_1 de (3.9.1) *a)* est assez petit pour que :

$$|Df\circ h-Df|_{C^0}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

On construit g comme en (3.11) et (3.12).

Définissons g_n comme en (3.12). Pour cela, on choisit Dg_n sur I_n (on rappelle que $Dg_n|_{J_{\alpha_n+p}}=Dg_n|_{I_n}$ puisque Dg_n est $\mathbf{Z}$-périodique) ; soit, pour $x\in I_n$:

$$Dg_n(x)=Df(\bar{\alpha}_n)\psi_n(x),$$

avec $\psi_n(x)=1+k_n(x-b_n)(c_n-x)$.

On a $c_n - b_n = \ell'_n \mathrm{D}f^n(0)$, où $\ell'_n = \ell_n(1+\ell)^{-1}$ si l'ensemble de Cantor est de mesure positive et $\ell'_n = \ell_n$, si l'ensemble de Cantor est de mesure nulle; g_n s'obtient sur I_n par intégration, et, puisque $g_n : \mathrm{I}_n \to \mathrm{I}_{n+1} \pmod 1$:

$$\int_{\mathrm{I}_n} \mathrm{D}g_n(x)\,dx = \ell'_{n+1}\,\mathrm{D}f^{n+1}(0),$$

d'où :

$$k_n = 6\left(\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} - 1\right)\frac{1}{(\mathrm{D}f^n(0)\ell'_n)^2}.$$

Il suit que :

$$(3.14.1) \qquad \psi_n(x) - 1 = 6\left(\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} - 1\right)\frac{(x-b_n)(c_n - x)}{(\mathrm{D}f^n(0)\ell'_n)^2}.$$

On a donc : $\quad |\psi_n(x) - 1|_{\mathrm{I}_n} \leqslant \dfrac{3}{2}\left|\dfrac{\ell_{n+1}}{\ell_n} - 1\right| \leqslant \dfrac{3}{2}\eta < 1.$

Comme $\lim\limits_{n\to\pm\infty} \dfrac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = 1$, par (3.13), g est un difféomorphisme de classe C^1 (*i.e.* $g \in \mathrm{F}^1_\alpha - \mathrm{O}^{1,0}_\alpha$).
Comme $|\psi(x) - 1|_{\mathrm{C}^0(\mathbf{T}^1)} \leq \dfrac{3}{2}\eta$, si η est assez petit, on a

$$|\mathrm{D}g - \mathrm{D}f|_{\mathrm{C}^0} \leq \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Le théorème (3.1) résulte de la proposition précédente et du lemme suivant :

Lemme **(3.15)**. — *Soient f_1 et f_2 dans F^1_α, avec $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ et $|\mathrm{D}f_1 - \mathrm{D}f_2|_{\mathrm{C}^0} \leq \varepsilon$; on a $|f_1 - f_2|_{\mathrm{C}^0} \leq \varepsilon$.*

Démonstration. — Par III.4.1.5, il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $(f_1 - f_2)(x_0) = 0$ (puisque $f_1 \circ f_2^{-1}$ a un point fixe), et il suffit d'appliquer la formule de la moyenne $|(f_1 - f_2)(x)| \leq \varepsilon |x - x_0|$ pour conclure. $\blacksquare$

Remarque **(3.16)**. — Il n'est pas difficile de voir que tous les $g \in \mathrm{F}^1_\alpha - \mathrm{O}^{1,0}_\alpha$ construits en (3.11) et (3.12) sont C^0-conjugués entre eux, et même, si l'ensemble de Cantor $\overline{\mathrm{K}}$ est de m-mesure nulle, sont conjugués par un homéomorphisme h absolument continu ainsi que h^{-1} (par le même raisonnement qu'en (3.12)). Markeley [1] a étudié le problème de la C^0-conjugaison des contre-exemples de Denjoy : soit $g_1 \in \mathrm{Diff}^0_+(\mathbf{T}^1)$, tel que $\rho(g_1) = \alpha \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, et ayant un ensemble de Cantor minimal $\mathrm{F}_1 \neq \emptyset$ invariant. Soit $h_1 : \mathbf{T}^1 \to \mathbf{T}^1$, continue, monotone, telle que $h_1(0) = 0$ et $h_1 \circ g_1 = \mathrm{R}_\alpha \circ h_1$. Soit $h_1(\mathbf{T}^1 - \mathrm{F}_1) = \mathrm{D}_1$, qui est un ensemble dénombrable invariant par R_α. Le nombre d'orbites de l'action de R_α sur D_1 est, soit fini, soit dénombrable (voir Denjoy [2]). Dans l'exemple (3.11) et (3.12), nous avons construit D_1 comme l'orbite de 0 suivant R_α. Soit $g_2 \in \mathrm{Diff}^0_+(\mathbf{T}^1)$ tel que $\rho(g_2) = \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ et ayant F_2 comme ensemble de Cantor minimal invariant. Soit $h_2(\mathbf{T}^1 - \mathrm{F}_2) = \mathrm{D}_2$. Une condition nécessaire et suffisante pour que g_1 soit C^0-conjugué à g_2 est que $\mathrm{D}_1 = \mathrm{R}_\mathrm{C}(\mathrm{D}_2)$ pour un $\mathrm{C} \in \mathbf{T}^1$.

Problème. — *Lorsque g_1 et g_2 sont des difféomorphismes de classe C^1, trouver une condition nécessaire et suffisante pour que g_1 soit C^1-conjugué à g_2.*

(3.17) *Exemples de Denjoy et module de continuité.*

Rappelons que, si $w : [0, 1] \to [0, 1]$ est un module de continuité, on a posé :

$$C^w(\mathbf{T}^1) = \left\{ \varphi \in C^0(\mathbf{T}^1) \,\middle|\, \sup_{0<|x-y|\leqslant 1} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{w(|x-y|)} < +\infty \right\}$$

et $$D^{1+w}(\mathbf{T}^1) = \{ f \in D^1(\mathbf{T}^1) \mid Df \in C^w(\mathbf{T}^1) \}.$$

Remarquons que $D^{1+w}(\mathbf{T}^1)$ est un groupe et que si $f \in D^{1+w}(\mathbf{T}^1)$, alors $\operatorname{Log} Df \in C^w(\mathbf{T}^1)$ (cf. IV.3). Prenons, dans (3.7) à (3.14), $f = R_\alpha$; on considère une suite $(\ell_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ comme en (3.7), et le $g \in F^1_\alpha - O^{0,1}_\alpha$ construit en (3.14) (l'ensemble de Cantor étant ou non de m-mesure nulle). Dans ce cas, $Dg = \psi$ (et, si $x \in K$, $Dg(x) = 1$ puisque $DR_{n\alpha}(0) = 1$). On peut remarquer que, si l'on fait la construction avec un ensemble de Cantor de mesure positive, le h tel que $h \circ g = R_\alpha \circ h$ est ici lipschitzien.

On suppose que w est un module de continuité tel que :

$$(t) \qquad \sup_{n \in \mathbf{Z}} \left| \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} - 1 \right| \frac{1}{w(\ell'_n)} < +\infty.$$

On supposera, sans nuire à la généralité, que la fonction $w(x)/x$ est décroissante.

Proposition. — La fonction g construite de (3.7) *à* (3.14) *en perturbant $f = R_\alpha$ est telle que $g \in D^{1+w}(\mathbf{T}^1)$* (i.e. $g \in F^{1+w}_\alpha - O^0_\alpha$) *si et seulement si la condition* (t) *est vérifiée.*

Démonstration. — Si on a la condition (t) il suffit de voir que

$$\psi(x) - 1 = \lim_{N \to +\infty} \sum_{-N}^{N} (\psi_n(x) - 1) \in C^w(\mathbf{T}^1).$$

Par (3.14.1) :

$$|D\psi_n(x)| \leq 6 \left| \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} - 1 \right| \frac{1}{\ell'_n},$$

et on voit que :

$$|\psi_n - 1|_{C^w} = \sup_{0 < x-y \leq 1} \left| \frac{\psi_n(x) - \psi_n(y)}{w(x-y)} \right| \leq \left| \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} - 1 \right| \frac{6}{w(\ell'_n)}.$$

On a bien $Dg - 1 \in C^w(\mathbf{T}^1)$, puisque $Dg - 1$ est limite uniforme de $\sum_{-N}^{N} (\psi_n - 1) \in C^w(\mathbf{T}^1)$ et que (les $\psi_n - 1$ ayant des supports disjoints deux à deux) :

$$\left| \sum_{-N}^{N} (\psi_n - 1) \right|_{C^w} \leq 2 \sup_{n \in \mathbf{Z}} |\psi_n - 1|_{C^w} \leq 12 \sup_{n \in \mathbf{Z}} \left| \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} - 1 \right| \frac{1}{w(\ell'_n)} < +\infty.$$

La réciproque de la condition (t) est immédiate. ■

(3.18) Si l'on prend, comme en (3.7.1), la suite $(\ell_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ définie par :

$$\ell_n = a/(|n| + k)(\log(|n| + k))^{1+\varepsilon},$$

alors, pour tout $\varepsilon' > \varepsilon$, on vérifie que le module de continuité $w(x) = O\left(x\left(\log \frac{1}{x}\right)^{1+\varepsilon'}\right)$ (si $x \to 0$), remplit les conditions de (3.17).

Remarque **(3.19)**. — Prenons la suite (ℓ_n) (qui dépend de $k \geq 2$, $k \in \mathbf{R}$) comme en (3.18) avec $\frac{1}{a} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{(|n|+k)(\log(|n|+k))^{1+\varepsilon}}$; pour tout $k \geq 2$ et tout $\alpha \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, le $g(k) \in F_\alpha^{1+w} - O_\alpha^0$ construit de (3.7) à (3.14) (avec $w(x) = O(x(\log 1/x)^{1+\varepsilon'})$ vérifie :

(i) si $k \to +\infty$, $g(k) \to R_\alpha$ dans la C^1-topologie;

(ii) $\sup_{k \geq 2} |Dg(k)|_{C^w} < +\infty$.

Il en résulte, par VII.2.7.3, que pour tout $\varepsilon > 0$, tout $\alpha \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ et tout voisinage $V_\alpha^{2-\varepsilon}$ de R_α dans la $C^{2-\varepsilon}$-topologie, il existe $g \in V_\alpha^{2-\varepsilon} \cap F_\alpha^{2-\varepsilon}$ non C^0-conjugué à R_α.

4. Théorème de Denjoy et module de continuité.

On reprend les notations de (3.17). Commençons par remarquer que, si w est un module de continuité différent de $O(x)$ (*i.e.* de Lip_1 ou lipschitzien), alors $D^{1+w}(\mathbf{T}^1) \cap D^{1+vb}(\mathbf{T}^1)$ est maigre dans $D^{1+w}(\mathbf{T}^1)$ pour la C^{1+w}-topologie (il suffit en effet de construire un $\varphi \in C^w(\mathbf{T}^1)$ qui n'est pas à variation bornée, ce qui est très facile par séries de Fourier, par exemple). $D^{1+w}(\mathbf{T}^1) \cap D^{1+vb}(\mathbf{T}^1)$ est aussi maigre dans $D^{1+vb}(\mathbf{T}^1)$ pour la C^{1+vb}-topologie.

En (3.17) et (3.18), pour tout $\alpha \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ et $\varepsilon > 0$, on a construit des exemples de Denjoy $g \in F_\alpha^{1+w} - O_\alpha^0$ pour $w(x) = O(x(\mathrm{Log}\, 1/x)^{1-\varepsilon})$ (si $x \to 0$). On voit très facilement qu'on n'arrive pas à construire de $g \in F_\alpha^{1+w} - O_\alpha^0$ de module de continuité $w(x) = O(x(\mathrm{Log}\, 1/x)^{1-\varepsilon})$ et vérifiant $Dg|_K = 1$ sur l'ensemble de Cantor minimal K de g.

Nous nous proposons de montrer dans ce paragraphe qu'il y a vraiment des obstructions.

(4.1) On se donne $f \in \mathrm{Diff}_+^{1+w}(\mathbf{T}^1)$, $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ et on désigne par $(q_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite des dénominateurs des réduites de α. On suppose que, mod 1, f a un ensemble de Cantor K invariant. Soit I_0 une composante connexe de $\mathbf{T}^1 - K$. Considérons, pour $n \in \mathbf{Z}$, les intervalles, disjoints deux à deux, $I_n = f^n(I_0)$; on pose $\ell_n =$ mesure de Haar de $f^n(I_0)$. On a :

(4.2) $$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \ell_n \leq 1 \qquad \text{(cf. II.7.3)}.$$

(4.3) On pose $w(x) = x\eta(x)$, et on suppose que η est décroissante avec $\lim_{x \to 0} \eta(x) = +\infty$.

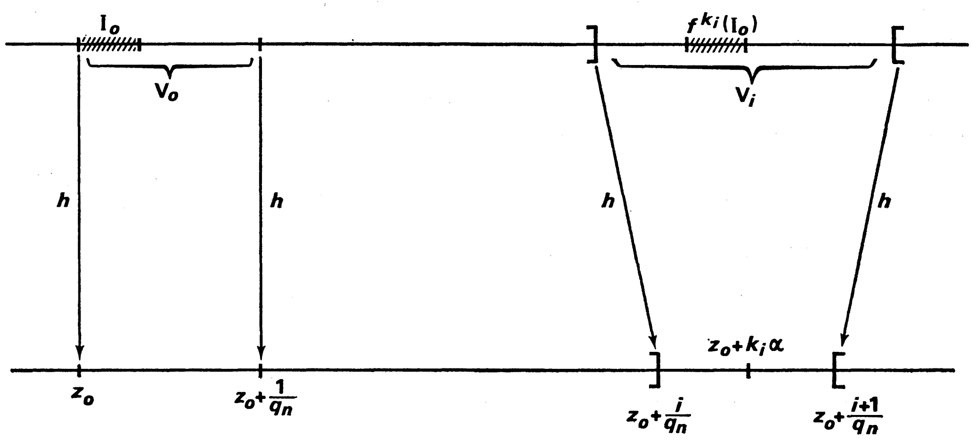
Lemme. — *Il existe une constante $c > 0$, telle que, quels que soient $x \in I_0$ et $n \in \mathbf{N}$, on ait :*

$$Df^{q_n}(x) \geq \exp(-c \sup_{0 \leq i \leq q_n} \eta(\ell_i)).$$

Démonstration. — On reprend la démonstration de l'inégalité de Denjoy-Koksma (voir VI.3.1). Soient μ l'unique mesure de probabilité invariante par f, et

$$h(x)=\int_0^x d\mu \pmod 1.$$

On a $h\circ f=\mathrm{R}_\alpha\circ h$. Faisons la démonstration si n est pair (le cas n impair est analogue). Soit $z_0=h(\mathrm{I}_0)$.



On pose $\mathrm{V}_0=h^{-1}\left(\left[z_0,\, z_0+\dfrac{1}{q_n}\right]\right)$ et, si $1\leq i\leq q_n-1$, $\mathrm{V}_i=h^{-1}\left(\left]z_0+\dfrac{i}{q_n},\, z_0+\dfrac{i+1}{q_n}\right[\right)$.

Soit v_i la mesure de Haar de V_i. Par V.8.1, pour tout $0\leq i\leq q_n-1$, il existe un unique k_i $(0\leq k_i\leq q_n-1)$ tel que $f^{k_i}(\mathrm{I}_0)\subset\mathrm{V}_i$ donc $v_i\geq \ell_{k_i}$. D'après VI.1.1, $\displaystyle\int_{\mathbf{T}^1}\log \mathrm{D}f(x)\, d\mu(x)=0$ et $\displaystyle\int_{\mathrm{V}_i} d\mu=\frac{1}{q_n}$.

Par le même raisonnement qu'en VI.3.1, on a, si $x\in\mathrm{I}_0$:

$$|\mathrm{Log}\ \mathrm{D}f^{q_n}(x)|\leq \sum_{i=0}^{q_n-1}\ \sup_{z,y\in \mathrm{V}_i}|\mathrm{Log}\ \mathrm{D}f(z)-\mathrm{Log}\ \mathrm{D}f(y)|;$$

puisque $\mathrm{Log}\ \mathrm{D}f\in\mathrm{C}^w(\mathbf{T}^1)$, il existe une constante $c>0$ telle que l'on ait, pour tout $x\in\mathrm{I}_0$:

$$\begin{aligned}|\mathrm{Log}\ \mathrm{D}f^{q_n}(x)| &\leq c\sum_{i=0}^{q_n-1} w(v_i)=c\sum_{i=0}^{q_n-1} v_i\eta(v_i)\\ &\leq c\Big(\sum_{i=0}^{q_n-1} v_i\Big)\sup_{0\leqslant i\leqslant q_n}\eta(v_i)\leq c\sup_{0\leq i\leq q_n}\eta(v_i)\leq c\sup_{0\leq i\leq q_n}\eta(\ell_i).\ \blacksquare\end{aligned}$$

(4.4) Soit $\alpha \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ satisfaisant à la condition :

$$(*) \qquad \sup_{n \geq 1} \frac{\operatorname{Log} q_n}{n} < +\infty;$$

par V.9.5, m-presque tout α satisfait $(*)$.

On se donne le module de continuité :

$$w(x) = O\left(x\left(\operatorname{Log}\operatorname{Log}\operatorname{Log}\frac{1}{x}\right)^{1-\varepsilon}\right), \quad \text{si} \quad x \to 0 \ (0 < \varepsilon < 1).$$

Théorème. — Soit $f \in \mathrm{D}^{1+w}(\mathbf{T}^1)$; *si* $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{T}^1 - \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ *satisfait à la conditior* $(*)$, f *est* C^0*-conjugué à* R_α.

Démonstration. — Par l'absurde. On suppose comme en (4.1) que f n'est pas C^0-conjugué à R_α, et on considère les intervalles I_n.

On a $\ell_n \geq \ell_0 k^n$, avec $k = \operatorname{Min}_x \mathrm{D}f(x)$ $\left(\text{et même, par VI.1.1, } \lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{Log} \mathrm{D}f^n}{n} = 0\right)$.

D'après la condition $(*)$, on a, pour $n \geqslant 2$:

$$\sup_{0 \leq i \leq q_n} \eta(\ell_i) \leq c_1(\operatorname{Log}\operatorname{Log}\operatorname{Log} 1/k^{q_n})^{1-\varepsilon} \leq c_2(\operatorname{Log} n)^{1-\varepsilon},$$

où les c_i sont des constantes positives (pour $i = 1, 2, 3$).

On obtient finalement par (4.3), si $n \geq 2$ et $x \in \mathrm{I}_0$:

$$\mathrm{D}f^{q_n}(x) \geq e^{-c_3(\log n)^{1-\varepsilon}}.$$

Or $$\ell_{q_n} = \int_{\mathrm{I}_0} \mathrm{D}f^{q_n}(t)\,dt \geq \ell_0 e^{-c_3(\log n)^{1-\varepsilon}};$$

donc $$\sum_{n=2}^{\infty} \ell_{q_n} \geq \ell_0 \sum_{n=2}^{\infty} e^{-c_3(\log n)^{1-\varepsilon}} = +\infty,$$

ce qui est contraire à (4.2); par l'absurde, le théorème en résulte. ∎

(4.5) On démontre de façon analogue le théorème suivant :

Théorème. — Pour tout $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ *il existe un module de continuité* w_α *différent d'un module de Lipschitz, tel que, si* $f \in \mathrm{D}^{1+w_\alpha}(\mathbf{T}^1)$ *et* $\rho(f) = \alpha$, *alors* f *est* C^0*-conjugué à* R_α.

5. Contre-exemples de Denjoy de classe C^0 et commutant.

La proposition suivante résulte aussi de Markeley [1] :

Proposition. — Soient $n \in \mathbf{N}$, *et* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ n *nombres tels que* $(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *soient indépendants sur* $\mathbf{Q}$ (i.e. mod 1, *que* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ *soit libre dans le* $\mathbf{Z}$*-module* $\mathbf{T}^1$); *il existe des* $f_i \in \mathrm{F}^0_{\alpha_i} - \mathrm{O}^0_{\alpha_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ *vérifiant* $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$ *pour* $1 \leq i \leq j \leq n$.

Démonstration. — On construit facilement une fonction $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, continue, non décroissante et telle que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h(x) + 1 = h(x+1)$, que pour tout

$p=(p_1, \ldots, p_{n+1})\in\mathbf{Z}^{n+1}$, $J_p=h^{-1}(p_1\alpha_1+\ldots+p_n\alpha_n+p_{n+1})$ soit un intervalle d'intérieur non vide, que les $J_{(p_1,\ldots,p_{n+1})}$ soient disjoints deux à deux et que $U=\bigcup_{p\in\mathbf{Z}^{n+1}}\operatorname{Int} J_p$ soit un ouvert dense dans $\mathbf{R}$. On a évidemment :

$$J_{(p_1,\ldots,p_n,0)}+p_{n+1}=J_{(p_1,\ldots,p_{n+1})}.$$

Soit $K=\mathbf{R}-U$; K est invariant par R_q si $q\in\mathbf{Z}$, et $\pi(K)=\overline{K}$ est un ensemble de Cantor dans $\mathbf{T}^1$. On construit f_1 comme en (3.11) en perturbant R_{α_1} par h, avec cette différence que, pour tout $(p_1, \ldots, p_n, 0)\in\mathbf{Z}^{n+1}$, on choisit un homéomorphisme croissant de $J_{(p_1,\ldots,p_n,0)}$ sur $J_{(p_1+1,\ldots,p_n,0)}$ et l'on détermine f_1 sur U par $f_1(x+p_{n+1})=p_{n+1}+f_1(x)$, $p_{n+1}\in\mathbf{Z}$; f_1 se prolonge en $f_1\in D^0(\mathbf{T}^1)$, et $h\circ f_1=R_{\alpha_1}\circ h$; il en résulte que $\rho(f_1)=\alpha_1$ et que, si $\bar{f}_1=\pi(f_1)$, on a $\bar{f}_1(\overline{K})=\overline{K}\subset\mathbf{T}^1$ et donc $f_1\in F^0_{\alpha_1}-O^0_{\alpha_1}$.

Supposons par récurrence qu'on ait construit, pour $1\leq k\leq n$, $f_1, \ldots, f_k$ satisfaisant à la proposition. On construit f_{k+1} ainsi : pour tout $(0, \ldots, 0, p_{k+1}, \ldots, p_n, 0)\in\mathbf{Z}^{n+1}$, on choisit un homéomorphisme croissant de $J_{(0,\ldots,0,p_{k+1},\ldots,p_n,0)}$ sur $J_{(0,\ldots,p_{k+1}+1,\ldots,p_n,0)}$; on détermine f_{k+1} sur $\bigcup_{(0,\ldots,0,p_{k+1},\ldots,p_{n+1})} J_p$ par la relation

$$f_{k+1}(x+p_{n+1})=p_{n+1}+f_{k+1}(x),\ p_{n+1}\in\mathbf{Z}.$$

Ensuite, on détermine f_{k+1} sur $J_{(p_1,\ldots,p_{k+1},\ldots,p_{n+1})}$ par la relation

$$f_{k+1}(x)=f_1^{p_1}\circ\ldots\circ f_k^{p_k}\circ f_{k+1}\circ f_1^{-p_k}\circ\ldots\circ f_k^{-p_1}(x)$$
$$x\in J_{(p_1,\ldots,p_{k+1},\ldots,p_{n+1})}.$$

On a ainsi défini f_{k+1} strictement croissante sur U; f_{k+1} se prolonge en $f_{k+1}\in D^0(\mathbf{T}^1)$, vérifiant $h\circ f_{k+1}=R_{\alpha_{k+1}}\circ h$, donc $\rho(f_{k+1})=\alpha_{k+1}$ par II.2.10. On a aussi $f_i\circ f_{k+1}=f_{k+1}\circ f_i$ pour $1\leq i\leq k+1$ par construction (c'est vrai sur U, qui est dense). Ceci achève la récurrence. ■

6. Continuité et C^0-conjugaison.

Soient $\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$, $f\in F^0_\alpha$, et μ l'unique mesure de probabilité invariante par $\bar{f}$ sur $\mathbf{T}^1$ (voir II.8). D'après II.7.1, il existe $h=\mathrm{Id}+\psi$ ($\psi\in C^0(\mathbf{T}^1)$), non décroissante, vérifiant $h\circ f=R_\alpha\circ h$. Si l'on impose que $\mu(\psi)=\int_{\mathbf{T}^1}\psi\,d\mu=0$, h est unique. Soit ψ_α l'application qui à $f\in F^0_\alpha$ associe cet unique $\psi\in C^0(\mathbf{T}^1)$. On a la

Proposition **(6.1)**. — $\psi_\alpha : F^0_\alpha\to C^0(\mathbf{T}^1)$ *est continue pour la* C^0*-topologie.*

Démonstration. — D'après IV.5.2 :

$$\psi_\alpha(f)=\lim_{n\to+\infty} S_n(f),$$

avec $$S_n(f)=\psi-\frac{1}{n}\Big(\sum_{i=0}^{n-1}\psi\circ f^i\Big)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f^i-i\alpha-\mathrm{Id}),$$

donc $$|\psi_\alpha(f)-S_n(f)|_0\leq\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\psi\circ f^i\right|_0.$$

Or, pour n fixé, $f \mapsto S_n(f)$ est continue pour la C^0-topologie. Soient q_n les dénominateurs des réduites de α. Puisque $h = \mathrm{Id} + \psi$ est monotone non décroissante, ψ est à variation bornée et $\mathrm{Var}(\psi) \leq 2$. Par l'inégalité de Denjoy-Koksma, VI.3, on a, puisque $\int_{\mathbf{T}^1} \psi \, d\mu = 0$:

$$|\psi_\alpha(f) - S_{q_n}(f)|_0 \leq \frac{1}{q_n} \mathrm{Var}(\psi) \leq \frac{2}{q_n}.$$

Si $n \to +\infty$, $q_n \to +\infty$, $\psi_\alpha(f)$ est limite uniforme des applications continues $f \mapsto S_{q_n}(f)$ pour la C^0-topologie, donc $f \mapsto \psi_\alpha(f)$ est continue. ■

Soit $D^0(\mathbf{T}^1, 0) = \{h \in D^0(\mathbf{T}^1) \mid h(0) = 0\}$; rappelons que, si $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, l'application $\Phi_\alpha^0 : D^0(\mathbf{T}^1, 0) \to O_\alpha^0$ définie par $\Phi_\alpha^0(g) = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$ est continue pour la topologie C^0; c'est une bijection d'après II.3. Soit $(\Phi_\alpha^0)^{-1}$ la bijection réciproque de Φ_α^0.

Proposition **(6.2)**. — $(\Phi_\alpha^0)^{-1} : O_\alpha^0 \to D^0(\mathbf{T}^1, 0)$ *est continue pour la* C^0-*topologie.*

Démonstration. — Soit $H : D^0(\mathbf{T}^1) \to D^0(\mathbf{T}^1, 0)$ l'application continue :

$$h \in D^0(\mathbf{T}^1) \mapsto h - h(0);$$

on a $(\Phi_\alpha^0)^{-1} = H \circ (\psi_\alpha + \mathrm{Id})$, et ψ_α est continue par (6.1). ■

XI. — CATÉGORIE DE BAIRE DES ORBITES O_α^r DANS LES FERMÉS F_α^r

Plan :

Commentaire :

Les résultats principaux de ce chapitre se trouvent en 4 (et ont été annoncés dans Herman [6]). On montre que pour $\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ et $1\leq r<+\infty$, O_α^r est maigre dans F_α^r.

On montre aussi que, si α est un nombre de Liouville, O_α^∞ est maigre dans F_α^∞, et si α n'est pas de type constant, $O_\alpha^{r,r-1}\cap\overline{O}_\alpha^r$ est maigre dans $\overline{O}_\alpha^r$.

Un sous-espace maigre d'un espace de Baire peut être néanmoins dense (exemple **Q** dans **R**). C'est l'objet de la conjecture en 7, à laquelle nous donnons une réponse partielle. Notons que la famille de difféomorphismes de PSL(2, **R**) intervient seulement par la proposition (1.1). Les suites construites en (3.4) montrent que si $r\geq 1$ et si $\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$, la bijection continue pour la C^r-topologie :

$$g\in D^r(\mathbf{T}^1,0)\mapsto \Phi_\alpha^r(g)=g^{-1}\circ R_\alpha\circ g\in O_\alpha^r$$

n'est pas un homéomorphisme sur son image (*i.e.* la bijection réciproque n'est pas continue pour la C^r-topologie).

Note. — Un ouvert C^k d'un sous-espace de $D^\infty(\mathbf{T}^1)$ veut dire un ouvert induit sur ce sous-espace par la C^k-topologie.

On suppose dans ce chapitre que $1\leq r\leq+\infty$ est un entier ou $r=+\infty$.

1. Les difféomorphismes de PSL(2, R).

$\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})=\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})/\{-1,+1\}$ agit effectivement sur $D^2=\{z\mid |z|\leq 1\}$ par $z\mapsto e^{2\pi i\lambda}.\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$, avec $\lambda\in\mathbf{T}^1$ et $|a|<1$. C'est même le groupe des transformations biholomorphes de Int D^2.

Chaque élément définit sur $S^1=\partial D^2=\{z\in\mathbf{C}\mid |z|=1\}$ un difféomorphisme C^ω (isotope à Id) de S^1; soit $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})\hookrightarrow \mathrm{Diff}_+^\omega(S^1)$.

Proposition (**1.1**). — *Soit f un difféomorphisme de* $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ *qui n'a pas de point fixe sur* S^1 $(\rho(f) \neq 0 \in S^1)$; *alors f est C^ω-conjugué à une rotation.*

Démonstration. — Si $f(z) = e^{2\pi i\lambda} \cdot \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$, et $a \neq 0$, f a deux points fixes (comptés avec leur multiplicité) sur $\mathbf{C}$, a_1 et a_2, et on voit que $|a_1||a_2| = 1$; si f n'a pas de point fixe sur S^1, on appelle a_1 l'unique point fixe avec $|a_1| < 1$.

f est alors conjugué sur D^2, dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$, à une rotation de D^2 : $\dfrac{z-a_1}{1-\bar{a}_1 z} \circ f \circ \dfrac{z+a_1}{1+\bar{a}_1 z}$ est une rotation $z \mapsto \beta z$ avec $\beta = \dfrac{df}{dz}(a_1)$ $(|\beta| = 1)$. ■

Supposons que $a \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ $(a \in \mathbf{R})$; $a \mapsto \dfrac{z-a}{1-az}$ définit sur S^1 une famille C^ω de difféomorphismes, qui est l'identité pour $a = 0$, et qui pour $a \neq 0$ ont deux points fixes $z = \pm 1$ sur S^1.

(**1.2**) Soit $f_a = \mathrm{Id} + \varphi_a \in D^\omega(\mathbf{T}^1)$ cette famille, que l'on remonte à $\mathbf{R}$. On suppose f_a choisi tel que, si $a \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, $\rho(f_a) = 0$. Soit $\varphi_a(0) = 0$. Si on relève $e^{2\pi i\lambda} \dfrac{z-a}{1-az}$, on obtient $R_\lambda \circ f_a$.

(**1.3**) Donc $a \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right] \mapsto f_a \in D^\omega(\mathbf{T}^1)$ est une famille C^ω, telle que $f_0 = \mathrm{Id}$ et telle que, si $\rho(R_\lambda \circ f_a) \notin \mathbf{Z}$, $R_\lambda \circ f_\alpha$ est C^ω-conjugué à R_α $(\alpha = \rho(R_\lambda \circ f_a))$.

Lemme (**1.4**). — *Pour tout entier* $0 \leq r < +\infty$, *il existe une constante* $C_r > 0$ *telle que*

$$\frac{1}{C_r}|a| \leq |D^r \varphi_a|_0 \leq C_r |a|.$$

Démonstration. — $a \mapsto \dfrac{z - \operatorname{th} a}{1 - (\operatorname{th} a)z}$ est un groupe à un paramètre de difféomorphismes de S^1. Il en résulte que $\dfrac{\partial}{\partial a}(f_a)|_{a=0}$ est le générateur infinitésimal de ce groupe à un paramètre, donc $\left.\dfrac{\partial \varphi_a}{\partial a}\right|_{a=0} = \dfrac{\partial}{\partial a} f_a|_{a=0}$ est une fonction dans $C^\omega(\mathbf{T}^1)$, non nulle. Par suite, $\dfrac{\partial}{\partial a}(D^r\varphi_a)|_{a \neq 0}$ est une fonction non nulle de $C^\omega(\mathbf{T}^1)$. Pour $0 \leq r < +\infty$, on a $D^r\varphi_0 = 0$.

Si $a \to 0$, on a $\liminf \left|\dfrac{1}{a} D^r \varphi_a\right|_0 \neq 0$.

Si $a \neq 0$, on a $\left|\dfrac{1}{a} D^r \varphi_a\right|_0 \neq 0$ pour $0 \leq r < +\infty$.

Il en résulte, pour $0 \leq r < +\infty$, qu'il existe $\dfrac{1}{C_r}$ tel que $|D^r\varphi_a|_0 \geq \dfrac{1}{C_r}|a|$ pour $a \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$. L'inégalité dans l'autre sens résulte de la formule de la moyenne :

$$|D^r\varphi_a(x)| = |D^r\varphi_a(x) - D^r\varphi_0(x)| \leq \left(\underset{\substack{a \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ x \in \mathbf{R}}}{\mathrm{Max}} \left| \frac{\partial}{\partial a} D^r \varphi_a(x) \right| \right) \cdot |a|. \quad ■$$

2. Revêtements finis.

Soient $q \in \mathbf{N}$, et $h_q(x)=qx$; h_q est l'homothétie de rapport q, $h_q \in \mathrm{Diff}^\omega(\mathbf{R})$ $(q \neq 0)$.

(2.1) On a l'homomorphisme de groupe ou du revêtement fini d'ordre q pour $0 \leq r \leq \omega$ défini par :

$$f \in \mathrm{D}^r(\mathbf{T}^1) \to \tilde{f} = h_q^{-1} \circ f \circ h_q \in \mathrm{D}^r(\mathbf{T}^1).$$

Si $f \in \mathrm{D}^r(\mathbf{T}^1)$, $f=\mathrm{Id}+\varphi$, $\tilde{f}(x)=x+\frac{1}{q}\varphi(qx)$. On a les propriétés suivantes :

(2.2) $\rho(h_q^{-1} \circ \mathrm{R}_p \circ f \circ h_q) = \dfrac{\rho(f)}{q} + \dfrac{p}{q}$ pour $p \in \mathbf{Z}$.

(2.3) Si f est C^r-conjugué à R_α, alors $h_q^{-1} \circ \mathrm{R}_p \circ f \circ h_q$ est C^r-conjugué à $\mathrm{R}_{\alpha/q+p/q}$.

(2.4) Si $\rho(f)=0$ et $f \neq \mathrm{Id}$, alors $(h_q^{-1} \circ (\mathrm{R}_p \circ f) \circ h_q)^q \neq \mathrm{R}_p$.

Démonstration :

(2.2) résulte de ce que, si $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\frac{(h_q^{-1} \circ \mathrm{R}_p \circ f \circ h_q)^n - \mathrm{Id}}{n} = \frac{p}{q} + \frac{(f^n - \mathrm{Id}) \circ h_q}{qn},$$

donc, si $n \to +\infty$, $\dfrac{(f^n-\mathrm{Id}) \circ h_q}{qn} \to \dfrac{\rho(f)}{q}$.

(2.3) résulte de ce que, si $f=g^{-1} \circ \mathrm{R}_\alpha \circ g$ avec $g \in \mathrm{D}^r(\mathbf{T}^1)$, alors

$$h_q^{-1} \circ \mathrm{R}_p \circ f \circ h_q = \tilde{g}^{-1} \circ \mathrm{R}_{p/q+\alpha/q} \circ \tilde{g},$$

avec $\tilde{g} = h_q^{-1} \circ g \circ h_q \in \mathrm{D}^r(\mathbf{T}^1)$ (par (2.1)).

(2.4) se prouve par l'absurde : si $(h_q^{-1} \circ \mathrm{R}_p \circ f \circ h_q)^q = \mathrm{R}_p$, alors on a $\mathrm{R}_{pq} \circ f^q = \mathrm{R}_{pq}$, soit $f^q = \mathrm{Id}$; mais comme $\rho(f)=0$ avec $f \neq \mathrm{Id}$, f a un point fixe; il en résulte que $f^q \neq \mathrm{Id}$ pour tout $q \in \mathbf{Z}-\{0\}$, d'où une contradiction.

(2.5) Rappelons que nous avons posé

$\mathrm{O}^r = \{f \in \mathrm{D}^r(\mathbf{T}^1) \mid f$ est C^r-conjugué à une rotation$\}$.

$\bar{\mathrm{O}}^r$ est l'adhérence de O^r pour la C^r-topologie dans $\mathrm{D}^r(\mathbf{T}^1)$.

Proposition. — Pour tout $p/q \in \mathbf{Q}$ donné, il existe une application continue Φ pour la C^∞-topologie, $a \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \mapsto \Phi(a) \in \bar{\mathrm{O}}^\infty$, ayant les propriétés suivantes :

1) *pour tout* $a \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $\Phi(a) \in \mathrm{D}^\omega(\mathbf{T}^1)$, $\rho(\Phi(a)) = p/q$;

2) *si* $a=0$, $\Phi(0)=\mathrm{R}_{p/q}$;

3) *si* $a \neq 0$, $\Phi(a)$ *est non périodique* (i.e. *sur* $\mathbf{T}^1$, $\Phi(a)$ *a un nombre fini de points périodiques*).

Démonstration. — Soit f_a défini en (1.2), et considérons le chemin C^ω :

$$a \mapsto \widetilde{f_a} = h_q^{-1} \circ R_p \circ f_a \circ h_q \in D^\omega(\mathbf{T}^1).$$

Soit $\lambda_{p+/q}(a)$ l'unique élément de $\mathbf{R}$ tel que $R_{\lambda_{p+/q}}(a) \circ \widetilde{f_a} \in F^\omega_{p+/q}$ (*i.e.* seles mi-stables en avant). Le chemin $a \mapsto \Phi(a) = R_{\lambda_{p+/q}}(a) \circ \widetilde{f_a} \in F^\omega_{p+/q}$ est continu dans la C^∞-topologie par III.4.2. Montrons qu'il satisfait aux propriétés de l'énoncé. On a $\Phi(0) = R_{p/q}$. D'après (2.4), si $a \neq 0$, $\Phi(a)$ sur $\mathbf{T}^1$ a un nombre fini de points périodiques. Il reste à voir que $\Phi(a) \in \bar{O}^\infty$. Or, pour tout $\lambda > 0$ suffisamment petit, cf. III.2.4, $R_\lambda \circ \Phi(a) \in O^\omega$ par (2.3), car si $\rho(R_\lambda \circ f_a) \notin \mathbf{Z}$, alors $R_\lambda \circ f_a \in O^\omega$ par (1.1). ■

3. Construction d'une suite de difféomorphismes.

Pour $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, nous allons construire une suite de difféomorphismes $f_i \in F^\omega_\alpha$; f_i est C^ω-conjugué à R_α, $f_i = g_i \circ R_\alpha \circ g_i^{-1}$ tel que, si $i \to +\infty$, $f_i \to R_\alpha$ dans la C^r-topologie.

(3.1) *Construction de la suite.*

Soit $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$.

(3.1.1) Soient f_a, défini en (1.2), et q_i une suite d'entiers tendant vers $+\infty$, lorsque $i \to +\infty$. Nous allons choisir $a_i \to 0$ ($0 < a_i \leq 1/2$) si $i \to +\infty$, choix dépendant des approximations de α par des rationnels.

On pose :

(3.1.2) $$f_i = h_{q_i}^{-1} \circ f_{a_i} \circ h_{q_i} + \alpha + \lambda_i \quad \left(i.e. \ f_i(x) = x + \frac{1}{q_i} \varphi_{a_i}(q_i x) + \alpha + \lambda_i\right).$$

(3.1.3) On choisit pour λ_i l'unique élément de $\mathbf{R}$ tel que $\rho(f_i) = \alpha$.

(3.1.4) On a $f_i \in D^\omega(\mathbf{T}^1)$ et, par (1.1) et (2.3), $f_i = g_i \circ R_\alpha \circ g_i^{-1}$ avec $g_i \in D^\omega(\mathbf{T}^1, 0)$.

Lemme **(3.2)**. — *Si* $q_i \to +\infty$ *quand* $i \to +\infty$ (*avec* $0 < a_i \leq 1/2$), *alors, quand* $i \to +\infty$, $f_i \to R_\alpha$ *pour la* C^0-*topologie.*

Démonstration. — Il suffit de voir que, lorsque $i \to +\infty$, $\lambda_i \to 0$. Or ceci résulte de III.4.2.1. On peut le voir aussi de la façon suivante. Par II.2.4, pour tout i il existe un $x_i \in \mathbf{R}$ tel que $f_i(x_i) = R_\alpha(x_i)$.

Soit : $$|\lambda_i| \leq \frac{1}{q_i} |\varphi_{a_i}(x_i)| \leq \frac{1}{q_i} |\varphi_{a_i}|_0 \leq \frac{\text{Cte}}{q_i},$$

donc, quand $i \to +\infty$, comme $q_i \to +\infty$, $|\lambda_i| \to 0$. ■

Lemme **(3.3)**. — *On a, pour tout* i, $g_i \circ R_{p_i/q_i} \circ g_i^{-1} = R_{p_i/q_i}$.

Démonstration. — Cela résulte de (2.3). ■

(3.4) *Cas général.* — On suppose que si $p_n/q_n \in \mathbf{Q}$, $p_n \in \mathbf{Z}$, $q_n \in \mathbf{N}$ et $(p_n, q_n)=1$.
Soit $1 \leq r < +\infty$ un entier donné. Soit $\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$. Par Dirichlet (V.6.1), il y a une suite $p_i/q_i \in \mathbf{Q}$, avec $q_i \to \infty$, si $i \to +\infty$ $(q_i > 2)$, et vérifiant $|\alpha-(p_i/q_i)| < 1/q_i^2$. On se donne $0 < \varepsilon < 1$. On choisit alors :

$$a_i = \frac{1}{q_i^{r-1+\varepsilon}}.$$

Soit (f_i) la suite construite en (3.1). On a $\rho(f_i)=\alpha$; f_i dépend de a_i, donc de $r \geqslant 1$.

Lemme **(3.4.1)**. — *Si* $i \to +\infty$, *alors* $f_i \to R_\alpha$ *dans la* C^r-*topologie.*

Démonstration. — Pour $r=0$, c'est le lemme (3.2). Par (1.4) on a, pour $1 \leq k \leq r$, lorsque $i \to +\infty$:

$$|D^k f_i - D^k R_\alpha|_0 \leq \frac{C_k}{q_i}\frac{|q_i|^k}{q_i^{r-1+\varepsilon}} \leq \frac{C_k}{q_i^{r+\varepsilon-k}} \leq \frac{C_k}{q_i^\varepsilon}.$$

Comme $0<\varepsilon$, si $i \to +\infty$, $|D^k f_i - D^k R_\alpha|_0 \to 0$ pour tout $k \leq r$. ■

Par (3.1.4), $f_i = g_i \circ R_\alpha \circ g_i^{-1}$, avec $g_i \in D^\omega(\mathbf{T}^1, 0)$. Posons, pour $g \in D^r(\mathbf{T}^1)$, $r \geq 1$:

$$\|g\|_r = |Dg|_{C^{r-1}} + |Dg^{-1}|_0.$$

La proposition suivante affirme que (g_i) diverge dans le groupe $D^r(\mathbf{T}^1)$.

Proposition **(3.4.2)**. — *Si* $i \to +\infty$, $\|g_i\|_r \to +\infty$ (*où* $f_i = g_i \circ R_\alpha \circ g_i^{-1}$).

Démonstration. — On a, par (3.3) :

$$(*) \qquad f_i - R_{p_i/q_i} = g_i \circ R_\alpha \circ g_i^{-1} - g_i \circ R_{p_i/q_i} \circ g_i^{-1}.$$

Soit, pour $x \in \mathbf{R}$:

$$\alpha - \frac{p_i}{q_i} + \lambda_i + \frac{1}{q_i}\varphi_{a_i}(q_i x) = g_i(\alpha + g_i^{-1}(x)) - g_i\left(\frac{p_i}{q_i} + g_i^{-1}(x)\right).$$

On démontre la proposition par l'absurde. Supposons (quitte à extraire une sous-suite que l'on appelle encore g_i) que pour tout i, $\|g_i\|_r \leq A < +\infty$.

Cas $r=1$. — En appliquant la formule de la moyenne au deuxième membre de $(*)$:

$$\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i} + \lambda_i + \frac{1}{q_i}\varphi_{a_i}(q_i x)\right| \leq A\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| \leq A\frac{1}{q_i^2},$$

donc
$$M_i = \operatorname*{Max}_{x \in \mathbf{R}} \left|\alpha - \frac{p_i}{q_i} + \lambda_i + \frac{1}{q_i}\varphi_{a_i}(q_i x)\right| \leq A\frac{1}{q_i^2}.$$

On utilise le lemme trivial suivant.

Lemme. — *Soit* $\varphi \in C^0(\mathbf{T}^1)$ *avec* $x_0 \in \mathbf{R}$ *tel que* $\varphi(x_0)=0$; *alors, pour tout* $\lambda \in \mathbf{R}$, *on a* $\operatorname*{Max}_{x \in \mathbf{R}} |\lambda + \varphi(x)| \geq \frac{1}{2}|\varphi|_0$.

Il suit du lemme que $M_i \geq \frac{1}{2q_i} |\varphi_{a_i}|_0$ (puisque, pour tout a, $\varphi_a(x)$ s'annule). Par (1.4) on a $\frac{1}{2C_0 q_i}|a_i| \leq M_i$, donc, puisque $a_i = \frac{1}{q_i^\varepsilon}$, $\frac{1}{2C_0}\frac{1}{q_i^{1+\varepsilon}} \leq M_i$. Or $M_i \leq A\frac{1}{q_i^2}$. On doit avoir $\frac{1}{2C_0 q_i^{1+\varepsilon}} \leq A\frac{1}{q_i^2}$, avec $q_i \to +\infty$ si $i \to +\infty$, ce qui n'est pas possible (puisque $0 < \varepsilon < 1$ est donné). Donc, par l'absurde, $\|g_i\|_1 \to \infty$, si $i \to +\infty$.

Cas $r \geq 2$. — Dérivons $(*)$ $r-1$ fois :

$$\frac{q_i^{r-1}}{q_i} D^{r-1}\varphi_{a_i}(q_i x) = D^{r-1}\left(g_i(\alpha + g_i^{-1}(x)) - g_i\left(\frac{p_i}{q_i} + g_i^{-1}(x)\right)\right).$$

On a, d'après IV.2.2 :

$$D^{r-1} g_i(t + g_i^{-1}(x)) = \sum_{k=1}^{r-1} D^k g_i(t + g_i^{-1}(x)) \cdot \varphi_{i,k}(x)$$

pour $1 \leq k \leq r-1$, où $\varphi_{i,k}(x)$ est une fonction continue de $C^0(\mathbf{T}^1)$ indépendante de t, avec $\sup_{i,k} |\varphi_{i,k}(x)|_0 \leq E_r A^{(3r-5)(r-1)}$, E_r étant une constante dépendant seulement de r. Donc :

$$\left|\frac{q_i^{r-1}}{q_i} D^{r-1}\varphi_{a_i}(q_i x)\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{r-1} D^k g_i(\alpha + g_i^{-1}(x)) - D^k g_i\left(\frac{p_i}{q_i} + g_i^{-1}(x)\right)\right| |\varphi_{i,k}(x)|$$
$$\leq (r-1) E_r A^{(3r-5)(r-1)+1} \left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| \leq \frac{C}{q_i^2},$$

C étant une constante dépendant seulement de A et de r. Donc :

$$\frac{q_i^{r-1}}{q_i} |D^{r-1}\varphi_{a_i}|_0 \leq \frac{C}{q_i^2}.$$

Or, par (1.4) $\left(\text{avec } a_i = \frac{1}{q_i^{r-1+\varepsilon}}\right)$:

$$\frac{q_i^{r-1}}{q_i} |D^{r-1}\varphi_{a_i}|_0 \geq \frac{1}{C_{r-1} q_i^{1+\varepsilon}}.$$

On conclut que l'on doit avoir

$$\frac{1}{C_{r-1} q_i^{1+\varepsilon}} \leq \frac{C}{q_i^2},$$

avec C et C_{r-1} des constantes; mais, si $i \to +\infty$, $q_i \to +\infty$ et $0 < \varepsilon < 1$ est fixé. Il en résulte que l'on a une contradiction. Par l'absurde, si $i \to +\infty$, $\|g_i\|_r \to +\infty$. ■

(3.5) *α nombre de Liouville.*

Soit $\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$ un nombre de Liouville (voir V.6.6). Pour tout $i \in \mathbf{N}$, il existe $p_i/q_i \in \mathbf{Q}$, $q_i \geq 2$, avec $\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| < \frac{1}{q_i^i}$; on a, si $i \to +\infty$, $q_i \to +\infty$.

Soit f_i construit comme en (3.1), avec $a_i = \frac{1}{q_i^{i/2}}$, $f_i = g_i \circ R_\alpha \circ g_i^{-1}$, $g_i \in D^\omega(\mathbf{T}^1, 0)$. En utilisant (1.4), on a le

Lemme. — *Si $i \to +\infty$, $f_i \to R_\alpha$ dans la C^∞-topologie.*

Et par une démonstration analogue à (3.4.2), cas $r=1$, on a la

Proposition. — *Si $i \to +\infty$, $|Dg_i|_0 \to +\infty$.*

(3.6) *α non de type constant.*

Soit $\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$, α non de type constant.

Il existe, par V.6.4, $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{R}_+$, $\lim\limits_{i \to +\infty} \varphi(i) = +\infty$, tel que l'inéquation

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2 \varphi(q)}$$

ait une infinité de solutions. Soit $p_i/q_i \in \mathbf{Q}$, avec $q_i \to +\infty$ si $i \to +\infty$, et vérifiant

$$\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| < \frac{1}{q_i^2 \varphi(q_i)}.$$

Soit, pour $r \geq 2$, f_i construit comme en (3.1) pour $r \geq 2$, avec $a_i = \frac{1}{q_i^{r-1}\sqrt{\varphi(q_i)}}$. On a $f_i = g_i \circ R_\alpha \circ g_i^{-1}$, $g_i \in D^\omega(\mathbf{T}^1)$. Par (1.4), on démontre le

Lemme. — *Si $i \to +\infty$, $f_i \to R_\alpha$ dans la C^r-topologie* $(r \geq 2)$.

Par une démonstration identique à celle de (3.4), en dérivant $r-2$ fois l'identité (*), on a la

Proposition. — *Si $i \to +\infty$, $\|g_i\|_{r-1} \to \infty$.*

4. Catégorie de Baire des orbites.

Rappelons que nous avons posé, pour $\alpha \in \mathbf{R}$:

$$F_\alpha^r = \{f \in D^r(\mathbf{T}^1) \mid \rho(f) = \alpha\}$$
$$O_\alpha^r = \{g \circ R_\alpha \circ g^{-1} \mid g \in D^r(\mathbf{T}^1)\}$$

et, pour $0 \leq k \leq r$:

$$O_\alpha^{r,k} = O_\alpha^k \cap F_\alpha^r \quad \text{avec} \quad O_\alpha^{r,r} = O_\alpha^r.$$

On note, pour $r \leq +\infty$, $\bar{O}_\alpha^{r,k}$ l'adhérence de $O_\alpha^{r,k}$ pour la C^r-topologie dans $D^r(\mathbf{T}^1)$. $\bar{O}_\alpha^{r,k}$ est alors un espace de Baire pour la C^r-topologie $(0 \leq r \leq +\infty)$. Comme F_α^r est fermé dans la C^r-topologie et que $O_\alpha^{r,k} \cap F_\alpha^r$, $\bar{O}_\alpha^{r,k} \subset F_\alpha^r$. On a le

Théorème (**4.1**). — *Pour tout* $\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$ *et pour* $1 \leq r < +\infty$, O_α^r *est maigre dans* $\bar{O}_\alpha^r$ *pour la* C^r-*topologie*. (*Il s'ensuit que* O_α^r *est maigre dans* F_α^r).

Démonstration. — Soit $H_r : D^r(\mathbf{T}^1) \to \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$:

$$H_r(f) = \sup_{n \in \mathbf{Z}} |Df^n|_{C^{r-1}}.$$

Rappelons que $f \mapsto H_r(f)$ est semi-continue inférieurement par IV.1.2, et que $H_r(f) < +\infty$ est équivalent à ce que f soit C^r-conjugué à R_α (par IV.6.4); O_α^r est donc une réunion dénombrable de fermés (dans la C^r-topologie), soit $O_\alpha^r = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} F_n$, avec $F_n = \{f \in F_\alpha^r \mid H_r(f) \leq n\}$, qui est fermé par la semi-continuité inférieure de H_r.

Pour montrer que O_α^r est maigre dans $\bar{O}_\alpha^r$, il suffit de montrer que F_n est sans point intérieur dans $\bar{O}_\alpha^r$ (par la propriété de Baire de $\bar{O}_\alpha^r$).

Supposons par l'absurde que F_n ait un point intérieur dans $\bar{O}_\alpha^r$. Soit $U \subset F_n \subset \bar{O}_\alpha^r$ un ouvert non vide et $f_0 \in U$. Comme $f_0 \in O_\alpha^r$, $f_0 = g_0^{-1} \circ R_\alpha \circ g_0$ avec $g_0 \in D^r(\mathbf{T}^1)$.

Soit $\Phi : F_\alpha^r \to F_\alpha^r$, $\Phi(f) = g_0 \circ f \circ g_0^{-1}$. On a $\Phi(f_0) = R_\alpha$; Φ est un homéomorphisme (pour la C^r-topologie) de F_α^r, mais aussi de $\bar{O}_\alpha^r$; $\Phi(U)$ est donc un ouvert de $\bar{O}_\alpha^r$ avec $R_\alpha \in \Phi(U)$; et on a aussi $\Phi(U) \subset O_\alpha^r$. Puisque, pour $f \in U \subset F_n$, on a $H_r(f) \leq n$, il résulte de IV.6.2 que $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$ avec $\|g\|_r \leq (r+1)n$ ($\|g\|_r = |Dg|_{C^{r-1}} + |Dg^{-1}|_0$). Il en résulte que, si $f \in \Phi(U)$:

$$f = g_0 \circ g^{-1} \circ R_\alpha \circ g \circ g_0^{-1}.$$

Donc $\|g_0 \circ g^{-1}\|_r \leq C$, pour tout $f \in \Phi(U)$, C étant une constante ne dépendant que de n. Or, en (3.4), nous avons construit une suite $f_i = g_i \circ R_\alpha \circ g_i^{-1} \in O_\alpha^\infty$ telle que $f_i \to R_\alpha$ dans la C^r-topologie, si $i \to +\infty$; donc pour i assez grand, $f_i \in \Phi(U)$. Or, par la proposition (3.4), si $i \to +\infty$, $\|g_i\|_r \to +\infty$. Par IV.2.5, si $\|g\|_r \leq a$ ($a \geq 1$), alors $\|g^{-1}\|_r \leq C_r a^{3r-2}$ (avec C_r une constante universelle ne dépendant que de r). Par l'absurde, on conclut que F_n est donc sans point intérieur dans $\bar{O}_\alpha^r$. Il suit, comme n est arbitraire, que $O_\alpha^r = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} F_n$ est bien maigre dans $\bar{O}_\alpha^r$. ■

On a le

Théorème (**4.2**). — *Pour tout nombre* α *de Liouville*, $\bar{O}_\alpha^\infty \cap O_\alpha^{\infty,1}$ *est maigre dans* $\bar{O}_\alpha^{\infty,1}$ *pour la* C^∞-*topologie* (*comme* $O_\alpha^\infty \subset O_\alpha^{\infty,1}$, O_α^∞ *est donc maigre dans* $\bar{O}_\alpha^\infty$ *pour la* C^∞-*topologie*).

Démonstration. — La démonstration est presque identique à la précédente. On a $O_\alpha^{\infty,1} = \{f \in F_\alpha^\infty \mid H_1(f) < +\infty\}$ par IV.6.1 et IV.6.4; $O_\alpha^{\infty,1} \cap \bar{O}_\alpha^\infty$ est donc réunion dénombrable des fermés $F_n = \{f \in \bar{O}_\alpha^\infty \mid H_1(f) \leq n\}$ de $\bar{O}_\alpha^\infty$ (fermé d'après la semi-continuité inférieure de H_1). Montrons par l'absurde que F_n est sans point intérieur. Soit $U \subset F_n$ un ouvert non vide. Comme O_α^∞ est dense dans $\bar{O}_\alpha^\infty$, on conclut que $U \cap O_\alpha^\infty$ est non vide. Soit $f_0 \in U \cap O_\alpha^\infty : f_0 = g_0^{-1} \circ R_\alpha \circ g_0$ avec $g_0 \in D^\infty(\mathbf{T}^1, 0)$; $\Phi(f) = g_0 \circ f \circ g_0^{-1}$ est un homéomorphisme de $\bar{O}_\alpha^\infty$ pour la C^∞-topologie et $\Phi(f_0) = R_\alpha$. Donc $\Phi(U)$ est ouvert dans $\bar{O}_\alpha^\infty$ avec $R_\alpha \in \Phi(U)$, et pour tout $f \in \Phi(U)$, on a $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$ avec $g \in D^1(\mathbf{T}^1, 0)$, et $\|g\|_1 \leq C < +\infty$ (par IV.6.2), où C est une constante ne dépendant que de n. Or ceci est incompatible avec l'existence de la suite définie en (3.5). Donc, par l'absurde, F_n est sans point intérieur dans $\bar{O}_\alpha^\infty$, et il en résulte que $O_\alpha^{\infty,1} \cap \bar{O}_\alpha^\infty = \bigcup_n F_n$ est maigre dans $\bar{O}_\alpha^\infty$. ∎

Par une démonstration presque identique à celle de (4.2), en utilisant (3.6), on a le

Théorème (**4.3**). — *Si* $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ *n'est pas de type constant, alors, pour* $2 \leq r < +\infty$, $O_\alpha^{r,r-1} \cap \bar{O}_\alpha^r$ *est maigre dans* $\bar{O}_\alpha^r$ *pour la* C^r*-topologie.*

Problème (**4.4**). — *Si* α *est un nombre de type constant, si* $2 \leq r < +\infty$, *existe-t-il* $f \in F_\alpha^r$ *qui ne soit pas* C^{r-1}*-conjugué à* R_α?

Remarque (**4.5**). — Pour $1 \leq r < +\infty$, O_α^r est un F_σ (*i.e.* une réunion dénombrable de fermés) car H_r est semi-continue. Pour $r = +\infty$, O_α^∞ est seulement *a priori* un $F_{\sigma\delta}$ (une intersection dénombrable de F_σ, donc de deuxième classe de Baire). En effet $O_\alpha^\infty = (\bigcap_r \{f \mid H_r(f) < +\infty\}) \cap F_\alpha^\infty$.

5. Résultats positifs sur les orbites.

(**5.1**) Le théorème suivant sera démontré en annexe. Soit $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ satisfaisant une condition diophantienne; il existe $\beta \geq 0$ et $C > 0$ tels que, pour tout $p/q \in \mathbf{Q}$, $|\alpha - (p/q)| \geq \dfrac{C}{q^{2+\beta}}$.

Théorème. — *Pour* $\beta' > \beta$, *il existe un voisinage* $V_{R_\alpha}^{2(\beta'+1)}$ *de* R_α, *pour la* $C^{2(\beta'+1)}$*-topologie, tel que, pour* $r \geq 2(\beta'+1)$ *et* $f \in V_{R_\alpha}^{2(\beta'+1)} \cap F_\alpha^r$, f *est* $C^{r-1-\beta'}$*-conjugué à* R_α; *de plus, si* $f \in F_\alpha^\infty \cap V_{R_\alpha}^{2(\beta'+1)}$ (resp. $F_\alpha^\omega \cap V_{R_\alpha}^{2(\beta'+1)}$), f *est* C^∞-(resp. C^ω-)*conjugué à* R_α.

On a donc le

Corollaire (**5.2**). — *Si* α *satisfait une condition diophantienne, alors* O_α^∞ *est ouvert dans* F_α^∞ *pour la* C^∞*-topologie.*

Démonstration. — O_α^∞ est ouvert au voisinage de R_α dans F_α^∞ et donc ouvert en chaque point par conjugaison. ∎

(**5.3**) *Discussion.*

(**5.3.1**) Le théorème (4.2) montre que α doit nécessairement satisfaire à une condition diophantienne pour que le théorème (5.1) soit valable en C^∞.

(**5.3.2**) Pour presque tout $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut prendre $\beta' > \varepsilon$ donc $2(\beta'+1) > 2 + 2\varepsilon$; et pour tout $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ non de type constant, d'après (4.3) la perte de différentiabilité est (en général) supérieure à 1.

(5.3.3) Si $r_0=[2(\beta'+1)]+1$, alors, pour $r\geq r_0$, $\bar{O}^r_\alpha$ est d'intérieur non vide dans la C^r-topologie (par (5.1)).

(5.3.4) Si $r_1=[\beta'+1]+1$, alors, pour $r\geq r_0$, $O^{r,\,r-r_1}_\alpha$ est ouvert dans F^r_α pour la C^r-topologie (par (5.1)).

(5.3.5) Nous avons déjà discuté en X.2 la C^0-conjugaison : pour tout $\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$, O^0_α est résiduel dans F^0_α pour la C^0-topologie.

6. Problème.

Le problème suivant précise la conjecture d'Arnold en C^∞.

Problème **(6.1)**. — *Si α satisfait à une condition diophantienne, est-ce que* $O^\infty_\alpha=F^\infty_\alpha$?

(6.2) On a la

Proposition. — *Si α satisfait à une condition diophantienne, alors* $O^\infty_\alpha\cap F^\omega_\alpha=O^\omega_\alpha$.

Démonstration. — Soit $f=h\circ R_\alpha\circ h^{-1}$ avec $h\in D^\infty(\mathbf{T}^1, 0)$ et $f\in D^\omega(\mathbf{T}^1)$; soit $h_i\to h$ dans la C^∞-topologie, avec $h_i\in D^\omega(\mathbf{T}^1, 0)$. Alors $h_i^{-1}\circ f\circ h_i\to R_\alpha$ dans la C^∞-topologie, et la proposition résulte de (5.1). ■

(6.3) Soit α satisfaisant à la condition diophantienne : il existe $\beta\geq 0$ et $C>0$ vérifiant, pour tout $p/q\in\mathbf{Q}$, $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\geq\frac{C}{q^{2+\beta}}$. Soit $\beta'>\beta$.

Proposition. — *Soient* $r_0=[2(\beta'+1)]+1$ *et* $f\in F^r_\alpha$, $r\geq r_0$; *si f est C^{r_0}-conjugué à* R_α, *alors f est $C^{r-1-\beta'}$-conjugué à* R_α.

Démonstration. — Soit $f=h\circ R_\alpha\circ h^{-1}$ avec $h\in D^{r_0}(\mathbf{T}^1)$. On approche h par h_i dans la C^{r_0}-topologie, $h_i\in D^\omega(\mathbf{T}^1)$, et $h_i^{-1}\circ f\circ h_i\to R_\alpha$ dans la C^{r_0}-topologie, et on applique (5.1). ■

Proposition **(6.4)**. — *Soit* $\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$, *avec* O^∞_α *ouvert au voisinage de* R_α *dans* F^∞_α *pour la* $C^{1+\mathrm{vb}}$-*topologie*; *alors* $O^\infty_\alpha=F^\infty_\alpha$ (α *satisfait à une condition diophantienne d'après* (4.2)).

Démonstration. — Cela résulte immédiatement de VII.2.5. ■

(6.5) Soit α un nombre du type de Roth; pour tout $\varepsilon>0$, il existe $C_\varepsilon>0$ tel que pour tout $p/q\in\mathbf{Q}$, $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\geq\frac{C_\varepsilon}{q^{2+\varepsilon}}$.

Nous avons montré en IX.6, pour α du type de Roth, la

Proposition. — *Si* $f\in F^\infty_\alpha$ *et si f est C^1-conjugué à* R_α, *alors f est C^∞-conjugué à* R_α.

7. Une conjecture.

Conjecture (7.1). — *Pour tout* $\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$, O^∞_α *est dense pour la* C^∞-*topologie dans* F^∞_α.

(7.2)

— Evidemment, si $\alpha\in A$ (*i.e.* l'ensemble des α qui satisfont à une condition A), comme $O^\infty_\alpha=F^\infty_\alpha$, la conjecture est vraie.

— La conjecture implique que, pour tout $0\leq r\leq+\infty$ (entier), O^r_α est dense dans F^r_α pour la C^r-topologie (voir III.4.4).

— Par le théorème de Denjoy, O^∞_α est dense dans F^∞_α pour la C^0-topologie.

— $O^r_{p/q}$ ($p/q\in\mathbf{Q}$) est un fermé sans point intérieur dans $F^r_{p/q}$ par III.2.5.

Théorème (7.3). — *Il existe un ensemble résiduel* $B\subset\mathbf{R}-\mathbf{Q}$, *tel que, si* $\alpha\in B$, O^∞_α *est dense dans* F^∞_α *pour la* C^∞-*topologie.*

Remarque (7.4). — L'ensemble des nombres de Liouville est résiduel dans $\mathbf{R}$ par V.5.4.

(7.5) *Un invariant.*

Pour démontrer le théorème nous allons introduire un invariant D_∞. Soit d_∞ une métrique définissant la C^∞-topologie sur $D^\infty(\mathbf{T}^1)$.

Pour $f\in D^\infty(\mathbf{T}^1)$, soit $\alpha=\rho(f)$; posons pour $n\geq 1$, $n\in\mathbf{N}$:

$$g_n=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f^i-i\alpha).$$

Posons alors :

$$D_\infty(f)=\operatorname*{Inf}_{n\geq1}(d_\infty(g_n^{-1}\circ R_\alpha\circ g_n, f)).$$

On a $D_\infty: D^\infty(\mathbf{T}^1)\to\mathbf{R}_+=\{x\in\mathbf{R}\,|\,x\geq 0\}$; D_∞ est semi-continue supérieurement dans la C^∞-topologie, donc $D_\infty^{-1}(0)$ est un G_δ dans $D^\infty(\mathbf{T}^1)$ (voir (I.4). Si $D_\infty(f)=0$, alors $f\in\bar{O}^\infty_\alpha$ avec $\alpha=\rho(f)$, $\bar{O}^\infty_\alpha$ étant l'adhérence de O^∞_α pour la C^∞-topologie.

Remarquons, par IV.5, que si f est C^∞-conjugué à R_α, alors $D_\infty(f)=0$ (puisque $g_n^{-1}\circ R_\alpha\circ g_n\to f$ dans la C^∞-topologie si $n\to+\infty$).

(7.6) Considérons un $f\in D^\infty(\mathbf{T}^1)$.

(7.6.1) Soient $h(\lambda)=\rho(R_\lambda\circ f)$ et $K=\mathbf{R}-\operatorname{Int}h^{-1}(\mathbf{Q})$; K est fermé parfait dans $\mathbf{R}$. Si f a la propriété A_0 (*i.e.* pour tout $p/q\in\mathbf{Q}$ et tout λ, $(R_\lambda\circ f)^q\neq R_p$), alors K est totalement discontinu (par III.5). Rappelons la proposition III.5.3 :

Proposition (7.6.2) :

1) *Si* G *est résiduel dans* K, *alors* $h(G)$ *est résiduel dans* $\mathbf{R}$.

2) *Si* D *est un ensemble dense dans* $\mathbf{R}$, $h^{-1}(D)\cap K$ *est dense dans* K.

Proposition **(7.6.3).** — $G = D_\infty^{-1}(0) \cap K$ *est résiduel dans* K.

Démonstration. — $G = D_\infty^{-1}(0) \cap K$ est un G_δ. Il reste à montrer que G est dense dans K. Or, si $\alpha \in A$ et si $\rho(R_\lambda \circ f) = \alpha$, alors $D_\infty(R_\lambda \circ f) = 0$ puisque $R_\lambda \circ f$ est C^∞-conjugué à R_α. Par la proposition (7.6.2), l'image réciproque par h de l'ensemble A (qui est dense dans **R**) est dense dans K ; G est donc un G_δ dense. ■

(7.7) *Démonstration du théorème* (7.3). — Soit (f_i) un ensemble dénombrable dense de difféomorphismes de $D^\infty(\mathbf{T}^1)$. Soient G_i les ensembles résiduels associés à f_i par la proposition (7.6.3). Soit $B = \bigcap_i \rho(G_i)$; B est résiduel dans **R** (en fait $B \subset \mathbf{R} - \mathbf{Q}$). Pour $\alpha \in B$, si λ_i est l'unique élément de **R** tel que $\rho(R_{\lambda_i} \circ f_i) = \alpha$, pour tout i, $D_\infty(R_{\lambda_i} \circ f_i) = 0$. Or la suite $(R_{\lambda_i} \circ f_i)$ est dense dans F_α^∞ par III.4.4, puisque, si $D_\infty(R_{\lambda_i} \circ f_i) = 0$, on a $R_{\lambda_i} \circ f_i \in \bar{O}_\alpha^\infty$. On conclut que $\bar{O}_\alpha^\infty$ est dense dans F_α^∞, soit $\bar{O}_\alpha^\infty = F_\alpha^\infty$. ■

XII. — CENTRALISATEURS

Plan :

Commentaire (les résultats de ce chapitre ont été annoncés dans Herman [6]) :

Dans ce chapitre, on reprend en 1 l'exemple construit par V. I. Arnold dans [1]. En suivant Arnold nous montrons de façon compliquée qu'il existe $b \in \mathbf{R}$ tel que, si $0 < |a| < \frac{1}{2\pi}$ est fixé, $f_b(x) = x + a \sin 2\pi x + b$ est C^0-conjugué à une translation R_α ($\alpha = \rho(f) \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$) mais non absolument continûment conjugué. Nous avons donné ailleurs une démonstration entièrement élémentaire (reproduite dans Rosenberg [2]); néanmoins il nous semble que l'introduction d'un invariant semi-continu supérieurement explique de façon plus rationnelle la persistance des mesures singulières des semi-stables dans F^∞; de plus des généralisations en grandes dimensions sont possibles.

En 2 on étudie le module de continuité de l'homéomorphisme qui conjugue. Ici on se reportera au problème VI.5.6.1.

En 3, on montre que contrairement à 1 et 2, où ce sont des propriétés des semi-stables qui persistent dans F^∞, ici, c'est une propriété de ceux qui sont C^∞-conjugués à des rotations qui persiste génériquement dans F^∞ : avoir un centralisateur ayant la puissance du continu. On utilise le théorème fondamental pour montrer que :

$$O^\infty = \{ f \in D^\infty(\mathbf{T}^1) \mid f \text{ est } C^\infty\text{-conjugué à une translation} \}$$

est dense dans F^∞ pour la C^∞-topologie.

On peut dire en résumé que ce chapitre est sur le mode suivant : on introduit un invariant semi-continu tel que, si cet invariant est égal à 0 ou $+\infty$ suivant les cas, alors on a une propriété de conjugaison d'un difféomorphisme; cette propriété sera alors vraie par la semi-continuité sur un G_δ, et en général en choisissant un sous-ensemble fermé de $D^\infty(\mathbf{T}^1)$ la propriété sera vraie sur un G_δ dense, donc sera générique dans ce fermé. On choisira en général comme sous-ensemble fermé soit F^∞, soit $K_a = [0, 1] - \operatorname{Int}\{ b \mid \rho(f_b) \in \mathbf{Q} \}$ avec $f_a = x + a \sin 2\pi x + b$, $0 < a < 1/2\pi$, a étant fixé.

Nous avons appliqué ce principe en 1, 2 et 3, et nous donnerons ailleurs d'autres applications (voir par exemple Fathi et Herman [1]).

Le théorème (3.6) donne une réponse négative à un problème de H. Rosenberg et W. Thurston, ainsi qu'un contre-exemple à une conjecture de Nancy Kopell.

Note. — On suppose que $0 \leq r \leq +\infty$ est un entier $\geqslant 0$ ou $+\infty$.

1. Conjugaison absolument continue.

Définition **(1.1)**. — *Soit* $f \in D^1(\mathbf{T}^1)$ *avec* $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ *tel que* f *soit* C^0*-conjugué à* R_α; *soit* $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$. *On dit que* f *n'est pas conjugué à* R_α *de façon absolument continue si* g *n'est pas absolument continue* (i.e. *il existe un ensemble* C *borélien, tel que* $m(C) = 0$ *mais* $m(g(C)) \neq 0$).

Proposition (**1.2**). — *Soit* $f \in D^1(\mathbf{T}^1)$ *avec* $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$, $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, *et g non absolument continue; alors :*

a) g^{-1} *n'est pas absolument continue;*

b) *g et* g^{-1} *sont m-presque partout dérivables (par un célèbre théorème de Lebesgue), et on a m-presque partout* $Dg^{-1} \underset{\text{p.p.}}{=} Dg \underset{\text{p.p.}}{=} 0$.

c) *Soit* μ *l'unique mesure de probabilité invariante par le difféomorphisme* $\bar{f} : \mathbf{T}^1 \to \mathbf{T}^1$ *induit par f sur* $\mathbf{T}^1$. *Alors* μ *est étrangère à la mesure de Haar m de* $\mathbf{T}^1$.

Démonstration. — On a, sur $\mathbf{T}^1$, $\bar{f} = \bar{g}^{-1} \circ R_\alpha \circ \bar{g}$. Soit C un borélien de $\mathbf{T}^1$, tel que $m(C) = 0$ et $m(\bar{g}(C)) \neq 0$ (qui existe puisque g n'est pas absolument continue).

Soit $B = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} \bar{f}^n(C)$, $B \subset \mathbf{T}^1$; B est invariant par $\bar{f}$ et B est de m-mesure nulle puisque $\bar{f}$ est un difféomorphisme C^1. L'ensemble $\bar{g}(B)$ est invariant par R_α, donc $m(\bar{g}(B)) = 0$ ou 1 puisque $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$. Or $m(\bar{g}(B)) > 0$, donc $m(\bar{g}(B)) = 1$. Il s'ensuit, comme $\bar{g}^{-1}$ envoie $\mathbf{T}^1 - \bar{g}(B)$ sur $\mathbf{T}^1 - B$, $m(\mathbf{T}^1 - \bar{g}(B)) = 0$ et $m(\mathbf{T}^1 - B) = 1$, donc $\bar{g}$ et $\bar{g}^{-1}$ sont singulières (*i.e.* chacune envoie un ensemble de m-mesure nulle sur un ensemble de m-mesure 1).

On a donc m-presque partout $Dg = Dg^{-1} = 0$. Ce qui prouve *a)* et *b)*; *c)* résulte de $\bar{g}_* \mu = m$ (*i.e.* pour tout borélien K, $\mu(K) = m(\bar{g}(K))$). ■

Remarques :

1) *Si* $f \in D^1(\mathbf{T}^1)$ *et si* $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$ $(\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q})$, *il en résulte par l'absurde que, si* g^{-1} *est absolument continue, alors g est absolument continue.*

2) Si $f = D^2(\mathbf{T}^1)$ et $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R}$, alors, par le théorème de Denjoy, $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$. Il résulte de la propriété de m-ergodicité VII.1.4 que si g est absolument continue, alors g^{-1} est absolument continue.

3) Si g est absolument continue et si μ est l'unique mesure de probabilité invariante par $\bar{f}$ sur $\mathbf{T}^1$, alors μ est absolument continue par rapport à la mesure de Haar m de $\mathbf{T}^1$.

Définition (**1.4**). — *Soit f un homéomorphisme de* $\mathbf{T}^1$; *on dit que* $x \in \mathbf{T}^1$ *est un point errant de f, s'il existe un ouvert* $U \ni x$, *tel que les ensembles* $\{f^n(U)\}_{n \geq 0}$ *sont deux à deux disjoints.*

Les points errants par f forment donc un ouvert; le complémentaire est noté $\Omega(f)$, qui est fermé dans $\mathbf{T}^1$ et invariant par f.

Exemple. — Soient $f \in \mathrm{Diff}^0_+(\mathbf{T}^1)$, $p/q = \rho(f) \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$; tout point de $\mathbf{T}^1$ non périodique par f est un point errant. Ce qui est équivalent à : si $x \in \Omega(f)$, alors x est périodique pour f (*i.e.* $f^q(x) = x$ pour un entier $q > 1$).

Proposition (**1.5**) (1). — *Soit* $f \in \mathrm{Diff}^1_+(\mathbf{T}^1)$ *tel que la mesure de Haar de l'ensemble des points errants par f soit* 1 $(m(\Omega(f)) = 0)$; *alors, si* $n \to +\infty$, $Df^n \to 0$ *m-presque partout.*

(1) Il n'est pas difficile de voir que si $f \in \mathrm{Diff}^{1+\mathrm{vb}}_+(\mathbf{T}^1)$, alors, pour tout $x \notin \Omega(f)$ on a $\lim_{n \to \pm\infty} Df^n(x) = 0$.

Démonstration. — Soit x un point errant par f et soit $[a, b]$ tel que les ensembles $\{f^n([a, b])\}_{n\geq 0}$ soient deux à deux disjoints. On a donc :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \mathrm{D}f^n(x)\,dx < +\infty,$$

donc, pour m-presque tout $x\in[a, b]$, si $n\to+\infty$, $\mathrm{D}f^n(x)\to 0$. Comme $m(\Omega(f))=0$, on peut recouvrir $\mathbf{T}^1-\Omega(f)$ par un ensemble dénombrable d'intervalles errants, donc, pour m-presque tout $x\in\mathbf{T}^1$, si $n\to+\infty$, $\mathrm{D}f^n(x)\to 0$. ■

(1.6) Soit $\varphi : \mathbf{T}^1\to\mathbf{R}$ m-mesurable.

Soit $\delta(\varphi, 0)=\displaystyle\int_{\mathbf{T}^1} \frac{|\varphi|}{1+|\varphi|}\,dm = \left|\frac{|\varphi|}{1+|\varphi|}\right|_{\mathrm{L}^1}$.

δ définit une *distance* telle que si $(\delta(\varphi_i, 0))\to 0$ pour $i\to+\infty$, alors (φ_i) *converge en m-mesure vers* 0. On peut alors extraire une sous-suite de (φ_i) qui converge m-presque partout vers 0 (voir Halmos [1]).

(1.7) *Un invariant.*

Soit $\mathrm{N} : \mathrm{D}^1(\mathbf{T}^1) \to \mathbf{R}_+ = \{x\in\mathbf{R} \mid x\geq 0\}$, définie par :

$$f\mapsto \mathrm{N}(f)=\operatorname*{Inf}_{n\geqslant 1} \delta\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{D}f^i, 0\right).$$

— N est une application semi-continue supérieurement dans la C^1-topologie. Par suite $\mathrm{N}^{-1}(0)$ est un G_δ dans la C^1-topologie par I.4.

— $\mathrm{N}(f)=0$ implique qu'il existe une suite d'entiers $n_i\to+\infty$ quand $i\to+\infty$, telle que :

$$\frac{1}{n_i}\sum_{i=0}^{n_i-1} \mathrm{D}f^i\to 0 \quad m\text{-presque partout.}$$

Exemple. — Par (1.5), si $f\in\mathrm{D}^1(\mathbf{T}^1)$, $\rho(f)=p/q$, et si f a un nombre fini de points périodiques sur $[0, 1]$, alors $\mathrm{N}(f)=0$.

Proposition **(1.8)**. — *Soit* $f\in\mathrm{D}^1(\mathbf{T}^1)$, $\rho(f)=\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$, *tel que* $g\circ f=\mathrm{R}_\alpha\circ g$, *et* $\mathrm{N}(f)=0$; *alors g n'est pas absolument continue (on ne suppose pas que g est un homéomorphisme, mais* $g=\mathrm{Id}+\psi$ *avec* $\psi\in\mathrm{C}^0(\mathbf{T}^1)$ *voir* II.7.1).

Démonstration. — Si $\mathrm{N}(f)=0$, il existe une suite d'entiers $n_i\to+\infty$ quand $i\to+\infty$, telle que $\frac{1}{n_i}\sum_{i=0}^{n_i-1} \mathrm{D}f^i\to 0$ m-presque partout. Montrons que si $\varphi\in\mathrm{L}^1(\mathbf{T}^1, m)$, alors, quand $i\to+\infty$, $\frac{1}{n_i}\sum_{i=0}^{n_i-1} \varphi\circ f^i.\mathrm{D}f^i\to 0$ m-presquc partout. En effet, on a :

$$\frac{1}{n_i}\sum_{i=0}^{n_i-1} \varphi\circ f^i.\mathrm{D}f^i=\left(\frac{\sum_{i=0}^{n_i-1} \varphi\circ f^i.\mathrm{D}f^i}{\sum_{i=0}^{n_i-1} \mathrm{D}f^i}\right)\cdot\frac{1}{n_i}\sum_{i=0}^{n_i-1} \mathrm{D}f^i.$$

Or, par le théorème de Chacon-Ornstein (voir Garsia [1]), si $n \to +\infty$, $\dfrac{\sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i . \mathrm{D}f^i}{\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{D}f^i}$ converge m-presque partout vers une limite finie.

Il suit que, si $i \to +\infty$, $\frac{1}{n_i} \sum_{i=0}^{n_i-1} \varphi \circ f^i . \mathrm{D}f^i \to 0$ m-presque partout. Nous prouvons la proposition par l'absurde. Supposons g absolument continue. Soit μ l'unique mesure de probabilité invariante par $\bar{f}$ sur $\mathbf{T}^1$. On a $\bar{g}_* \mu = m$; donc, si g est absolument continue, μ est absolument continue par rapport à m. Soit, par le théorème de Radon-Nikodym, $\mu = \varphi . m$ avec $\varphi \geq 0$, $\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbf{T}^1, m)$, $\int_{\mathbf{T}^1} \varphi \, dm = 1$. On a d'après l'invariance de μ par $\bar{f}$:

$$\varphi \circ f . \mathrm{D}f = \varphi.$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{1}{n_i} \sum_{i=0}^{n_i-1} \varphi \circ f^i . \mathrm{D}f^i = \varphi.$$

Si $n_i \to +\infty$, $\varphi = 0$ m-presque partout, ce qui est contraire à $\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbf{T}^1, m)$ et $\int_{\mathbf{T}^1} \varphi \, dm = 1$, donc g n'est pas absolument continue. ■

Remarque (**1.9**). — *Soit* $f \in \mathrm{D}^1(\mathbf{T}^1)$, $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$; *alors, quand* $n \to +\infty$, $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{D}f^i$ *converge faiblement dans le dual de* $\mathrm{C}^0(\mathbf{T}^1)$ *vers* μ (*l'unique mesure de probabilité invariante par* $\bar{f}$).

En effet, soit $\varphi \in \mathrm{C}^0(\mathbf{T}^1)$. On a, par la formule de changement de variables :

$$\int_{\mathbf{T}^1} \varphi . \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{D}f^i \right) dm = \int_{\mathbf{T}^1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^{-i} \right) dm.$$

Or, par l'unique ergodicité de f, $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^{-i}$ converge uniformément vers $\mu(\varphi)$, d'où le résultat.

(**1.10**) Soit $\mathrm{F}^\infty = \mathrm{D}^\infty(\mathbf{T}^1) - \mathrm{Int}\, \rho^{-1}(\mathbf{Q})$; F^∞ est un fermé sans point intérieur dans $\mathrm{D}^\infty(\mathbf{T}^1)$. De plus, c'est l'adhérence des difféomorphismes de nombre de rotation irrationnel. Rappelons que $\mathrm{F}^\infty \cap \rho^{-1}(\mathbf{Q})$ est maigre dans F^∞ pour la C^∞-topologie (c'est même un F_σ sans point intérieur); $\mathrm{F}^\infty - \rho^{-1}(\mathbf{Q})$ est donc un G_δ dense dans F^∞ pour la C^∞-topologie et, par le théorème de Denjoy, si $f \in \mathrm{F}^\infty - \rho^{-1}(\mathbf{Q})$, f est C^0-conjugué à la translation R_α avec $\alpha = \rho(f) \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$.

(**1.11**) On a le théorème suivant, qui montre que l'exemple d'Arnold [1] est générique dans F^∞.

Théorème. — *La propriété suivante dans* F^∞ *est générique pour la* C^∞*-topologie* (i.e. *vraie sur un ensemble résiduel*) : f *est* C^0*-conjugué à une translation irrationnelle, mais de façon non absolument continue.*

Démonstration. — Montrons que $\mathrm{F}^\infty \cap \mathrm{N}^{-1}(0)$ est résiduel dans F^∞ (pour la C^∞-topologie). Par la semi-continuité supérieure, $\mathrm{N}^{-1}(0)$ est un G_δ; $\mathrm{N}^{-1}(0) \cap \mathrm{F}^\infty$ est dense pour la C^∞-topologie dans F^∞ puisque, par l'exemple de (1.7), il contient l'ensemble des C^∞-difféomorphismes de nombre de rotation rationnel qui n'ont qu'un nombre fini de points périodiques sur [0, 1], ensemble qui est dense dans F^∞ pour la C^∞-topologie par III.6.3. Si $f \in N^{-1}(0) \cap (F^\infty - \rho^{-1}(\mathbf{Q}))$, alors f est C^0-conjugué à R_α $(\alpha = \rho(f))$ mais pas de façon absolument continue par (1.8) (puisque $N(f) = 0$). La propriété est donc vraie sur le G_δ dense $N^{-1}(0) \cap (F^\infty - \rho^{-1}(\mathbf{Q}))$ de F^∞. ■

(1.12) Soient $0 < |a| < 1/2\pi$ et $f_b(x) = x + a \sin 2\pi x + b \in D^\omega(\mathbf{T}^1)$ pour b un nombre réel. Soient $K_a = [0, 1] - \mathrm{Int}\{b \mid \rho(f_b) \in \mathbf{Q}\}$ et $D = K_a \cap \{b \mid \rho(f_b) \in \mathbf{Q}\}$; D est un ensemble dénombrable dense de K_a, voir III.5. Une propriété est générique dans K_a si f_b a la propriété pour b appartenant à un ensemble résiduel de K_a.

Proposition **(1.13)**. — *Il est générique dans* K_a *que* f_b *soit* C^0*-conjugué à une translation irrationnelle, mais de façon non absolument continue.*

Démonstration. — Pour $b \in K_a - D$, f_b est C^0-conjugué à R_α $(\alpha = \rho(f_b) \in \mathbf{R} - \mathbf{Q})$ par le théorème de Denjoy. Evidemment, $K_a - D$ est résiduel dans l'ensemble de Cantor K_a. Si $b \in D$, par III.5.2, on a $\rho(f) = p/q$ avec $f^q \neq R_p$. Comme f est C^ω, f a un nombre fini de points périodiques sur [0, 1], donc, par l'exemple (1.7), $N(f_b) = 0$; $N^{-1}(0) \cap K_a = \{b \in K_a \mid N(f_b) = 0\}$ est, par la semi-continuité supérieure de N, un G_δ qui est aussi dense puisque $D \subset G_\delta$. Donc $G = N^{-1}(0) \cap (K_a - D)$ est résiduel dans K_a et si $b \in G$, on a la propriété désirée par (1.7). ■

2. Conjugaison C^0 et module de continuité.

(2.1) Rappelons rapidement IV.3.2. Soit $w : [0, 1] \to [0, 1]$ continue croissante, $w(0) = 0$, $w(1) = 1$. Si $\delta > 1$, on pose $w(\delta) = 1$. On suppose que, pour $a > 0$, $w(a\delta) \leq ([a] + 1) w(\delta)$ et, si $a \in \mathbf{N}$, $w(a\delta) = a w(\delta)$. On définit alors l'ensemble $C^w(\mathbf{T}^1)$ des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}$-périodiques, de module de continuité inférieur ou égal à un multiple de w.

Si $\varphi \in C^w(\mathbf{T}^1)$, $|\varphi|_{C^w} = \sup\limits_{x \neq y} \dfrac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{w(|x-y|)} < +\infty$. Rappelons que l'on dit que $g \in D^0(\mathbf{T}^1)$ est un homéomorphisme *de classe* C^w, si $g - \mathrm{Id}$ et $g^{-1} - \mathrm{Id}$ sont dans $C^w(\mathbf{T}^1)$.

Si $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$, où g est homéomorphisme de classe C^w, on a :

$$H_{w^2}(f) = \sup_{n \in \mathbf{Z}} |f^n - \mathrm{Id} - n\alpha|_{C^{w^2}} < +\infty \qquad \text{avec} \qquad w^2 = w \circ w$$

et si $1 \leq r \leq +\infty$:

$$H_{w^2} : D^r(\mathbf{T}^1) \to \overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$$

est semi-continue dans la C^r-topologie (voir IV.6.5).

De plus, pour $f \in D^1(\mathbf{T}^1)$ tel que $\rho(f) = p/q$, $H_w(f) < +\infty$ implique que f est C^0-conjugué à $R_{p/q}$ (par II.9; voir aussi IV.6.5.6). Donc, si $f \in D^1(\mathbf{T}^1)$ avec $\rho(f) = p/q$ et $f^q \neq R_p$, alors, pour tout module de continuité w, on a $H_w(f) = +\infty$.

(2.2) On reprend les notations de (1.10). On a la

Proposition. — Soit w un module de continuité. Il est générique dans F^∞ *(pour la* C^∞*-topologie) d'être* C^0*-conjugué à une translation irrationnelle, mais de ne pas l'être par un homéomorphisme de classe* C^w.

Démonstration. — Par la semi-continuité inférieure de H_{w^2}, $F^\infty \cap H_{w^2}^{-1}(+\infty)$ est un G_δ par I.4; il est dense dans F^∞ pour la C^∞-topologie puisqu'il contient l'ensemble des difféomorphismes de nombre de rotation rationnel mais non périodiques, qui est dense dans F^∞ pour la C^∞-topologie par III.6.3. Alors $H_{w^2}^{-1}(+\infty) \cap (F^\infty - \rho^{-1}(\mathbf{Q}))$ est un G_δ dense dans F^∞ sur lequel on a la propriété de (2.2), puisque, si f est conjugué à une translation par un homéomorphisme de classe C^w, on a $H_{w^2}(f) < +\infty$. ■

Remarque :

1) « $f \in D^0(\mathbf{T}^1)$ n'est pas un homéomorphisme de classe C^w » veut dire que, ou bien $f - \mathrm{Id} \notin C^w(\mathbf{T}^1)$, ou bien soit $f^{-1} - \mathrm{Id} \notin C^w(\mathbf{T}^1)$.

2) En particulier, il est générique dans F^∞ d'être conjugué à une translation irrationnelle par un homéomorphisme qui n'est pas de classe C^β pour tout $0 < \beta < 1$.

(2.3) On reprend les notations de (1.12).

Proposition. — Soit w un module de continuité. Il est générique dans K_a *que* :

$$f_b(x) = x + a \sin 2\pi x + b$$

soit C^0*-conjugué à une translation irrationnelle, par un homéomorphisme qui n'est pas de classe* C^w.

Démonstration. — La même que pour (1.13). ■

3. Centralisateurs.

(3.1) *L'invariant.*

Soit d_r une distance définissant la C^r-topologie sur $\mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n)$. Soit :

$$K_r : \mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n) \to \mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$$
$$f \mapsto \operatorname*{Inf}_{k \geq 1} d_r(f^k, \mathrm{Id}).$$

K_r est semi-continue supérieurement pour la C^r-topologie comme enveloppe inférieure de fonctions continues. Il en résulte que $K_r^{-1}(0)$ est un G_δ par I.4. Si f est C^r-conjugué à R_α, alors $K_r(f) = 0$; en effet, si $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$, et $k \in \mathbf{N}$, $f^k = g^{-1} \circ R_{k\alpha} \circ g$; on choisit $k_i \to +\infty$ tel que $k_i \alpha \to 0 \pmod{\mathbf{Z}^n}$; donc, si $i \to +\infty$, $d_r(f^{k_i}, \mathrm{Id}) \to 0$.

On pose, pour $f \in D^r(\mathbf{T}^n)$:

$$K_r(f) = K_r(\bar{f}) \in \mathbf{R}_+.$$

(3.2) K_r *et le centralisateur.*

Soit $f \in \mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n)$, soit $Z_f = \{f^k \mid k \in \mathbf{Z}\}$, et soit G_f l'adhérence de Z_f dans $\mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n)$ pour la C^r-topologie ; G_f est un sous-groupe fermé abélien de $\mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n)$, qui est contenu dans le centralisateur C^r de f dans $\mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n)$, noté $\mathrm{Cent}^r(f)$; f n'est pas périodique si Z_f n'est pas fini (ou encore si, pour tout entier $k \geq 1$, $d_r(f^k, \mathrm{Id}) > 0$).

Proposition. — Soient $0 \leq r \leq +\infty$ *et* $f \in \mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n)$ *non périodique; alors* $K_r(f) = 0$ *est équivalent à ce que* G_f *ait la puissance du continu.*

Démonstration. — Puisque f n'est pas périodique et que $K_r(f) = 0$, il existe une suite d'entiers $k_i \to +\infty$ tels que, si $i \to +\infty$, $f^{k_i} \to \mathrm{Id}$ dans la C^r-topologie. Puisque $\mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n)$ est un espace topologique polonais (si $0 \leq r \leq +\infty$) pour la C^r-topologie et que G_f est fermé dans $\mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n)$ pour la C^r-topologie, G_f est un espace topologique polonais (il est homéomorphe à un espace métrique complet séparable).

Or G_f est un espace topologique parfait (*i.e.* sans point isolé), car c'est un groupe topologique, et si un groupe topologique a un point isolé, tout point est isolé et il est alors discret. Mais dans G_f, pour la C^r-topologie, si $i \to +\infty$, $f^{k_i} \to \mathrm{Id}$ dans la C^r-topologie, et $f^{k_i} \neq f^{k_j}$, pour $j \neq i$ puisque f n'est pas périodique. Donc G_f est homéomorphe à un espace métrique complet sans point isolé. Il a donc la puissance du continu par I.3.4.

Réciproque. — Dire que $K_r(f) \neq 0$ est équivalent à dire que l'identité est isolée dans Z_f ; G_f est alors discret pour la C^r-topologie, donc $G_f = Z_f$ est dénombrable. On a donc établi que $\mathrm{Card}(G_f) = \mathrm{Card}(\mathbf{R})$ implique que $K_r(f) = 0$. ■

(3.3) *Remarques sur* $\mathbf{T}^1$.

a) Rappelons que si $K_0(f) = 0$, alors f est C^0-conjugué à une rotation, voir X.1.4.

b) Pour $r \geq 0$, si $K_r(f) = 0$ et $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, alors on a :

$$G_f \subset \mathrm{Cent}^r(f) \subset \mathrm{Cent}^0(f) \cong \mathbf{T}^1.$$

En effet, si f est C^0-conjugué à R_α, $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$; par II.3.3, puisque $\alpha \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, $\mathrm{Cent}^0(f) = \{g^{-1} \circ R_t \circ g \mid t \in \mathbf{T}^1\} \cong \mathbf{T}^1$. Il en résulte que si $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ et si $K_r(f) = 0$, alors $\mathrm{Cent}^r(f)$ est un groupe abélien. Par II.2.11, ρ est un homomorphisme de groupe continu et injectif :

$$0 \to \mathrm{Cent}^r(f) \overset{\rho}{\hookrightarrow} \mathbf{T}^1.$$

c) Pour $r \geq 0$, soit $f \in \mathrm{Diff}_+^r(\mathbf{T}^1)$ avec $K_0(f) = 0$; si $\rho(f) = p/q \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, f est C^r-conjugué à $R_{p/q}$. Alors $\mathrm{Cent}^r(f)$ est un groupe ayant la puissance du continu, mais ce groupe n'est pas abélien ; de plus $Z_f = \{f^n \mid n \in \mathbf{Z}\} = \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ est fini et donc discret dans $\mathrm{Diff}_+^r(\mathbf{T}^1)$.

d) Si $f \in D^r(\mathbf{T}^1)$, dire que le centralisateur de f dans $D^r(\mathbf{T}^1)$ a la puissance du continu équivaut à énoncer la même propriété pour le centralisateur de $\bar{f}$ dans $\mathrm{Diff}_+^r(\mathbf{T}^1)$, par II.2.12. Il est à noter que si $f \in D^r(\mathbf{T}^1)$, alors $Z_f = \{f^n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ est discret dans $D^r(\mathbf{T}^1)$; il faut plutôt considérer $\{R_p \circ f^n \mid n \in \mathbf{Z}, p \in \mathbf{Z}\}$.

d) Considérons le champ de vecteurs $X = \sin 2\pi x$ sur $\mathbf{T}^1$. Le groupe à un paramètre $\exp(tX)$ engendré par X est évidemment un groupe abélien isomorphe à $\mathbf{R}$, mais $f = \exp(X)$ vérifie $K_0(f) \neq 0$, puisque $f(0) = 0$, et $f \neq \mathrm{Id}$.

(3.4) On a la

Proposition. — Soient $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ *et* $1 \leq r < +\infty$. *Alors les deux propriétés suivantes sont génériques* (i.e. *vraies sur un* G_δ *dense) pour la* C^r*-topologie dans* $\bar{O}^r_\alpha$:

a) *être* C^0*-conjugué à* R_α, *mais non* C^r*-conjugué à* R_α.

b) *avoir un centralisateur* C^r *ayant la puissance du continu.*

Démonstration. — b) L'ensemble $K_r^{-1}(0) \cap \bar{O}^r_\alpha$ est un G_δ pour la C^r-topologie, d'après la semi-continuité supérieure de K_r. Si $f \in O^r_\alpha$, alors $K_r(f) = 0$ par (3.1). Or O^r_α est dense dans $\bar{O}^r_\alpha$ pour la C^r-topologie (puisque par définition $\bar{O}^r_\alpha$ est l'adhérence de O^r_α dans la C^r-topologie), donc $K_r^{-1}(0) \cap \bar{O}^r_\alpha$ est un G_δ dense dans $\bar{O}^r_\alpha$. Donc la propriété *b)* résulte de la proposition (3.2).

Pour prouver *a)*, il suffit d'appliquer XI.4 et aussi le fait que $K_r(f) = 0$ implique que f est C^0-conjugué à R_α par X.1.4. ∎

La proposition suivante précise la structure des centralisateurs.

Proposition **(3.5)**. — *Soient* $1 \leq r \leq +\infty$ *et* $f \in \mathrm{Diff}^r_+(\mathbf{T}^1)$ *avec* $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, $K_r(f) = 0$ *et f non* C^r*-conjugué à* R_α; *alors le centralisateur* C^r *de f*, $\mathrm{Cent}^r(f)$, *a la puissance du continu par* (3.2) *et* $\rho(\mathrm{Cent}^r(f))$ *est un sous-groupe borélien de* $\mathbf{T}^1$ *de mesure de Haar nulle.*

Démonstration. — D'après Bourbaki [2, § 6, n° 7], comme $\mathrm{Cent}^r(f)$ est un espace topologique polonais, et que $\rho : \mathrm{Cent}^r(\mathbf{T}^1) \to \mathbf{T}^1$ est continue et injective (puisque $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ et que $K_r(f) = 0$ implique que f est C^0-conjugué à R_α), $B = \rho(\mathrm{Cent}^r(f))$ est un sous-groupe borélien de $\mathbf{T}^1$.

Nous aurons besoin du

Lemme. — Soit $B \subset \mathbf{T}^1$ *un sous-groupe m-mesurable de* $\mathbf{T}^1$; *si la mesure (de Haar) de* B *est positive, alors* $B = \mathbf{T}^1$.

Démonstration. — Soit $\beta \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ et $\beta \in B$; B est invariant par R_β, qui est ergodique, donc la mesure de B est 1. Si on avait $\mathbf{T}^1 - B \neq \emptyset$, alors, pour $x \in \mathbf{T}^1 - B$, $x + B \subset \mathbf{T}^1 - B$ serait de mesure nulle, donc B aussi, donc $\mathbf{T}^1 - B \neq \emptyset$ est impossible; il suit que $B = \mathbf{T}^1$. ∎

Fin de la démonstration de (3.5). — Raisonnons par l'absurde. Si $\rho(\mathrm{Cent}^r(f))$ était de mesure positive, on aurait $\rho(\mathrm{Cent}^r(f)) = \mathbf{T}^1$.

Or il en résulterait que $0 \to \mathrm{Cent}^r(f) \underset{\sim}{\overset{\rho}{\to}} \mathrm{Cent}^0(f) \cong \mathbf{T}^1$.

Par Montgomery-Zippin [1 (5.1)], comme $\mathbf{T}^1$ est un groupe de Lie et que $\mathrm{Cent}^r(f)$ est compact pour la C^0-topologie, alors $\mathrm{Cent}^r(f)$ est compact pour la C^r-topologie (cela résulte aussi du théorème du graphe fermé de Martineau [1]). Or, par hypothèse, f n'est pas C^r-conjugué à R_α, donc $H_r(f) = +\infty$ (si $r = +\infty$ et si f n'est pas C^∞-conjugué à R_α, il existe un r tel que f n'est pas C^r-conjugué à R_α), ce qui est contraire au fait que $\mathrm{Cent}^r(f)$ est compact dans la C^r-topologie. Il n'est donc pas possible que $\rho(\mathrm{Cent}^r(f))$ soit de mesure de Haar positive; il est donc de mesure nulle. (Dans le cas C^∞, (3.5) résulte du théorème fondamental IX.5.1.) ■

Remarque. — On voit facilement que, sous les conditions de (3.5), $\mathrm{Cent}^r(f)$ *est totalement discontinu pour la* C^r*-topologie. De plus,* G_f *est un groupe topologique polonais monothétique et non localement compact pour la* C^r*-topologie* (voir Kuipers et Niederreiter [1, (4.8), p. 274]).

(3.6) On reprend les notations de (1.10). On a le

Théorème. — Il est générique dans F^∞ *pour la* C^∞*-topologie :*

a) *d'être* C^0*-conjugué à une translation irrationnelle de façon non absolument continue;*
b) *d'avoir un centralisateur* C^∞ *ayant la puissance du continu.*

Démonstration. — La propriété a) est générique par (1.11). Pour voir que la propriété b) l'est, il suffit, par (3.2), de voir que $K_\infty^{-1}(0) \cap F^\infty$ est résiduel dans F^∞ pour la C^∞-topologie. Or $G = K_\infty^{-1}(0) \cap F^\infty$ est un G_δ par la semi-continuité supérieure de K_∞. Il reste à voir que G est dense dans F^∞ pour la C^∞-topologie. Soit $O^\infty = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{R}} O_\alpha^\infty$ (*i.e.* l'ensemble des difféomorphismes de $D^\infty(\mathbf{T}^1)$ qui sont C^∞-conjugués à une translation). On a $O^\infty \subset F^\infty$ et si $f \in O^\infty$, $K_\infty(f) = 0$ (par (3.1)). Le théorème (3.6) résulte alors de la proposition suivante :

Proposition **(3.7)**. — O^∞ *est dense dans* F^∞ *pour la* C^∞*-topologie.*

Démonstration. — Rappelons que l'on note A l'ensemble des $\alpha \in \mathbf{R}$ qui satisfont à une condition A. Par III.6.3.3, $\bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha^\infty$ est dense dans F^∞ pour la C^∞-topologie. Or, par le théorème fondamental IX.5.1, si $\alpha \in A$, $O_\alpha^\infty = F_\alpha^\infty$, et il en résulte que $\bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha^\infty$ est dense dans F^∞. ■

Remarque **(3.8)**. — En utilisant XI.2.5, on peut montrer, sans utiliser le théorème fondamental, que (3.6) est vrai sur $\bar{O}^\infty$ que l'on munit de la C^∞-topologie; $\bar{O}^\infty$ est alors un espace de Baire.

XIII. — QUELQUES EXEMPLES SUR $\mathbf{T}^n$

Plan :

Commentaire :

Les exemples (1.3) et (5.7.3) sont de Fürstenberg [1] et Grabar [1], (3.1) s'inspire de T. Saito [1], (2.6.1) et (2.6.2) ont, semble-t-il, été remarqués la première fois par W. Thurston [1].

Par (A.2), on est amené à penser qu'il doit exister un invariant de C^0-conjugaison analogue au nombre de rotation sur $\mathbf{T}^1$. Le point important est évidemment III.4.1.1.

En 1 nous faisons quelques remarques sur les généralisations immédiates. (1.4) montre que l'existence d'un vecteur de rotation est une condition nécessaire de C^0-conjugaison à une translation (voir aussi à ce propos Herman [1]).

En 2 on propose, pour les groupes préservant une mesure, une autre définition du vecteur de rotation. (Voir pour des généralisations Fathi et Visetti [1].)

En 5 on montre qu'il existe dans $D^r(\mathbf{T}^n)$, $n \geq 2$, des exemples très simples de difféomorphismes conjugués à des translations ergodiques avec perte de différentiabilité. Ces exemples sont construits de la manière suivante : à partir de l'équation linéarisée sur $\mathbf{T}^{n-1}$ (*i.e.* $\psi \mapsto \psi - \psi \circ R_\alpha$) dont l'étude (en 4) est très simple par séries de Fourier, on construit des difféomorphismes de $\mathbf{T}^n$ par produit gauche et les propriétés de perte de différentiabilité de l'équation linéarisée s'interprètent comme des propriétés de conjugaison des difféomorphismes.

L'exemple 6 s'inspire de (2.6.5), exemple 1. L'exemple construit montre que sur $\mathbf{T}^3$, pour $\alpha \in \mathbf{R}^3$, le voisinage $V_{R_\alpha}^{2\theta}$ de A.2 ne peut pas être remplacé par un ouvert C^1. Il serait intéressant d'avoir un tel exemple sur $\mathbf{T}^2$ (si c'est possible) mais notre méthode ne convient pas d'après Saito [2], Kolmogorov [1] (et Sternberg [1] ou [2]). Noter que l'exemple construit en 6 n'est pas uniquement ergodique (!).

(7.4) et (7.5) montrent que sur $\mathbf{T}^n$, pour $n \geq 2$, en certain sens, le théorème de Denjoy est bien faux; contrairement à $\mathbf{T}^1$, il faut contrôler toute l'équation linéarisée et le $K_0 = 0$ ne suffit plus (voir aussi (5.7.4)).

Rappelons un petit paradoxe : sur l'équation linéarisée, le théorème de Denjoy semble faux.

1. Généralités sur la fonction rotation sur $\mathbf{T}^n$.

(1.1) *Généralités.* — Soit $f = \mathrm{Id} + \varphi \in D^0(\mathbf{T}^n)$, et soit $\bar{f}$ l'homomorphisme induit sur $\mathbf{T}^n$. On a par récurrence sur l'entier k :

$$f^k = \mathrm{Id} + \sum_{i=0}^{k-1} \varphi \circ f^i$$

donc
$$\frac{f^k - \mathrm{Id}}{k} = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi \circ f^i.$$

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbf{T}^n$ invariante par $\bar{f}$; $\dfrac{f^k-\mathrm{Id}}{k}$ est une somme de Birkoff :

$$\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\varphi\circ\bar{f}^i \qquad \text{avec} \qquad \varphi\in C^0(\mathbf{T}^n,\mathbf{R}^n).$$

Il suit du théorème ergodique que pour μ-presque tout $x\in\mathbf{R}^n$, $\dfrac{f^k-\mathrm{Id}}{k}(x)$ converge, si $k\to+\infty$, vers une fonction de $L^\infty(\mathbf{T}^n,\mathbf{R}^n,\mu)$. Donc il existe au moins un $x\in\mathbf{R}^n$ tel que $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{f^k-\mathrm{Id}}{k}(x)$ existe.

(1.2) *La limite n'est en général pas constante.*

Ce qui contraste avec $\mathbf{T}^1$, c'est que II.2.2 est faux.

Exemple. — Soit $f\in D^\omega(\mathbf{T}^2)$ définie par :

$$f(x_1,x_2)=(x_1+\varphi(x_2),x_2) \qquad \text{et} \qquad \varphi\in C^\omega(\mathbf{T}^1), \qquad \varphi \text{ non constante.}$$

On a alors :

$$f^k(x_1,x_2)-(x_1,x_2)=(k\varphi(x_2),0).$$

(1.3) La proposition qui va suivre résulte de Fürstenberg [1]. Pour la commodité du lecteur nous donnons une démonstration.

Proposition. — Il existe $f\in D^\omega(\mathbf{T}^3)$ *et* $x_0\in\mathbf{R}^3$ *tels que, quand* $k\to+\infty$, $\dfrac{f^k-\mathrm{Id}}{k}(x_0)$ *n'ait pas de limite.*

Démonstration. — a) *Construction d'une* $f_1\in D^\omega(\mathbf{T}^2)$.

Soit $f_1(x_2,x_3)=(x_2+\varphi(x_3),x_3+\alpha)$, avec $\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ (suffisamment Liouville), $\int_{\mathbf{T}^1}\varphi(x_3)\,dx_3=0$, $\varphi\in C^\omega(\mathbf{T}^1)$, et on suppose qu'il existe $\psi\in L^2(\mathbf{T}^1,dx)$ tel que :

$$\psi-\psi\circ R_\alpha=\varphi,$$

mais qu'il n'existe pas de ψ dans $C^0(\mathbf{T}^1)$ vérifiant :

$$\psi-\psi\circ R_\alpha=\varphi.$$

La construction de α et de φ est classique par séries de Fourier lacunaires.

b) L'application $\bar{f}_1$ ainsi construite est alors sur $\mathbf{T}^2$ un *difféomorphisme minimal* (*i.e.* l'orbite de tout point est dense). Pour ceci voir Fürstenberg [1] ou Parry [1] et (5.7.3).

c) *Il existe* $\varphi_1\in C^\omega(\mathbf{T}^1)$ *et* $y\in\mathbf{R}^2$, *tel que, si* $k\to+\infty$, $\left(\dfrac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{k-1}\varphi_1\circ\bar{f}_1^i\right)(y)$ *n'ait pas de limite.*

Preuve de c). — Soit $(\varphi_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de $C^\omega(\mathbf{T}^1)$ dense dans $C^0(\mathbf{T}^1)$ pour la C^0-topologie. Supposons par l'absurde que pour tout i, et tout $x\in\mathbf{T}^2$, $\left(\dfrac{1}{k}\sum\limits_{j=0}^{k-1}\varphi_i\circ\bar{f}_1^j\right)(x)$

converge simplement vers la fonction $\widetilde{\varphi}_i : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{R}$; $\widetilde{\varphi}_i$ est alors de première classe de Baire (comme limite simple de fonctions continues) et a donc un point de continuité. Or, $\widetilde{\varphi}_i$ est invariante par $\bar{f}_1$ qui est minimal, ce qui implique que $\widetilde{\varphi}_i$ est constante, Par suite, pour tout i, si $k \to +\infty$, $\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} \varphi_i \circ \bar{f}_1^j$ converge simplement vers une constante. Ceci implique, puisque (φ_i) est dense dans $C^0(\mathbf{T}^1)$, que $\bar{f}_1$ est uniquement ergodique; comme $\bar{f}_1$ laisse invariante la mesure de Haar m de $\mathbf{T}^2$, $\bar{f}_1$ est donc m-ergodique (et strictement ergodique).

Soit $g(x_2, x_3) = (x_2 + \psi(x_3), x_3) (\bmod \mathbf{Z}^2)$ (ψ est choisie comme dans a)) ; $g : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{T}^2$ préserve la mesure m (et de plus g et g^{-1} sont m-bimesurables). On a : $g \circ \bar{f}_1 \circ g^{-1} = R_{(0, \alpha)}$ avec $R_{(0,\alpha)}(x_2, x_3) = (x_2, x_3 + \alpha)$. Or, $R_{(0,\alpha)}$ n'est pas m-ergodique; l'affirmation c) en résulte par l'absurde.

d) *Construction de f.*

Soient $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + \varphi_1(x_2, x_3), x_2 + \varphi(x_3), x_3 + \alpha)$ et $x_0 = (0, y) \in \mathbf{R}^3$; alors, si $k \to +\infty$, $\dfrac{f^k - \mathrm{Id}}{k}(x_0)$ n'a pas de limite. ■

Remarque. — Le difféomorphisme $\bar{f}_1$ de $\mathbf{T}^2$, construit en a), est minimal, préserve la mesure de Haar de $\mathbf{T}^2$, mais n'est pas m-ergodique.

Proposition (**1.4**). — *Soit* $f \in D^0(\mathbf{T}^n)$; *on suppose qu'il existe* $c \in \mathbf{R}^n$, *telle que :*

$$\sup_{k \in \mathbf{N}} |f^k - kc - \mathrm{Id}|_0 < +\infty.$$

Alors si $h = g \circ f \circ g^{-1}$, *avec* $g \in D^0(\mathbf{T}^n)$, *on a :*

$$\sup_{k \in \mathbf{N}} |h^k - kc - \mathrm{Id}|_0 < +\infty.$$

Démonstration. — On écrit $g = \mathrm{Id} + \psi$ avec $\psi \in C^0(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$. On a $g \circ f^k = h^k \circ g$; si on écrit $f = \mathrm{Id} + \varphi_k$, $h = \mathrm{Id} + \eta_k$ on a :

$$\psi - \psi \circ f^k = \eta_k \circ g - \varphi_k,$$

donc :

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} |\eta_k - kc|_0 \leq \sup_{n \in \mathbf{N}} |\varphi_k - kc|_0 + 2|\psi|_0 < +\infty. \quad ■$$

Remarque (**1.5**). — *Si f est C^0-conjugué à R_α alors on a :*

$$\sup_k |f^k - k\alpha - \mathrm{Id}|_0 < +\infty,$$

donc, si $k \to +\infty$, $\dfrac{f^k - \mathrm{Id}}{k}$ *converge uniformément vers* $\alpha \in \mathbf{R}^n$.

(**1.6**) La proposition qui va suivre montre que si on introduit une hypothèse analogue à II.2.2, alors on a un vecteur de rotation qui est un invariant de C^0-conjugaison.

Proposition. — *Soit* $f \in D^0(\mathbf{T}^n)$ *vérifiant*

$$\sup_{k \in \mathbf{N}} |f^k - \mathrm{Id} - f^k(0)|_0 = a < +\infty;$$

alors :

1) *si* $k \to +\infty$, $\dfrac{f^k - \mathrm{Id}}{k}$ *converge uniformément vers un élément* $\rho(f) \in \mathbf{R}^n$;

2) $\sup\limits_k |f^k - \mathrm{Id} - k\rho(f)|_0 \leq 2a$.

Démonstration. — Évidemment 2) implique 1). Soit μ une mesure de probabilité invariante par $\bar{f}$. On a, si $f = \mathrm{Id} + \varphi$:

$$f^k - \mathrm{Id} - k\mu(\varphi) = \sum_{i=0}^{k-1} (\varphi - \mu(\varphi)) \circ f^i.$$

Soit $(f^k - \mathrm{Id} - k\mu(\varphi))_j$ la j-ième composante de $f^k - \mathrm{Id} - k\mu(\varphi)$. Puisque :

$$\mu(f^k - \mathrm{Id} - k\mu(\varphi))_j = 0$$

et puisque $\quad \mathrm{Max}(f^k - \mathrm{Id} - k\mu(\varphi))_j - \mathrm{Min}(f^k - \mathrm{Id} - k\mu(\varphi))_j \leq 2a$

on a bien $\quad |f^k - k\mu(\varphi) - \mathrm{Id}|_0 \leq 2a$.

(Rappelons que pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $|x| = \sup\limits_i |x_i|$.)

Si $k \to +\infty$, $\dfrac{f^k - \mathrm{Id}}{k}$ converge uniformément vers $\mu(\varphi) = \rho(f)$ dans $\mathbf{R}^n$, donc cela ne dépend pas du choix de μ. ■

Remarque (**1.7**). — *Dans la proposition* (1.6), *la propriété* 2) *n'est pas une conséquence formelle de* 1), *comme le montre l'exemple suivant* :

Soient $\varphi \in C^0(\mathbf{T}^1)$ avec $\int_{\mathbf{T}^1} \varphi(x)\,dx = 0$ et $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ tels qu'il n'existe pas de $\psi \in C^0(\mathbf{T}^1)$ vérifiant $\psi - \psi \circ R_\alpha = \varphi$. Soit $f \in D^0(\mathbf{T}^2)$ définie par :

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + \varphi(x_2), x_2 + \alpha).$$

On a : $$f^k - \mathrm{Id} = \Big(\sum_{i=0}^{k-1} \varphi \circ R_{i\alpha}, k\alpha\Big).$$

Si $k \to +\infty$, $\dfrac{f^k - \mathrm{Id}}{k}$ converge uniformément vers $(0, \alpha) \in \mathbf{R}^2$, mais

$$\sup_k |f^k - \mathrm{Id} - (0, k\alpha)|_0 = \sup_k \Big|\sum_{i=0}^{k-1} \varphi \circ R_{i\alpha}\Big|_0 = +\infty;$$

sinon, d'après IV.4.1, il existerait $\psi \in C^0(\mathbf{T}^1)$ vérifiant $\psi - \psi \circ R_\alpha = \varphi$ ce qui est contraire au choix de φ.

2. Difféomorphismes préservant une mesure.

Rappelons que si $f = \mathrm{Id} + \varphi \in D^0(\mathbf{T}^1)$ et si μ est une mesure de probabilité invariante par $\bar{f}$, on a (II.2.6) $\rho(f) = \mu(\varphi)$. C'est cette définition que nous proposons de généraliser. Pour la généralisation aux variétés, voir Fathi et Visetti [1].

(2.1) *Définition de* $D^r_\mu(\mathbf{T}^n)$.

Soient μ *une mesure de probabilité sur* $\mathbf{T}^n$ *et*

$$D^r_\mu(\mathbf{T}^n)=\{f\in D^r(\mathbf{T}^n)\mid \bar{f}_*\mu=\mu\}.$$

$D^r_\mu(\mathbf{T}^n)$ *est évidemment un sous-groupe fermé de* $D^r(\mathbf{T}^n)$.

Alors on définit

$$\rho_\mu : D^r_\mu(\mathbf{T}^n)\to\mathbf{R}^n$$
$$f\mapsto\int_{\mathbf{T}^n}(f-\mathrm{Id})\,d\mu.$$

On voit facilement que ρ_μ est un homomorphisme de groupe par le même calcul qu'en II.2.11, et que $\rho_\mu(R_p\circ f)=p+\rho_\mu(f)$ si $p\in\mathbf{Z}^n$.
Si $\mu=m$ est la mesure de Haar de $\mathbf{T}^n$, on a donc un homomorphisme continu surjectif :

$$\rho_m : D^r_m(\mathbf{T}^n)\to\mathbf{R}^n\to 0$$

tel que $\quad \rho_m(R_\alpha)=\alpha\in\mathbf{R}^n$.

Remarque **(2.2)**. — *Soit f un homéomorphisme de* $\mathbf{R}^n$, $f-\mathrm{Id}$ *étant à support compact, qui laisse invariante une mesure de Radon* μ; *alors* $\mu(f-\mathrm{Id})=0\in\mathbf{R}^n$.

Démonstration (d'après A. Chenciner) :

On voit facilement que $\mu(f^k-\mathrm{Id})=k\mu(f-\mathrm{Id})$. Si $\mu(f-\mathrm{Id})\neq 0$ alors, si $k\to+\infty$, une composante de $k\mu(f-\mathrm{Id})$ tend vers $\pm\infty$. Mais $f^k-\mathrm{Id}$ est une fonction à support compact, bornée indépendamment de k, puisque $f-\mathrm{Id}$ est à support compact, d'où une contradiction. ∎

(2.3) *Groupes* $D^r_w(\mathbf{T}^n)$ *et* $D^r_\Omega(\mathbf{T}^n)$.

Soit $w\in\Lambda^*T(\mathbf{T}^n)$ une forme différentielle constante (*i.e.* harmonique pour la métrique plate de $\mathbf{T}^n$) ; on suppose qu'en degré maximum :

$$w\,|_{\Lambda^n}=\Omega=dx_1\wedge dx_2\wedge\ldots\wedge dx_n.$$

Considérons, pour $r\geq 1$, le groupe $D^r_w(\mathbf{T}^n)=\{f\in D^r(\mathbf{T}^n)\mid f^*w=w\}$, qui est un sous-groupe fermé de $D^r(\mathbf{T}^n)$. On a :

$$\mathbf{R}^n\hookrightarrow D^r_w(\mathbf{T}^n)\hookrightarrow D^r_m(\mathbf{T}^n).$$

On a donc un homomorphisme (continu) surjectif de groupes :

$$\rho_w : D^r_w(\mathbf{T}^n)\to\mathbf{R}^n\to 0$$

défini par $\quad f\mapsto\int_{\mathbf{T}^n}(f-\mathrm{Id})\,dm.$

(2.4) $X^r_\Omega(\mathbf{T}^n)$.

Soit $X^r_\Omega(\mathbf{T}^n)$ l'ensemble des champs de vecteurs sur $\mathbf{T}^n$ de divergence nulle. (On identifie canoniquement $X^r(\mathbf{T}^n)$ avec $C^r(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$.) On définit un homomorphisme d'algèbre de Lie surjectif :

$$\rho_\Omega : X^r_\Omega(\mathbf{T}^n) \to \mathbf{R}^n \to 0$$

par $$f \mapsto \int_{\mathbf{T}^n} f(x)\,dm.$$

Si $\varphi \in D^r_w(\mathbf{T}^n)$ et si $\alpha \in \mathbf{R}^n$ est un champ de vecteurs constant, on a alors :

$$\rho_\Omega(\varphi_* \alpha) = \rho_\Omega(\alpha) = \alpha \qquad \text{avec} \qquad \varphi_* \alpha = D\varphi \circ \varphi^{-1}.\alpha.$$

Lemme **(2.5)**. — *Soit* $g \in X^r_\Omega(\mathbf{T}^n)$, $r \geq 1$; *soit* $\exp(tg) = f_t \in D^r_\Omega(\mathrm{T}^n)$ *le groupe à un paramètre engendré par* g; *alors on a* :

$$\rho_m(f_1) = \rho_\Omega(g).$$

Démonstration. — On écrit :

$$f_t(x) = x + \alpha(t) + \varphi_t(x),$$

avec $\alpha(t) \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$ et $\int_{\mathbf{T}^n} \varphi_t(x)\,dx = 0$.

On a pour x fixé :

$$\frac{df_t}{dt}(x) = g(f_t(x));$$

mais : $$\int_{\mathbf{T}^n} g(f_t(x))\,dx = \int_{\mathbf{T}^n} g(x)\,dx = \rho_\Omega(g)$$

puisque $x \mapsto f_t(x)$ préserve $m = dx$.

On a aussi :

$$\int_{\mathbf{T}^n} \frac{df_t(x)}{dt}\,dx = \int_{\mathbf{T}^n} \frac{d\alpha}{dt}\,dx + \int_{\mathbf{T}^n} \frac{d}{dt}\varphi_t(x)\,dx$$
$$= \frac{d\alpha}{dt}.$$

Donc $\dfrac{d\alpha}{dt} = \rho_\Omega(g)$, soit $\alpha(t) = t\rho_\Omega(g)$ (puisque si $t=0$, $\varphi_0(x) + \alpha(0) = 0$). On a finalement :

$$\rho_m(f_1) = \alpha(1) = \rho_\Omega(g). \quad \blacksquare$$

(2.6) La proposition suivante montre bien que ρ_m joue un rôle analogue à la fonction de rotation sur $\mathrm{Diff}^0_+(\mathbf{T}^1)$. Ce qui permet de conclure à partir de la décomposition de A.2 une conjugaison d'un f à R_α, si $\rho_m(f) = \alpha$ avec α bon et f proche de R_α. Sur $\mathbf{T}^1$, on utilisait III.4.1.1.

Soit w une forme différentielle comme en (2.3).

Proposition **(2.6.1)**. — *Soit* $\alpha \in \mathbf{R}^n$ *satisfaisant une condition diophantienne et soit* $V^{2\theta}_{R_\alpha}$ *le voisinage de* R_α *dans la* $C^{2\theta}$*-topologie déterminée par* A.2.

Si $f \in V^{2\theta}_{R_\alpha} \cap D^\infty_w(\mathbf{T}^n)$ *et* $\rho_m(f) = \alpha$ *alors :*

$$f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g \quad \textit{avec} \quad g \in D^\infty_w(\mathbf{T}^n).$$

On a le lemme suivant de W. Thurston [1] :

Lemme **(2.6.2)**. — *Soient* $g \in D^\infty(\mathbf{T}^n)$ *et* $\omega_i \in \Lambda^i(\mathbf{R}^n)$ *une forme constante sur* $\mathbf{R}^n$ *de degré i. Si* R_α *est sur* $\mathbf{T}^n$ *une translation ergodique, et si :*

$$(g^{-1} \circ R_\alpha \circ g)^* w_i = w_i$$

alors $g^* w_i = w_i$.

Démonstration. — On a sur $\mathbf{T}^n$: $(\bar{g}^{-1} \circ R_\alpha \circ \bar{g})^* w_i = w_i$, donc $R^*_\alpha \circ \bar{g}^* w_i = \bar{g}^* w_i$. Comme la forme $\bar{g}^* w_i$ est laissée invariante par R^*_α, $\bar{g}^* w_i$ est une forme constante.

Comme $\bar{g}$ est homotope à l'identité, l'intégrale de $\bar{g}^* w_i$ sur tout i-cycle de $\mathbf{T}^n$ est égale à l'intégrale de w_i sur le même cycle, d'où il en résulte que $\bar{g}^* w_i = w_i$. ■

Remarque **(2.6.3)**. — Soit $g \in \mathrm{Diff}^0_0(\mathbf{T}^n)$; si $g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$ laisse invariante la mesure m de Haar de $\mathbf{T}^n$ et si R_α est sur $\mathbf{T}^n$ une translation ergodique, alors on a $g_* m = m$.

Démonstration de (2.6.1). — Par A.2, il existe $g \in D^\infty(\mathbf{T}^n)$ et R_λ tels que

$$f = R_\lambda \circ g^{-1} \circ R_\alpha \circ g.$$

Or $R_{-\lambda} \circ f$ préserve la forme w, donc, d'après le lemme précédent, $g \in D^\infty_w(\mathbf{T}^n)$. On a donc :

$$\rho_m(f) = \rho_m(R_\lambda) + \rho_m(R_\alpha) = \lambda + \alpha.$$

Or $\rho_m(f) = \alpha$, donc $\lambda = 0$ et par conséquent :

$$f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g \quad \text{avec} \quad g \in D^\infty_w(\mathbf{T}^n). \quad ■$$

Remarque **(2.6.4)**. — On a une proposition que je n'énonce pas en C^r avec perte de différentiabilité, en C^ω, et aussi sur les champs de vecteurs de divergence nulle (voir Herman [8] et Moser [1]).

(2.6.5) ρ_m est très loin d'être l'unique invariant de conjugaison.

Exemple 1. — Soient $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{R}^2$ et le champ de vecteurs :

$$g(x_1, x_2) = (\alpha_1 + a_1 \cos 2\pi(x_1 + x_2) + a_2 \cos 2\pi(x_1 - x_2),\ \alpha_2 - a_1 \cos 2\pi(x_1 + x_2) + a_2 \cos 2\pi(x_1 - x_2)) \in C^\omega(\mathbf{T}^2, \mathbf{R}^2) ;$$

g est de divergence nulle; choisissons a_1 et $a_2 \in \mathbf{R} - \{0\}$ tels qu'il existe $x_0 \in \mathbf{R}^2$ vérifiant $g(x_0) = 0$. Soit f_t le groupe à un paramètre engendré par g. On a :

$$\rho_m(f_1) = \rho_\Omega(g) = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{R}^2,$$

mais $f_1(x_0) = x_0$ (*i.e.* f_1 a x_0 comme point fixe) et il n'est donc pas C^0-conjugué à R_α.

Exemple 2. — Soient

$$g_1(x_1, x_2) = (x_1 + a \sin 2\pi x_2, x_2) \quad \text{et} \quad g_2(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + a \sin 2\pi x_1).$$

On suppose $a > 1$. Alors $f = g_1 \circ g_2^{-1}$ préserve la forme volume $dx_1 \wedge dx_2$. Mais, pour tout $\lambda \in \mathbf{T}^2$, $R_\lambda \circ f$ a un point fixe sur $\mathbf{T}^2$.

3. Étude des invariants H_r sur $D^r(\mathbf{T}^n)$.

On a la proposition suivante qui généralise T. Saito [1].

Proposition **(3.1)**. — *Soit* $f \in D^0(\mathbf{T}^n)$ *tel que la suite* $\{f^k \mid k \in \mathbf{Z}\}$ *soit équicontinue; alors, si* $k \to +\infty$, $\dfrac{f^k - \mathrm{Id}}{k}$ *converge uniformément vers* $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R}^n$. *Si* R_α *sur* $\mathbf{T}^n$ *est une translation ergodique, alors* f *est* C^0*-conjugué à* R_α.

Démonstration. — La famille :

$$\{f^k - \mathrm{Id} - f^k(0) \in C^0(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n) \mid k \in \mathbf{Z}\}$$

est aussi équicontinue et bornée en 0; par Dieudonné [1, VII.5, Ex. 11], elle est bornée :

$$\sup_k |f^k - f^k(0) - \mathrm{Id}|_0 < +\infty,$$

et par (1.6), si $k \to +\infty$, $\dfrac{f^k - \mathrm{Id}}{k}$ converge uniformément vers $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R}^n$. Considérons pour $k \in \mathbf{N}$:

$$S_k(f) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f^i - i\alpha}{k};$$

la suite $\{S_k(f) - \mathrm{Id} \mid k \in \mathbf{N}\}$ est équicontinue, par (1.6) elle est bornée, donc relativement compacte par le théorème d'Ascoli; il existe donc une suite d'entiers $k_i \to +\infty$, où $i \to +\infty$, telle que $S_{k_i}(f) - \mathrm{Id}$ converge uniformément vers $\varphi \in C^0(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$ (lorsque $k_i \to +\infty$). Soit $g = \mathrm{Id} + \varphi$. On a :

$$S_{k_i}(f) \circ f = \alpha + S_{k_i}(f) + \frac{f^{k_i} - \mathrm{Id} - k_i \alpha}{k_i}.$$

Mais d'après (1.6) :

$$\sup_k |f^k - \mathrm{Id} - k\alpha|_0 < +\infty.$$

Si $k_i \to +\infty$, on a par passage à la limite, $g \circ f = R_\alpha \circ g$. Par suite, si $k \in \mathbf{Z}$, $g \circ f^k = R_{k\alpha} \circ g$. Soit G l'adhérence de $\{\bar{f}^n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ dans $C^0(\mathbf{T}^n, \mathbf{T}^n)$; G est en fait contenu dans $\mathrm{Diff}_0^0(\mathbf{T}^n)$ par Bourbaki [3, § 3, n° 5]; G est donc un sous-groupe abélien compact de $\mathrm{Diff}_0^0(\mathbf{T}^n)$. C'est maintenant que l'hypothèse disant que R_α est une translation ergodique de $\mathbf{T}^n$ intervient. (On suit Saito [1].) Comme $\bar{g} \circ \bar{f}^k = R_{k\alpha} \circ \bar{g}$ et puisque R_α est une translation ergodique de $\mathbf{T}^n$, on a $\bar{g}(\mathbf{T}^n) = \mathbf{T}^n$. On a $\bar{g}(\bar{f}^k(x_0)) = k\alpha \in \mathbf{T}^n$ pour $k \in \mathbf{Z}$. L'application $\bar{g}$ définit un homomorphisme par $\tilde{g}(\bar{f}^n) = \bar{g}(\bar{f}^n(x_0))$; $\tilde{g}$ est un homomorphisme uniformément continu du sous-groupe $\{\bar{f}^n \mid n\in\mathbf{Z}\}\subset \mathrm{G}$ dans le groupe $\mathbf{T}^n$, et se prolonge en un homomorphisme continu de G dans $\mathbf{T}^n$.

Soit $x_0\in\mathbf{T}^n$, avec $g(x_0)=0$. Soit G_{x_0} le stabilisateur de x_0 pour l'action $\mathrm{G}\times\mathbf{T}^n\to\mathbf{T}^n$, $(g, x)\mapsto g(x)$. Soit $g_1 : \mathrm{H}=\mathrm{G}/\mathrm{G}_{x_0}\to\mathbf{T}^n$ induit par $\tilde{g}$. Comme $\{k\alpha \mid k\in\mathbf{Z}\}$ est dense dans $\mathbf{T}^n$, on a $g_1(\mathrm{H})=\mathbf{T}^n$. *Montrons que g_1 est un homéomorphisme.*

On note $\hat{\mathrm{H}}$ le dual de H, au sens de Pontryagin [1] (ou groupe des caractères de H). Comme $\mathrm{G}/\mathrm{G}_{x_0}$ se plonge comme un compact de $\mathbf{T}^n$ (c'est l'orbite de x_0 par G dans $\mathbf{T}^n$), la dimension topologique de H est donc $\leq n$. Comme $g_1 : \mathrm{H}\to\mathbf{T}^n\to 0$, on a $0\to\mathbf{Z}^n\to\hat{\mathrm{H}}$. On conclut d'après Pontryagin [1, section 38] que :

$$\mathrm{dimension}(\mathrm{H})=\mathrm{rang}(\hat{\mathrm{H}})=n,$$

donc H a un point intérieur dans $\mathbf{T}^n$ d'après Pontryagin [1, section 38, B] et par la structure de groupe, H est donc ouvert; comme H est compact, $\mathrm{H}=\mathbf{T}^n$. Si on désigne par $\Phi : \mathrm{H}\to\mathbf{T}^n$ l'application $h\mapsto h.(x_0)$, on conclut que Φ est un homéomorphisme (et de plus $\{f^k(x_0) \mid k\in\mathbf{Z}\}$ est dense dans $\mathbf{T}^n$). Or, on a $g_1=\bar{g}\circ\Phi$. Comme $\bar{g}$ est homotope à l'identité, on conclut que $(g_1)_* : \pi_1(\mathrm{H})\to\pi_1(\mathbf{T}^n)$ est un isomorphisme; puisque g_1 est un homomorphisme continu de H sur $\mathbf{T}^n$ qui induit un isomorphisme sur le π_1, g_1 est donc bien un homéomorphisme. Donc $g=g_1\circ\Phi^{-1}$ est un homéomorphisme, et comme $\bar{g}\circ f=\mathrm{R}_\alpha\circ\bar{g}$, f est C^0-conjugué à R_α. ■

Remarque. — Soit $f\in\mathrm{Diff}^0_0(\mathbf{T}^n)$, tel que $\mathrm{Z}_f=\{f^n \mid n\in\mathbf{Z}\}$ soit équicontinue; si $\tilde{f}$ est un relèvement de f, il n'est pas difficile de voir que $\mathrm{Z}_{\tilde{f}}=\{\tilde{f}^n \mid n\in\mathbf{Z}\}$ est équicontinue dans $\mathrm{D}^0(\mathbf{T}^n)$.

Pour la définition de H_r, se rapporter à IV.1.2.

Proposition (**3.2**). — *Pour* $1\leq r\leq+\infty$, *soit* $f\in\mathrm{D}^r(\mathbf{T}^n)$, *avec* $\mathrm{H}_r(f)<+\infty$ *si* r *est fini (et* $\mathrm{H}_k(f)<+\infty$ *pour tout* k *si* $r=+\infty$*). Alors, si* $k\to+\infty$, $\dfrac{f^k-\mathrm{Id}}{k}$ *converge uniformément vers* $\rho(f)=\alpha\in\mathbf{R}^n$. *Si* R_α *est sur* $\mathbf{T}^n$ *une translation ergodique, alors* f *est* C^{r-1}*-conjugué à* $\mathrm{R}_\alpha : f=g^{-1}\circ\mathrm{R}_\alpha\circ g$. *De plus,* $\mathrm{D}^{r-1}g$ *est lipschitzienne.*

Démonstration. — 1) *Cas où* $r=1$.

Alors $\{f^n \mid n\in\mathbf{Z}\}$ est une suite équicontinue dans $\mathrm{D}^0(\mathbf{T}^n)$ et on applique la proposition précédente, $f=g^{-1}\circ\mathrm{R}_\alpha\circ g$ avec $g\in\mathrm{D}^0(\mathbf{T}^n)$. D'après IV.5.1, si on pose :

$$\mathrm{S}_k(f)=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{f^i-i\alpha}{k},$$

$\mathrm{S}_k(f)$ converge uniformément, quand $k\to+\infty$, vers $\mathrm{R}_c\circ g$ pour la C^0-topologie, avec :

$$c=\int_{\mathbf{T}^n}\varphi_{-1}(x)\,dx \quad \text{si} \quad g^{-1}=\mathrm{Id}+\varphi_{-1}.$$

Comme en IV.6.3.1, on conclut que g est lipschitzienne (mais je ne sais pas si g^{-1} est lipschitzienne).

2) *Cas où* $r=2$.

Puisque $H_2(f)<+\infty$, considérons $DS_k(f)=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{Df^i}{k}$. La suite $(DS_k(f))_{k\geq 1}$ est équicontinue puisque $\ell=\sup_k |D^2f^k|_0<+\infty$, et même :

$$|DS_k(f)(x)-DS_k(f)(y)|\leq \ell\,|x-y| \quad (*).$$

Comme toute dérivée partielle d'une fonction de $C^1(\mathbf{T}^n)$ s'annule en au moins un point, on voit facilement que $(DS_k(f))$ est une suite de fonctions équicontinue et bornée, donc d'adhérence compacte dans $C^0(\mathbf{T}^n, \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n))$ pour la C^0-topologie. Soit (k_i) une suite d'entiers telle que si $i\to+\infty$, $k_i\to+\infty$ et $DS_{k_i}(f)$ converge uniformément vers h. L'application g définie en 1) est dérivable et $Dg=h$; de plus, par passage à la limite dans $(*)$, on conclut que h est lipschitzienne. Montrons que g est un difféomorphisme de classe C^1. On a, si $k\in\mathbf{N}$, $g\circ f^k=R_{k\alpha}\circ g$, donc $\det(Dg)\circ f^k=\det Dg$. S'il existe $x_0\in\mathbf{T}^n$ tel que $\det(Dg(x_0))=0$, on conclut par la minimalité de f et la continuité de $\det(Dg)$ que $\det(Dg)\equiv 0$. Or ceci est absurde avec $g:\mathbf{T}^n\to\mathbf{T}^n$ de classe C^1 et homotope à l'identité.

Pour $r\geq 3$, on démontre la proposition de façon analogue.

Si $r=+\infty$, il suffit de voir que f est C^k-conjugué à R_α pour tout k fini par II.3.3. ■

(3.3) *Difféomorphisme* H^s.

Pour les définitions des espaces H^s, voir Ebin [1]. Soit, pour s entier, $s>\frac{n}{2}+1$:

$$DH^s(\mathbf{T}^n)=\{f=\mathrm{Id}+\varphi\in D^1(\mathbf{T}^n)\mid \varphi\in H^s(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)\}.$$

Pour la topologie H^s, $DH^s(\mathbf{T}^n)$ est un groupe topologique, par Ebin [1]. Soit

$$H_{H^s}(f)=\sup_{n\in\mathbf{Z}}|Df|_{H^{s-1}}\in\overline{\mathbf{R}}=\mathbf{R}\cup\{+\infty\}.$$

Remarquons que si f est conjugué dans $DH^s(\mathbf{T}^n)$ à R_α alors $H_{H^s}(f)<+\infty$.

Proposition **(3.3.1)**. — *Soit* $f\in DH^s(\mathbf{T}^n)$ *avec* $H_{H^s}(f)<+\infty$; *alors* :

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{f^k-\mathrm{Id}}{k}=\alpha\in\mathbf{R}^n,$$

et si R_α *est sur* $\mathbf{T}^n$ *une translation ergodique, alors* f *est conjugué à* R_α *dans* $DH^s(\mathbf{T}^n)$.

Commençons par un lemme.

Lemme **(3.3.2)**. — *Soit* B *un espace de Banach réflexif de norme* $|\,.\,|$; *soit* $A:B\to B$ *linéaire continue. Soit* $\varphi\in B$ *avec* :

$$\sup_n\Big|\sum_{i=0}^{n-1}A^i\varphi\Big|<+\infty;$$

alors il existe $\psi\in B$ *tel que* $\psi-A\psi=\varphi$.

Démonstration (d'après Petersen [1]).

Soit C l'enveloppe convexe fermée des $(\sum_{i=0}^{n-1} A^i\varphi)_{n\in\mathbf{N}}$; C est convexe compact pour la topologie faible et l'application $L : \psi \mapsto A\psi + \varphi$ est faiblement continue et laisse C invariant. Par un théorème de point fixe (par exemple le théorème de Markov et Kakutani, version affine), L a un point fixe : $L(\psi) = \psi$, donc $A\psi + \varphi = \psi$.

Donnons une autre démonstration si B est séparable. Cette autre démonstration, nous semble-t-il, explique IV.5.1. La boule unité de B est alors faiblement compacte et métrisable; soit

$$\psi_n = \frac{1}{n}(\varphi + \ldots + \sum_{i=0}^{n-1} A^i\varphi).$$

Comme $\sup|\psi_n| < +\infty$, il existe une suite d'entiers (n_i) telle que si $i \to +\infty$, $n_i \to +\infty$, et ψ_{n_i} converge faiblement vers un $\psi \in B$. On voit facilement que $A\psi + \varphi = \psi$. ∎

Remarque. — Le lemme est inexact si B n'est pas réflexif.

Exemple. — Soient $0 < a < \frac{1}{2\pi}$ fixé, $f(x) = x + a \sin 2\pi x$ et $\varphi(x) = \sin 2\pi x \in C^0(\mathbf{T}^1)$. On a $\sup_n |\sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i|_0 < +\infty$ par **II**.2.5 (inégalité du nombre de rotation), mais il n'existe pas de $\psi \in C^0(\mathbf{T}^1)$ tel que $\psi - \psi \circ f = \varphi$.

(3.3.3) *Démonstration de* (3.3.1).

Comme $s > \frac{n}{2} + 1$, $H_{H^s}(f) < +\infty$ implique que $H_1(f) < +\infty$ et, d'après (3.2), $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$ avec $g \in D^0(\mathbf{T}^n)$; il reste à montrer que $g \in DH^s(\mathbf{T}^n)$. Si on écrit :

$$f = \mathrm{Id} + \varphi + \alpha,$$

on a, pour k entier :

$$f^k - \mathrm{Id} - k\alpha = \sum_{i=0}^{k-1} \varphi \circ f\ .$$

On déduit de (1.6) et de l'hypothèse $H_{H^s}(f) < +\infty$ que

$$\sup_k |\sum_{i=0}^{k-1} \varphi \circ f^i|_{H^s} < +\infty.$$

Or $H^s(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$ est réflexif (même Hilbertisable), donc, par le lemme précédent, il existe $\psi \in H^s(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$ vérifiant $\psi - \psi \circ f = \varphi$. Si $g = \mathrm{Id} + \psi$, on a $g \circ f = R_\alpha \circ g$. Puisque $s > \frac{n}{2} + 1$, $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est de classe C^1. Or f est C^0-conjugué à R_α, et R_α, sur $\mathbf{T}^n$, est une translation ergodique; par une démonstration identique à celle de (3.2) (cas de $r = 1$) on montre que $g \in D^1(\mathbf{T}^n)$, donc $g \in DH^s(\mathbf{T}^n)$. ∎

Remarque. — C'est finalement la non-réflexivité de $C^0(\mathbf{T}^1)$ qui a compliqué la démonstration de V.6.4(!).

(3.4) *Définition de* H'_r. — *Les propositions* (1.2) *et* (1.7) *rendent naturelle l'introduction d'un invariant* H_0.

Pour tout entier r, $0 \leq r < +\infty$, *définissons sur* $\mathrm{D}^r_m(\mathbf{T}^n)$ *l'invariant* H'_r *par :*

$$\mathrm{H}'_r : \mathrm{D}^r_m(\mathbf{T}^n) \to \overline{\mathbf{R}}$$
$$\mathrm{H}'_r(f) = \sup_{k \geq 1} |f^k - \mathrm{Id} - k\rho_m(f)|_{\mathrm{C}^r}.$$

$\mathrm{H}'_r : \mathrm{D}^r_m(\mathbf{T}^n) \to \overline{\mathbf{R}}$ est évidemment semi-continue inférieurement pour la C^r-topologie. Par (1.5) et IV.1.1, on a la

Proposition **(3.4.1)**. — *Si* $f \in \mathrm{D}^r_m(\mathbf{T}^n)$ *est* C^r*-conjugué dans* $\mathrm{D}^r(\mathbf{T}^n)$ *à* R_α, *alors* $\rho_m(f) = \alpha$ *et* $\mathrm{H}'_r(f) < +\infty$.

Remarque **(3.4.2)**. — Par (2.6.3), si $f \in \mathrm{D}^r_m(\mathbf{T}^n)$ et si $\rho_m(f) = \alpha$ est tel que R_α soit sur $\mathbf{T}^n$ une translation ergodique, il est équivalent que f soit C^r-conjugué à R_α dans $\mathrm{D}^r(\mathbf{T}^n)$ ou dans $\mathrm{D}^r_m(\mathbf{T}^n)$.

Remarque **(3.4.3)**. — Si $n = 1$ (*i.e.* sur $\mathbf{T}^1$) on n'a pas besoin d'invariant H_0 par l'inégalité du nombre de rotation II.2.5. Si $1 \leq r < +\infty$, l'invariant H_r a un sens sur $\mathrm{D}^r(\mathbf{T}^n)$ même s'il n'existe pas de vecteur de rotation.

4. Étude de l'équation linéarisée.

(4.1) Soit $0 \leq r \leq \omega$ non nécessairement entier; on pose :

$$\mathrm{C}^r_0(\mathbf{T}^n) = \left\{ \varphi \in \mathrm{C}^r(\mathbf{T}^n) \,\middle|\, \int_{\mathbf{T}^n} \varphi(x)\,dx = 0 \right\}.$$

Si R_α est une translation ergodique de $\mathbf{T}^n$, on considère l'application linéaire continue $\mathrm{L}^r_\alpha : \mathrm{C}^r_0(\mathbf{T}^n) \to \mathrm{C}^r_0(\mathbf{T}^n)$ définie par $\mathrm{L}^r_\alpha(\psi) = \psi - \psi \circ \mathrm{R}_\alpha$. Etant donné $\varphi \in \mathrm{C}^r_0(\mathbf{T}^n)$, on cherche à résoudre en ψ l'équation $\psi - \psi \circ \mathrm{R}_\alpha = \varphi$.

Remarque **(4.2)**. — Pour tout $0 \leq r \leq \omega$, r entier, $\mathrm{Im}\,\mathrm{L}^r_\alpha$ est dense dans $\mathrm{C}^r_0(\mathbf{T}^n)$ pour la C^r-topologie (si r est non entier prendre la $\mathrm{C}^{r-\varepsilon}$-topologie) puisqu'il contient les polynômes trigonométriques d'intégrale nulle.

Proposition **(4.3)**. — *Soient* $0 \leq r \leq +\infty$, *r entier, et* α *tel que* R_α *soit une translation ergodique sur* $\mathbf{T}^n$. *L'ensemble des* $\varphi \in \mathrm{C}^r_0(\mathbf{T}^n)$ *tels que :*

$$\operatorname*{Inf}_{k \geq 1} \Big(\Big| \sum_{i=0}^{k-1} \varphi \circ \mathrm{R}_{i\alpha} \Big|_{\mathrm{C}^r} \Big) = 0$$

est un G_δ *dense dans* $\mathrm{C}^r_0(\mathbf{T}^n)$ *pour la* C^r*-topologie.*

Démonstration. — Par un argument de semi-continuité supérieure appliqué à :

$$\varphi \mapsto \operatorname*{Inf}_{n \geq 1} \Big(\Big| \sum_{i=0}^{k-1} \varphi \circ \mathrm{R}_{i\alpha} \Big|_{\mathrm{C}^r} \Big) = \mathrm{K}'_r(\varphi),$$

$G = (K'_r)^{-1}(0)$ est un G_δ dans $C_0^r(\mathbf{T}^n)$. L'ensemble G est dense dans $C_0^r(\mathbf{T}^n)$ puisqu'il contient les polynômes trigonométriques d'intégrale nulle : si $\varphi = \varphi_1 - \varphi_1 \circ R_\alpha$ avec $\varphi_1 \in C^r(\mathbf{T}^n)$, alors $\sum_{i=0}^{k-1} \varphi \circ R_{i\alpha} = \varphi_1 - \varphi_1 \circ R_{k\alpha}$ et il suffit de choisir une suite d'entiers $k_i \to +\infty$ telle que pour $i \to +\infty$, on ait $k_i \to 0 \pmod{\mathbf{Z}^n}$. On a alors :

$$|\varphi_1 - \varphi_1 \circ R_{k_i\alpha}|_{C^r} \to 0 \quad \text{si} \quad i \to +\infty. \ \blacksquare$$

Proposition (4.4). — *L'application* $L_\alpha^\infty : C_0^\infty(\mathbf{T}^n) \to C_0^\infty(\mathbf{T}^n)$ *est surjective si et seulement si* α *satisfait à une condition diophantienne. (Dans ce cas* L_α^∞ *est un isomorphisme.)*

Démonstration. — Si L_α^∞ est surjective, alors R_α est une translation ergodique de $\mathbf{T}^n$ et alors L_α^∞ est injective. Si on écrit les séries de Fourier de φ et ψ, on a formellement $\psi \sim T * \varphi$ avec :

$$T \sim \sum_{k \in \mathbf{Z}^n - \{0\}} \frac{1}{1 - e^{2\pi i \langle k, \alpha \rangle}} e^{2\pi i \langle k, x \rangle}.$$

L'application L_α^∞ est bijective (et donc est un isomorphisme d'espace vectoriel topologique par le théorème du graphe fermé) si et seulement si T est une distribution : il existe un nombre $p > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbf{Z}^n - \{0\}$ on ait :

$$\left| \frac{1}{1 - e^{2\pi i \langle k, \alpha \rangle}} \right| \leq (|k| + 1)^p$$

avec $|k| = \Sigma |k_i|$, si $k = (k_1, \ldots, k_n)$. Ceci est une autre façon d'écrire que $\alpha \in \mathbf{T}^n$ satisfait à une condition diophantienne (voir V.3). $\blacksquare$

(4.5) Soit $\alpha \in \mathbf{T}^n$ tel que R_α soit une translation ergodique de $\mathbf{T}^n$. On suppose qu'il existe $\beta > 0$ tel que l'inéquation :

$$(*) \qquad \| \langle k_i, \alpha \rangle \| < \frac{1}{|k_i|^\beta}$$

ait une infinité de solutions $k_i \in \mathbf{Z}^n - \{0\}$, $|k_i| \geq 2$ (voir V.2 et 3).

Proposition. — *Soit* $0 \leq r < +\infty$, *entier ou non. Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$, $\operatorname{Im} L_\alpha^{r+\varepsilon-\beta} \cap C_0^r(\mathbf{T}^n)$ *est maigre dans* $C_0^r(\mathbf{T}^n)$ *pour la* C^r*-topologie (si* $r + \varepsilon - \beta \leq 0$, *lire* 0).

Démonstration. — D'après IV.6.7, $\varphi \in \operatorname{Im} L_\alpha^{r-\beta+\varepsilon}$ si et seulement si

$$\sup_{i \in \mathbf{N}} \left| \sum_{i=0}^{k} \varphi \circ R_{i\alpha} \right|_{C^r} < +\infty.$$

Par un argument de semi-continuité, $\operatorname{Im} L_\alpha^{r-\beta+\varepsilon} \cap C_0^r(\mathbf{T}^n)$ est un F_σ dans $C_0^r(\mathbf{T}^n)$ pour la C^r-topologie. Par la structure d'e.v.t. de $C_0^r(\mathbf{T}^n)$, si $\operatorname{Im} L_\alpha^{r-\beta+\varepsilon} \cap C_0^r(\mathbf{T}^n) \neq C_0^r(\mathbf{T}^n)$, alors $\operatorname{Im} L_\alpha^{r-\beta+\varepsilon} \cap C_0^r(\mathbf{T}^n)$ est maigre dans $C_0^r(\mathbf{T}^n)$. Il suffit donc de construire un $\varphi \in C_0^r(\mathbf{T}^n)$ avec $\varphi \notin \operatorname{Im} L_\alpha^{r-\beta+\varepsilon}$. A l'aide de séries de Fourier lacunaires, on construit, pour tout $\varepsilon > 0$, un $\varphi \in C_0^r(\mathbf{T}^n)$ tel que si $|k_i| \to +\infty$, $|\hat{\varphi}(k_i)|$ ne soit pas $O\left(\frac{1}{|k_i|^{r+\varepsilon}}\right)$. Alors, en utilisant les séries de Fourier de φ et ψ, par $(*)$, $\varphi \notin \operatorname{Im} L_\alpha^{r-\beta+\varepsilon}$. ■

Remarque. — Ceci montre que A.8 est (en un certain sens) le meilleur théorème possible.

(4.6) Rappelons (voir V.3) que $\alpha \in \mathbf{R}^n$ est de type constant si

$$\operatorname*{Inf}_{|k| \neq 0} |k|^n \|\langle k, \alpha \rangle\| > 0.$$

Il est à noter que si $\varphi \in C_0^n(\mathbf{T}^n)$ (et même si

$$\varphi \in H_0^n(\mathbf{T}^n) = \{ \sum_{|k| \neq 0} a_k e^{2\pi i \langle k, x \rangle} \mid \Sigma |k|^{2n} |a_k|^2 < +\infty \})$$

alors il existe $\psi \in L^2(\mathbf{T}^n, dx)$ tel que l'on ait m-presque partout $\psi - \psi \circ R_\alpha = \varphi$. La proposition suivante est de Y. Meyer.

Proposition. — Pour tout $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, *il existe* $\varphi \in C_0^1(\mathbf{T}^1)$ *tel qu'il n'existe pas de* $\psi \in C_0^0(\mathbf{T}^1)$ *vérifiant* $\psi - \psi \circ R_\alpha = \varphi$.

Démonstration (Y. Meyer). — On a nécessairement $\psi \sim \mu * D\varphi$ avec

$$\mu = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k(1 - e^{2\pi i k \alpha})} e^{2\pi i k x}.$$

Tout revient à voir que μ n'est pas une mesure (de $\mathbf{T}^1$). Si α n'est pas de type constant, alors $\sup_{n \in \mathbf{N}} |\hat{\mu}(n)| = +\infty$, donc μ n'est pas une mesure. Le problème se pose donc si α est de type constant, ce que nous allons supposer.

Lemme. — Soient q_k *les dénominateurs des réduites de* α *de type constant. Si* μ *est une mesure, alors il existe une suite d'entiers* $k_j \to +\infty$ *avec* $j \to +\infty$ *et* $c \in \mathbf{C} - \{0\}$ *telle que, si* $j \to +\infty$, $(e^{2\pi i q_{k_j} x})\mu$ *converge vaguement (ou faiblement) vers* $c\,dx$.

Démonstration. — Rappelons que pour voir qu'une suite bornée de mesures μ_n converge vaguement vers une mesure λ, il suffit de tester sur un ensemble total de fonctions continues de $\mathbf{T}^1$. Nous choisissons comme ensemble total $(e^{2\pi i k x})_{k \in \mathbf{Z}}$. Il suffit donc de vérifier que, si $p \in \mathbf{Z}$ est fixé, et si $n \to +\infty$, alors $\hat{\mu}_n(p) \to \hat{\lambda}(p)$. Puisque α est de type constant, il y a, pour $j \to +\infty$, une suite k_j telle que $k_j \to +\infty$ et $\hat{\mu}(-q_{k_j}) \to c \neq 0$. Alors, si $j \to +\infty$, $\mu_j = e^{2\pi i q_{k_j} x} \mu \to c\,dx$. En effet :

$$\hat{\mu}_j(p) = \begin{cases} (2\pi i(p - q_{k_j})\,(\exp(2\pi i(p - q_{k_j})\alpha) - 1)^{-1} & \text{si} \quad p \neq q_{k_j} \\ 0 & \text{si} \quad p = q_{k_j}. \end{cases}$$

Or, pour $p \in \mathbf{Z} - \{0\}$ fixé, si $j \to +\infty$ on a :

$$\hat{\mu}_j(p) \to 0 \qquad (\text{car } e^{-2\pi i q_{k_j} \alpha} \to 1)$$

et $\qquad \hat{\mu}_j(0) \to c.$ ■

La proposition de Y. Meyer résulte par l'absurde du lemme et de la proposition suivante dont on trouvera une démonstration dans Rudin [1, (3.5), p. 66] :

Proposition. — *Soient n_k une suite d'entiers telle que, si $k \to +\infty$, $n_k \to +\infty$, et μ une mesure de $\mathbf{T}^1$. Si $k \to +\infty$, et si $(e^{2\pi i n_k x})\,\mu$ converge vaguement vers une mesure λ, alors λ est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue.*

(4.7) Rappelons que $\alpha \in \mathbf{R}$ est de Liouville si R_α est sur $\mathbf{T}^n$ une translation ergodique et si pour tout entier j, il existe $k_j \in \mathbf{Z}^n - \{0\}$, $|k_j| \geq 2$, tel que :

$$(*) \qquad \|\langle k_j, \alpha\rangle\| \leq \frac{1}{|k_j|^j}.$$

(Voir V.5.)

Proposition. — *Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}^n$ de Liouville,* $\operatorname{Im} L^0_\alpha \cap C^\infty_0(\mathbf{T}^n)$ *est maigre dans* $C^\infty_0(\mathbf{T}^n)$ *pour la* C^∞*-topologie.*

Démonstration. — Par le même argument qu'en (4.5), il suffit de construire un $\varphi \in C^\infty_0(\mathbf{T}^n)$ tel qu'il n'existe pas de $\psi \in C^0_0(\mathbf{T}^1)$ vérifiant $\psi - \psi \circ R_\alpha = \varphi$. Soit :

$$\varphi = \sum_{j \in \mathbf{N}} \left((1 - e^{2\pi i \langle k_j, \alpha\rangle}) e^{2\pi i \langle k_j, x\rangle} + (1 - e^{-2\pi i \langle k_j, \alpha\rangle}) e^{-2\pi i \langle k_j, x\rangle}\right),$$

où $(k_j)_{j \in \mathbf{N}}$ est la suite définie en $(*)$. Par $(*)$, $\varphi \in C^\infty_0(\mathbf{T}^n, \mathbf{R})$. Soit $\psi \sim \sum_{j \in \mathbf{N}} (e^{2\pi i \langle k_j, x\rangle} + e^{-2\pi i \langle k_j, x\rangle})$; ψ est une distribution et on a, au sens des distributions, $\psi - \psi \circ R_\alpha = \varphi$. Évidemment, ψ n'est pas dans $L^1(\mathbf{T}^n, dx)$; or s'il existait $\psi_1 \in L^1(\mathbf{T}^n, dx)$ vérifiant m-presque partout $\psi_1 - \psi_1 \circ R_\alpha = \varphi$, ψ_1 aurait les mêmes coefficients de Fourier que ψ; un tel ψ_1 dans L^1 ne peut donc pas exister. ■

Remarque. — Soit $m = dx$ la mesure de Lebesgue, et soit $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$. Si ψ est une solution m-mesurable de l'équation :

$$\psi - \psi \circ R_\alpha = \varphi \ m\text{-presque partout},$$

avec φ dans $L^1(\mathbf{T}^1, dx)$, on a nécessairement $\int_0^1 \varphi(x)\,dx = 0$ (Anosov [1]).

Il se peut que $\varphi \in C^\omega(\mathbf{T}^1)$ vérifie $\int_0^1 \varphi(x)\,dx = 0$, ainsi que

$$\sup_k \frac{\hat{\varphi}(k)}{1 - e^{2\pi i k \alpha}} = +\infty,$$

que α soit un nombre super de Liouville ($\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$), mais que l'équation $\psi - \psi \circ R_\alpha = \varphi$ ait une solution ψ m-mesurable! (Pour de tels exemples, voir Anosov [1].)

On peut montrer (voir Jones et Parry [1] ou Herman [7]) que pour tout nombre de Liouville $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ il existe $\varphi \in C^\infty_0(\mathbf{T}^1)$ tel que l'équation $\psi - \psi \circ R_\alpha = \varphi$ n'ait pas de solution m-mesurable ψ.

(4.8) Soient $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, et (q_n) les dénominateurs de réduites $\dfrac{p_n}{q_n}$ de α. La proposition suivante précise la proposition (4.3).

Proposition. — *Si* $\varphi \in C_0^0(\mathbf{T}^1)$ *est absolument continue, on a* $\lim_{n\to+\infty} |\sum_{i=0}^{q_n-1} \varphi \circ R_{i\alpha}|_0 = 0$.

Démonstration. — Soit :

$$BV_0(\mathbf{T}^1) = \{\varphi \in C_0^0(\mathbf{T}^1) \mid \varphi \text{ sur } [0, 1] \text{ est à variation bornée}\};$$

la variation totale de φ sur $[0, 1]$ est notée $\mathrm{Var}(\varphi)$. Pour la norme $|\varphi|_V = |\varphi|_0 + \mathrm{Var}(\varphi)$, $BV_0(\mathbf{T}^1)$ est une algèbre de Banach et sa topologie s'appelle topologie de la variation.

Soit $\theta : BV_0(\mathbf{T}^1) \to \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$:

$$\varphi \to (|\sum_{i=0}^{q_n-1} \varphi \circ R_{i\alpha}|_0)_{n\in\mathbf{N}}.$$

D'après l'inégalité de Koksma, VI.3, on a :

$$\mathrm{Im}\,\theta \subset \ell^\infty(\mathbf{N}) = \{(x_i) \in \mathbf{R}^n \mid |x|_{\ell^\infty} = \sup_i |x_i| < +\infty\}.$$

On montre facilement en utilisant l'inégalité de Koksma que pour tous f et $g \in BV_0(\mathbf{T}^1)$ on a :

$$|\theta(f) - \theta(g)|_{\ell^\infty} \leq \mathrm{Var}(f-g);$$

θ est donc continue.

Soit $c_0 = \{(x_i) \in \ell^\infty(\mathbf{N}) \mid \lim_{i\to+\infty} x_i = 0\}$; c_0 est fermé dans son bidual $\ell^\infty(\mathbf{N})$; $\theta^{-1}(c_0)$ est donc fermé dans $BV_0(\mathbf{T}^1)$ pour la topologie de la variation (topologie définie par la norme $|\ |_V$). Si φ est un polynôme trigonométrique dans $C_0^0(\mathbf{T}^1)$, on a $\theta(\varphi) \in c_0$. Or l'adhérence de l'ensemble des polynômes trigonométriques dans $BV_0(\mathbf{T}^1)$ est le sous-espace des $\varphi \in BV_0(\mathbf{T}^1)$ qui sont absolument continues. Il en résulte que, si $\varphi \in C_0^0(\mathbf{T}^1)$ est absolument continue, $\theta(\varphi) \in c_0$. ■

Remarque **(4.9)**. — Soient $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{T}^1)$, $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$; par (4.8), on conclut que, si $n \to +\infty$, $\sum_{i=0}^{q_n-1} \varphi \circ R_{i\alpha} \to 0$ dans la C^∞-topologie.

(4.10) Nous avons vu en VIII.1 comment majorer les sommes $\varphi_{n,\alpha} = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ R_{i\alpha}$ si $\varphi : \mathbf{T}^1 \to \mathbf{R}$ est une fonction à variation bornée $\left(\int_{\mathbf{T}^1} \varphi(x)\,dx = 0\right)$, en fonction de n et de l'arithmétique; sur $\mathbf{T}^1$ cette majoration est génériquement « mauvaise ».

On se donne $\varphi \in C^\omega(\mathbf{T}^1)$, telle que $\int_{\mathbf{T}^1} \varphi(x)\,dx = 0$ et que ses coefficients de Fourier vérifient $\hat{\varphi}(k) \neq 0$, pour $k \in \mathbf{Z} - \{0\}$.

Noter que ceci implique, pour $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, qu'on a $\lim_{n\geq 1} \frac{|\varphi_{n,p/q}|_0}{n} > 0$; et aussi que la suite de fonctions $|\varphi_{n,p/q}|$ converge m-presque partout vers $+\infty$, si $n \to +\infty$.

On se donne $\lambda : \mathbf{N} \to \mathbf{R}_+^*$ croissante telle que $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\lambda(n)} = +\infty$.

Proposition. — *Il existe un* G_δ *dense,* G, *dans* $\mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, *tel que si* $\alpha \in G$, *on ait* $\eta(\alpha) = \sup_{n\geq 1} (|\varphi_{n,\alpha}|_0/\lambda(n)) = +\infty$.

Démonstration. — $\eta : \mathbf{T}^1 \to \overline{\mathbf{R}}$ est semi-continue inférieurement, donc $G_1 = \eta^{-1}(+\infty)$ est un G_δ de $\mathbf{T}^1$, dense dans $\mathbf{T}^1$ puisque $\mathbf{Q}/\mathbf{Z} \subset G_1$. Il suit que $G = G_1 \cap (\mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z}))$ est un G_δ dense. ∎

(4.11) On se donne φ comme en (4.10).

Proposition. — *Pour un ensemble résiduel de* $\alpha \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, *l'équation* $\psi - \psi \circ R_\alpha = \varphi$ (*égalité m-presque partout*) *n'a pas de solution m-mesurable* $\psi : \mathbf{T}^1 \to \mathbf{R}$.

Commençons par remarquer que, si ψ et α vérifient l'équation, on a, m-presque partout, $\psi - \psi \circ R_{(n+1)\alpha} = \varphi_{n,\alpha}$.

Lemme. — *Si* $\psi : \mathbf{T}^1 \to \mathbf{R}$ *est mesurable, alors la suite de fonctions* $(|\psi - \psi \circ R_{n\alpha}|)_{n \in \mathbf{N}}$ *est telle que si* $(n_i)_{i \in \mathbf{N}}$ *est une suite d'entiers, alors, si* $i \to +\infty$, $|\varphi_{n_i,\alpha}|$ *ne peut converger m-presque partout vers* $+\infty$.

Démonstration. — Puisque ψ est m-mesurable, on a :

$$\lim_{A \to +\infty} m\{x \in \mathbf{T}^1 \mid |\psi(x)| > A\} = 0.$$

Or, pour tout n fixé, on a :

$$\begin{aligned} m\{x \in \mathbf{T}^1 \mid |\psi(x) - \psi \circ R_{n\alpha}(x)| > A\} &\leq m\left\{x \in \mathbf{T}^1 \,\middle|\, |\psi(x)| \text{ ou } |\psi \circ R_{n\alpha}(x)| \geq \frac{A}{2}\right\} \\ &\leq 2m\left\{x \in \mathbf{T}^1 \,\middle|\, |\psi(x)| \geq \frac{A}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Il en résulte que la suite de fonctions $(|\psi - \psi \circ R_{n\alpha}|)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite bornée en m-mesure, donc aucune sous-suite ne peut converger m-presque partout vers $+\infty$ (voir Halmos [1]). ∎

Remarque. — Il suit du lemme précédent et du théorème ergodique que si $\psi - \psi \circ R_\alpha = \varphi$ avec $\psi : \mathbf{T}^1 \to \mathbf{R}$ m-mesurable et $\varphi \in L^1(\mathbf{T}^1, m)$, alors $\int_{\mathbf{T}^1} \varphi(x)\,dx = 0$.

Démonstration de (4.11). — Considérons la fonction semi-continue supérieurement $M : \mathbf{T}^1 \to \mathbf{R}_+$ définie par :

$$M(\alpha) = \inf_{n \geq 1} \int_{\mathbf{T}^1} \frac{1}{1 + |\varphi_{n,\alpha}(x)|}\,dx.$$

Soit $G = M^{-1}(0)$ qui est un G_δ de $\mathbf{T}^1$, dense dans $\mathbf{T}^1$ puisque $\mathbf{Q}/\mathbf{Z} \subset G$. Or, si α est tel que $M(\alpha) = 0$, il existe une sous-suite $(n_i)_{i \in \mathbf{N}}$ d'entiers, vérifiant $n_i \to +\infty$ pour $i + \infty$, et telle que, si $i \to +\infty$, la suite de fonctions $|\varphi_{n_i,\alpha}|$ converge m-presque partout vers $+\infty$. Par le lemme, si $\alpha \in G$, l'équation $\psi - \psi \circ R_\alpha = \varphi$ n'a pas de solution m-mesurable ψ. L'ensemble considéré est bien résiduel puisqu'il contient le G_δ, dense dans $\mathbf{T}^1$, $G \cap (\mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z}))$. ∎

5. Groupe produit gauche et perte de différentiabilité.

(5.1) *Remarque en guise d'introduction.*

(1) Soit $f(x_1, x_2)=(x_1+\varphi(x_2)+\alpha_1, x_2+\alpha_2)$, avec $\alpha_1 \in \mathbf{R}$, $\alpha_2 \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$ et $\varphi \in C_0^0(\mathbf{T}^1)$. On suppose qu'il existe $\psi \in C^0(\mathbf{T}^1)$ vérifiant $\psi - \psi \circ R_\alpha = \varphi$; soit alors :

$$g(x_1, x_2)=(x_1+\psi(x_2), x_2).$$

On a :

$$f=g^{-1}\circ R_\alpha \circ g$$

avec $R_\alpha(x, x_2)=(x_1+\alpha_1, x_2+\alpha_2)$.

On peut dire que pour les f de la forme (1), le problème de conjuguer f à une translation se ramène à l'étude de l'application linéaire (en une variable de moins) :

$$\psi \mapsto \psi - \psi \circ R_{\alpha_2} = L_{\alpha_2}(\psi).$$

On peut ainsi interpréter « géométriquement » les résultats sur l'application

$$\psi \in C_0^0(\mathbf{T}^1) \mapsto \psi - \psi \circ R_{\alpha_2} \in C_0^0(\mathbf{T}^1)$$

en construisant un difféomorphisme de $\mathbf{T}^2$ de la forme (1).

Anzaï [1] a appelé les difféomorphismes de la forme (1) des « skew products » (ou produits gauches). Fürstenberg [1] étudie de tels produits gauches, en général non homotopes à l'identité. Nous nous proposons d'en donner rapidement quelques propriétés.

Définition d'un produit gauche (ou extension).

Soient X, Y deux ensembles et G un groupe de permutations de X. Soit $f: Y \to Y$ donné. Un produit gauche au-dessus de f est une transformation :

$$F: X\times Y \to X \times Y, \qquad F(x,y)=(g_y(x), f(y))$$

où $y \in Y \to g_y \in G$ est une application.

Noter que si $p: X\times Y \to Y$ est la seconde projection, $p\circ F = f\circ p$, et que si f est bijective, F l'est aussi.

On se placera dans le cas où $Y=\mathbf{T}^{n-1}$, $X=\mathbf{T}^1$ et $G=\mathbf{T}^1$ agissent sur $\mathbf{T}^1$ par translation : $y\in \mathbf{T}^{n-1} \mapsto (\theta \to g_y(\theta)=\theta+\varphi(y) \pmod 1)$, avec $\varphi \in C^r(\mathbf{T}^{n-1})$. En fait, il est plus commode de travailler dans $\mathbf{R}^n$, le revêtement universel de $\mathbf{T}^n$.

(5.2) *Définition de* $SW^r(\mathbf{T}^n) \subset D_m^r(\mathbf{T}^n)$.

On pose $SW^r(\mathbf{T}^1)=\{R_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$ et $F\in SW^r(\mathbf{T}^n)$ si $F(x,y)=(x+\varphi(y), f(y))$ avec $f \in SW^r(\mathbf{T}^{n-1})$ et $\varphi \in C^r(\mathbf{T}^{n-1})$. Il suit que $f\in SW^r(\mathbf{T}^n)$ si

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=(x_1+\varphi_1(x_2, \ldots, x_n), x_2+\varphi_2(x_3, \ldots, x_n), \ldots, x_n+\alpha_n)$$

avec, pour $1\leq i \leq n$, $\varphi_i \in C^r(\mathbf{T}^{n-i})$ (et $\alpha_n \in \mathbf{R}$).

$SW^r(\mathbf{T}^n)$ *est alors un sous-groupe fermé de* $D_m^r(\mathbf{T}^n)$. Remarquons que $SW^r(\mathbf{T}^n)$ est contractile dans la C^r-topologie.

(5.3) Rappelons que, si $0 \leq r < +\infty$ et $f \in \mathrm{SW}^r(\mathbf{T}^n)$, on pose :

$$\mathrm{H}'_r(f) = \sup_{k \in \mathbf{N}} |f^k - \mathrm{Id} - k\rho_m(f)|_{\mathrm{C}^r} \in \overline{\mathbf{R}};$$

si $f \in \mathrm{SW}^r(\mathbf{T}^n)$ et $\rho_m(f) = \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^n$, on pose :

$$p(\alpha) = (\alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^{n-1}.$$

Proposition. — *Soient* $0 \leq r \leq +\infty$ *et* $f \in \mathrm{SW}^r(\mathbf{T}^n)$, *telle que* $\mathrm{R}_{p(\alpha)}$ *soit une translation ergodique sur* $\mathbf{T}^{n-1}$. *Alors une condition nécessaire et suffisante pour que f soit conjugué dans* $\mathrm{SW}^r(\mathbf{T}^n)$ *à* R_α *est que si* $0 \leq r < +\infty$, $\mathrm{H}'_r(f) < +\infty$, *et si* $r = +\infty$, $\mathrm{H}'_k(f) < +\infty$ *pour tout k fini.*

Démonstration. — Par (1.5) et (3.4.1) la condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. On le démontre par *récurrence sur n.* Pour $n = 1$, $\mathrm{SW}^r(\mathbf{T}^1) \cong \mathbf{R}$ et c'est trivial. Supposons la proposition démontrée pour $n-1$. Montrons qu'elle est vraie pour n. L'application f induit sur $\mathbf{R}^{n-1}$ un difféomorphisme $f_1 \in \mathrm{SW}^r(\mathbf{T}^{n-1})$ $(\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1})$, et il existe par récurrence $h_1 \in \mathrm{SW}^r(\mathbf{T}^{n-1})$ tel que $h_1 \circ f_1 \circ h_1^{-1} = \mathrm{R}_{p(\alpha)}$; soit $h \in \mathrm{SW}^r(\mathbf{T}^n)$ défini par $h = \mathrm{Id} \times h_1$; on a :

$$h \circ f \circ h^{-1} = (x_1 + \varphi_1(x_2, \ldots, x_n), x_2 + \alpha_2, \ldots, x_n + \alpha_n).$$

On a de plus $\mathrm{H}'_r(h \circ f \circ h^{-1}) < +\infty$, si $0 \leq r < +\infty$ (et pour tout r fini, si $r = +\infty$). Or :

$$\mathrm{H}'_r(h \circ f \circ h^{-1}) = \sup_k |\sum_{i=0}^{k} \varphi_1 \circ \mathrm{R}_{ip(\alpha)} - k\alpha_1|_{\mathrm{C}^r} < +\infty$$

avec $\alpha_1 = \int_{\mathbf{T}^{n-1}} \varphi(x_2, \ldots, x_n) dx_2 \otimes \ldots \otimes dx_n$. Par IV.4.1, il existe $\psi \in \mathrm{C}_0^r(\mathbf{T}^{n-1})$ tel que

$$\psi - \psi \circ \mathrm{R}_{p(\alpha)} = \varphi_1 - \alpha_1.$$

Soit $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ définie par

$$g(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + \psi(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n).$$

On a $g \in \mathrm{SW}^r(\mathbf{T}^n)$ et $g \circ h \circ f \circ h^{-1} \circ g^{-1} = \mathrm{R}_\alpha$, donc $g \circ h \in \mathrm{SW}^r(\mathbf{T}^n)$. La proposition en résulte par récurrence. ∎

Remarque. — Il est équivalent de dire que f est conjugué à R_α dans $\mathrm{SW}^r(\mathbf{T}^n)$ ou dans $\mathrm{D}^r(\mathbf{T}^n)$ (par (5.3), (1.5) et (3.4.1)).

Proposition **(5.4.1)**. — *Soit* $\alpha \in \mathbf{R}^n$ *tel que* $p(\alpha)$ *satisfasse à une condition diophantienne. Il existe deux entiers* $r_1 > r_2$, *ayant la propriété suivante : si* $f \in \mathrm{SW}^r(\mathbf{T}^n)$ *avec* $r_1 \leq r \leq \omega$ *et si* $\rho_m(f) = \alpha$, *f est* C^{r-r_2}*-conjugué à* R_α *dans* $\mathrm{SW}^{r-r_2}(\mathbf{T}^n)$ (*où* $r - r_2 = \infty, \omega$ *si* $r = \infty, \omega$).

Démonstration. — Identique à celle de (5.3) en utilisant A.8. ∎

Proposition **(5.4.2)**. — *L'adhérence dans la* C^∞*-topologie de l'ensemble des* $f \in \mathrm{SW}^\infty(\mathbf{T}^n)$ *qui sont* C^∞*-conjugués à une translation est* $\mathrm{SW}^\infty(\mathbf{T}^n)$.

Démonstration. — Cela résulte immédiatement de (5.4.1) et du fait que l'ensemble des $\alpha \in \mathbf{R}^n$ satisfaisant à une condition diophantienne est dense puisque de mesure de Lebesgue pleine. ■

Remarque **(5.5)**. — Une application de (4.5) laisserait supposer que r_2 est pour presque tout $p(\alpha) \in \mathbf{R}^{n-1}$ de l'ordre de $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Ce qui est bien supérieur à la perte de différentiabilité donnée par A.2, qui donne pour presque tout $p(\alpha)$ une perte de $n+\varepsilon$!

(5.6) *Perte de différentiabilité.*

La proposition suivante montre qu'on a pour $\mathbf{T}^n$, $n \geq 2$, des exemples analogues à ceux que nous avons donnés pour $\mathbf{T}^1$ en XI.4.1. En fait *ces exemples sont presque triviaux* (ce qui n'est pas tout à fait le cas pour $\mathbf{T}^1$). Ils donnent à une unité de moins la perte de différentiabilité escomptée par A.2.

Proposition **(5.6.1)**. — *Soit* $\alpha \in \mathbf{R}^n$ *tel que* R_α *soit sur* $\mathbf{T}^n$ *une translation ergodique; pour* $n \geq 2$ *et* $0 \leq r < +\infty$, *il existe* $f \in SW^r(\mathbf{T}^n)$ *vérifiant* $\rho_m(f) = \alpha$ *et non* $C^{r-n+1+\varepsilon}$*-conjugué à* R_α *dans* $D^{r-n+2}(\mathbf{T}^n)$ (*si* $r-n+1+\varepsilon \leq 0$, *lire* C^0). *De plus, il existe un tel* f *dans tout* C^r*-voisinage de* R_α.

Démonstration. — Soient

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

et
$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + \alpha_1 + \varphi_1(x_2, \ldots, x_2), x_2 + \alpha_2, \ldots, x_n + \alpha_n);$$

on a, pour $p = n - 1 - \varepsilon$:

$$H'_{r-p}(f) = \sup_k \Big| \sum_{i=0}^{k} \varphi_1 \circ R_{ip(\alpha)} \Big|_{C^{r-p}}.$$

On choisit φ_1 comme en (4.5) (*i.e.* $\varphi_1 \notin \operatorname{Im} L_{p(\alpha)}^{r-p} \cap C_0^r(\mathbf{T}^{n-1})$ et on conclut par la proposition de (5.3) et la remarque qui suit. ■

Proposition **(5.6.2)**. — *Soit* $\alpha \in \mathbf{R}^n$ *tel que* $p(\alpha) \in \mathbf{R}^{n-1}$ *soit de Liouville. Pour tout* $n \geq 2$ *et tout* C^∞*-voisinage* $\mathcal{O}$ *de* R_α *dans* $SW^\infty(\mathbf{T}^n)$, *il existe* $f \in \mathcal{O}$ *vérifiant* $\rho_m(f) = \alpha$ *mais non* C^0*-conjuguée à* R_α *dans* $D^0(T^n)$.

Démonstration. — Utiliser l'invariant H'_0 dans un exemple analogue à celui de (5.6.1) en utilisant (4.7). ■

(5.7) *Minimalité.*

(5.7.1) Soit $f \in SW^r(\mathbf{T}^2)$ définie par $f(x_1, x_2) = (x_1 + \varphi(x_2), x_2 + \alpha)$, où $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, $\varphi \in C_0^r(\mathbf{T}^1)$ (*i.e.* $\int_{\mathbf{T}^1} \varphi \, dm = 0$). On suppose qu'il n'existe pas de $\psi \in C^0(\mathbf{T}^1)$ vérifiant $\psi - \psi \circ R_\alpha = \varphi$. Soit $\bar{f} : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{T}^2$ le difféomorphisme obtenu par passage au quotient.

Remarque (5.7.2). — Par (4.7), pour tout nombre de Liouville $\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$, il existe $f \in SW^\infty(\mathbf{T}^2)$ comme ci-dessus.

Proposition (5.7.3). — *$\bar{f}$ est un difféomorphisme de $\mathbf{T}^2$ minimal.*

Démonstration. — Par Gottschalk et Hedlund [1, (14.13)]. Le difféomorphisme de $\mathbf{R}\times\mathbf{T}^1$ défini par $(x_1, x_2)\mapsto(x_1+\varphi(x_2), x_2+\alpha)$ a un point de $\mathbf{R}\times\mathbf{T}^1$, d'orbite dense. Il suit qu'il existe un $x=(x_1, x_2)\in\mathbf{T}^2$ tel que $\{\bar{f}^n(x) \mid n\in\mathbf{Z}\}$ soit dense dans $\mathbf{T}^2$.

Supposons que $\bar{f}$ ne soit pas minimal; alors il existe un ensemble minimal compact non vide pour $\bar{f}$, $M\subset\mathbf{T}^2$, $M\neq\mathbf{T}^2$. Si $p:\mathbf{T}^2\to\mathbf{T}^1$ est définie par $p(x_1, x_2)=x_2$, alors $p(M)$ est invariant par R_α, donc $p(M)=\mathbf{T}^1$. Soit $y=(x_1, y_1)\in M$, tel que $p(x_1, x_2)=x_1$; comme $\bar{f}$ commute avec la translation $R_{(0,x_2-y_1)}$, $M_1=R_{(0,x_2-y_1)}(M)$ est un ensemble minimal pour $\bar{f}$, et $M_1\neq\mathbf{T}^2$; or $x\in M_1$, et $\{\bar{f}^n(x) \mid n\in\mathbf{Z}\}$ est dense dans $\mathbf{T}^2$; par l'absurde, il en résulte donc que $\bar{f}$ est minimal. ■

Remarque. — (5.7.3) résulte aussi de la formulation plus générale suivante (voir Fürstenberg [1] et Parry [1]) :

Soit f un homéomorphisme de l'espace métrique compact X *non vide qui est minimal* (resp. *uniquement ergodique ayant pour unique mesure de probabilité invariante* μ). *Soit* $\varphi: X\to\mathbf{T}^1$ *continue. Le produit gauche* $F:\mathbf{T}^1\times X\to\mathbf{T}^1\times X$ *défini par* $F(\theta, y)=(\theta+\varphi(y), f(y))$ *est minimal* (resp. *uniquement ergodique*) *si et seulement si, pour tout* $k\in\mathbf{Z}-\{0\}$, *l'équation* :

$$\psi\circ f(y)=e^{2i\pi k\varphi(y)}\psi(y) \quad (y\in X),$$

n'a pas de solution non nulle $\psi: X\to\mathbf{C}$ *qui soit continue* (resp. *μ-mesurable*).

Cette formulation implique que le C^ω-difféomorphisme $f:\mathbf{T}^2\to\mathbf{T}^2$, défini par $f(x_1, x_2)=(x_1+x_2, x_2+\alpha)$ avec $\alpha\in\mathbf{T}^1-(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, est strictement ergodique (avec pour unique mesure de probabilité invariante la mesure de Haar). Mais f n'est pas conjuguée à une translation puisque non homotope à l'identité.

Remarque (5.7.4). — Soit $f\in SW^\infty(\mathbf{T}^2)$ comme dans (5.7). Alors, par (5.3), $H'_0(f)=+\infty$, et par (4.9) $K_\infty(f)=0$. Donc, si $\widetilde{G}_f$ est l'adhérence de

$$Z_f=\{f^n+p \mid p \text{ et } n \text{ dans } \mathbf{Z}\}$$

dans $SW^\infty(\mathbf{T}^2)$ pour la C^∞-topologie, $\widetilde{G}_f$ a la puissance du continu par XII.3.2 et on a l'homomorphisme de groupes continu injectif :

$$0\to\widetilde{G}_f\xrightarrow{\rho_2}\mathbf{R} \quad \text{défini par} \quad \rho_2(x_1+\varphi(x_2), x_2+\alpha)=\alpha.$$

L'ensemble $\rho_2(\widetilde{G}_f)$ est de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbf{R}$, puisque $\rho_2(G_f)$ est contenu dans la réunion de l'ensemble des nombres de Liouville et de l'ensemble des nombres rationnels. Ainsi, dans $D^\infty(\mathbf{T}^n)$, $K_0(f)=0$ n'implique nullement que f soit C^0-conjugué à une translation, contrairement au cas de $\mathbf{T}^1$ (voir X.1.4).

6. Étude du voisinage $V^{2\theta}_{R_\alpha}$ de A.2.

Nous allons montrer que le voisinage $V^{2\theta}_{R_\alpha}$ du théorème A.2 de l'annexe ne peut être remplacé par un voisinage dans la C^1-topologie, pour $n=3$ (et aussi évidemment pour $n \geqslant 3$). Il suffit de le montrer pour la proposition (2.6) ci-dessus, qui est un corollaire de A.2. On rappelle que $\Omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, et que l'on a posé :

$$D_\Omega^\omega(\mathbf{T}^n) = \{f \in D^\omega(\mathbf{T}^n) \mid f^*\Omega = \Omega\}.$$

Proposition. — Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}^3$ *tel que* R_α *soit une translation ergodique sur* $\mathbf{T}^3$, *il existe une suite* (f_i) *d'éléments de* $D_\Omega^\omega(\mathbf{T}^3)$ *telle que, si* $i \to +\infty$, $f_i \to R_\alpha$ *dans la* C^1*-topologie, et telle que l'on ait :*

1) $\rho_m(f_i) = \alpha$ *pour tout* $i \in \mathbf{N}$;
2) *pour* i *assez grand* f_i *n'est pas* C^0*-conjuguée à* R_α.

Démonstration. — Nous allons construire une suite $(g_i)_{i \in \mathbf{N}} \subset X_\Omega^\omega(\mathbf{T}^n)$ de champs de vecteurs de divergence nulle convergeant vers le champ de vecteurs constant

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbf{R}^3$$

dans la C^1-topologie, et vérifiant

$$\rho_\Omega(g_i) = \int_{\mathbf{T}^3} g_i \, dm = \alpha.$$

Si $f_i(t) = \exp(tg_i)$ est le groupe à un paramètre engendré par g_i, on choisira g_i tel que pour tout i, il existe $x_i \in \mathbf{R}^n$ tel que $\dfrac{f_i^n(x_i) - x_i}{n}$ ne converge pas vers α si $n \to +\infty$ (de plus $f_i^n(x_1) - x_i = \dfrac{f_i(n, x_i) - x_i}{n}$, si $f_i(t, x)$ est le groupe à un paramètre $\exp(tg_i)$ engendré par g_i). On aura alors pour tout i, avec $f_i = \exp(g_i) \in D_\Omega^\omega(\mathbf{T}^3)$:

1) $\rho_m(f_i) = \alpha$ par (2.5);
2) f_i converge vers R_α dans la C^1-topologie, si $i \to +\infty$;
3) les f_i ne sont pas C^0-conjugués à R_α (par (1.5)).

Construction des g_i.

Soient :

$q = (q_1, q_2, q_3) \in (\mathbf{Z} - \{0\})^3$, $\quad q' = (q_1', q_2', 0) \in (\mathbf{Z} - \{0\})^2 \times \{0\}$ $\quad$ et $\quad p = (q, q_1', q_2') \in \mathbf{Z}^5$;

on pose $\sin 2\pi\langle q, x\rangle = \sin 2\pi(q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3)$. Soit g le champ de vecteurs de $\mathbf{T}^3$ de composantes :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \dfrac{\beta(p)}{q_1}\sin 2\pi\langle q, x\rangle + \dfrac{\beta(p)}{q_1'}\sin 2\pi\langle q', x\rangle \\[2ex] \alpha_2 - 2\dfrac{\beta(p)}{q_2}\sin 2\pi\langle q, x\rangle - \dfrac{\beta(p)}{q_2'}\sin 2\pi\langle q', x\rangle \\[2ex] \alpha_3 + \dfrac{\beta(p)}{q_3}\sin 2\pi\langle q, x\rangle \end{cases}$$

avec $\beta(p) \in \mathbf{R} - \{0\}$; on a $g \in X_\Omega^\omega(\mathbf{T}^3)$ et $\rho_\Omega(g) = \alpha$.

Assertion. — Les *inéquations* :

$$|\langle q, \alpha\rangle| \leq |\beta(p)| \left|\frac{q_1}{q_1'} - \frac{q_2}{q_2'}\right|$$

$$|\langle q', \alpha\rangle| \leq |\beta(p)| \left|\frac{q_1'}{q_1} - \frac{2q_2'}{q_2}\right|$$

ont une infinité de solutions $p^i \in \mathbf{Z}^5$ $(p^i = (q^i, (q')^i)$ *dont toutes les composantes sont non nulles, et telles que* $|\beta(p^i)| \to 0$ *si* $i \to +\infty$.

De plus, si $i \to +\infty$, *les rapports* $\left|\frac{q_1^i}{q_2^i}\right|$, $\left|\frac{q_3^i}{q_1^i}\right|$, $\left|\frac{(q_1')^i}{(q_2')^i}\right|$ *sont uniformément majorés par* $k > 0$ *et minorés par* $\frac{1}{k}$, *indépendamment de* i.

Fin de la construction des g_i *en admettant l'assertion.*

On choisit les p^i, $(q')^i$ et $\beta(p^i)$ par l'assertion. Alors, si $i \to +\infty$, $g_i \to \alpha$ dans la C^1-topologie. Montrons que si $f_i = \exp(g_i)$, alors les f_i ne sont pas C^0-conjugués à R_α. Soit $f_i(t, x)$ le groupe à un paramètre engendré par g_i. On a :

$$f_i(t, x) = \exp(tg_i(x)), \quad \frac{\partial f_i}{\partial t}(t, x) = g_i(f_i(t, x)) \quad \text{et} \quad f_i(0, x) = x.$$

Il en résulte que

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle q^i, f_i\rangle(t, x) = \langle q^i, \alpha\rangle + \beta(p)\left(\frac{q_1^i}{(q_1')^i} - \frac{q_2^i}{(q_2')^i}\right)\sin 2\pi\langle (q')^i, f_i\rangle(t, x)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle (q')^i, f_i\rangle(t, x) = \langle (q')^i, \alpha\rangle + \beta(p)\left(\frac{(q_1')^i}{q_2^i} - \frac{2(q_2')^i}{q_1^i}\right)\sin 2\pi\langle q^i, f_i\rangle(t, x)$$

avec comme condition initiale :

$$\langle q^i, f_i\rangle(0, x) = \langle q^i, x\rangle$$
$$\langle (q')^i, f_i\rangle(0, x) = \langle (q')^i, x\rangle.$$

Par le choix de $\beta(p^i)$, il existe un $x_i \in \mathbf{R}^3$ tel que pour tout $t \in \mathbf{R}$:

$$\langle q^i, f_i(t, x_i)\rangle = \langle q^i, x_i\rangle = \text{Cte},$$

puisqu'il existe un x_i tel que :

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle q^i, f_i\rangle(0, x_i) = \frac{\partial}{\partial t}\langle (q^i)', f_i\rangle(0, x_i) = 0.$$

On a alors :

$$\left\langle q^i, \frac{f_i^n(x_i)}{n}\right\rangle \to 0, \quad \text{si} \quad n \to +\infty;$$

$\frac{f_i^n(x_i)}{n}$ ne tend pas vers α, si $i \to +\infty$, sinon on aurait $\langle q^i, \alpha\rangle = 0$, ce qui est contraire au fait que $(1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sont indépendants sur $\mathbf{Q}$. Comme c'est vrai pour tout i, la proposition en résulte. ■

Preuve de l'assertion.

Considérons les deux formes linéaires, définies (pour $x=(x_1, x_2, x_3)\in\mathbf{R}^3$) par :

$$L_1(x)=x_1\alpha_1-x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$$

et

$$L_2(x)=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2\,;$$

(L_1, L_2) est de rang 2.

D'après le théorème des formes linéaires de Minkowski (voir Cassels [1]) (ou autrement), il existe une infinité de $x\in\mathbf{Z}^3-\{0\}$ tels que :

$$\text{(I)} \qquad \sup_{i=1,2} |L_i(x)| \leq c\,|x|^{-1/2}$$

avec $|x|=\sup_i |x_i|$, et c étant une constante ne dépendant que de L_1 et L_2. On pose :

$$q=(x_1, -x_2, x_3), \qquad q'=(x_1, x_2),$$

et on choisit une suite de solutions de (I) telle que, si $i\to+\infty$, $|x^i|\to+\infty$. Pour i assez grand (le signe $\sim$ veut dire : approximativement) on a, pour $x^i=(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$, $q^i=(x_1^i, -x_2^i, x_3^i)$, $(q')^i=(x_1^i, x_2^i)$:

$$\alpha_1 x_1^i+\alpha_2 x_2^i\sim 0, \qquad \text{soit} \quad \left|\frac{x_1^i}{x_2^i}\right| = \left|\frac{q_1^i}{q_2^i}\right| = \left|\frac{(q_1')^i}{(q_2')^i}\right| \sim \left|\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right|$$

et

$$2\alpha_1 x_1^i+\alpha_3 x_3^i\sim 0, \qquad \text{soit} \quad \left|\frac{2x_1^i}{x_3^i}\right| = \left|\frac{2q_1^i}{q_3^i}\right| \sim \left|\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right|.$$

De plus :

$$\langle \alpha, q^i\rangle = L_1(x^i),$$

$$\langle \alpha, (q')^i\rangle = L_2(x^i),$$

$$\left|\frac{q_1^i}{(q_1')^i}-\frac{q_2^i}{(q_2')^i}\right|=2 \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{(q_1')^i}{q_1^i}-\frac{2(q_2')^i}{q_2^i}\right|=3.$$

Il suffit alors de choisir

$$|\beta(p^i)|=\frac{c}{2}|x^i|^{-1/2}.$$

On a bien, pour $i\to+\infty$, $|\beta(p^i)|\to 0$; par le choix des q^i et $(q')^i$ les conditions de l'assertion sont satisfaites. ■

7. Quelques propriétés génériques dans $\bar{\mathrm{O}}^\infty(\Omega)$.

(7.1) En désignant par Ω la forme différentielle $dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$, on a défini en (2.3) le groupe $D_\Omega^\infty(\mathbf{T}^n)$; c'est un sous-groupe fermé de $D^r(\mathbf{T}^n)$. On pose :

$$O_\alpha^\infty(\Omega)=\{g^{-1}\circ R_\alpha\circ g \mid g\in D_\Omega^\infty(\mathbf{T}^n)\}$$

$$O^\infty(\Omega)=\bigcup_{\alpha\in\mathbf{R}^n} O_\alpha^\infty(\Omega)$$

et on note $\bar{O}^\infty(\Omega)$ l'adhérence de $O^\infty(\Omega)$ dans $D^\infty_\Omega(\mathbf{T}^n)$ pour la C^∞-topologie. La C^∞-topologie sur $\bar{O}^\infty(\Omega)$ est par définition la C^∞-topologie induite.

Proposition **(7.2).** — *Si* $n \geq 2$, *il est générique* (*pour la* C^∞-*topologie*) *dans* $\bar{O}^\infty(\Omega)$ *de ne pas être* C^0-*conjugué à une translation dans* $D^0(\mathbf{T}^n)$.

Démonstration. — Soit H'_0 l'invariant défini en (3.4); $G = H_0'^{-1}(+\infty) \cap \bar{O}^\infty(\Omega)$ est un G_δ dans $\bar{O}^\infty(\Omega)$ par la semi-continuité inférieure de H'_0. Remarquons que, par (1.5), si f est C^0-conjugué à R_α dans $D^0(\mathbf{T}^n)$, on a $H'_0(f) < +\infty$.

Il nous reste donc à montrer que G est dense dans $O^\infty(\Omega)$ pour la C^∞-topologie, et la proposition sera démontrée. Soit L l'ensemble des $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^n$ tels que $p(\alpha) = (\alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^{n-1}$ soit de Liouville dans $\mathbf{R}^{n-1}$. Évidemment $\bigcup_{\alpha \in L} O^\infty(\Omega)$ est dense dans $O^\infty(\Omega)$ pour la C^∞-topologie. Or, pour tout $\alpha \in L$, il existe une suite (f_i) d'éléments de $SW^\infty(\mathbf{T}^n)$ telle que, si $i \to +\infty$, $f_i \to R_\alpha$ dans la C^∞-topologie et pour tout i :

$$H'_0(f_i) = +\infty \qquad (\text{voir } (5.6.2)).$$

D'après (5.4.2), $SW^\infty(\mathbf{T}^n) \subset \bar{O}^\infty(\Omega)$; par C^∞-conjugaison, on conclut que pour tout $f \in \bigcup_{\alpha \in L} O^\infty_\alpha(\Omega)$, il existe une suite (f_i) d'éléments de $\bar{O}^\infty(\Omega)$ convergeant vers f dans la C^∞-topologie lorsque $i \to +\infty$ et vérifiant, pour tout i, $H'_0(f_i) = +\infty$. On en déduit bien que G est un G_δ dense dans $\bar{O}^\infty(\Omega)$ pour la C^∞-topologie. ∎

Remarque **(7.3).** — Il n'est pas difficile de voir qu'il est vrai sur un G_δ dense de $\bar{O}^\infty(\Omega)$ (pour la C^∞-topologie) que f vérifie : $R_{\rho_m(f)}$ est sur $\mathbf{T}^n$ une translation ergodique.

Proposition **(7.4).** — *Si* $n \geq 2$, *il est vrai sur un* G_δ *dense de* $\bar{O}^\infty(\Omega)$ (*pour la* C^∞-*topologie*) *que* $\bar{f}$ *soit sur* $\mathbf{T}^n$ *strictement ergodique avec pour unique mesure de probabilité invariante la mesure de Haar m de* $\mathbf{T}^n$.

Remarque. — Par II.8, si $f \in \bar{O}^\infty(\Omega)$ est strictement ergodique, alors f est minimal.

Démonstration. — Soit $(\varphi_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une suite dénombrable dense dans $C^0_0(\mathbf{T}^n)$. Soit :

$$\bar{f} \mapsto E_i(\bar{f}) = \operatorname*{Inf}_{k \geq 1} \left| \frac{\sum_{j=0}^{k-1} \varphi_i \circ \bar{f}^j}{k} \right|_0 \in \mathbf{R}_+.$$

Pour tout i, E_i est semi-continue supérieurement; donc $E_i^{-1}(0)$ est un G_δ, ainsi que

$$G_i = E_i^{-1}(0) \cap \bar{O}^\infty(\Omega);$$

$G = \bigcap_i G_i$ est donc aussi un G_δ de $\bar{O}^\infty(\Omega)$ pour la C^∞-topologie. Si pour tout i, $E_i(\bar{f}) = 0$, alors on voit facilement que toute mesure de probabilité de $\mathbf{T}^n$ invariante par $\bar{f}$ est nulle sur $C^0_0(\mathbf{T}^n)$, donc coïncide avec la mesure de Haar de $\mathbf{T}^n$. Par II.8, G est donc précisément l'ensemble des $f \in \bar{O}^\infty(\Omega)$ qui sont uniquement ergodiques. Pour prouver (7.4), il suffit de montrer que G est dense dans $\bar{O}^\infty(\Omega)$. Or, si $f \in \bigcup_{\alpha \in TE} O^\infty_\alpha(\Omega) = O^\infty_{TE}(\Omega)$, où

TE désigne l'ensemble des $\alpha \in \mathbf{R}^n$ telles que R_α soit sur $\mathbf{T}^n$ une translation ergodique, f est alors strictement ergodique par conjugaison. Mais $O^\infty_{TE}(\Omega)$ est dense dans $\bar{O}^\infty(\Omega)$, donc G est un G_δ dense dans $\bar{O}^\infty(\Omega)$ pour la C^∞-topologie. ■

(7.5) En XII.3.1, nous avons défini $K_\infty : D^\infty(\mathbf{T}^n) \to \mathbf{R}_+$, semi-continue supérieurement, telle que si $K_\infty(f) = 0$, alors l'adhérence de $\widetilde{Z}_f = \{f^n + p \mid n \in \mathbf{Z}, p \in \mathbf{Z}\}$ dans $D^r(\mathbf{T}^n)$ pour la C^∞-topologie est un groupe abélien ayant la puissance du continu (voir II.2.12).

On a la proposition suivante, dont la démonstration est analogue aux précédentes.

Proposition. — $K_\infty^{-1}(0) \cap \bar{O}^\infty(\Omega)$ *est un* G_δ *dense dans* $\bar{O}^\infty(\Omega)$ *pour la* C^∞-*topologie.*

(7.2), (7.4), (7.5) montrent que la situation sur $\mathbf{T}^n$, $n \geq 2$ est radicalement différente du cas $n = 1$. La C^0-conjugaison à une translation n'est ni impliquée par la minimalité de f (*i.e.* (7.4)) ni par le fait que $K_\infty(f) = 0$; on peut dire qu'il faut contrôler toute l'équation linéarisée, mais il resterait à trouver des invariants que l'on puisse calculer effectivement, et peut-être arriver à démontrer A.2 de façon plus dynamique.

ANNEXE

UN THÉORÈME LOCAL DE CONJUGAISON

Plan :

Commentaire :

On se propose de démontrer un théorème dû essentiellement à V. I. Arnold [1] et J. Moser [1]. Leur démonstration suit une idée de Kolmogorov et utilise l'action de groupe.

La démonstration que nous proposons suit une idée de H. Rüssmann [1], démonstration plus proche de la méthode de Newton : on inverse la différentielle à un terme quadratique près. Zehnder [1], [2], a aussi formalisé cette idée. Notre démonstration nous permet d'obtenir un voisinage dans la $C^{2+\varepsilon}$-topologie pour presque tout nombre, pour $n=1$ (sur $\mathbf{T}^1$).

On peut inverser exactement la différentielle de $(\lambda, g) \mapsto R_\lambda \circ g \circ R_\alpha \circ g^{-1}$, voir Herman [2], mais l'inversion à un terme quadratique près permet de contrôler les domaines d'analyticité dans le cas C^ω. A notre connaissance, les constantes et le cas C^ω dans le théorème (2.2) sont nouveaux. (Le cas C^ω a été annoncé dans Herman [8] et [9].) D'ailleurs nous discutons les voisinages $V^{2\theta}_{R_\alpha}$ dans le cas de $\mathbf{T}^1$ en (2.4). Le lecteur se reportera aussi à l'exemple sur $\mathbf{T}^3$ de XIII.6.

Le lecteur intéressé seulement par l'équation linéarisée peut lire indépendamment 3, 4, 6 et 8.

1. Notations et rappels.

Soit $\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, on pose $|x| = \sup_i |x_i|$. Si $0 \leq r \leq \omega$ (1), $C^r(\mathbf{T}^n)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions sur $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{Z}^n$-périodiques, qui sont de classe C^r. On munit cet espace de la C^r-topologie. Si r est entier ou $+\infty$ ou ω, ces définitions sont classiques. Pour $0<\varepsilon<1$, $C^\varepsilon(\mathbf{T}^n) (= \mathrm{Lip}_\varepsilon(\mathbf{T}^n))$ est l'ensemble des fonctions höldériennes d'exposant ε, soit :

$$|\varphi|_\varepsilon = \sup_{x \neq y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x-y|^\varepsilon} < +\infty.$$

Si r est non entier, la C^r-topologie est la borne supérieure de la $C^{[r]}$-topologie et de la topologie induite par la semi-norme $|\ |_{r-[r]}$ sur les dérivées r-ièmes. Soit $C^r(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n) \cong (C^r(\mathbf{T}^n))^n$.

Si r est entier et $\varphi \in C^r(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$, $D^r\varphi \in E$ est la différentielle d'ordre r de φ, avec $D^0\varphi = \varphi$ et aussi $D\varphi = D^1\varphi$; on a posé :

$$E = C^0(\mathbf{T}^n, \mathscr{L}_s((\mathbf{R}^n)^r, \mathbf{R}^n))$$

où $\mathscr{L}_s(\mathbf{R}^n)^r, \mathbf{R}^n)$ est l'espace des formes multilinéaires symétriques à r variables.

La norme $|x|$, pour $x \in \mathbf{R}^n$, $|x| = \sup_i |x_i|$, induit sur $\mathscr{L}_s((\mathbf{R}^n)^r, \mathbf{R}^n)$ une norme que nous noterons encore $|\ |$.

Soit, pour $0 \leq r \leq \omega$, r entier, ou $r = +\infty$ ou ω, $D^r(\mathbf{T}^n)$ le sous-groupe de $\mathrm{Diff}^r(\mathbf{R}^n)$ formé des f qui s'écrivent $\mathrm{Id} + \varphi$ avec $\varphi \in C^r(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$ (si $r=0$, on convient que $D^0(\mathbf{T}^n)$ est le groupe des homéomorphismes qui s'écrivent $\mathrm{Id} + \varphi$).

(1) $0 \leq r \leq \omega$ veut dire soit $r=0$, soit $r \geq 1$, $r \in \mathbf{R}^+$, soit $r = +\infty$, soit $r = \omega$, $\omega = \mathbf{R}$-analytique.

Si $r \geq 1$ est non entier, on suppose $\varphi \in C^r(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$ et $f \in D^{[r]}(\mathbf{T}^n)$ dans la définition de D^r. On montre facilement que $D^r(\mathbf{T}^n)$ est un groupe. Pour r entier, $0 \leq r \leq \omega$, $D^r(\mathbf{T}^n)$ est un groupe topologique; pour r non entier, $r \geq 1$, $D^r(\mathbf{T}^n)$ n'est pas un groupe topologique.

Pour $0 < \varepsilon < 1$, soit :

$$C^{\varepsilon+}(\mathbf{T}^n) = \{\varphi \in C^0(\mathbf{T}^n) \mid |\varphi(x) - \varphi(y)| = o(|x-y|^\varepsilon) \text{ si } |x-y| \to 0\}.$$

$C^{\varepsilon+}(\mathbf{T}^n)$ est un sous-espace fermé de $C^\varepsilon(\mathbf{T}^n)$ pour la C^ε-topologie. On définit de même $D^{r+}(\mathbf{T}^n)$. Si $r \geq 1$, r non entier, $D^{r+}(\mathbf{T}^n)$ est un groupe topologique pour la C^r-topologie.

On définit $R_\alpha : x \mapsto x + \alpha$. Soit $C = \{R_p \mid p \in \mathbf{Z}^n\} \cong \mathbf{Z}^n$; C est le centre de $D^r(\mathbf{T}^n)$, et $D^r(\mathbf{T}^n)/C$ est le groupe des difféomorphismes C^r de $\mathbf{T}^n$, homotopes à l'identité, comme applications de $\mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n)$ dans lui-même.

Si $n = 1$, $D^r(\mathbf{T}^1)$ est le revêtement universel de $\mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n)$ pour la C^r-topologie (et c'est toujours le revêtement $\mathbf{Z}^n$-cyclique associé à l'injection scindée :

$$\pi_1(\mathbf{T}^n) \to \pi_1(\mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n)).$$

Pour $0 \leq r \leq \omega$, $D^r(\mathbf{T}^n)$ est localement contractile pour la C^r-topologie et, si $n \geq 6$, il est non connexe. On désigne par $D_+^r(\mathbf{T}^n)$ la composante connexe de l'identité dans la C^r-topologie (*i.e.* l'ensemble des difféomorphismes C^r-isotopes à l'identité). Il est équivalent de conjuguer f à un $R_\alpha \in \mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{T}^n)$ dans $\mathrm{Diff}_0^k(\mathbf{T}^n)$ et de conjuguer un relèvement de f à $D^r(\mathbf{T}^n)$ à un R_α dans $D^k(\mathbf{T}^n)$; si f est voisin de R_α, en fait nous aurons des conjugaisons C^1-voisines de l'identité qui seront donc dans $D_+^r(\mathbf{T}^n)$ (et qui seront même voisines de l'identité de $1/8$ (*i.e.* $f = g \circ R_\alpha \circ g^{-1}$, $|Dg - 1|_0 \leq 1/8$)).

On pose $D^r(\mathbf{T}^n, 0) = \{f \in D^r(\mathbf{T}^n) \mid f(0) = 0\}$. Le lecteur vérifiera que toutes nos conjugaisons sont en fait dans $D_+^r(\mathbf{T}^n, 0)$.

2. Énoncé du théorème.

Soient $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^n$, et $\|\ \|$ la distance standard sur $\mathbf{T}^1$: si $x \in \mathbf{T}^1$, $\|x\| = \operatorname*{Inf}_{p \in \mathbf{Z}} |\tilde{x} + p|$, où $\tilde{x}$ est un relèvement de x à $\mathbf{R}$. On pose, pour $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{Z}^n$:

$$\langle k, \alpha \rangle = \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i \quad \text{et} \quad |k| = \sup_i |k_i|$$

(c'est la norme ℓ^∞).

Définition **(2.1)**. — *On dit que* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^n$ *satisfait à une condition diophantienne s'il existe* $\beta \geq 0$ *et* $C_\beta > 0$ *tels que, pour tout* $k \in \mathbf{Z}^n - \{0\}$:

$$\|\langle k, \alpha \rangle\| \geq \frac{C_\beta}{|k|^{n+\beta}}.$$

Cas $n = 1$. — On peut réécrire (2.1) comme suit : il existe $\beta \geq 0$ et $C_\beta > 0$ tels que, pour tout $p/q \in \mathbf{Q}$:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C_\beta}{q^{2+\beta}}.$$

— Pour presque tout $\alpha\in[0, 1]$, α est du type de Roth (*i.e.* pour tout $\varepsilon>0$, il existe $C_\varepsilon>0$ (C_ε dépendant de α et de ε) tel que pour tout $p/q\in\mathbf{Q}$ on ait :

$$\left.\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\geq\frac{C_\varepsilon}{q^{2+\varepsilon}}\right).$$

En effet, pour presque tout $\alpha\in\mathbf{R}$, il existe $C_\alpha>0$ tel que, pour tout $p/q\in\mathbf{Q}$:

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\geq\frac{C_\alpha}{q^2(\mathrm{Log}(q+1))^2}.$$

Définition. — *$\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ est de type constant s'il existe $C>0$ tel que, pour tout $p/q\in\mathbf{Q}$, on ait :*

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\geq\frac{C}{q^2}.$$

Il en est ainsi des nombres algébriques de degré 2.

Théorème (**2.2**). — *Soit $\alpha\in\mathbf{R}^n$ satisfaisant à une condition diophantienne :*

$$||\langle k, \alpha\rangle||\geq\frac{C_\beta}{|k|^{n+\beta}},\quad \textit{pour}\quad k\in\mathbf{Z}^n-\{0\}.$$

Soit $\theta=n+\beta$ *si* $\beta\neq0$, β *non entier,*

$\theta=n+\varepsilon+\beta$ *si* $\beta=0$ *ou* β *entier, avec* ε *arbitraire* >0.

Alors, pour chaque choix de θ, *il existe un voisinage* $V^{2\theta}_{R_\alpha}$ *pour la* $C^{2\theta}$*-topologie de* R_α *dans* $D^{2\theta}(\mathbf{T}^n)$ (i.e. $V^{2\theta}_{R_\alpha}=\{f\in D^{2\theta}(\mathbf{T}^n)\mid |f-R_\alpha|_{C^{2\theta}}\leqslant\mu\}$) *et une application :*

$$s:\ V^{2\theta}_{R_\alpha}\to\mathbf{R}^n\times D^{\theta}_{+}(\mathbf{T}^n, 0),$$

qui possède les propriétés suivantes :

— *Si* $r\geq2\theta$, $r-\theta$ *non entier :*

$$s:\ V^{2\theta}_{R_\alpha}\cap D^r(\mathbf{T}^n)\to\mathbf{R}^n\times D^{r-\theta}_{+}(\mathbf{T}^n, 0),$$

et
$$s:\ V^{2\theta}_{R_\alpha}\cap D^k(\mathbf{T}^n)\to\mathbf{R}^n\times D^{k}_{+}(\mathbf{T}^n, 0)$$

pour $k=+\infty$ *ou* ω.

— *s est continue de l'espace de départ avec la topologie C^r dans l'espace d'arrivée avec la $C^{r-\theta-\varepsilon}$-topologie, pour tout $\varepsilon>0$.*

— *Si* $s(f)=(\lambda, g)$:

$$\boxed{f=R_\lambda\circ g\circ R_\alpha\circ g^{-1}.}$$

Cas $n=1$: $\mathbf{T}^1$. — Si on impose que $g\in D^0(\mathbf{T}^1, 0)=\{h\in D^0(\mathbf{T}^1)\mid h(0)=0\}$, la décomposition $f=R_\lambda\circ g\circ R_\alpha\circ g^{-1}$ est unique (voir II.3.3 et III.4.1.1). De plus, si le nombre de rotation de f, $\rho(f)=\alpha$, avec $\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$, alors $\lambda=0$ par III.4.1.1, donc $f=g\circ R_\alpha\circ g^{-1}$.

Corollaire (**2.3**). — *Soit $\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ tel que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $C_\varepsilon>0$ vérifiant, pour $p/q\in\mathbf{Q}$, $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\geq\frac{C_\varepsilon}{q^{2+\varepsilon}}$. Alors, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un voisinage $V^{2+2\varepsilon}_{R_\alpha}$ pour la*

$C^{2+2\varepsilon}$-*topologie de* R_α *tel que, si* $f \in V_{R_\alpha}^{2+2\varepsilon} \cap D^r(\mathbf{T}^1)$, $r \geq 2+2\varepsilon$, *et* $\rho(f)=\alpha$, *alors f est* C^{r-2}-*conjugué à* R_α (*en fait f est* $C^{r-(1+\varepsilon)}$-*conjugué à* R_α *pour tout* $\varepsilon>0$); *de plus, si f est un difféomorphisme de classe* C^∞ (resp. C^ω), *alors f est* C^∞ (resp. C^ω)-*conjugué à* R_α.

Corollaire (**2.4**). — *Si* α *satisfait à une condition diophantienne et si* $f \in D^\omega(\mathbf{T}^1)$ *est* C^∞-*conjugué à* R_α, *alors le fait que f soit* C^ω-*conjugué à* R_α (i.e. $f=h^{-1}\circ R_\alpha \circ h$, $h \in D^\infty(\mathbf{T}^1)$ *implique que* $h \in D^\omega(\mathbf{T}^1)$).

Démonstration. — Voir XI.6.2. ∎

Complément (**2.5**). — *On fixe* $0<\beta$ *non entier et* $C>0$. *Considérons le compact* $K_{\beta, C}=\left\{\alpha \in \mathbf{T}^n \mid \|\langle k, \alpha\rangle\| \geq \frac{C}{|k|^{n+\beta}};\ k \in \mathbf{Z}^n-\{0\}\right\}$. *Si* $C \to 0$ *alors la mesure de Haar de* $K_{\beta, C} \to 1$.

La constante $\mu(\beta, C)>0$ *du théorème* (2.2) *ne dépend que de* C *et* β *et non de* $\alpha \in K_{\beta, C}$. *De plus, si on considère*

$$V^{2(n+\beta)}=\{f \in D^{2(n+\beta)}(\mathbf{T}^n) \mid |f-\mathrm{Id}|_{C^{2(n+\beta)}} \leq \mu(\beta, C)\}$$

et si $f \in V^{2(n+\beta)} \cap D^r(\mathbf{T}^n)$, *alors il existe des applications continues*

$$\alpha \in K_{\beta, C} \mapsto \lambda_f(\alpha) \in \mathbf{R}^n \quad \text{et} \quad \alpha \in K_{\beta, C} \mapsto g_f(\alpha) \in D^{r-(n+\beta)-\varepsilon}(\mathbf{T}^n)$$

telles que l'on ait, pour $\alpha \in K_{\beta, C}$,

$$f=R_{\lambda_f(\alpha)} \circ g_f(\alpha) \circ R_\alpha \circ (g_f(\alpha))^{-1}.$$

En outre, il existe $L(\beta, C)>0$ *et* $\mu(\beta, C)>0$ *tels que si* $|f-\mathrm{Id}|_{C^{2\theta}}=\mu_1 \leq \mu(\beta, C)$, *alors, pour tout* $\alpha \in K_{\beta, C}$, *on ait les inégalités* :

$$|\lambda_f(\alpha)-\alpha| \leq L\mu_1,$$
$$|g_f(\alpha)-\mathrm{Id}|_{C^1} \leq L\mu_1.$$

Nous laissons ce complément au lecteur. (Le fait que μ ne dépende que de β et de C est immédiat par notre démonstration. Le seul point à vérifier est la continuité de $\alpha \mapsto \lambda_f(\alpha)$ et $\alpha \mapsto g_f(\alpha)$, et pour cela il suffit de voir qu'à chaque étape de la démonstration tout dépend continûment de $\alpha \in K_{\beta, C}$, et la continuité résultera de ce qu'il y a convergence uniforme en α. Remarquer qu'en (4.1), si $\alpha \in K_{\beta, C} \mapsto \eta_\alpha \in [C_{h_1}^\omega]$ est continue, alors il existe une application continue $\xi_\alpha : K_{\beta, C} \to \bigcup_{h<h_1} C_h^\omega$, telle que $\xi_\alpha(0)=0$ et vérifiant, pour $\alpha \in K_{\beta, C}$, $\xi_\alpha-\xi_\alpha \circ R_\alpha=\eta_\alpha$ avec la même inégalité qu'en (4.1) et une uniformité en $\alpha \in K_{\beta, C}$.)

Pour ce complément ainsi que pour la dépendance monogène dans le cas C^ω, voir Arnold [1].

Remarque (**2.6**). — Le fait qu'on a sur $\mathbf{T}^1$, pour presque tout α au sens de la mesure de Lebesgue et pour tout $\varepsilon>0$, un voisinage dans la $C^{2+2\varepsilon}$-topologie semble optimal pour la méthode :

a) Pour tout $\alpha \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ non de type constant, il existe un difféomorphisme f de classe C^2 avec $\rho(f) = \alpha$, tel que f est C^2-proche de R_α et f n'est pas C^1-conjugué à R_α (voir XI.4.3).

b) Pour les nombres de type constant, le problème posé par *a)* est ouvert. (Si l'on s'intéresse au problème analogue pour l'équation linéarisée, on se reportera à XIII.4.7.) Pour les nombres de type constant, on est obligé de supposer $\theta = 1 + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

c) Un autre fait est le suivant : pour tout $\varepsilon > 0$, et tout $\alpha \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, il existe un $f \in \mathrm{Diff}_+^{2-\varepsilon}(\mathbf{T}^1)$ avec $\rho(f) = \alpha$, $C^{2-\varepsilon}$ proche de R_α, tel qu'il existe un ensemble de Cantor $K \subset \mathbf{T}^1$ invariant par f (*i.e.* $f(K) = K$)) ; f n'est donc pas C^0-conjugué à R_α (voir X.3.19). (En fait, il semble qu'une topologie plus raisonnable est la C^1-topologie « plus variation bornée sur la dérivée »; mais pour cette topologie l'analyse de Fourier ne me paraît pas simple.)

d) En suivant J. Moser [1], dans le cas des champs de vecteurs sur $\mathbf{T}^n$ ($n \geq 2$), il semble que l'on puisse obtenir une décomposition analogue à (2.2) sur un voisinage $V_\gamma^{\theta+1+\varepsilon}$ du champ de vecteurs constant γ (satisfaisant à une condition diophantienne) qui est induit seulement d'un voisinage pour la $C^{\theta+1+\varepsilon}$-topologie (pour presque tout $\gamma \in \mathbf{R}^n$, relativement à la mesure de Lebesgue, avec $\theta = n - 1 + \varepsilon$).

Noter que, si $n = 1$, pour presque tout $\alpha \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, $\theta + 1 = 2 + \varepsilon$.

e) Pour les notations de cette remarque, voir 3.

Dans le cas C^ω, il existe certains $\alpha \in \mathbf{T}^n$ qui sont des vecteurs de Liouville tels que, si $f \in D_h^\omega(\mathbf{T}^n)$ ($h > 0$) et si $|f - R_\alpha|_h$ est assez petit, alors $f = R_\lambda \circ g \circ R_\alpha \circ g^{-1}$ avec $g \in D^\omega(\mathbf{T}^n)$ et $\lambda \in \mathbf{T}^n$ (voir à ce propos Rüssmann [1] et [6]).

Dans le cas C^∞, et si $n = 1$, nous avons vu en XI.4.2 que, pour que le théorème (2.2) soit vrai sur $\mathbf{T}^1$, il faut nécessairement supposer que α satisfait à une condition diophantienne.

3. Préliminaires sur les fonctions R-analytiques ($= C^\omega$).

On suppose dans la suite que $n \geq 1$ est un entier qui désigne la dimension de $\mathbf{T}^n$; toutes les constantes dépendent de n et nous ne le répéterons pas.

Notations (**3.1**). — Soit $\mathbf{C}^n$ le complexifié de $\mathbf{R}^n$:

$$z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n = (\mathbf{R} + i\mathbf{R})^n.$$

On écrit $z_j = x_j + iy_j$, $i = \sqrt{-1}$ avec $\mathrm{Im}\, z = (\mathrm{Im}\, z_1, \ldots, \mathrm{Im}\, z_n) = (y_1, \ldots, y_n)$ et $\mathrm{Re}\, z = (\mathrm{Re}\, z_1, \ldots, \mathrm{Re}\, z_n) = (x_1, \ldots, x_n)$. Sur $\mathbf{C}^n$ on a la norme $|z| = \sup_j |z_j|$ avec, pour $z_j = x_j + iy_j \in \mathbf{C}$, $|z_j|^2 = x_j^2 + y_j^2$.

(**3.2**) *Définition de* C_h^ω.

La norme précédente induit une norme sur $\mathscr{L}_s((\mathbf{C}^n)^p, \mathbf{C}^n)$, espace des applications $\mathbf{C}$-multi-linéaires symétriques, norme que l'on note encore $|\ |$.

Considérons la bande $B_h = \{z \in \mathbf{C}^n \mid |\mathrm{Im}\, z| \leq h\}$ et $C_h^\omega(T^n, \mathbf{R}^n) \equiv C_h^\omega =$ l'espace de Banach des fonctions $f : B_h \to \mathbf{C}^n$ continues sur B_h, holomorphes dans l'intérieur de B_h, et satisfaisant aux identités :

$$f \circ R_p = f \quad \text{pour tout} \quad p \in \mathbf{Z}^n$$
$$f \circ \sigma = \sigma \circ f,$$

où σ est l'involution de conjugaison de $\mathbf{C}^n$. On définit la norme :

$$|\varphi|_h = \sup_{z \in B_h} |\varphi(z)| \quad (^1).$$

Remarque. — C_h^ω est seulement un espace vectoriel sur **R**.

(3.3) *Définition de* $C_{h,q}^\omega$.

On pose, pour $q \in \mathbf{N}$, $q \geq 0$:

$$C_{h,q}^\omega(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n) \equiv C_{h,q}^\omega = \{f \in C_h^\omega(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n) \mid D^q f \in C_h^\omega(\mathbf{T}^n, E)\}$$

où $E = \mathscr{L}_s((\mathbf{C}^n)^q, \mathbf{C}^n)$.

(Il serait plus exact de dire que $D^q f$ est holomorphe sur Int B_h et se prolonge en une fonction continue sur B_h.)

On définit la semi-norme :

$$|\varphi|_{h,q} = \sup_{z \in B_h} |D^q \varphi(z)|,$$

(on convient que $|\varphi|_h = |\varphi|_{h,0}$).

(3.4) *Fonctions* C^ω.

Soit $\varphi \in C^\omega(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$; il existe $h > 0$ tel que φ se prolonge par complexification en une fonction, encore notée φ, dans $C_h^\omega(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n) = C_h^\omega$ (et même dans $C_{h,q}^\omega(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$) ; on a donc :

$$C^\omega(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n) = \lim_{h \to 0} \operatorname{ind} C_h^\omega(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n) = \bigcup_{h > 0} C_h^\omega.$$

(3.5) *Coefficients de Fourier.*

Lemme **(3.5.1)**. — *Si* $\varphi \in C_h^\omega$ *et* $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{Z}^n$, *on pose* :

$$\hat{\varphi}(k) = \int_{\mathbf{T}^n} e^{-2\pi i \langle k, x \rangle} \varphi(x)\, dx;$$

alors :

(3.5.2) $$|\hat{\varphi}(k)| \leq |\varphi|_h e^{-2\pi |k|_1 h}$$

où l'on pose $|k|_1 = \Sigma_i |k_i|$ $(^2)$.

---

(1) Ne pas confondre la norme des $C^\varepsilon(\mathbf{T}^n)$ et la norme $|\varphi|_h$ des C_h^ω.
(2) $|\ |_1$ est la norme de ℓ^1, en dualité par $\langle\ ,\ \rangle$ avec celle de ℓ^∞.

De plus, si on pose :

$$R_N(\varphi)=\sum_{|k|\geq N+1}\hat{\varphi}(k)e^{2\pi i\langle k,z\rangle},$$

alors, pour tout $h_1<h$, *on a :*

$$(3.5.3)\qquad |R_N(\varphi)|_{h_1}\leq C\frac{|\varphi|_h}{(h-h_1)^n}e^{-2\pi(N+1)(h-h_1)}$$

où C *est une constante.*

Démonstration. — Pour prouver (3.5.1), comme φ est holomorphe sur B_{h_1}, pour tout $h_1<h$, en intégrant sur un domaine fondamental le long des n-plans défini par $x+z$, avec $x\in\mathbf{R}^n$ et $z=(\pm ih_1,\ldots,\pm ih_1)$, et en utilisant la formule de Cauchy, on a :

$$|\hat{\varphi}(k)|\leq|\varphi|_h e^{-2\pi|k|_1 h_1}.$$

Comme c'est vrai pour tout $h_1<h$, on a (3.5.1).

Prouvons (3.5.2). Si $h_1<h$, on pose $\delta=h-h_1$. On a, pour $|\mathrm{Im}\, z|\leq h_1$:

$$|R_N(\varphi)|_{h_1}\leq|\varphi|_h\sum_{|k|\geq N+1}e^{-2\pi|k|_1 h_1}.$$

En comparant cette somme à l'intégrale sur $\mathbf{R}^n$, on trouve, puisque

$$\int_{|x|\geq N+1}e^{-2\pi\delta|x|_1}dx\leq\text{constante}.\frac{1}{\delta^n}e^{-2\pi(N+1)\delta},$$

$$|R_N(\varphi)|_{h_1}\leq C|\varphi|_h e^{-2\pi(N+1)(h-h_1)}/(h-h_1)^n. \quad\blacksquare$$

Remarque **(3.6)**. — *Soient* $|\hat{\varphi}(k)|\leq C_1e^{-2\pi|k|_1 h}$, $\hat{\varphi}(-k)=\overline{\hat{\varphi}(k)}$ *et* $\varphi(x)=\sum_k\hat{\varphi}(k)e^{2\pi i\langle k,x\rangle}$; *alors, pour tout* $h_1<h$, $\varphi\in C^\omega_{h_1}$.

(3.7) *Définition de* $D^\omega_{h,q}$.

Soient q un entier, $q\geq 0$, et

$$D^\omega_{h,q}(\mathbf{T}^n)\equiv D^\omega_{h,q}=\{f=\mathrm{Id}+\varphi\in D^\omega(\mathbf{T}^n)\mid\varphi\in C^\omega_{h,q}(\mathbf{T}^n,\mathbf{R}^n)\}.$$

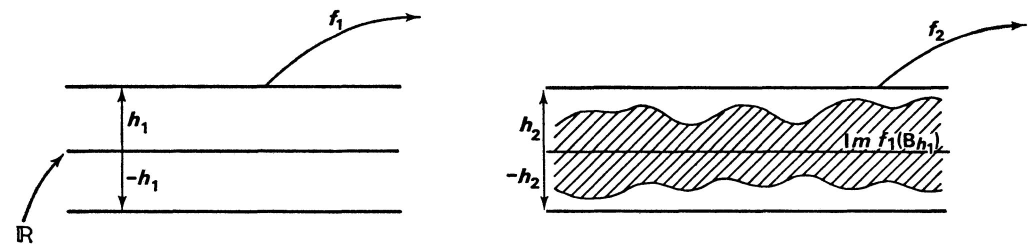
On convient que $D^\omega_h=D^\omega_{h,0}$. On pose :

$$|f|_{h,q}=\sup_{|\mathrm{Im}\, z|\leq h}|D^q(z+\varphi(z))|.$$

(3.8) *Composition.*

En un sens évident, $D^\omega(\mathbf{T}^n)$ est la limite inductive des $D^\omega_{h,q}$, mais $D^\omega_{h,q}$ n'est pas un groupe. Nous nous proposons de voir comment composer les éléments de $D^\omega_{h,q}$.

Si $f_1\in D^\omega_{h_1,q}$ et $f_2\in D^\omega_{h_2,q}$, pour que $f_2\circ f_1\in D^\omega_{h_1,q}$, il faut que l'image par f_1 de $\{|\mathrm{Im}\, z|\leq h_1\}$ soit contenue dans le domaine de f_2, soit $\{|\mathrm{Im}\, z|\leq h_2\}$.



On a les lemmes suivants :

(3.8.1) *Lemme 1.* — *Si* $f\in D^{\omega}_{h,q}$ *et* $R_\alpha(z)=z+\alpha$, *alors* $f\circ R_\alpha\in D^{\omega}_{h,q}$.

Démonstration. — R_α laisse invariant B_h. ■

(3.8.2) *Lemme 2.* — *Supposons que* $f\in D^{\omega}_{h,0}$. *Si* $\nu\leq h/2$ *et* $g\in D^{\omega}_{\nu,1}$, *avec* $|Dg|_\nu<2$, *alors* $f\circ g\in D^{\omega}_{\nu,1}$.

Démonstration. — Comme $\operatorname{Im} g(\operatorname{Re}(z))=0$, $\operatorname{Im} g(z)=\operatorname{Im} g(z)-\operatorname{Im} g(\operatorname{Re}(z))$. D'où, par le théorème de la moyenne :

$$|\operatorname{Im} g(z)|_\nu<2|z-\operatorname{Re}(z)|\leq 2\nu\leq h;$$

g envoie donc B_ν dans $\operatorname{Int}(B_h)$; il s'ensuit que $f\circ g\in D^{\omega}_{\nu,1}$. ■

Le lemme qui suit dit que $g\mapsto f\circ g$ est C^1 en un sens évident.

(3.8.3) *Lemme 3.* — *Soit* $f\in D^{\omega}_{h,2}$ *avec* $|D^2 f|_h\leq C$. *Si* $\nu\leq h/2$ *et* $g\in D^{\omega}_{\nu,1}$, *et si* $\Delta g\in C^{\omega}_{\nu,1}$ *avec* $|g|_{\nu,1}<1+1/2$ *et* $|\Delta g|_{\nu,1}<1/2$, *alors* :

$$|f\circ(g+\Delta g)-f\circ g-(Df\circ g).\Delta g|_\nu\leq C|\Delta g|^2_\nu.$$

Démonstration. — Par le lemme 2, si $0\leq t\leq 1$, alors pour tout $z\in B_\nu$:

$$g(z)+t\Delta g(z)\in \operatorname{Int} B_h.$$

On a :

$$f(g(z)+\Delta g(z))-f(g(z))-Df\circ g(z).\Delta g(z)=\int_0^1(1-t)\, D^2 f(g(z)+t\Delta g(z)).(\Delta g(z))^2\,dt,$$

d'où il résulte que :

$$|f\circ(g+\Delta g)-f\circ g-Df\circ g.\Delta g|_\nu\leq C|\Delta g|^2_\nu.$$ ■

(3.8.4) *Lemme 4.* — *Si* $V_\nu=\{g\in D^{\omega}_{\nu,1}\,|\,|Dg|_\nu<2\}$ *et si* $\nu\leq h/2$, *la composition* $V_\nu\times C^{\omega}_{h,0}\to C^{\omega}_{\nu,1}$ *est continue* (i.e. $(g,f)\mapsto f\circ g$ est continue).

Démonstration. — Classique et élémentaire. ■

(3.9) *Rappelons l'inégalité de Cauchy.*

Lemme. — *Il existe des constantes* C_r, $r \in \mathbf{N}$, $r \geq 1$, *telles que, pour* $f \in C^{\omega}_{h_1}$ *et* $h < h_1$, *on ait* :

$$|D^r f|_h \leq C_r |f|_{h_1} / (h_1 - h)^r.$$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer en tout $z_0 \in B_h$ l'inégalité de Cauchy dans le polydisque $|z - z_0| \leq (h_1 - h)/2$, qui est strictement contenu dans B_h. ■

(3.10) Considérons pour $0 < \beta < 1$ la semi-norme :

$$|\varphi|_{h,\beta} = \sup_{z_1 \neq z_2} |\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| / |z_1 - z_2|^{\beta} \quad \text{pour} \quad z_1, z_2 \in B_h.$$

Lemme. — *Il existe des constantes* $C_{r+\beta}$, *avec* r *entier et* $0 < \beta < 1$, *telles que, pour* $f \in C^{\omega}_{h_1}$ *et* $h < h_1$, *on ait* :

$$|D^r f|_{h,\beta} \leq C_{r+\beta} |f|_{h_1} / (h_1 - h)^{r+\beta}.$$

Démonstration. — Cela résulte de l'inégalité de Cauchy (3.9) et de l'inégalité de convexité VIII.3.11. ■

4. L'équation linéarisée.

Si on considère l'application $g \mapsto g^{-1} \circ R_{\alpha} \circ g$, l'application linéarisée en l'identité est :

$$\varphi \in C^{\omega}(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n) \mapsto L_{\alpha}(\varphi) \in [C^{\omega}(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)]$$

avec $L_{\alpha}(\varphi) = \varphi - \varphi \circ R_{\alpha}$ et $[C^{\omega}(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)] = \left\{ \varphi \in C^{\omega}(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n) \,\middle|\, [\varphi] = \int_{\mathbf{T}^n} \varphi(x)\, dx = 0 \right\}$.

Si on se donne η, tel que $[\eta] = 0$, on cherche ξ tel que $\xi - \xi \circ R_{\alpha} = \eta$. En écrivant les développements en séries de Fourier :

$$\xi = \sum_k \hat{\xi}(k)\, e^{2\pi i \langle k, x \rangle}, \qquad \eta = \sum_{k \neq 0} \hat{\eta}(k)\, e^{2\pi i \langle k, x \rangle},$$

on a :

$$\xi - \xi \circ R_{\alpha} = \sum_k (1 - e^{2\pi i \langle k, \alpha \rangle})\, \hat{\xi}(k)\, e^{2\pi i \langle k, x \rangle} = \sum_k \hat{\eta}(k)\, e^{2\pi i \langle k, x \rangle}.$$

Si R_{α} est une translation ergodique sur $\mathbf{T}^n$, pour tout $k \neq 0$, on a $1 - e^{2\pi i \langle k, \alpha \rangle} \neq 0$. D'où :

$$\hat{\xi}(k) = \hat{\eta}(k) / (1 - e^{2\pi i \langle k, \alpha \rangle}).$$

Soit $G_{\alpha} = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{1 - e^{2\pi i \langle k, \alpha \rangle}} e^{2\pi i \langle k, x \rangle}$. C'est une distribution formelle (*i.e.* dans le dual de l'espace des polynômes trigonométriques) et formellement on a :

$$\sum_{k \neq 0} \hat{\xi}(k)\, e^{2\pi i \langle k, x \rangle} = G_{\alpha} * \eta.$$

C'est ici qu'intervient la condition diophantienne sur α : il existe $\beta \geq 0$ et $C_{\beta} > 0$ tels que, pour $k \in \mathbf{Z}^n - \{0\}$, on ait :

$$\|\langle k, \alpha \rangle\| \geq C_{\beta} / |k|^{n+\beta}.$$

Alors (et en fait seulement alors) G_α est une distribution (*i.e.* un élément du dual de $C^\infty(\mathbf{T}^n)$).

Soit $\theta = n + \beta$. La proposition suivante montre que l'opérateur de convolution G_α est en un certain sens d'ordre θ, et l'opérateur L_α^{-1} est un « inverse non borné ».

Proposition **(4.1)**. — *Soient* $h_1 > 0$ *et* $\alpha \in \mathbf{T}^n$ *satisfaisant à une condition diophantienne. Il existe une application linéaire* $L_\alpha^{-1} : [C_{h_1}^\omega] \to \bigcup_{h<h_1} C_h^\omega$ *(donc un inverse non borné de* L_α*), telle que, pour* $h < h_1$ *et* $\eta \in [C_{h_1}^\omega]$, *si on pose* $\xi = L_\alpha^{-1}(\eta)$, *alors :*

$$\xi - \xi \circ R_\alpha = \eta, \qquad \xi(0) = 0;$$

de plus, on a l'inégalité :

$$|L_\alpha^{-1}(\eta)|_h \leq K |\eta|_{h_1} / |h - h_1|^\theta.$$

La constante K *dépend seulement de* β, *de* C_β *et de* θ *(*β *et* θ *étant fixés, si* C_β *diminue,* K *croît).*

Démonstration. — On détermine ξ par ses coefficients de Fourier :

$$\hat{\xi}(k) = \hat{\eta}(k) / (1 - e^{2\pi i \langle k, \alpha \rangle}).$$

On choisit $\hat{\xi}(0)$ de sorte que $\xi(0) = 0$. On a bien $\hat{\xi}(-k) = \overline{\hat{\xi}(k)}$.

Etude de la convergence de $\sum_{k \neq 0} \hat{\eta}(k) / (1 - e^{2\pi i \langle k, \alpha \rangle})$.

Il existe des constantes positives C_1, C_2 telles que :

$$C_1 \| \langle k, \alpha \rangle \| \leq | e^{2\pi i \langle k, \alpha \rangle} - 1 | \leq C_2 \| \langle k, \alpha \rangle \|.$$

On a, par (3.5),

$$|\eta(k)| \leq |\eta|_{h_1} e^{-2\pi i |k|_1 h_1}.$$

On a donc, pour $|\mathrm{Im}\, z| = h < h_1$, et si on pose $\delta = h_1 - h$:

$$\Big| \sum_{k \neq 0} \hat{\xi}(k)\, e^{2\pi i \langle k, z \rangle} \Big|_h \leq |\eta|_{h_1} \frac{1}{C_1} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{\| \langle k, \alpha \rangle \|} e^{-2\pi |k|_1 \delta}.$$

Par Rüssmann [2, § 9], [3] et [4], il existe une constante K_β ne dépendant que de β et de C_β (pour β fixé, K_β croît si C_β diminue) telle que l'on ait :

$$\frac{1}{C_1} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{\| \langle k, \alpha \rangle \|} e^{-2\pi |k|_1 \delta} \leq K_\beta \frac{1}{\delta^{n+\beta}}.$$

Donc $\quad |\xi|_h \leq 2K_\beta |\eta|_{h_1} / (h_1 - h)^\theta \quad$ avec $\quad K = 2K_\beta \quad$ et $\quad \theta = n + \beta$.

Le facteur 2 vient du choix de $\xi(0) = 0$. K_β étant une constante dépendant seulement de α par β et C_β.

On a bien alors, par la remarque (3.6), que $\xi \in C_h^\omega$ pour tout $h < h_1$ et que L_α^{-1} est continue :

$$[C_{h_1}^\omega] \to C_{h_2}^\omega \quad \text{si} \quad h_2 < h_1$$

et $L_\alpha \circ L_\alpha^{-1} = \mathrm{Id}$. (*i.e.* $\xi - \xi \circ R_\alpha = \eta$, si $\xi = L_\alpha^{-1}(\eta)$.) ∎

Remarque (4.2). — La convergence de $S=\sum_{k\neq 0}\frac{1}{\|\langle k,\alpha\rangle\|}e^{-2\pi\delta|k|_1}$ résulte de la condition diophantienne; on a :

$$\frac{1}{\|\langle k,\alpha\rangle\|}\leq\frac{1}{C_\beta}|k|^{n+\beta},$$

et
$$S\leq\frac{1}{C_\beta}\sum_{k\neq 0}|k|^\beta e^{-2\pi|k|_1\delta}.$$

En comparant à l'intégrale sur $\mathbf{R}^n$ (on pose $|x|_1=\sum_i|x_i|$) :

$$\int_{\mathbf{R}^n}|x|^{\beta+n}e^{-2\pi|x|_1\delta}\,dx,$$

on obtient (seulement) :

$$\sum_k\frac{1}{\|\langle k,\alpha\rangle\|}e^{-2\pi|k|_1\delta}\leq\frac{C^{te}}{C_\beta}\frac{1}{\delta^{2n+\beta}}.$$

(4.3) *Cas où* $n=1$.

Nous allons démontrer que l'on peut choisir $\theta=1+\beta'$ pour tout $\beta'>\beta$. Mais le résultat, bien que plus faible que celui de Rüssmann, est différent. C'est d'ailleurs suffisant pour le corollaire (2.3). On a besoin des lemmes suivants :

(4.3.1) *Lemme 1. — Soit* α *(avec* $\beta>0$, $C>0$), *tel que pour tout* $p/q\in\mathbf{Q}$, *on ait* $|\alpha-(p/q)|\geq C/q^{2+\beta}$; *alors, pour tout* $\beta'>\beta$, *on a :*

$$\sum_{|n|\neq 0}\frac{1}{|n|^{1+\beta'}}\frac{1}{\|n\alpha\|}<+\infty.$$

Pour la démonstration, voir IX.6.7.

(4.3.2) *Lemme 2. — Soient* α *et* $\delta>0$, *et* $C>0$ *tel que pour tout* $p/q\in\mathbf{Q}$ *on ait :*

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\geq\frac{C}{q^2(\operatorname{Log}|q+1|)^{1+\delta}}.$$

Pour tout $\delta'>\delta$, *on a :*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\operatorname{Log} n)^{3+\delta'}}\frac{1}{\|n\alpha\|}<+\infty.$$

Démonstration. — La même que pour le lemme 1. ■

Remarque. — Pour $\delta>0$, pour presque tout α, et pour la mesure de Haar sur $\mathbf{T}^1$, il existe $C_\alpha>0$ tel que pour tout $p/q\in\mathbf{Q}$:

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\geq\frac{C_\alpha}{q^2(\operatorname{Log}|q+1|)^{1+\delta}}.$$

Proposition **(4.3.3).** — *Soit* α *(avec* $\beta>0$ *et* $C_\beta>0$*), tel que, pour tout* $p/q\in\mathbf{Q}$*, on ait :*

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\geq\frac{C_\beta}{q^{2+\beta}}.$$

Alors, pour tout $\beta'>\beta$*, on a :*

$$\sum_{|n|\neq 0}\frac{e^{-2\pi|n|\delta}}{||n\alpha||}\leq K\frac{1}{\delta^{1+\beta'}}.$$

Démonstration. — Soit $C=\underset{x\in\mathbf{R}}{\mathrm{Max}}(|x|^{\beta'+1}e^{-2\pi|x|})$; C dépend de β'. On a :

$$e^{-2\pi|n|\delta}\leq\frac{C}{\delta^{1+\beta'}\,|n|^{1+\beta'}},$$

donc

$$\sum_{|n|\neq 0}\frac{1}{||n\alpha||}e^{-2\pi|n|\delta}\leq\frac{C}{\delta^{1+\beta'}}\left(\sum_{|n|\neq 0}\frac{1}{|n|^{1+\beta'}\,||n\alpha||}\right)$$

$$K=C\left(\sum_{|n|\neq 0}\frac{1}{|n|^{1+\beta'}\,||n\alpha||}\right)=O(1).\ \blacksquare$$

Remarques **(4.3.4)** :

1) Dans la proposition précédente, si β' et β sont fixés, la constante K ne dépend que de $C_\beta>0$, et $K\to\infty$ si $C_\beta\to 0$.

2) Le lemme 2 laisse supposer que, pour presque tout nombre α au sens de la mesure de Lebesgue, il faut peut-être remplacer le module de continuité höldérien par des modules de continuité de la forme $\delta(\mathrm{Log}(1/\delta))^p$, p entier.

3) La proposition (4.3.3) est suffisante pour le corollaire de (2.3).

5. Le théorème d'Arnold.

(5.1) *Introduction. Notations* U_h, V_ν^i, W_ν.

Considérons les ensembles :

$$U_h=\{f\in D^\omega_{h,2}\,|\,|D^2f_h|\leq 2\},$$

et, pour $i=1, 2$:

$$V_\nu^i=\mathbf{R}^n\times\left\{g\in D^\omega_{\nu,1}\,\middle|\,|Dg-\mathrm{Id}|_\nu\leq\frac{1}{4i}\right\}$$

et

$$W_\nu=\mathbf{R}^n\times\left\{\varphi\in C^\omega_\nu\,\middle|\,|D\varphi|_\nu\leq\frac{1}{8}\right\}.$$

On suppose que $\nu\leq h/2$ est donné.

Soit $f\in U_h$; considérons l'application qui à $\psi=(\lambda, g)$ associe

$$F(f,\psi)=f\circ g-g\circ R_\alpha+\lambda\in C^\omega_{\nu,1};$$

F est bien définie sur V_ν^1, continue, et même C^∞ (on est dans des espaces de Banach) par (3.8.2) à (3.8.4).

La fonction f étant donnée, on cherche ψ_f telle que :

$$F(f, \psi_f) = f \circ g_f - g_f \circ R_\alpha + \lambda_f = 0,$$

soit, pour $g \in D^\omega(\mathbf{T}^n)$:

$$f = R_{\lambda_f} \circ g_f \circ R_\alpha \circ g_f^{-1}.$$

(5.2) *Enoncé du théorème d'Arnold.*

$$\boxed{\text{On suppose que } h \leq 1.}$$

On a le théorème d'Arnold (et J. Moser [1]) :

Théorème. — Soit α *satisfaisant à une condition diophantienne, et choisissons* θ *comme en* (4.1). *Soient* $f_0 \in U_h$, $\psi_0 = (\lambda_0, g_0) \in V^2_{h/2}$ (i.e. $|Dg_0 - \mathrm{Id}|_{h/2} \leq 1/8$) *tels que l'on ait :*

$$F(f_0, \psi_0) = f_0 \circ g_0 - g_0 \circ R_\alpha + \lambda_0 = 0.$$

Il existe deux constantes $\varepsilon_0 > 0$ *et* C *dépendant seulement de* α *et de* θ (*en fait pour* β *fixé et* θ *aussi,* ε_0 *diminue si* C_β *diminue*), *telles que, si* $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ *et si* $f \in U_h$ *vérifie*

$$|f - f_0|_h = \varepsilon h^{2\theta},$$

alors il existe $\Delta\psi = (\Delta\lambda, \Delta g) \in \mathbf{R}^n \times C^\omega_{h/4,1}$ *tel que :*

$$0 = F(f, \psi_0 + \Delta\psi) = f_0 \circ (g_0 + \Delta g) - (g_0 + \Delta g) \circ R_\alpha + \lambda_0 + \Delta\lambda,$$

avec les inégalités :

$$|\Delta\psi|_{h/4} \leq C\varepsilon h^\theta = C\frac{|f - f_0|_h}{h^\theta}$$

$$|\Delta\psi|_{h/4,1} \leq C\varepsilon h^{\theta - 1}.$$

De plus, la correspondance $(f_0, \psi_0, f) \mapsto \Delta\psi$ *est continue de* $\{f \in U_h \mid |f - f_0|_{h,0} \leq \varepsilon_0 h^{2\theta}\}$ *dans* $\mathbf{R}^n \times C^\omega_{h/4,1}$.

Remarque. — On a bien $g = g_0 + \Delta g \in D^\omega_{h/4}$, puisqu'on aura $|g - \mathrm{Id}|_{h/4,1} \leq 1/4$.

La démonstration de ce théorème se fera en quatre points :

A) Principe.
B) Inversion de la différentielle à un terme quadratique près, par un opérateur non borné.
C) Démonstration.
D) Unicité locale.

A) *Principe* (*d'après H. Rüssmann* [1]) : *méthode de Newton.*

Soient E, G, H des espaces de Banach, de normes notées $|\ |$. Soit $F : E \times G \to H$ de classe C^2. On se donne $(f_0, \psi_0) \in E \times G$ vérifiant $F(f_0, \psi_0) = 0$.

On suppose que sur un voisinage de $(f_0, \psi_0) \in E \times G$ il existe une application continue $(f, \psi) \mapsto L(f, \psi) \in \mathscr{L}(H, G)$ telle que, si $dF(f, \psi)$ est la dérivée de $\psi \mapsto F(f, \psi)$ (f fixé), alors on a, pour tout $\Delta h \in H$:

$$|dF(f, \psi) \circ L(f, \psi)\, \Delta h - \Delta h| = O(|F(f, \psi)|\, |\Delta h|)$$

(*i.e.* L est un inverse de $dF(f, \psi)$ à un « terme quadratique près »).

Noter que si $0 = F(f, \psi)$, alors $L(f, \psi)$ est un vrai inverse de $dF(f, \psi)$. Alors, f étant voisin de f_0, il existe ψ_f tel que $F(f, \psi_f) = 0$. Evidemment, ceci résulte du théorème des fonctions implicites dans les espaces de Banach. Nous allons donner un procédé d'itération qui converge quadratiquement (*i.e.* comme ε^{2^n}, $0 < \varepsilon < 1$) vers une solution ψ_f.

Pour ψ_0 on a $|F(f, \psi_0)| = O(|f - f_0|)$.

Pour $i \geq 1$, posons par récurrence sur i, $\psi_i = \psi_{i-1} + \Delta\psi_{i-1}$ avec :

$$\Delta\psi_{i-1} = -L(f, \psi_{i-1}) \,.\, F(f, \psi_{i-1}).$$

Ce procédé converge quadratiquement : en effet, d'après la formule de Taylor :

$$F(f, \psi_i) = F(f, \psi_{i-1} + \Delta\psi_{i-1}) = F(f, \psi_{i-1}) + dF(f, \psi_{i-1}) \,.\, \Delta\psi_{i-1} + O(|\Delta\psi_{i-1}|^2)$$

soit : $$|F(f, \psi_i)| = O(|F(f, \psi_{i-1}) \,.\, \Delta\psi_{i-1}|) + O(|\Delta\psi_{i-1}|^2).$$

Or, on a $$|\Delta\psi_{i-1}| = O(|F(f, \psi_{i-1})|),$$

donc $$|F(f, \psi_i)| = O(|F(f, \psi_{i-1})|^2),$$

ce qui assure la convergence quadratique.

On procédera en C) ainsi : on se donne $s > 0$; alors il existe ε_0 tel que si $|f - f_0| = \varepsilon \leq \varepsilon_0$, on ait par récurrence, pour $i \geq 2$:

$$|F(f, \psi_{i-1})| \leq \varepsilon 2^{-is}$$

et $$|\Delta\psi_{i-1}| \leq \varepsilon 2^{-is}.$$

Remarques :

— Le fait de diminuer les bandes de convergence analytique peut s'interpréter comme l'application d'opérateurs de lissage.

— Les petits dénominateurs (*i.e.* L_α a un inverse L_α^{-1} non borné) pourront être compensés par la convergence quadratique : elle permet en diminuant les bandes de convergence de contrôler la divergence due aux petits dénominateurs.

B) *Inversion de la différentielle de* $\psi \mapsto F(f, \psi)$ *par un opérateur non borné et inégalités.*

Notations. — On suppose que $f \in U_h$ (*i.e.* $|D^2 f|_h < 2$) et on se donne $\nu_0 \leq h/2$ et $\psi = (\lambda, g)$. Alors $F(f, \psi) = f \circ g - g \circ R_\alpha + \lambda \in C^\omega_{\nu_0, 1}$. Si $\Delta\psi \in W_{\nu_0}$, on a, par (3.8.3), $dF(f, \psi)$ désignant la dérivée de $\psi \to F(f, \psi)$ (f fixé) :

(B.1) $$|F(f, \psi + \Delta\psi) - F(f, \psi) - dF(f, \psi) \,.\, \Delta\psi|_{\nu_0} \leq 2 |\Delta\psi|^2_{\nu_0}$$

avec, pour $\Delta\psi = (\Delta\lambda, \Delta g) \in \mathbf{R}^n \times C^{\omega}_{\nu_0,1}$:

(B.2) $$dF(f, \psi).\Delta\psi = Df \circ g.\Delta g - \Delta g \circ R_\alpha + \Delta\lambda.$$

On cherche à inverser $dF(f, \psi)$.

Inversion de $dF(f, \psi)$ *à un terme quadratique près (inverse non borné) d'après Rüssmann* [1].

Soient $\nu \leq \nu_0$ et Δg; on définit $E \in C^{\omega}_{\nu}$ par :

(B.3) $$\Delta g = Dg.E.$$

On a :

$$dF(f, \psi).\Delta\psi = Df \circ g.Dg.E - Dg \circ R_\alpha.E \circ R_\alpha + \Delta\lambda.$$

Si on dérive par rapport à z, $F(f, \psi)(z) = (f \circ g - g \circ R_\alpha)(z) + \lambda$, on a :

$$D_z F(f, \psi)(z) = (Df \circ g.Dg - Dg \circ R_\alpha)(z)$$

donc $$D_z F(f, \psi).E = D(f \circ g).E - (Dg \circ R_\alpha).E.$$

Il en résulte que

(B.4) $$dF(f, \psi).\Delta g - D_z F(f, \psi).E = Dg \circ R_\alpha.(E - E \circ R_\alpha) + \Delta\lambda.$$

(B.5) *Inversion de* $E \mapsto Dg \circ R_\alpha.(E - E \circ R_\alpha) = Dg \circ R_\alpha.(L_\alpha.E)$ *avec* $L_\alpha : E \mapsto E - E \circ R_\alpha$. — Puisque $|Dg \circ R_\alpha - \mathrm{Id}|_{\nu_0} \leq 1/4$ et puisque $(\lambda, g) \in V^1_{\nu_0}$, $Dg \circ R_\alpha$ est une fonction matricielle inversible; soit A la matrice inverse, $A \in C^{\omega}_{\nu_0}(B_{\nu_0}, \mathscr{L}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^n))$. On a :

(B.6) $$|A|_{\nu_0} \leq 1 + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad |A - \mathrm{Id}|_{\nu_0} \leq \frac{1}{3}$$

(par la formule $|(\mathrm{Id} - B)^{-1} - \mathrm{Id}| \leq |B|/(1 - |B|)$ vraie pour une algèbre de Banach).

Pour résoudre, si on se donne $\eta \in C^{\omega}_{\nu_0}$, $Dg \circ R_\alpha(E - E \circ R_\alpha) + \Delta\lambda = \eta$, on a à résoudre :

(B.7) $$E - E \circ R_\alpha + A.(\Delta\lambda) = A.\eta.$$

Or on sait le faire par (4.1).

Considérons la matrice $[A] = \int_{\mathbf{T}^n} A(x)\, dx$. On a :

(B.8) $$|[A] - \mathrm{Id}| \leq \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad |[A]^{-1} - \mathrm{Id}| \leq \frac{1}{2}.$$

On a nécessairement, en intégrant sur $\mathbf{T}^n$:

$$[A.\Delta\lambda] \equiv [A].\Delta\lambda = [A\eta].$$

Donc

(B.9) $$\Delta\lambda = [A]^{-1}[A\eta]$$

et

(B.10) $$|\Delta\lambda| \leq C|\eta|_{\nu_0}$$

avec $C \leq (1 + 1/3)(1 + 1/2)$ par (B.6) et (B.8).

Puis on a à résoudre :

$$L_\alpha(E) = E - E \circ R_\alpha = A.(\eta - \Delta\lambda).$$

On a bien : $[A.(\eta - \Delta\lambda)] = 0$

par le choix (B.9) de $\Delta\lambda$. Donc, par (4.1) :

(B.11) $$E = L_\alpha^{-1}(A.(\eta - \Delta\lambda))$$

avec, pour tout $\nu < \nu_0$, $E \in C_\nu^\omega$ et pour $\nu < \nu_0$,

(B.12) $$|E|_\nu \leq C_3 \frac{|\eta|_{\nu_0}}{|\nu_0 - \nu|^\theta},$$

C_3 étant une constante dépendant de α et θ.

L'opérateur $L(f, \psi)$ *est inverse de* $dF(f, \psi)$ *à un terme quadratique (et non borné) près.*

Il est donné par (B.3), (B.9) et (B.11) :

(B.13) $$\eta \mapsto L(f, \psi).\eta = (\Delta\lambda = [A]^{-1}.[A.\eta], Dg.L_\alpha^{-1}.A.(\eta - \Delta\lambda)).$$

On a : $$|Dg|_{\nu_0} \leq 1 + \frac{1}{4}$$

et pour $\eta \in C_{\nu_0}^\omega$, et tout $\nu < \nu_0$, on a :

$$L(f, \psi).\eta \in \mathbf{R}^n \times C_\nu^\omega$$

(puisque Dg et $Dg \circ R_\alpha$ sont holomorphes sur Int B_ν et par (B.11)). Remarquons que $L(f, \psi)$ est non borné puisque L_α^{-1} l'est.

On a, en posant $L(f, \psi).\eta = \Delta\psi$:

(B.14) $$dF(f, \psi).\Delta\psi - \eta - D_z F(f, \psi).E = 0.$$

(B.15) Si $\nu < \nu_0 \leq h/4$ est fixé, l'application qui à (ψ, f) associe $L(f, \psi)$ est continue de $U_h \times V_\nu^1$ dans $\mathscr{L}(C_{\nu_0}^\omega, \mathbf{R}^n \times C_\nu^\omega)$.

Remarque. — $|\ |_\nu$ (resp. $|\ |_{\nu,1}$) est la semi-norme sur $\mathbf{R}^n \times C_\nu^\omega$ (resp. $\mathbf{R}^n \times C_{\nu,1}^\omega$) donnée, pour $\psi = (\lambda, g)$, par :

$$|\psi|_\nu = \sup(|\lambda|, |g|_\nu) \quad (\text{resp. } |\psi|_{\nu,1} = |g|_{\nu,1}).$$

Majoration de l'opérateur $L(f, \psi)$.

Il y a des constantes C_4, C_5 dépendant seulement de α et de θ telles que, pour $\eta \in C_{\nu_0}^\omega$ et $\nu < \nu_0$, par (B.9), (B.12), (B.6) et par l'inégalité (4.1), on ait :

(B.16) $$|L(f, \psi).\eta|_\nu \leq C_4 \frac{|\eta|_{\nu_0}}{(\nu_0 - \nu)^\theta}$$

et :

(B.17) $$|L(f, \psi).\eta|_{\nu,1} \leq C_5 \frac{|\eta|_{\nu_0}}{(\nu_0 - \nu)^{\theta+1}}.$$

Pour prouver (B.17), on a, pour $\nu<\nu_0$, par (B.16) :

$$|L(f,\psi).\eta|_{\nu+\frac{(\nu_0-\nu)}{2}}\leq 2^\theta C_4\frac{|\eta|_{\nu_0}}{(\nu_0-\nu)^\theta},$$

puis on applique l'inégalité de Cauchy entre ν et $\frac{1}{2}(\nu_0-\nu)+\nu$.

Remarque. — Si $F(f,\psi)=0$, alors $L(f,\psi)$ est un inverse (non borné) de $dF(f,\psi)$.

Inégalités fondamentales.

Soient $f\in U_h$, $\nu_0\leq h/2$ et $\psi\in V^1_{\nu_0}$ (*i.e.* $|D\psi-\mathrm{Id}|_{\nu_0}<1/4$), alors $F(f,\psi)\in C^\omega_{\nu_0}$;

(B.18) $$\Delta\psi=-L(f,\psi).F(f,\psi);$$

alors $\Delta\psi\in C^\omega_{\nu,1}$ pour tout $\nu<\nu_0$. On a, par (B.16) et (B.17) :

(B.19) $$|\Delta\psi|_\nu\leq C_2\frac{|F(f,\psi)|_{\nu_0}}{(\nu_0-\nu)^\theta}$$

et :

(B.20) $$|\Delta\psi|_{\nu,1}\leq C_2\frac{|F(f,\psi)|_{\nu_0}}{(\nu_0-\nu)^{\theta+1}};$$

C_2 est une constante dépendant seulement de α et θ et du fait que $\psi\in V^1_{\nu_0}$. De plus $(f,\psi)\mapsto\Delta\psi_{\nu_1}\in C^\omega_{\nu_1,1}$ est continue pour ν_1 fixé, $\nu_1<\nu$.

(B.21) On a, pour $\Delta\psi\in W_{\nu_1}$ $(\nu_1<\nu_0)$ (*i.e.* $|D(\Delta\psi)|_{\nu_1}\leq 1/8$), d'après (B.1), (B.2) et (B.14) :

$$|F(f,\psi+\Delta\psi)|_{\nu_1}\leq C_6|D_zF(f,\psi)|_{\nu_1}|\Delta\psi|_{\nu_1}+2|\Delta\psi|^2_{\nu_1}.$$

Si on applique l'inégalité de Cauchy à $D_zF(f,\psi)$, on a finalement :

(B.22) $$|F(f,\psi+\Delta\psi)|_{\nu_1}\leq C_1\frac{|F(f,\psi)|_{\nu_0}}{(\nu_0-\nu_1)}|\Delta\psi|_{\nu_1}+2|\Delta\psi|^2_{\nu_1},$$

où C_1 est une constante dépendant seulement de α et θ et de ce que $\psi\in V^1_{\nu_0}$ et $\Delta\psi\in W_{\nu_1}$.

C) *Démonstration du théorème d'Arnold.*

(C.1) Rappelons que $h\leq 1$ et que $\theta\geq 1$, donc $h^{\theta-1}\leq 1$.
Si $\delta_n=(h/2)(1/2+1/2^{n+1})$, on a $\delta_n-\delta_{n+1}=h/2^{n+3}$.
Soient ψ_0 sur $B_{\delta_0}=B_{h/2}$, et $F(f,\psi_0)\in C^\omega_{\delta_0,1}$. On définit

$$\Delta\psi_0=-L(f,\psi_0).F(f,\psi_0) \text{ sur } B_{\delta_1}$$

et on pose $\psi_1=\psi_0+\Delta\psi_0$.

(C.2) *Récurrence sur* $n \geq 1$. — *On va choisir* ε_0 *tel que, si* $|f - f_0|_h \leq \varepsilon h^{2\theta} \leq \varepsilon_0 h^{2\theta}$, *on ait par récurrence, pour* $n \geq 1$ *et* $s = \theta + 2$:

1_n) $\psi_n \in V^1_{\delta_n}$ (*i.e.* $|D\psi_n - \mathrm{Id}|_{\delta_n} \leq 1/4$);

2_n) $|F(f, \psi_n)|_{\delta_n} \leq \varepsilon h^{2\theta} 2^{-(n+5)s}$;

3_n) Si l'on pose $\Delta\psi_n = -L(f, \psi_n) . F(f, \psi_n)$, on a $\Delta\psi_n \in W_{\delta_{n+1}}$ (*i.e.* $|\Delta\psi_{n+1}|_{\delta_{n+1}} \leq 1/8$);

4_n) $|\Delta\psi_n|_{\delta_{n+1}} \leq \varepsilon h^{\theta} 2^{-(n+5)s}$;

5_n) $|\Delta\psi_n|_{\delta_{n+1}, 1} \leq \varepsilon h^{\theta - 1} 2^{-(n+5)s}$.

On définit alors :

$$\boxed{\psi_{n+1} = \psi_n + \Delta\psi_n \text{ sur } B_{\delta_{n+1}}.}$$

Démonstration de (C.2).

Pour $n = 0$, on a :

2_0) $|F(f, \psi_0)|_{\delta_0} = |F(f, \psi_0) - F(f_0, \psi_0)|_{\delta_0} \leq \varepsilon h^{2\theta}$.

Par (B.19) et (B.20), on a :

4_0) $|\Delta\psi_0|_{\delta_1} \leq C_2 2^{3\theta} \varepsilon h^{\theta}$;

5_0) $|\Delta\psi_0|_{\delta_1, 1} \leq C_2 2^{3(\theta+1)} \varepsilon h^{\theta+1}$.

On choisit ε_0 tel que $C_2 2^{3(\theta+1)} \varepsilon_0 \leq 1/8$.

Montrons d'abord que pour $n \geq 2$, *si les relations* 1_i) *à* 5_i) *sont vraies pour* $i \leq n$, *il en est de même de* 1_{n+1}) *à* 5_{n+1}).

• Montrons que l'on a bien $(1_{n+1}) : \psi_{n+1} \in V^1_{\delta_{n+1}}$.

Si les inégalités 5_i) sont vraies pour $i \leq n$, on aura :

$$\psi_{n+1} = \psi_0 + \sum_{i=0}^{n} \Delta\psi_n$$

$$\Big|\sum_{i=0}^{n} \Delta\psi_n\Big|_{\delta_{n+1}, 1} \leq \sum_{i=0}^{n} |\Delta\psi_i|_{\delta_{i+1}, 1} \leq \varepsilon_0 h^{\theta-1} A \leq \varepsilon_0 A$$

avec $A = C_2 2^{3(\theta+1)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(i+5)s}}$.

a) Choisissons ε_0 tel que $\varepsilon_0 A \leq 1/8$. Puisqu'on a $|\psi_0 - \mathrm{Id}|_{h/2, 1} \leq 1/8$, ($\psi_0 \in V^2_{h/4}$ par hypothèse), et que $1/8 + 1/8 = 1/4$, on a bien $|\psi_{n+1} - \mathrm{Id}|_{\delta_{n+1}, 1} \leq 1/4$.

• *Démonstration de* 2_{n+1}), 4_{n+1}) *et* 5_{n+1}).

On a par (B.22) :

$$|F(f, \psi_{n+1})|_{\delta_{n+1}} \leq C_1 \frac{|F(f, \psi)|_{\delta_n}}{(\delta_n - \delta_{n+1})} |\Delta\psi_n|_{\delta_{n+1}} + 2 |\Delta\psi_n|^2_{\delta_{n+1}};$$

en supposant 4_n) vrai, on a :

$$|F(f, \psi_{n+1})|_{\delta_{n+1}} \leq C_1 \varepsilon^2 h^{4\theta - \theta - 1} 2^{-2(n+5)s + (n+3)} + 2\varepsilon^2 h^{4\theta - 2\theta} 2^{-2(n+5)s}$$
$$= \varepsilon^2 (C_1 h^{\theta-1} + 2 2^{-(n+3)}) h^{2\theta} 2^{-2(n+5)s + (n+3)}.$$

On pose $B = C_1 + 2$. On a :

$$|F(f, \psi_{n+1})|_{\delta_{n+1}} \leq \varepsilon B \varepsilon h^{2\theta} 2^{-2(n+5)s+(n+3)}.$$

Puisque $\Delta\psi_{n+1} = -L(f, \psi_n).F(f, \psi_{n+1})$, on a donc par (B.18) et (B.19) :

$4_{n+1})$ $$|\Delta\psi_{n+1}|_{\delta_{n+2}} \leq \varepsilon^2 B C_2 h^\theta 2^{-2(n+5)s+(n+3)+(n+4)\theta}$$

et

$5_{n+1})$ $$|\Delta\psi_{n+1}|_{\delta_{n+2},1} \leq \varepsilon^2 B C_2 h^{\theta-1} 2^{-2(n+5)s+(n+3)+(n+4)(\theta+1)}.$$

b) On choisit ε_0 tel que $\varepsilon_0 B C_2 \leq 1$ et $\varepsilon_0 B \leq 1$. Puisque $s = \theta + 2$, on a bien :

$$2^{-2(n+5)s+(n+3)+(n+4)(\theta+1)} \leq 2^{-((n+1)+5)s};$$

$2_{n+1})$, $4_{n+1})$ et $5_{n+1})$ sont alors vraies.

• *Démontrons* $3_{n+1})$.

Soit $\Delta\psi_{n+1\,|\,\delta_{n+2}} \in W_{\delta_{n+2}}$.

c) Pour $n = 0$, il suffit de choisir ε_0 tel que $2^{3(\theta+1)}\varepsilon_0 C_2 \leq 1/8$, puisqu'on a alors $|\Delta\psi_0|_{\delta_1,1} \leq 2^{3(\theta+1)}\varepsilon C_2 h^{\theta-1} \leq 1/8$.

On a bien alors $1_1)$.

Pour $n \geq 1$, $\varepsilon_0 \leq 1/8$, car si $n \geq 1$, $3_n)$ est alors une conséquence de $5_n)$. En fait le choix **c)** est une conséquence du choix **a)**.

Il reste à montrer que (C.2) *est vraie pour* $n = 1$.

Il faut prouver $2_1)$, $4_1)$ et $5_1)$.

Par (B.22), $2_0)$ et $4_0)$, on a :

$2_1)$ $$|F(f, \psi_1)|_{\delta_1} \leq \varepsilon^2 C_1 C_2 2^{3\theta+3} h^{4\theta-\theta-1} + 2\varepsilon^2 C_2^2 h^{4\theta-2\theta} = \varepsilon^2(h^{\theta-1} C_1 C_2 2^{3\theta+3} + 2C_2^2) h^{2\theta}.$$

Si $C = C_1 C_2 2^{3\theta+3} + 2C_2^2$, on a :

$2_1)$ $$|F(f, \psi_1)|_{\delta_1} \leq \varepsilon^2 C h^{2\theta},$$

et par (B.18) et (B.19) on a :

$4_1)$ $$|\Delta\psi_1|_{\delta_2} \leq C_2 C \varepsilon^2 2^{4\theta} h^\theta$$

$5_1)$ $$|\Delta\psi_1|_{\delta_2,1} \leq C_2 C \varepsilon^2 2^{4(\theta+1)} h^{\theta-1}.$$

d) On choisit ε_0 tel que $\varepsilon_0 C \leq 2^{-6(\theta+2)}$ et $\varepsilon_0 C C_2 2^{4(\theta+1)} \leq 2^{-6(\theta+2)}$. Alors on a $1_1)$ à $5_1)$.

Par les choix **a)**, **b)**, **c)** et **d)** de ε_0 on a bien démontré par récurrence que l'on a $1_n)$ à $5_n)$ pour tout $n \geq 1$. ■

(C.3) *Démonstration du théorème d'Arnold.*

On a alors, pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, par 4_n) et 5_n) :

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\Delta\psi_i|_{\delta_{n+1}} \leq \varepsilon h^\theta A$$

et
$$\sum_{i=0}^{\infty} |\Delta\psi_i|_{\delta_{n+1},1} \leq A\varepsilon h^{\theta-1},$$

avec $A = C_2 2^{3\theta+3} + \sum_i^{\infty} 1/2^{-(i+5)s}$.

Donc $\Delta\psi = \sum_{i=0}^{\infty} \Delta\psi_i$ converge bien, par (3.8.4), dans l'espace de Banach $C^{\omega}_{h/4,1}$, et on a par passage à la limite de 2_n) :

$$F(f, \psi_0 + \Delta\psi) = 0.$$

On a de même :

$$|\Delta\psi|_{h/4} \leq \varepsilon C h^\theta$$

et :
$$|\Delta\psi|_{h/4,1} \leq \varepsilon C h^{\theta-1}$$

avec $C = A$.

L'application $(f_0, \psi_0, f) \mapsto \Delta\psi$ est continue puisque limite uniforme d'applications continues. ■

D) *Unicité locale.*

L'unicité locale que nous allons démontrer est facile pour le cas de $\mathbf{T}^1$.

Si $R_{\lambda_1} \circ g_1 \circ R_\alpha \circ g_1^{-1} = R_{\lambda_2} \circ g_2 \circ R_\alpha \circ g_2^{-1}$, avec $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ et $g_i \in D^0(\mathbf{T}^1, 0)$ pour $i = 1, 2$, alors $\lambda_1 = \lambda_2$ et $g_1 = g_2$ (voir II.3.3 et III.4.1.1).

Si $n \geq 2$, pour une unicité locale en C^{r_0}, r_0 grand, au voisinage de R_α satisfaisant une condition diophantienne, voir Moser [2]. On a pour $n \geq 2$, la

Proposition. — Soient α et θ comme dans le théorème d'Arnold. Il existe $\varepsilon > 0$ indépendant de h, tel que, si $f \in U_h$, $\psi_i \in V^1_{h/4}$ pour $i = 1, 2$, avec $g_1(0) = g_2(0) = 0$, $\psi_i = (\lambda_i, g_i)$, et si $|\psi_1 - \psi_2|_{h/4} \leq \varepsilon h^\theta$ et $F(f, \psi_1) = F(f, \psi_2) = 0$ (i.e. $R_{\lambda_1} \circ g_1 \circ R_\alpha \circ g_1^{-1} = f = R_{\lambda_2} \circ g_2 \circ R_\alpha \circ g_2^{-1}$), alors $\psi_1 = \psi_2$ (i.e. $\lambda_1 = \lambda_2$ et $g_1 = g_2$).

Démonstration. — Puisque $f \circ g_1 - g_1 \circ R_\alpha + \lambda_1 = 0$, si l'on pose $\Delta\psi = (\Delta\lambda, Dg_1 E)$, on a par (B.3) :

$$dF(f, \psi) \,.\, \Delta\psi = Dg_1 \circ R_\alpha \,.\, (E - E \circ R_\alpha) + \Delta\lambda.$$

Remarquons que $dF(f, \psi_1)$ est injective si on impose que $\Delta g(0) = 0$. En effet on a alors $E(0) = 0$; la relation $dF(f, \psi_1) \,.\, \Delta\psi = 0$ implique que

$$Dg_1 \circ R_\alpha \,.\, (E - E \circ R_\alpha) + \Delta\lambda = 0.$$

Avec la même notation qu'en B), on a $[A].\Delta\lambda = 0$, soit $\Delta\lambda = 0$, donc $E - E \circ R_\alpha = 0$; comme R_α est sur $\mathbf{T}^n$ une translation ergodique, $E = $ constante, et, puisque $E(0) = 0$, $E \equiv 0$; d'où il résulte que $\Delta\psi = 0$.

L'application $dF(f, \psi_1)$ a pour inverse L. Il y a donc une constante C_4 indépendante de ν et de h telle que, si $\nu < \nu_0 \leq h/4$, on ait par (B.16) (C_4 est la même constante) :

$$\textbf{(D.1)} \qquad |\Delta\psi|_\nu = |L.dF(f, \psi_1).\Delta\psi|_\nu \leq C_4 \frac{|dF(f, \psi_1).\Delta\psi|_{\nu_0}}{|\nu_0 - \nu|^\theta}.$$

Ecrivons $0 = F(f, \psi_1) - F(f, \psi_2)$; en utilisant la formule de Taylor (3.8.3), on a :

$$0 = dF(f, \psi_1).\Delta\psi + M(\Delta\psi)^2$$

avec $M(x)(\Delta\psi(x))^2 = \int_0^1 (1-t) D^2 f(\psi_1(x) + t\Delta\psi(x)).(\Delta\psi)^2(x)\,dt.$

Par (D.1) on a :

$$\frac{1}{C_4}(\nu_0 - \nu)^\theta |\Delta\psi|_\nu \leq 2 |\Delta\psi|^2_{\nu_0}.$$

Choisissons $\delta_n = \frac{h}{8}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

Remarquons qu'on a toujours $\psi_1 \in V^1_{\delta_n}$. On a :

$$|\Delta\psi|_{\delta_1} \leq 2C_4 \frac{|\Delta\psi|^2_{h/4}}{(\delta_0 - \delta_1)^\theta},$$

puisque $|\Delta\psi|_{h/4} \leq \varepsilon h^\theta$.

Si ε est assez petit (indépendant de h et dépendant de α et θ),

$$|\Delta\psi|_{\delta_1} \leq \varepsilon h^\theta 2^{-\theta}$$

et, par une récurrence élémentaire, si ε est assez petit, $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, on a :

$$|\Delta\psi|_{\delta_n} \leq \varepsilon h^\theta 2^{-n\theta}.$$

Donc, si $n \to +\infty$, $|\Delta\psi|_{h/8} = 0$, ce qui implique $\Delta\psi = 0$. ∎

6. Rappels sur les approximations des fonctions C^r.

Ce paragraphe est classique et est dû essentiellement à S. Bernstein et D. Jackson.

Soit $r \in \mathbf{R}_+$; on rappelle que $C^r(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$ est l'espace des fonctions de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$, de classe C^r et $\mathbf{Z}^n$-périodiques. (Si r est entier, ce sont les fonctions r fois continûment dérivables ; si r est non entier, ce sont les fonctions $C^{[r]}$ dont la dérivée est $\mathrm{Lip}_{r-[r]}(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$ ou encore höldérienne d'exposant $r - [r]$.)

$|\ |_{C^r}$ est une norme définissant la topologie C^r. Plus précisément, pour $\varphi \in C^r(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$:

$$|\varphi|_{C^r} = \sum_{0 \leq k \leq [r]} |D^k\varphi|_0 + |D^{[r]}\varphi|_{r-[r]}$$

avec, pour $0<r<1$,

$$|\varphi|_r = \sup_{x \neq y} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^r}.$$

Rappelons la proposition d'approximation de J. Moser [1, Lemma 1, p. 528-529].

Proposition **(6.1)**. — 1) *Il existe une constante* $C(r)$ *dépendant de r et de n telle que, pour tout* $\varphi \in C^r(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$, *il existe une suite* $\varphi_i \in C^{\omega}_{1/2^i}(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$ *(en fait les* φ_i *sont des polynômes trigonométriques de degré* $\leq 2^i$) (1) *telle que*

$$|\varphi_i - \varphi_{i-1}|_{1/2^i} \leq C(r) \frac{|\varphi|_{C^r}}{2^{ir}},$$

que $\varphi_0 = 0$, *et que* $\varphi_i \to \varphi$ *pour la* C^0*-topologie quand* $i \to +\infty$.

2) *Réciproquement, soit* $0<h\leq 1$ *donné; soit une suite* (φ_i), $\varphi_i \in C^{\omega}_{h/2^i}$ *(i entier* ≥ 0) *telle que*

$$|\varphi_i - \varphi_{i-1}|_{h/2^i} \leq \frac{K}{2^{ir}};$$

alors, si r est non entier, φ_i *converge pour la* $C^{[r]}$*-topologie sur* $\mathbf{R}^n$ *(ou* $\mathbf{T}^n$*) vers* $\varphi \in C^{[r]}(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$ *(et même* $\varphi \in C^{r-\varepsilon}(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$, *pour tout* $\varepsilon > 0$).

Complément. — *De plus, d'après Jacobowitz, si r est non entier,* $\varphi \in C^r(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$ *et* φ_i *est convergente pour la* $C^{r-\varepsilon}$*-topologie, pour tout* $\varepsilon > 0$ *(mais non en général pour la* C^r*-topologie); si r est entier,* $r \neq 0$, *alors* φ *est* C^{r-1} *et « smooth au sens de Zygmund »* (i.e. $h \in C^0(\mathbf{T}^n)$ *est « smooth » si* $\sup_{x\neq y} \left| \left(h(x) + h(y) - h\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \Big/ |x-y| \right| < +\infty$).

Démonstration. — 2) résulte de l'inégalité de Cauchy ((3.9) et (3.10)); pour la convergence, voir VII.2.7.3; pour les suppléments, nous renvoyons à Jacobowitz [1, § 5, p. 205-209] et Zehnder [2] pour le cas r entier.

Esquisse de la démonstration de 1). — Il suffit de le voir pour $\varphi \in C^r(\mathbf{T}^n)$. Soit B une fonction C^∞ sur $\mathbf{R}^n$, positive, à support dans $\{x \in \mathbf{R}^n \mid |x|_1 = \sum_i |x_i| \leq 1\}$, égale à 1 sur $\{x \mid |x|_1 \leq 3/4\}$, vérifiant $B(-x) = B(x)$ et $B(x) \leq 1$.

Soit $\hat{B} \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ la transformée de Fourier de B :

$$\hat{B}(\lambda) = \int_{\mathbf{R}^n} B(x) e^{-2\pi i \langle \lambda, x \rangle} dx.$$

D'après la formule d'inversion de Fourier, si P est un polynôme à n variables,

$$\int_{\mathbf{R}^n} \hat{B}(x) P(x) dx = P(0).$$

(1) Le degré de $e^{2\pi i \langle k, x\rangle}$ $(i = \sqrt{-1})$ est $|k|_1 = \sum_j |k_j|$.

Pour $\varphi \in C^0(\mathbf{T}^n)$ et $t > 0$, soit

$$\varphi_t(x) = t^n \int_{\mathbf{R}^n} \hat{B}(t(x-y))\varphi(y)dy = \int_{\mathbf{R}^n} \hat{B}(y)\varphi\left(x - \frac{y}{t}\right)dy;$$

on pose : $\qquad \varphi_j = \varphi_t|_{t=2^j}$.

D'après la formule d'inversion de Fourier, si $\psi(x) = e^{2\pi i\langle k,x\rangle}$, on a $\psi_t(x) = B\left(-\frac{k}{t}\right)e^{2\pi i\langle k,x\rangle}$, et si $\left|\frac{k}{t}\right|_1 \geq 1$, alors $B\left(-\frac{k}{t}\right) = 0$.

On montre alors facilement que pour tout $\varphi \in C^0(\mathbf{T}^n)$, φ_j est un polynôme trigonométrique de degré $\leq 2^j$.

De plus, pour $\varphi \in C^r(\mathbf{T}^n)$:

$$|\varphi_j - \varphi|_{C^0} \leq C_1(r)\frac{|\varphi|_{C^r}}{2^{jr}},$$

où $C_1(r)$ est une constante indépendante de φ et dépendant de r et de B (voir Shapiro [1, chap. IV]). Pour voir que

$$|\varphi_j - \varphi_{j-1}|_{1/2^j} \leq C(r)\frac{|\varphi|_{C^r}}{2^{jr}},$$

où $C(r)$ est une constante dépendant seulement de r et de B, je renvoie à J. Moser [1, p. 528-529] ou Jacobowitz [1, p. 205-209].

(6.2) *Cas où* $\varphi \in C_h^\omega(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$.

Proposition. — Etant données les φ_j *construits en* (6.1), *pour* $\varphi \in C_h^\omega$, *si* j *est tel que* $1/2^j \leq h/2$, *alors il existe une constante* $C(\varphi)$ *dépendant de* φ *et de* h *telle que*

$$|\varphi - \varphi_j|_{h/2} \leq C(\varphi)e^{-2\pi 2^j h/8}.$$

Démonstration. — En effet, par (3.5.3), on a :

$$|R_{2^j}(\varphi)|_{h/2} \leq C_1 e^{-2\pi 2^j h/2},$$

C_1 étant une constante dépendant de φ. Si $\varphi = \sum_k \hat{\varphi}(k)e^{2\pi i\langle k,x\rangle}$,

$$R_{2^j}(\varphi) = \sum_{|k| \geq 2^j+1} \hat{\varphi}(k)e^{2\pi i\langle k,x\rangle}$$

avec $|k| = \sup_j |k_j|$; il suffit de comparer

$$S_{2^j}(\varphi) = \sum_{|k| \leq 2^j} \hat{\varphi}(k)e^{2\pi i\langle k,x\rangle}$$

à φ_j. On a :

$$|S_{2^j}(\varphi) - \varphi_j|_{h/2} \leq |\varphi|_h \sum_{0 \leq |k| \leq 2^j}\left(1 - B\left(\frac{k}{2^j}\right)\right)e^{-2\pi|k|_1 h/2}.$$

Or $B(k/2^j)=1$ si $|k/2^j|_1 \leq 3/4$, donc :

$$|S_{2^j}(\varphi)-\varphi_j|_{h/2} \leq |\varphi|_h \operatorname{card}\left\{k \Big/ \frac{2^j . 3}{4} \leq |k| \leq 2^j\right\} e^{-2\pi 2^j . \frac{3}{4}\frac{h}{2}}$$

$$\leq |\varphi|_h 2^{j(n+1)} e^{-2\pi 2^j h 3/8} \quad \text{(pour } j \text{ assez grand).}$$

Soit $C = \operatorname{Max}_{x \geq 0}(x^{n+1} e^{-2\pi x})$. On a donc :

$$N^{n+1} \leq C \frac{e^{2\pi \delta N}}{\delta^{n+1}},$$

et par suite $\quad |S_{2^j}(\varphi)-\varphi_j|_{h/2} \leq C|\varphi|_h e^{-2\pi(\frac{3}{8}h-\delta)2^j}/\delta^{n+1}.$

On choisit $\delta = 2h/8$. On a bien :

$$|S_{2^j}(\varphi)-\varphi_j|_{h/2} \leq C_2(\varphi) e^{-2\pi 2^j h/8}$$

et on conclut que $|\varphi-\varphi_j|_{h/2} \leq C(\varphi) e^{-2\pi 2^j h/8}$. ∎

Remarque **(6.3)**. — Soit K un compact maîtrisable; soit $t \in K \mapsto \varphi(t) \in C^r(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$ une application continue; alors, pour i fixé, on voit facilement que

$$t \mapsto \varphi_i(t) \in C^0(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$$

est continue (avec $\varphi_i(t) = (\varphi(t))_i$), et que

$$|\varphi(t)-\varphi_i(t)|_{C^0} \leq C_1(r) \sup_t \frac{|\varphi(t)|_{C^r}}{2^{ir}}.$$

Pour i fixé, $t \mapsto (\varphi_i - \varphi_{i-1})(t)$ est continue dans $C^\omega_{1/2^i}(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$, puisque ce sont des polynômes trigonométriques de degré $\leq 2^i$, et

$$\sup_{t \in K} |\varphi_i(t)-\varphi_{i-1}(t)|_{1/2^i} \leq C(r) \sup_t \frac{|\varphi(t)|_{C^r}}{2^{ir}},$$

$C(r)$ étant une constante qui dépend seulement de r et de A.

7. Démonstration du théorème de conjugaison locale : le théorème d'Arnold implique le théorème de conjugaison locale (d'après J. Moser).

On se donne $\alpha \in \mathbf{R}^n$, $\beta \geq 0$, $C_\beta > 0$, tels que, pour tout $k \in \mathbf{Z}^n - \{0\}$:

$$\|\langle k, \alpha \rangle\| \geq \frac{C_\beta}{|k|^{n+\beta}}.$$

On choisit $\theta = n + \beta$ si β est non entier, $\theta > n + \beta$ si β est entier. On a donc $\theta > 1$.

A) *Nous allons déterminer un voisinage* $V^{2\theta}_{R_\alpha}$ *de* R_α *pour la* $C^{2\theta}$*-topologie* :

$$V^{2\theta}_{R_\alpha} = \{f \in D^{2\theta}(\mathbf{T}^n) \mid |f - R_\alpha|_{C^{2\theta}} \leq \mu\} \quad \textit{avec} \quad \mu > 0,$$

et une application $s: V^{2\theta}_{R_\alpha} \to \mathbf{R}^n \times D^\theta(\mathbf{T}^n, 0)$ *telle que si* $f \in V^{2\theta}_{R_\alpha}$ *et* $s(f) = (\lambda, g)$, *alors*

$$f \circ g - g \circ R_\alpha + \lambda = 0.$$

Si $f \in V^{2\theta}_{R_\alpha}$, par (6.1) on approche $f - R_\alpha$ par des polynômes trigonométriques φ_i de degré $\leq 2^i$; par la proposition d'approximation (6.1), avec $\varphi_0 = 0$, on a, en posant $f_i = R_\alpha + \varphi_i$:

$$(7.1) \qquad |f_i - f_{i-1}|_{1/2^i} = |\varphi_i - \varphi_{i-1}|_{1/2^i} \leq C(2\theta) \frac{|f - f_0|_{C^{2\theta}}}{2^{i2\theta}} \leq C(2\theta) \frac{\mu}{2^{2\theta i}},$$

$C(2\theta)$ est une constante dépendant de θ, n et de B.

(7.2) Nous allons choisir μ de telle sorte que l'on puisse appliquer à chaque étape le théorème d'Arnold (5.2), et on passera à la limite en appliquant (6.1). Pour cela, il faut vérifier les hypothèses du théorème d'Arnold.

a) *Premier choix de* μ.

Soit $\nu = 1/2$. On a $f_i \in D^\omega_{\nu/2^i, 2}$. Il faut que $f_i \in U_{\nu/2^i}$ (*i.e.* $|f_i|_{\nu/2^i, 2} = |D^2 f_i|_{\nu/2^i} < 2$). On a, en appliquant l'inégalité de Cauchy à (7.1) :

$$|f_i - f_{i-1}|_{\nu/2^i, 2} \leq C_1 2^{-(2\theta - 2)i} \mu$$

où C_1 est une constante. Par conséquent :

$$|f_i - f_0|_{\nu/2^i, 2} = |\varphi_i|_{\nu/2^i, 2} \leq \sum_{i=1}^{\infty} |f_i - f_{i-1}|_{\nu/2^i, 2} \leq C_1 \mu \Big(\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-(2\theta - 2)i}\Big).$$

Comme $2\theta > 2$, on choisit

$$\mu \leq 2/C_1 \Big(\sum_i 2^{-(2\theta - 2)i}\Big).$$

On en déduit que, pour tout i, $f_i \in U_{\nu/2^i}$ et on a :

$$|f_i - f_{i-1}|_{\nu/2^i} \leq C(2\theta) 2^{-2\theta i} \mu.$$

b) *Deuxième choix de* μ.

Soit ε_0 la constante du théorème d'Arnold (5.2) qui dépend de α et du choix de θ. On suppose que μ est assez petit pour que, pour tout $i \geq 0$:

$$(7.3) \qquad |f_{i+1} - f_i|_{\nu/2^{i+1}} \leq C(2\theta) \mu \frac{1}{2^{2\theta(i+1)}} \leq \varepsilon_0 \left(\frac{\nu}{2^{i+1}}\right)^{2\theta}$$

$(\nu = 1/2)$.

(7.4) *Récurrence.*

Pour $i = 0$, $f_0 = R_\alpha \in U_{1/2}$ et $g_0 = \mathrm{Id}$, $\lambda_0 = 0$. On a bien :

$$f_0 \circ g_0 - R_\alpha \circ g_0 + \lambda_0 = 0.$$

Soit $f_i \in U_{\nu/2^i}$; *on suppose par récurrence sur* i *que l'on a* (7.5) i) *à* (7.8) i) :

(7.8) i) $\psi_i = (\lambda_i, g_i) \in V^2_{\nu/2^{i+2}}$

(*i.e.* $|Dg_i - \mathrm{Id}|_{\nu/2^{i+2}} \leq 1/8$), avec :

(7.5) i) $f_i \circ g_i - g_i \circ R_\alpha + \lambda_i = 0$

et de plus (C_1 étant une constante indépendante de i et de f) :

(7.6) i) $|\psi_i - \psi_{i-1}|_{\nu/2^{i+2}} \leq C_1 \mu \left(\frac{\nu}{2^i}\right)^\theta$

(7.7) i) $|\psi_i - \psi_{i-1}|_{\nu/2^{i+2}, 1} \leq C_1 \mu \left(\frac{\nu}{2^i}\right)^{\theta-1}$.

Montrons que c'est vrai pour $i+1$ si l'on suppose μ assez petit. On applique le théorème d'Arnold (5.2) avec $h = \nu/2^{i+1}$, $h/2 = \nu/2^{i+2}$ et $h/4 = \nu/2^{i+3}$, $f_0 = f_i$ et $f = f_{i+1}$.

On a bien $|f_{i+1} - f_i|_\nu \leq \varepsilon_0 h^{2\theta}$ par (7.3), et f_i et f_{i+1} sont dans U_h.

Par (7.8) i), $\psi_i \in V^2_{\nu/2^{i+2}}$, et il existe donc $\Delta\psi_i \in \mathbf{R}^n \times C^\omega_{\nu/2^{i+3}, 1}$ tel que, si l'on pose

$$\psi_{i+1} = \psi_i + \Delta\psi_i,$$

on ait :

(7.5) i+1) $f_{i+1} \circ g_{i+1} - g_i \circ R_\alpha + \lambda_{i+1} = 0$.

D'après (7.3) :

$$|f_{i+1} - f_i|_{\nu/2^{i+1}} \leq C_2 \mu \left(\frac{\nu}{2^{i+1}}\right)^{2\theta},$$

C_2 étant une constante indépendante de i et de f.

Si C est la constante du théorème d'Arnold (indépendante de h), on a, d'après celui-ci :

(7.6) i+1) $|\psi_{i+1} - \psi_i|_{\nu/2^{i+3}} = |\Delta\psi_i|_{\nu/2^{i+3}} \leq CC_2 \left(\frac{\nu}{2^{i+1}}\right)^\theta$

(7.7) i+1) $|\psi_{i+1} - \psi_i|_{\nu/2^{i+3}, 1} = |\Delta\psi_i|_{\nu/2^{i+3}} \leq CC_2 \left(\frac{\nu}{2^{i+1}}\right)^\theta$.

On choisit donc $C_1 = CC_2$.

Il faut s'assurer que $\psi_{i+1} \in V^2_{\nu/2^{i+3}}$.

c) *Troisième choix de* μ.

On a : $|\psi_{i+1} - \mathrm{Id}|_{\nu/2^{i+3}, 1} \leq \sum_{p=1}^{i+1} |\psi_p - \psi_{p-1}|_{\nu/2^{p+2}, 1} C_1 \leq \mu \left(\sum_{p=0}^{i+1} \left(\frac{\nu}{2^{p+2}}\right)^{\theta-1}\right)$.

Or, puisque $\boxed{\theta > 1}$:

$$\sum_{p=0}^{i+1} \left(\frac{\nu}{2^{p+2}}\right)^{\theta-1} < A = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{2^{p+2}}\right)^{\theta-1} < +\infty.$$

Pour s'assurer que $\psi_{i+1}\in V^2_{\nu/2^{i+3}}$, il suffit donc de choisir $\mu C_1 A \leq 1/8$, et ceci achève la récurrence, (7.8) i+1) étant établie.

On a ainsi, par les trois choix a), b), c), déterminé μ, donc $V^{2\theta}_{R_\alpha}$, et μ ne dépend que du choix de θ et (pour β fixé) de C_β; si C_β diminue, μ diminue.

Démonstration de 7 A). — Soient $f\in V^{2\theta}_{R_\alpha}$, $f_i - R_\alpha$ déterminé par (6.1), et ψ_i; (7.6) i) et la proposition d'approximation (6.1) montrent que :

$$\sum_{i=1}^{\infty}\Delta\psi_i=\sum_{i=1}^{\infty}(\psi_i-\psi_{i-1})$$

converge dans $\mathbf{R}^n\times C^{[\theta]}(\mathbf{T}^n,\mathbf{R}^n)$ pour la $C^{[\theta]}$-topologie vers un élément

$$\Delta\psi=(\Delta\lambda,\Delta g)\in\mathbf{R}^n\times C^{\theta}(\mathbf{T}^n,\mathbf{R}^n)$$

(de plus il y a convergence dans la $C^{\theta-\varepsilon}$-topologie pour tout $\varepsilon>0$). Soit :

$$s(f)=(\Delta\lambda,\mathrm{Id}+\Delta g).$$

D'après (6.1) (et son complément), et le fait que $g\in D^{\theta}(\mathbf{T}^n,0)$ (par passage à la limite, si $i\to+\infty$, à partir de l'inégalité (7.8) i)), on a $|D(\Delta g)|_0\leq 1/8$ (noter que $\theta>1$). Donc

$$s:\ V^{2\theta}_{R_\alpha}\to\mathbf{R}^n\times D^{\theta}(\mathbf{T}^n)$$
$$f\mapsto(\lambda,g).$$

On a, par passage à la limite à partir de l'égalité (7.5) i) :

$$f\circ g-g\circ R_\alpha+\lambda=0,$$

donc $$\boxed{f=R_\lambda\circ g\circ R_\alpha\circ g^{-1}.}\quad\blacksquare$$

Remarque. — Puisque $|D(\Delta g)|_0\leq 1/8$, g est C^1-isotope à l'identité (*i.e.* $g\in D^{\theta}_{+}(\mathbf{T}^n,0)$).

B) *Si* $r\geq 2\theta$, $r-\theta$ *est non entier.* s *envoie* $V^{2\theta}_{R_\alpha}\cap D^r(\mathbf{T}^n)$ *dans* $\mathbf{R}^n\times D^{r-\theta}(\mathbf{T}^n,0)$.

Démonstration. — Soit $f\in V^{2\theta}_{\alpha}\cap D^r(\mathbf{T}^n)$. On a, par (7.3) :

$$|f_{i+1}-f_i|_{\nu/2^{i+1}}\leq\varepsilon_0(\nu/2^{i+1})^{2\theta}.$$

Puisque $f\in V^{2\theta}_{\alpha}$, mais aussi puisque f est C^r, par la proposition d'approximation (6.1) :

$$|f_{i+1}-f_i|_{\nu/2^{i+1}}\leq C(r)\frac{|f-R_\alpha|_{C^r}}{2^{(i+1)r}}$$

où $C(r)$ est une constante dépendant seulement de r et de n. D'après (7.6) i) :

$$|\psi_i-\psi_{i-1}|_{\nu/2^{i+2}}\leq C_1\mu\left(\frac{\nu}{2^i}\right)^{\theta},$$

mais aussi par le théorème d'Arnold :

$$|\psi_i-\psi_{i-1}|_{\nu/2^{i+2}}\leq C\frac{|f_i-f_{i-1}|_{\nu/2^i}}{(\nu/2^i)^\theta};$$

en remplaçant on obtient :

$$|\psi_i-\psi_{i-1}|_{\nu/2^{i+2}}\leq CC(r)|f-R_\alpha|_{C^r}/2^{(i+1)r}\left(\frac{\nu}{2^i}\right)^\theta.$$

Il en résulte que

$$|\psi_i-\psi_{i-1}|_{\nu/2^{i+2}}\leq C(f)\left(\frac{\nu}{2^{i+2}}\right)^{r-\theta},$$

$C(f)$ étant une constante indépendante de i, mais dépendant de f, r, θ, etc. Par (6.1) ($r\geq 2\theta$), $\sum_{i=1}^{\infty}\Delta\psi_i$ converge vers $\Delta\psi\in\mathbf{R}^n\times C^{[r-\theta]}(\mathbf{T}^n,\mathbf{R}^n)$ dans la $C^{[r-\theta]}$-topologie. De plus, puisque $r-\theta$ est non entier par hypothèse, on a, d'après (6.1) :

$$s(f)=(\Delta\lambda,\ \mathrm{Id}+\Delta g)\in\mathbf{R}^n\times D^{r-\theta}(\mathbf{T}^n,0),$$

ce qui prouve que

$$s:\ V^{2\theta}_{R_\alpha}\cap D^r(T^n)\to\mathbf{R}^n\times D^{r-\theta}(\mathbf{T}^n,0).\ \blacksquare$$

C) *s envoie* $V^{2\theta}_{R_\alpha}\cap D^\infty(\mathbf{T}^n)$ *dans* $\mathbf{R}^n\times D^\infty(\mathbf{T}^n)$.

Démonstration. — Immédiat par B) puisque, si $f\in V^{2\theta}_\alpha\cap D^\infty(\mathbf{T}^n)$, $s(f)$ est $C^{r-\theta}$ pour tout r. $\blacksquare$

D) *Continuité de s.*

Démonstration. — Soient $r\geq 2\theta$, $r-\theta$ non entier, K un compact de $D^r(\mathbf{T}^n)\cap V^{2\theta}_{R_\alpha}$ et $t\in K\mapsto f_t$ une application continue. Puisque K est compact, par (6.3), il existe $t\in K\mapsto(f_t)_i$ dépendant continûment de f_t. Par la continuité du théorème d'Arnold (5.2), $t\in K\mapsto\Delta\psi_i(t)$ dépend continûment de t; remarquons que, puisque K est compact, les constantes sont uniformément majorées sur K. L'application $t\mapsto\sum_{i=1}^{\infty}\Delta\psi_i(t)$ converge donc uniformément en t pour la $C^{[r-\theta]}$-topologie vers $t\in K\mapsto\Delta\psi(t)$ qui est donc continue. L'application s est bien continue, de $V^{2\theta}_{R_\alpha}\cap D^r(\mathbf{T}^n)$ dans $\mathbf{R}^n\times D^{r-\theta}(\mathbf{T}^n,0)$ pour la $C^{[r-\theta]}$-topologie, car si K est une suite convergente $f_i\to f$ dans la C^r-topologie, alors $s(f_i)\to s(f)$ dans $\mathbf{R}^n\times D^{[r-\theta]}(\mathbf{T}^n,0)$ (et même, pour tout $\varepsilon>0$, $f\to s(f)\in D^{r-\theta-\varepsilon}(\mathbf{T}^1)$ est continue, d'après (6.1.1)). $\blacksquare$

E) *s envoie* $V^{2\theta}_{R_\alpha}\cap D^\omega(\mathbf{T}^n)$ *dans* $\mathbf{R}^n\times D^\omega(\mathbf{T}^n,0)$.

Démonstration. — Si $f=\mathrm{Id}+\alpha+\varphi\in D^\omega(\mathbf{T}^n)$, il existe, d'après (3.4), un $h>0$ tel que $\varphi\in C^\omega_h(\mathbf{T}^n,\mathbf{R}^n)$. D'après (6.2), si φ_i sont les approximations de (6.1) et si i est tel que $\nu/2^i\leq h/2$, alors

$$|f-\varphi_i-R_\alpha|_{\nu/2^i}\leq|f-\varphi_i-R_\alpha|_{h/2}\leq C(f)e^{-2\pi 2^i h/8},$$

où la constante $C(f)$ dépend de f et de h, mais non de i.

On aura, si i est assez grand :

$$C(f)e^{-2\pi 2^i h/8} \leq \varepsilon_0 \left(\frac{\nu}{2^i}\right)^{2\theta}.$$

Puisque $C(f)\, e^{-2\pi 2^i h/8} 2^{i\theta}/\nu^{2\theta} \to 0$ si $i \to +\infty$, pour i assez grand, on pourra donc supposer que $f_{i+1}=f$, et par le théorème d'Arnold il existera $\Delta\psi_i \in \mathbf{R}^n \times C^{\omega}_{\nu/2^{i+3},1}$ tel que $\psi_{i+1}=\psi_i+\Delta\psi_i=(\lambda_{i+1}, g_{i+1})$ vérifie :

$$f\circ g_{i+1}-g_{i+1}\circ R_\alpha+\lambda_{i+1}=0$$

et $(\lambda_{i+1}, g_{i+1}) \in \mathbf{R}^n \times D^{\omega}(\mathbf{T}^n, 0)$, en fait $g_{i+1} \in D^{\omega}_{\nu/2^{i+3},1}$.

Le procédé se stabilise donc. L'application s envoie bien $V^{2\theta}_{R_\alpha} \cap D^{\omega}(\mathbf{T}^n)$ dans $D^{\omega}(\mathbf{T}^n, 0)$ par l'injectivité (5.2) D) et par la continuité du théorème d'Arnold (5.2). Ce n'est que pour $\mathbf{T}^n$ $(n \geq 2)$ qu'on a besoin de l'unicité (5.2) D). ■

8. Remarques sur l'équation linéarisée.

On suppose que $r<+\infty$ avec $r \in \mathbf{R}_+$. Soient $\alpha \in \mathbf{R}^n$, $\beta \geq 0$, $C_\beta > 0$, tels que, pour tout $k \in \mathbf{Z}^n - \{0\}$:

$$||\langle k, \alpha\rangle|| \geq \frac{C_\beta}{|k|^{n+\beta}}.$$

Soit
$$\theta = \begin{cases} n+\varepsilon & \text{si} \quad \beta=0 \\ n+\beta & \text{si} \quad \beta \neq 0. \end{cases}$$

Etant donné $\varphi \in C^r(\mathbf{T}^n)$ vérifiant $\int_{\mathbf{T}^n} \varphi(x)dx=0$, on cherche ψ tel que :

$$L_\alpha(\psi)=\psi-\psi\circ R_\alpha=\varphi.$$

Nous avons déjà discuté les cas C^∞ et C^ω en 4.

On a, pour $r<+\infty$, la

Proposition **(8.1)**. — *Si* $r>\theta$, $\varphi \in C^r(\mathbf{T}^n)$ *et* $0=[\varphi]=\int_{\mathbf{T}^n} \varphi(x)dx$, *il existe* $\psi \in C^{r-\theta}(\mathbf{T}^n)$,

si $r-\theta$ *n'est pas entier* (*et si* $r-\theta$ *est entier*, ψ *est* $C^{r-\theta-1}$ *et « smooth au sens de Zygmund »*), *telle que* ψ *vérifie*

$$\psi-\psi\circ R_\alpha=\varphi;$$

de plus ψ *est unique si on suppose que* $\psi(0)=0$.

Démonstration. — (6.1) permet d'approcher φ par des polynômes trigonométriques φ_i de degré $\leq 2^i$, avec $\varphi_0=0$, tels que

$$|\varphi_i-\varphi_{i-1}|_{1/2^i} \leq C(r)\frac{|\varphi|_{C^r}}{2^{ir}},$$

et $\int_{\mathbf{T}^n} (\varphi_i-\varphi_{i-1})(x)dx=0$.

On pose $\psi_0 = 0$. Soit, pour $i \geq 1$, $\Delta\psi_i \in C^{\omega}_{\nu/2^i}$ avec $\nu = 1/2$, déterminé par la proposition (4.1), vérifiant $L_\alpha(\Delta\psi_i) = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ (*i.e.* $\Delta\psi_i - \Delta\psi_i \circ R_\alpha = \varphi_i - \varphi_{i-1}$). On a, par (4.1) :

$$|\Delta\psi_i|_{\nu/2^i} \leq C(r)|\varphi|_{C^r}/2^{ir}(\nu/2^i)^\theta \quad \text{et} \quad \Delta\psi_i(0) = 0,$$

donc
$$|\Delta\psi_i|_{\nu/2^i} \leq \frac{C^{te}}{2^{i(r-\theta)}}.$$

Par (6.2), si $r-\theta$ est non entier, $\psi = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta\psi_i$ converge pour la $C^{[r-\theta]}$-topologie vers une fonction de $C^{r-\theta}(\mathbf{T}^n)$. Par passage à la limite, puisque $\Delta\psi_i - \Delta\psi_i \circ R_\alpha = \varphi_i - \varphi_{i-1}$,

$$\psi - \psi \circ R_\alpha = \varphi = \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi_i - \varphi_{i-1})$$

et $\psi(0) = 0$.

Si $r-\theta$ est entier ($\neq 0$), ψ est $C^{r-\theta-1}$ et « smooth au sens de Zygmund » d'après (6.1) (complément). ■

(8.2) *Cas de* $\mathbf{T}^1$.

On a la

Proposition **(8.2.1)**. — *Soient* $\varepsilon > 0$, $\varphi \in C^0(\mathbf{T}^1)$, *telle que* $[\varphi] = \int_{\mathbf{T}^1} \varphi(x)\,dx = 0$ *et* $|\hat{\varphi}(k)| = \left|\int_{\mathbf{T}^1} e^{-2\pi i k x}\varphi(x)\,dx\right| \leq O(1/|k|(\mathrm{Log}|k|)^{3+\varepsilon})$. *Alors, pour presque tout* α *(au sens de la mesure de Lebesgue), il existe* $\psi \in C^0(\mathbf{T}^1)$ *(et même* ψ *est dans la classe* A : *sa série de Fourier est absolument convergente) vérifiant :*

$$\psi - \psi \circ R_\alpha = \varphi.$$

Démonstration. — On a nécessairement :

$$\psi(x) = \sum_{|n| \neq 0} \frac{\hat{\varphi}(n)}{1 - e^{2\pi i n \alpha}} e^{2\pi i n x}$$

et, par (4.3.2) :

$$\sum_{|n|\neq 0} \left| \frac{\hat{\varphi}(n)}{1 - e^{2\pi i n\alpha}} \right| \leq O\left(\sum_{|n|\neq 0} \frac{1}{|n|(\mathrm{Log}(|n|+1))^{3+\varepsilon}} \frac{1}{\|n\alpha\|} \right)$$
$$\leq O(1)$$

pour presque tout α (*i.e.*, tel que, pour $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, il existe $C_\alpha > 0$ vérifiant, pour tout $p/q \in \mathbf{Q}$, $|\alpha - (p/q)| \geq C_\alpha / q^2(\mathrm{Log}(q+1))^{1+\varepsilon'}$).

(8.2.2) *Exemples.*

Soit $\varphi \in C^0(\mathbf{T}^1)$ dérivable sauf sur un ensemble au plus dénombrable et de dérivée $D\varphi$ égale, sauf sur un ensemble au plus dénombrable, à une fonction à variation bornée; alors, si $|k| \to +\infty$, on a :

$$|\hat{\varphi}(k)| = O\left(\frac{1}{|k|^2}\right).$$

C'est ce que nous avons appelé la classe P. Par exemple si φ est PL, φ est de classe P mais non dans $C^1(\mathbf{T}^1)$ (mais tous les $\varphi \in C^1(\mathbf{T}^1)$ ne vérifient pas l'inégalité de (8.2.2)).

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Abraham and J. Robbin, *Transversal mappings and flows*, New York, Benjamin (1967).

[1] D. V. Anosov, On an additive functional homology equation connected with an ergodic rotation of the circle *Translations Math. U.S.S.R. Izvestijia*, **74** (1973), p. 1257-1271.

[1] H. Anzai, Ergodic skew product transformations on the torus, *Osaka Math. J.*, **3** (1951), p. 83-99.

[1] V. I. Arnold, Small denominators I; on the mapping of a circle into itself, *Ivestijia Akad. Nauk.*, serie Math., **25**, 1 (1961), p. 21-86 = *Translations Amer. Math. Soc.*, 2nd series, **46**, p. 213-284.

[1] P. Billingsley, *Ergodic theory and information*, New York, Wiley (1965).

[1] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, Paris, Hermann (1966), chap. 1 et 2, 2e éd.

[2] —, *Topologie générale*, Paris, Hermann (1958), chap. 9, 2e éd.

[3] —, *Topologie générale*, Paris, Hermann (1961), chap. 10, 2e éd.

[4] —, *Intégration*, Paris, Hermann (1965), chap. 1 à 4, 2e éd.

[1] T. Carleman, Sur les caractéristiques du tore, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **195** (1932), p. 478-480.

[1] L. Carleson, A remark on Denjoy's inequality and Herman's theorem, *Publ. math. I.H.E.S.*, **49** (1979), p. 235-241.

[1] J. W. Cassels, An introduction to diophantine approximation, *Cambridge Tracts*, **45**, Cambridge Univ. Press (1957).

[1] J. Cerf, Topologie de certains espaces de plongements, *Bull. Soc. Math. Fr.*, **89** (1961), p. 227-380.

[2] —, $\Gamma_4 = 0$, *Lecture Notes in Math.*, No. 53, Berlin, Springer Verlag (1968).

[1] L. Comtet, *Analyse combinatoire*, Paris, Presses Universitaires de France (1970), t. I.

[1] P. Deligne, Les difféomorphismes du cercle, *Séminaire Bourbaki*, n° 477, *Springer Lecture Notes in Math.*, n° 567, Berlin (1977), p. 99-121.

[1] A. Denjoy, Sur les caractéristiques du tore, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **195** (1932), p. 934-935.

[2] —, Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore, *J. de Math. Pures et Appl.*, (9), **11** (1932), p. 333-375.

[3] —, Les trajectoires à la surface du tore, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **223** (1946), p. 5-7.

[4] —, *Un demi-siècle de notes communiquées aux Académies*, Paris, Gauthier-Villars (1957), vol. II, Champ réel. Dans ce volume se trouvent réunies en E) « Ergodicité et stabilité des trajectoires » les notes [1] et [3] de Denjoy ainsi que deux autres notes de 1932.

[5] —, *Articles et Mémoires*, Paris, Gauthier-Villars (1955), vol. II, p. 1063 (*i.e.* dans la notice sur les travaux scientifiques, publiés en 1934). La référence [2] se trouve aussi dans ce volume.

[1] J. Dieudonné, *Fondements de l'analyse moderne*, Paris, Gauthier-Villars (1963), t. I.

[2] —, *Eléments d'analyse*, Paris, Gauthier-Villars (1969), t. II.

[1] D. G. Ebin, The manifold of Riemannian metrics, *Proc. Symp. in Pure Math.*, vol. XV (1970), p. 11-40, Providence, Am. Math. Soc.

[1] A. Fathi et M. R. Herman, Existence de difféomorphismes minimaux (in *Proc. Intern. Conf. on Dynamical Systems*, Varsovie, 1977), *Astérisque*, **49** (1977), p. 37-59.

[1] — et Y. M. VISETTI, Structure du groupe des homéomorphismes préservant une mesure sur une variété compacte, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **284** (1977), p. 849-852.

[1] A. FINZI, Problème de la génération d'une transformation d'une courbe fermée, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, 3^e série, **67** (1950), p. 243-305.

[1] H. FÜRSTENBERG, Strict ergodicity and transformation of the torus, *Am. J. Math.*, **83** (1961), p. 573-601.

[1] A. GARSIA, *Topics in almost everywhere convergence*, Lectures in Advanced Math. 4, Chicago, Markham (1970).

[1] W. GOTTSCHALK and G. A. HEDLUND, *Topological dynamics*, Am. Math. Soc. Coll. Publ., vol. **36**, Providence (1955).

[1] M. I. GRABAR, Sur la stricte ergodicité des systèmes dynamiques, *Doklady Akademi Nauk. S.S.S.R.*, **95** (1954), p. 9-12 (en russe).

[1] R. HAMILTON, *The inverse function theorem of Nash and Moser*, preprint.

[1] P. HALMOS, *Measure theory*, Berlin, Springer Verlag (1974).

[1] M. R. HERMAN, Mesure de Lebesgue et nombre de rotation, *Springer Lecture Notes in Math.*, n° 597, Berlin (1977), p. 271-293.

[2] —, Sur le groupe des difféomorphismes du tore, *Ann. de l'Inst. Fourier*, **23** (2) (1973), p. 75-86.

[3] —, Conjugaison C^∞ des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation satisfait à une condition arithmétique, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **282** (1976), p. 503-506.

[4] —, Conjugaison C^∞ des difféomorphismes du cercle pour presque tout nombre de rotation, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **283** (1976), p. 579-582.

[5] —, Sur les mesures invariantes (in *Proc. Int. Conf. on Dynamical Systems*, Rennes (1975)), *Astérisque*, **40** (1977), p. 103-104.

[6] —, Sur la conjugaison des difféomorphismes du cercle à des rotations (in *Proc. Conférence sur l'analyse en dimension infinie*, Lyon (1975)), *Mémoire n° 46 de la Soc. Math. de France* (1976), p. 181-188.

[7] —, *L^2-regularity of measurable solutions of a finite difference equation of the circle*, preprint, Warwick Univ.

[8] —, Sur l'algèbre de Lie des champs de vecteurs $\mathbf{R}$-analytiques du tore, *Springer Lect. Notes in Math.*, n° 485, Berlin (1975), p. 43-49.

[9] —, Sur le groupe des difféomorphismes $\mathbf{R}$-analytiques du tore, *idem* [8], p. 36-42.

[10] —, Sur le groupe des difféomorphismes $\mathbf{R}$-analytiques de $\mathbf{R}$, *Indag. Math.*, **37** (4) (1975), p. 351-355.

[1] E. HEWITT and K. STROMBERG, *Real and abstract analysis*, Berlin, Springer Verlag (1965).

[1] W. HUREWICZ, Ergodic theorem without invariant measure, *Ann. of Math.*, **45** (1944), p. 192-206.

[1] M. C. IRWIN, On the Smoothness of Composition, *Quart. J. Math. Oxford*, **23** (1972), p. 113-133.

[1] H. JACOBOWITZ, Implicit function theorem and isometric embeddings, *Ann. of Math.*, **95** (1972), p. 191-225.

[1] R. JONES and W. PARRY, Compact abelian group extensions of dynamical systems II, *Compositio Math.*, **25** (1972), p. 135-147.

[1] A. B. KATOK, Manuscrit (septembre 1977).

[1] Y. KATZNELSON, Sigma-finite invariant measures for smooth mappings of the circle, *J. d'Analyse Math.*, **31** (1977), p. 1-18.

[1] H. KESTEN, On a conjecture of Erdös-Szüsz related to uniform distribution mod 1, *Acta Arith.*, **12** (1966), p. 193-212.

[1] A. KHINTCHINE, *Continued fractions*, translated by P. Wynn, Groningen, Nordhorff (1963).

[1] A. N. KOLMOGOROV, Sur les systèmes dynamiques avec un invariant intégral sur le tore, *Doklady Akademi Nauk. S.S.S.R.*, **93** (1953), p. 763-766 (en russe).

[1] L. KUIPERS and H. NIEDERREITER, *Uniform distribution of sequences*, New York, Interscience, Wiley (1974).

[1] S. LANG, *Introduction to diophantine approximation*, New York, Addison-Wesley (1966).

[1] M. MARKELEY, Homeomorphisms of the circle without periodic points, *Proc. London Math. Soc.*, 3rd series, **20** (1970), p. 688-698.

[1] A. MARTINEAU, Sur des théorèmes de S. Banach et de L. Schwartz concernant le graphe fermé, *Studia Math.*, **30** (1968), p. 43-51.

[1] D. MONTGOMERY and L. ZIPPIN, *Topological transformation groups*, New York, Interscience, Wiley (1955).

[1] J. MOSER, A rapidly convergent iteration method, part II, *Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa*, Ser. III, **20** (1966), p. 499-535.

[2] —, A new technique for the construction of solutions of non-linear differential equations, *Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A.*, **47** (1961), p. 1824-1831.

[1] A. Oppenheim, Rational approximation to irrationals, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **47** (1941), p. 602-604.
[1] W. Parry, Compact abelian group actions of discrete dynamical systems, *Z. Wahrsch.*, **13** (1969), p. 95-113.
[1] K. Petersen, On a series of cosecants related to a problem in ergodic theory, *Compositio Math.*, **26** (1973), p. 313-317.
[1] L. Pontryagin, *Topological groups*, New York, Gordon and Breach (1966), 2nd edition.
[1] H. Rosenberg, Un contre-exemple à la conjecture de Seifert, exposé n° 434, *Séminaire Bourbaki, Lecture Notes in Math.*, n° 383, Berlin, Springer Verlag (1974), p. 294-306.
[2] —, Les difféomorphismes du cercle, exposé n° 476, *Séminaire Bourbaki, Springer Lecture Notes in Math.*, n° 567, Berlin (1977), p. 81-98.
[1] W. Rudin, *Fourier Analysis on Groups*, New York, Interscience, Wiley (1962).
[1] H. Rüssmann, Kleine Nenner II : Bemerkungen zur Newtonschen Methode, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen*, Math. Phys. Kl. (1972), p. 1-10.
[2] —, Über invariante Kurven differenzierbarer Abbildungen eines Kreisringes, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen*, Math. Phys. Kl. (1970), p. 67-105.
[3] —, On optimal estimates for the solutions of linear partial differential equations of the first order with constant coefficients on the torus, *Lect. Notes in Physics*, No. 38, Berlin, Springer Verlag (1975), p. 598-624.
[4] —, Notes on sums containing small divisors, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **29** (1976), p. 755-758.
[5] —, On optimal estimates for the solutions of linear difference equations on the circle, *Celestial Mechanics*, **14** (1976), p. 33-37.
[6] —, Über die Iteration analytischer Funktionen, *J. Math. and Mech.*, **17** (1967), p. 523-532.
[1] T. Saito, On dynamical systems in n-dimensional torus, *Funkcial. Ekvac.*, **7** (1965), p. 91-102.
[2] —, On the measure preserving flow on the torus, *J. Math. Soc. Japan*, **3** (1951), p. 279-284.
[1] T. Schneider, *Introduction aux nombres transcendants*, traduction, Paris, Gauthier-Villars (1969).
[1] F. Sergeraert, Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications, *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.*, 4e série, t. **5** (1972), p. 599-660.
[1] H. S. Shapiro, *Smoothing and approximation of functions*, New York, Van Nostrand (1968).
[1] N. B. Slater, Gaps and Steps for the sequence $n\theta$ mod 1, *Proc. Camb. Philos. Soc.*, **63** (1967), p. 1115-1123.
[1] S. Sternberg, On differential equations on the torus, *Amer. J. Math.*, **79** (1957), p. 397-402.
[2] —, *Celestial mechanics*, vol. II, New York, Benjamin (1969).
[1] W. Thurston, *On the structure of the group of volume-preserving diffeomorphisms*, preprint.
[1] W. A. Veech, Strict ergodicity in zero dimensional dynamical systems and the Kronecker-Weyl theorem mod 2, *Trans. Am. Math. Soc.*, **140** (1969), p. 1-33.
[1] E. Zehnder, An implicit function theorem for small divisor problems, *Bull. Am. Math. Soc.*, **80** (1974), p. 174-178.
[2] —, Generalized implicit function theorems with applications to some small divisor problems I, *Comm. in Pure and Appl. Math.*, **28** (1975), p. 91-140.

Note bibliographique

Malheureusement dans A. Finzi [1], la démonstration du théorème contient une faute (signalée par J. Glimm et R. Sacksteder). (Une erreur se trouve p. 269, lignes 5 à 9; l'inégalité implicitement utilisée est fausse : si $\left|\frac{a_i b_i}{c_i d_i} - 1\right| = 0 \leq \eta$, les $a_i, \ldots, d_i$ étant positifs, on n'a pas en général $\left|\frac{(\Sigma a_i)(\Sigma b_i)}{(\Sigma c_i)(\Sigma d_i)} - 1\right| \leq \varepsilon(!)$.) Néanmoins, nous nous sommes inspirés de cet article en VI.6 et VIII.2.1.

Manuscrit reçu le 30 novembre 1977.