TAKAO FUKUDA

Types topologiques des polynômes

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 46 (1976), p. 87-106
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1976__46__87_0>

TYPES TOPOLOGIQUES DES POLYNOMES

par TAKUO FUKUDA

0. Introduction

(0.1) *Résultat.*

R. Thom a conjecturé que *étant donné un nombre entier k, le nombre des types topologiques des polynômes de degré $\leq k$ est fini.* Le but de cet article est de donner une réponse affirmative à cette conjecture.

On précise ce que la conjecture veut dire. Dans ce qui suit, la lettre K désigne, soit le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels, soit le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. On désigne par K^n l'espace affine de dimension n sur K. Soit $P(n, m, k; K)$ l'ensemble des applications polynomiales de K^n dans K^m à coefficients dans K de degré $\leqq k$; c'est-à-dire des applications $f=(f_1, \ldots, f_m) : K^n \to K^m$ dont chaque i-ème composante f_i est un polynôme de degré $\leqq k$.

On dira que deux applications f et $g \in P(n, m, k; K)$ sont topologiquement équivalentes, et on notera $f \overset{\text{top}}{\sim} g$, s'il existe des homéomorphismes $h : K^n \to K^n$ et $h' : K^m \to K^m$ tels que $h' \circ f = g \circ h$. Ceci définit entre éléments de $P(n, m, k; K)$ une relation d'équivalence. On désigne par $P(n, m, k; K)/\overset{\text{top}}{\sim}$ l'ensemble quotient de $P(n, m, k; K)$ par cette équivalence.

La conjecture de Thom et notre résultat s'énoncent alors sous la forme plus précise suivante :

Conjecture de Thom et Théorème 1. — $P(n, 1, k; K)/\overset{\text{top}}{\sim}$ *est un ensemble fini.*

(0.2) *Remarques.*

Avant de commencer la démonstration du théorème, faisons quelques remarques. D'une part si on considère la version différentiable, *i.e.* si on remplace dans ce qui précède homéomorphismes par difféomorphismes, alors il existe un exemple qui nous montre que le théorème est faux :

Exemple 1 (d'après H. Whitney). — On considère la fonction $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^1$, dépendant algébriquement du paramètre t, définie par l'équation :

$$F_t(x, y) = x(y + tx)(x^2 - y^2).$$

En calculant le bi-rapport des droites $x=0$, $y+tx=0$, $x+y=0$ et $x-y=0$, on voit que le type différentiable de cette fonction varie continûment avec le paramètre t, c'est-à-dire que deux fonctions correspondant à des valeurs différentes du paramètre t ne sont pas de même type différentiable. Cet exemple nous montre que $P(n, 1, k; \mathbf{R})/\overset{\text{diff}}{\sim}$ n'est plus fini.

D'autre part, Thom [7] a donné un exemple qui montre que $P(n, m, k; K)/\overset{\text{top}}{\sim}$ n'est pas fini en général pour $m \geqq 3$:

Exemple 2 ([7]). — On considère l'application $G_t : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, dépendant algébriquement du paramètre t, définie par les équations :

$$\begin{aligned} X &= (x(x^2+y^2-a^2)-2ayz)^2((ty+x)(x^2+y^2-a^2)-2az(y-tx))^2, \\ Y &= x^2+y^2-a^2, \\ Z &= z. \end{aligned}$$

Thom a montré que deux applications G_t et G_s, correspondant à deux valeurs différentes du paramètre t, ne sont pas de même type topologique.

Le problème du cas où $m=2$ reste encore ouvert. On doit noter que R. Thom a écrit à l'auteur qu'il croit que dans ce cas aussi :

Conjecture (d'après R. Thom). — L'ensemble $P(n, 2, k; K)/\overset{\text{top}}{\sim}$ *est un ensemble fini.*

Je remercie vivement M. René Thom pour les conversations que nous avons pu avoir ensemble et pour ses suggestions et encouragements.

(0.3) *Table des matières.*

Au premier chapitre on rappelle le lemme d'isotopie de Thom. Le deuxième chapitre est consacré à la stratification des morphismes algébriques. Ces lemmes d'isotopie et de stratification des morphismes algébriques sont les outils principaux de la démonstration de notre théorème 1.

TABLE DES MATIÈRES

I. — LEMMES D'ISOTOPIE DE THOM

Thom a donné dans ses articles ([7] et [8]) un critère, appelé lemme d'isotopie, très utile pour la classification topologique des applications continues. Dans ce chapitre, on le rappelle. Pour la démonstration de ce lemme, consulter les articles de J. Mather ([4] et [5]).

Notation. — On désigne par $\overline{\mathrm{A}}$ l'adhérence d'un sous-ensemble A dans un espace total considéré et par Int A l'intérieur de A. On note $\mathrm{T}_p(\mathrm{M})$ l'espace tangent à une variété M en un point p de M, par $(dg)_p$ l'application linéaire tangente à une application différentiable $g : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ en un point p de M.

1. Stratification de Whitney.

Soit X une variété de dimension r différentiablement plongée dans $\mathbf{R}^n$. Soit $\mathrm{G}_{n,r}$ la grassmannienne des r-plans contenant l'origine de $\mathbf{R}^n$. On considère l'espace tangent à X en $x \in \mathrm{X}$, $\mathrm{T}_x(\mathrm{X})$, comme un élément de $\mathrm{G}_{n,r}$.

Définition **(1.1)** (*Propriété* (a)). — Soient $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \subset \mathbf{R}^n$ deux variétés différentiables. Soit y un point de Y adhérent à X. On dit que la paire (X, Y) possède en y la propriété (a) si pour toute suite de paires $(x_i, \mathrm{T}_{x_i}(\mathrm{X}))$, $x_i \in \mathrm{X}$, tendant vers $(y, \tau) \in \mathbf{R}^n \times \mathrm{G}_{n,r}$, on a $\mathrm{T}_y(\mathrm{Y}) \subset \tau$.

On dit que la paire (X, Y) possède la propriété (a) si elle la possède en tout point $y \in \mathrm{Y} \cap \overline{\mathrm{X}}$.

Pour deux points x et y de $\mathbf{R}^n$, désignons par $\widehat{xy}$ la droite issue de l'origine de $\mathbf{R}^n$ qui est parallèle à la droite joignant x à y. On désigne par $\mathbf{P}^{n-1}$ l'espace projectif réel de dimension $n-1$. Soit Δ la diagonale de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.

Définition **(1.2)** (*Propriété* (b)). — Soient X et Y deux variétés différentiablement plongées dans $\mathbf{R}^n$ avec $\dim \mathrm{X} = r$. Soit $y \in \mathrm{Y} \cap \overline{\mathrm{X}}$. On dit que la paire (X, Y) possède en y la propriété (b) si étant donnée une suite de paires $(x_i, y_i) \in (\mathrm{X} \times \mathrm{Y}) - \Delta$ telles que $(x_i, y_i, \widehat{x_i y_i}, \mathrm{T}_{x_i}(\mathrm{X}))$ convergent vers un point (y, y, ℓ, τ) de $\Delta \times \mathbf{P}^{n-1} \times \mathrm{G}_{n,r}$, on a $\ell \subset \tau$.

Remarque (*Mather* [4]). — *La propriété* (b) *implique la propriété* (a).

Définition **(1.3)** (W-*complexe*). — On appelle *complexe de Whitney* (ou W-*complexe*) un ensemble $\mathscr{S} = \{\mathrm{X}_\alpha\}$ de sous-variétés C^∞ connexes de $\mathbf{R}^n$ satisfaisant aux propriétés suivantes :

(i) les éléments de $\mathscr{S} = \{\mathrm{X}_\alpha\}$ sont deux à deux disjoints;
(ii) toute paire $(\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_\beta)$ d'éléments de $\mathscr{S}$ possède les propriétés (a) et (b);

(iii) finitude locale : étant donné un point $x \in \mathbf{R}^n$, il existe un voisinage de x qui ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de $\mathscr{S}$;

(iv) propriété de frontière : si $\overline{X}_\alpha \cap X_\beta \neq \emptyset$, alors $X_\beta \subset \overline{X}_\alpha - X_\alpha$.

On appelle *strate* de $\mathscr{S}$ un élément de $\mathscr{S}$. On appelle W-complexe *fini* un W-complexe dont le nombre des strates est fini. Un sous-ensemble d'un W-complexe $\mathscr{S}$ est appelé un *sous*-W-*complexe* de $\mathscr{S}$.

Définition (**1.4**) *(Ensemble stratifié)*. — On appelle *ensemble stratifié* (ou W-*objet*) un sous-ensemble E de $\mathbf{R}^n$ qui se présente comme une réunion des strates d'un W-complexe S(E), qui est appelé une W-*stratification* de E. Si le W-complexe S(E) est fini, on dit que la stratification est *finie*.

Une variété M sera considérée comme un W-objet muni de sa W-*stratification triviale* $S(M) = \{M\}$.

Notation (**1.5**). — Soient X, Y deux strates de S(E) avec $Y \cap \overline{X} \neq \emptyset$. On a alors, par la propriété de frontière, $Y \subset \overline{X} - X$. On représente cette situation par le symbole $Y \prec X$.

Soit E un W-objet muni de sa stratification S(E). On appelle *sous-ensemble stratifié* (ou *sous*-W-*objet*) de E un sous-ensemble A de E qui est un W-objet muni d'un sous-W-complexe de S(E) comme stratification.

Définition (**1.6**). — Soit A un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$. On dit qu'une application continue $f : A \to \mathbf{R}^m$ est *différentiable* si elle s'étend à une application différentiable d'un voisinage de A dans $\mathbf{R}^m$.

Définition (**1.7**) *(Application stratifiée)*. — Soient $E \subset \mathbf{R}^n$ et $F \subset \mathbf{R}^m$ deux W-objets. Une application différentiable $f : E \to F$ sera appelée une *application stratifiée* (ou W-*morphisme*) si elle possède la propriété suivante : L'image d'une strate X de E est contenue dans une strate Y de F, et la restriction de f à chaque strate, $f | X : X \to Y$, est une submersion.

On appellera *application exactement stratifiée* une application stratifiée possédant de plus la propriété suivante : L'image d'une strate de E est exactement une strate de F.

Remarque. — *Une application stratifiée propre est une application exactement stratifiée.* Rappelons qu'une application continue $f : A \to B$ est propre si $f^{-1}(K)$ est compact pour tout compact K de B.

Notation. — Dans ce qui suit, on désigne par $f(X)$ l'image de X par f et même la strate de F qui contient l'image de X par f s'il n'y a pas à craindre qu'on les confonde.

2. Lemmes d'isotopie de Thom.

Proposition (2.1) *(Premier lemme d'isotopie de Thom). — Soit* $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *une application stratifiée propre. Alors la restriction de* f *à l'image réciproque* $f^{-1}(\mathrm{Y})$ *d'une strate* Y *de* S(F), $f : f^{-1}(\mathrm{Y}) \to \mathrm{Y}$, *est une fibration.*

Pour la démonstration de cette proposition, consulter Thom [8] ou Mather ([4] ou [5]).

Définition (2.2). — Soient $(\mathrm{X}_i, \mathrm{Y}_i)$, $i = 1, 2$, deux paires d'espaces topologiques avec $\mathrm{X}_i \supset \mathrm{Y}_i$. On dit que $(\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}_1)$ et $(\mathrm{X}_2, \mathrm{Y}_2)$ sont *homéomorphes* s'il existe un homéomorphisme h de X_1 sur X_2 tel que $h(\mathrm{Y}_1) = \mathrm{Y}_2$.

Proposition (2.3) *(Premier lemme d'isotopie relative). — Soit* $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *un* W-*morphisme propre. Soient* A *un sous*-W-*objet de* E *et* Y *une strate de* F *contenue dans* $f(\mathrm{A})$. *Alors la restriction de* f *à la paire* $(f^{-1}(\mathrm{Y}), f^{-1}(\mathrm{Y}) \cap \mathrm{A})$ *est une fibration relative sur* Y : *Étant donnés deux points* p *et* q *de* Y, *les paires* $(f^{-1}(p), f^{-1}(p) \cap \mathrm{A})$ *et* $(f^{-1}(q), f^{-1}(q) \cap \mathrm{A})$ *sont homéomorphes.*

Notation (2.4). — On note par $\ker(g)_p$ le noyau de l'application linéaire tangente $(dg)_p : \mathrm{T}_p(\mathrm{M}) \to \mathrm{T}_{g(p)}(\mathrm{N})$ à une application différentiable $g : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ en un point p de M.

Définition (2.5) *(Propriété* α_f*). —* Soient X et Y deux sous-variétés de $\mathbf{R}^n$, N une variété quelconque. Soit $f : \mathrm{X} \cup \mathrm{Y} \to \mathrm{N}$ une application différentiable dont les restrictions à X et à Y, $f|\mathrm{X} : \mathrm{X} \to \mathrm{N}$ et $f|\mathrm{Y} : \mathrm{Y} \to \mathrm{N}$, sont de rangs constants. On dira que la paire (X, Y) présente en $y \in \mathrm{Y} \cap \overline{\mathrm{X}}$ *la propriété* α_f si étant donnée une suite de points (x_i) de X tendant vers y tels que les espaces noyaux $\ker(f|\mathrm{X})_{x_i}$ des applications linéaires $(df)_{x_i} : \mathrm{T}_{x_i}(\mathrm{X}) \to \mathrm{T}_{f(x_i)}(\mathrm{N})$ convergent vers un plan $\varkappa \subset \mathrm{T}_y(\mathbf{R}^n)$, on a $\ker(f|\mathrm{Y})_y \subset \varkappa$.

On dit que la paire (X, Y) présente *la propriété* α_f si elle la présente en tout point de $\mathrm{Y} \cap \overline{\mathrm{X}}$.

Définition (2.6) *(Morphismes sans éclatement). —* Soient $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{V}$ deux W-morphismes, V étant une variété différentiable connexe munie de sa stratification triviale. On dit que f est un W-*morphisme sans éclatement au-dessus de* $g : \mathrm{F} \to \mathrm{V}$ si tous les couples (X, Y) de strates de S(E) présentent la propriété α_f.

Définition (2.7) *(*W-*morphismes de Thom). —* Soient $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{V}$ deux W-morphismes, V étant une variété connexe munie de sa stratification triviale. On dit que f est un W-*morphisme de Thom* au-dessus de g si pour tout point a de V, $f_a : \mathrm{E}_a \to \mathrm{F}_a$ est un W-morphisme sans éclatement au-dessus de $g_a = g|\mathrm{F}_a$, où $\mathrm{E}_a = (g \circ f)^{-1}(a)$, $\mathrm{F}_a = g^{-1}(a)$, $f_a = f|\mathrm{E}_a : \mathrm{E}_a \to \mathrm{F}_a$ et $g_a = g|\mathrm{F}_a : \mathrm{F}_a \to \{a\}$.

Proposition (2.8) *(Second lemme d'isotopie de Thom). — Soit* $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *un* W-*morphisme de Thom au-dessus d'un* W-*morphisme* $g : \mathrm{F} \to \mathrm{V}$, V *étant une variété connexe. Si* f *et* g *sont propres, alors, étant donnés deux points* p *et* q *de* V, *les applications restreintes* $f|\mathrm{E}_p : \mathrm{E}_p \to \mathrm{F}_p$ *et*

$f|E_q : E_q \to F_q$ ont même type topologique : il existe des homéomorphismes h_1 et h_2 tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_p & \xrightarrow{h_1} & E_q \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ F_p & \xrightarrow{h_2} & F_q \end{array}$$

commute.

Pour la démonstration de cette proposition, consulter Mather ([4] et [5]). Sa démonstration est faite pour les morphismes sans éclatement, cependant on peut la généraliser facilement au cas des W-morphismes de Thom.

Dans le cas où f et g ne sont pas propres, on peut prouver de même façon le théorème suivant :

Proposition (**2.9**) *(Lemme d'isotopie locale de Thom). — Soit $f : E \to F$ un W-morphisme de Thom (non nécessairement propre) au-dessus d'un W-morphisme $g : F \to V$, V étant une variété connexe et E et F étant localement compacts. Si deux points p et q appartiennent à la même strate de E, alors le germe en p de la restriction $f|E_{g(f(p))} : E_{g(f(p))} \to F_{g(f(p))}$ et le germe en q de $f|E_{g(f(q))} : E_{g(f(q))} \to F_{g(f(q))}$ ont même type topologique (où $E_{g(f(p))} = (g \circ f)^{-1}(g(f(p)))$ et $F_{g(f(p))} = g^{-1}(g(f(p)))$).*

II. — STRATIFICATION DES APPLICATIONS POLYNOMIALES

3. Ensembles constructibles et ensembles semi-algébriques.

Dans ce paragraphe, on rappelle quelques propriétés des ensembles constructibles et des ensembles semi-algébriques.

Définition (**3.1**) *(Ensembles semi-algébriques).* — Désignons par P_n l'anneau des polynômes à n variables à coefficients dans le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels, noté habituellement $\mathsf{P}_n = \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$. Notons par $\mathsf{S}(\mathsf{P})$ la plus petite famille des sous-ensembles de $\mathbf{R}^n$ satisfaisant aux propriétés suivantes :

(i) $\{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) > 0\} \in \mathsf{S}(\mathsf{P}_n)$ pour tout élément $f \in \mathsf{P}_n$.

(ii) Si $A, B \in \mathsf{S}(\mathsf{P}_n)$, alors $A \cap B$, $A \cup B$ et $A - B$ sont des éléments de $\mathsf{S}(\mathsf{P}_n)$.

On appelle *ensemble semi-algébrique* un élément de $\mathsf{S}(\mathsf{P}_n)$.

Définition (**3.2**) *(Ensembles constructibles).* — Désignons encore par P_n l'anneau des polynômes à n variables à coefficients dans le corps des nombres complexes. Notons par $\mathsf{C}(\mathsf{P}_n)$ la plus petite famille des sous-ensembles de $\mathbf{C}^n$ satisfaisant aux propriétés suivantes :

(i) $f^{-1}(0) \in \mathsf{C}(\mathsf{P}_n)$ pour tout $f \in \mathsf{P}_n$.

(ii) Si $A, B \in \mathsf{C}(\mathsf{P}_n)$, alors $A \cup B$, $A \cap B$ et $A - B$ sont des éléments de $\mathsf{C}(\mathsf{P}_n)$.

On appelle *ensemble constructible* un élément de $\mathsf{C}(\mathsf{P}_n)$.

Proposition **(3.3)** (*Seidenberg* [6] *et Chevalley* [1]).

(i) *Soit* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *une application polynomiale. Si* $A \subset \mathbf{R}^n$ *est semi-algébrique, alors* $f(A)$ *est aussi semi-algébrique.*

(ii) *Soit* $f : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^m$ *une application polynomiale. Si* $A \subset \mathbf{C}^n$ *est constructible, alors* $f(A)$ *est aussi constructible.*

Définition **(3.4)** *(Points réguliers).* — Soit A un ensemble constructible (resp. semi-algébrique). On dit qu'un point a de A est un *point régulier*, de dimension k, de A si pour un voisinage U de a dans $\mathbf{C}^n$ (resp. dans $\mathbf{R}^n$), $U \cap A$ est une variété lisse analytique-complexe (resp. analytique-réelle) de dimension k.

Dans ce qui suit, la lettre C désigne, soit l'ensemble des ensembles semi-algébriques, soit l'ensemble des ensembles constructibles.

Proposition **(3.5)** (*Chevalley* [1], *Łojasiewicz* [3]). — *On a les propriétés suivantes* :

(i) *Si* $A \in \mathsf{C}$, *alors* $\overline{A} \in \mathsf{C}$.

(ii) *Si* $A \in \mathsf{C}$, *alors l'ensemble des points réguliers de dimension* k *de* A *appartient à* C.

(iii) *L'ensemble des points réguliers d'un élément* A *de* C *est partout dense dans* A.

(iv) *Tout élément de* C *n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, chacune d'elles étant un élément de* C.

Définition **(3.6)**. — *La dimension* d'un élément A de C est le maximum des dimensions des points réguliers de A.

Définition **(3.7)** *(C-variété).* — On appelle C-*variété* un élément de C muni d'une structure de variété lisse analytique (complexe ou réelle selon que A est constructible ou semi-analytique).

Soit $K = \mathbf{C}$ ou $K = \mathbf{R}$. Soient X, Y deux sous-C-variétés de K^n. On note par $S_a(X, Y)$ (resp. $S_b(X, Y)$) l'ensemble des points de $Y \cap \overline{X}$ où la paire (X, Y) ne présente pas la propriété (a) (resp. (b)).

Remarque. — Par la remarque en bas de la définition (1.2), on a $S_a(X, Y) \subset S_b(X, Y)$.

Proposition **(3.8)** (*Whitney* [10]).

$$S_a(X, Y) \in \mathsf{C}, \quad S_b(X, Y) \in \mathsf{C}, \quad \dim S_a(X, Y) \leqq \dim S_b(X, Y) < \dim Y.$$

Soit $f: K^n \to K^m$ une application polynomiale. Soient $X \subset K^n$ et $Y \subset K^m$ deux $\mathbf{C}$-variétés avec $f(X) \subset Y$. On désigne par $\Sigma(f: X \to Y)$ l'ensemble des points x de X où le rang de $d(f|X)_x < \dim Y$. On désigne par $S(f|X)$ l'ensemble des points de X où le rang de $d(f|X)_x < r =$ le maximum des rangs de $d(f|X)_x$, $x \in X$.

Proposition **(3.9)**. — $\Sigma(f: X \to Y) \in \mathbf{C}$ *et* $S(f|X) \in \mathbf{C}$.

Preuve. — Immédiate.

Soient $f: K^n \to K^m$ une application polynomiale et X, Y deux sous-$\mathbf{C}$-variétés de K^n. On note alors par $S_\alpha(f: X, Y)$ l'ensemble des points y de $(Y - S(f|Y)) \cap \overline{(X - S(f|X))}$ où la paire $(X - S(f|X),\ Y - S(f|Y))$ ne présente pas la propriété α_f. (Pour la définition de la propriété α_f, voir la définition (2.5).)

Proposition **(3.10)**. — $S_\alpha(f: X, Y) \in \mathbf{C}$.

Proposition **(3.11)** *(Lê-Pham, une bonne stratification d'une fonction holomorphe* [2]*). — Soit $f: K^n \to K$ un polynôme. Soient $Y \subset X \subset K^n$ deux sous-$\mathbf{C}$-variétés. Supposons que la restriction $f|Y$ soit une fonction constante. Alors* $\dim S_\alpha(f: X, Y) < \dim Y$.

Démonstration de la proposition (3.10). — Comme $S(f|X)$ et $S(f|Y)$ sont des éléments de $\mathbf{C}$, on peut supposer que $f|X$ et $f|Y$ sont de rang constant.

Soient $\dim X = \ell_1$, $\dim Y = \ell_2$, le rang de $f|X = r_1$ et le rang de $f|Y = r_2$. Posons alors $k_1 = \ell_1 - r_1 = \dim \ker(f|X)$ et $k_2 = \ell_2 - r_2 = \dim \ker(f|Y)$. Si $k_2 > k_1$, alors $S_\alpha(f: X, Y) = \overline{X} \cap Y$ et la proposition est évidente.

Supposons donc $k_2 \leqq k_1$. Désignons par $G_{n,s}$ la grassmannienne des s-plans passant par l'origine de K^n. Désignons par R^* l'ensemble des paires $(\alpha, \beta) \in G_{n,k_2} \times G_{n,k_1}$ avec $\alpha \subset \beta$, où $\alpha \subset \beta$ signifie que α est un sous-espace de β. R^* est alors une sous-variété algébrique compacte de $G_{n,k_2} \times G_{n,k_1}$. Posons

$$X^* = \{(X, \alpha, \ker(f|X)_x) \in K^n \times G_{n,k_2} \times G_{n,k_1} \mid x \in X,\ \alpha \in G_{n,k_2}\}$$

$$Y^* = \{(X, \ker(f|Y)_y, \beta) \in K^n \times G_{n,k_2} \times G_{n,k_1} \mid y \in Y,\ \beta \in G_{n,k_1}\}.$$

On peut généraliser les notions des ensembles semi-algébriques et des ensembles constructibles pour des sous-ensembles de $K^n \times G_{n,k_2} \times G_{n,k_1}$. Dans ce sens, X^* et Y^* sont des éléments de $\mathbf{C}$, de plus, ce sont des $\mathbf{C}$-variétés. Considérons maintenant la projection $\pi: K^n \times G_{n,k_2} \times G_{n,k_1} \to K^n$. Alors $S_\alpha(f: X, Y) = \pi((\overline{X}^* \cap Y^*) - R^*)$. Comme $(\overline{X}^* \cap Y^*) - R^* \in \mathbf{C}$, on a $S_\alpha(f: X, Y) \in \mathbf{C}$. Q.E.D.

4. Stratification des ensembles constructibles et semi-algébriques.

Dans ce paragraphe, on donne une stratification des ensembles semi-algébriques et constructibles dont l'origine est due à Łojasiewicz [3] et à Whitney [10]. La lettre $\mathbf{C}$ désigne encore, soit la famille des ensembles constructibles, soit la famille des ensembles semi-algébriques.

Définition (**4.1**). — On dit qu'un W-complexe S est *compatible* avec une variété X si, pour toute strate Y de S, on a $S_b(X, Y) = \emptyset$ et la relation $\overline{X} \cap Y \neq \emptyset$ implique $X \supset Y$ ou $\overline{X} - X \supset Y$.

Définition (**4.2**) *(C-stratification)*. — On appelle *C-stratification* d'un ensemble A une W-stratification finie de A dont chaque strate est une C-variété. Un *ensemble C-stratifié* est un ensemble muni d'une C-stratification.

Proposition (**4.3**). — (i) *Tout élément de C est un ensemble C-stratifié.*

(ii) *Soit* $A \subset K^n$ *un élément de C. Soient* $X_1, \ldots, X_k$ *des sous-C-variétés de* K^n. *Il existe alors une C-stratification de* A *compatible avec* $X_1, \ldots, X_k$.

Notation (**4.4**). — Étant donné un élément A de C de dimension k, on désigne par A_{sp} l'ensemble des points réguliers de dimension k.

Démonstration de la proposition (4.3). — Il suffit de démontrer la propriété (ii). On la prouve par induction sur la dimension de A. Le cas où $\dim A = 0$ est de vérification triviale. Supposons donc la propriété (ii) vraie pour tout élément de C de dimension $< m$, et montrons qu'elle est vraie pour tout élément de C de dimension m.

Prenons un élément A de C de dimension m. Par les propositions (3.5) et (3.8), $A - A_{sp}$, $S_a(X_i, A_{sp})$ et $S_b(X_i, A_{sp})$ sont des éléments de C de dimension $< m$. Posons $B = (A - A_{sp}) \cup \bigcup_i S_b(X_i, A_{sp})$. $A - \overline{B}$ est un ensemble C-stratifié muni de sa stratification canonique dont les strates sont les composantes connexes de $A - \overline{B}$. Or, comme $\overline{B}$ est un élément de C de dimension $< m$, par l'hypothèse de récurrence, $\overline{B}$ a une C-stratification $S(\overline{B})$ compatible avec $X_1, \ldots, X_k$ et avec toutes les strates de $S(A - \overline{B})$. $S(A - \overline{B}) \cup S(\overline{B})$ est alors la C-stratification cherchée de A. Q.E.D.

Proposition (**4.5**) *(Stratification relative)*. — *Soient* $A \subset B$ *deux éléments de C contenus dans* K^n. *Alors* :

(i) A *est un sous*-W-*objet de* B.

(ii) *Étant données des sous-C-variétés* $X_1, \ldots, X_k$ *de* K^n, *il existe une C-stratification* S(B) *de* B *compatible avec* $X_1, \ldots, X_k$ *pour laquelle* A *est un sous*-W-*objet de* B.

Démonstration. — On prouve la proposition par induction sur la dimension de B. Dans le cas où $\dim B = 0$, on n'a rien à vérifier. En supposant la proposition vraie pour toute paire $A \subset B$ avec $\dim B < m$, montrons maintenant qu'elle est vraie pour toute paire $A \subset B$ avec $\dim B = m$. Il y a deux cas à considérer :

Cas 1) $\dim A < \dim B = m$.

Cas 2) $\dim A = \dim B = m$.

Démonstration du cas 1). — Dans ce cas $\dim \overline{A} < m$. Par la proposition (4.3), $B - \overline{A}$ a une C-stratification $S(B - \overline{A})$ compatible avec $X_1, \ldots, X_k$. Comme $\dim \overline{A} < m$, par l'hypothèse de récurrence, il existe une $\mathbf{C}$-stratification $S(\bar{A}\cap B)$ de $\bar{A}\cap B$ compatible avec $X_1, \ldots, X_k$ et avec toutes les strates de $S(B-\bar{A})$ pour laquelle A est un sous-W-objet de $\bar{A}$. Pour prouver la propriété (ii), il suffit de voir que $S(\bar{A}\cap B)\cup S(B-\bar{A})$ est une $\mathbf{C}$-stratification. Autrement dit, il suffit de voir que pour toute paire

$$(X, Y)\in S(B-\bar{A})\times S(\bar{A}\cap B), \qquad S_b(Y, X)=\emptyset.$$

Mais c'est une vérification immédiate, car $\bar{Y}$ et X sont disjoints puisque $\bar{Y}\subset\bar{A}$ et $X\subset B-\bar{A}$.

Démonstration du cas 2). — Par la proposition (4.3), $B-\bar{A}$ a une $\mathbf{C}$-stratification $S(B-\bar{A})$ compatible avec $X_1, \ldots, X_k$. Puis on considère la paire $((\bar{A}-A)\cap B, \bar{A}\cap B)$. Comme $\dim((\bar{A}-A)\cap B)<\dim(\bar{A}\cap B)=m$, en appliquant le raisonnement du cas 1), on prouve l'existence d'une $\mathbf{C}$-stratification $S(\bar{A}\cap B)$ de $\bar{A}\cap B$, compatible avec $X_1, \ldots, X_k$ et avec toutes les strates de $S(B-\bar{A})$, pour laquelle $B\cap(\bar{A}-A)$ est un sous-W-objet de $\bar{A}\cap B$. On voit alors que $S(B-\bar{A})\cup S(\bar{A}\cap B)$ est un W-complexe. En effet, pour toute paire $(Y, X)\in S(B-A)\times S(\bar{A}\cap B)$, $S_b(X, Y)=\emptyset$, car $\bar{X}$ et Y sont disjoints puisque $\bar{X}\subset\bar{A}$ et $Y\subset B-\bar{A}$.

On vient de voir que $S(B-\bar{A})\cup S(\bar{A}\quad B)$ est une $\mathbf{C}$-stratification de B pour laquelle $(\bar{A}-A)\cap B$ et $\bar{A}\cap B$ sont des sous-W-objets de B. Par suite

$$A=(\bar{A}\cap B)-((\bar{A}-A)\cap B)$$

est un sous-W-objet de B. Ce qui termine la démonstration. Q.E.D.

5. Stratification des applications polynomiales.

Définition (5.1). — On appellera *morphisme* $\mathbf{C}$-*stratifié* un W-morphisme $f: E\to F$ tel que les stratifications S(E) de E et S(F) de F soient des $\mathbf{C}$-stratifications. On dira qu'un morphisme $\mathbf{C}$-stratifié $f: E\to F$, avec $E\subset K^n$ et $F\subset K^m$, est *compatible avec une sous-variété* X de K^n (resp. de K^m) si la stratification S(E) (resp. S(F)) est compatible avec X.

Soient $A\subset K^n$ et $B\subset K^m$ deux éléments de $\mathbf{C}$. Soit $f: K^n\to K^m$ une application polynomiale. Supposons que $f(A)\subset B$. Le but de ce paragraphe est de démontrer le

Théorème 2. — *Il existe des* $\mathbf{C}$-*stratifications de* A *et* B *pour lesquelles* $f|A: A\to B$ *est un morphisme* $\mathbf{C}$-*stratifié. De plus, étant données des sous-*$\mathbf{C}$-*variétés* $X_1, \ldots, X_k$ *de* K^n *et des sous-*$\mathbf{C}$-*variétés* $Y_1, \ldots, Y_l$ *de* K^m, $f: A\to B$ *est un morphisme* $\mathbf{C}$-*stratifié compatible avec* $X_1, \ldots, X_k$ *et* $Y_1, \ldots, Y_l$.

D'abord on démontre la proposition suivante :

Proposition (5.2). — *Les notations sont celles du théorème. Alors* $f: A\to f(A)$ *est un morphisme* $\mathbf{C}$-*stratifié compatible avec* $X_1, \ldots, X_k$ *et* $Y_1, \ldots, Y_l$.

Démonstration de la proposition. — On la démontre par induction sur la dimension de $f(A)$. Par la proposition (4.3), la proposition est évidente dans le cas où $\dim f(A) = 0$.

On montre que la proposition est vraie pour un élément A de **C** telle que

$$\dim f(A) = k,$$

en la supposant vraie pour tout élément $A' \in \mathbf{C}$ avec $\dim f(A') < k$. Posons $C = f(A)$ et désignons par C_{sp} l'ensemble des points réguliers de C de dimension k ($= \dim C$). Par la proposition (4.3), il existe une **C**-stratification $S(f^{-1}(C_{sp}) \cap A)$ de $f^{-1}(C_{sp}) \cap A$ compatible avec $X_1, \ldots, X_k$. Pour chaque strate X de $S(f^{-1}(C_{sp}) \cap A)$, désignons par Σ_X l'ensemble des points x de X où le rang de $d(f|X)_x < \dim C$. Posons alors

$$\Sigma = \overline{\bigcup_X f(\Sigma_X) \cup \bigcup_{Y_i} S_b(Y_i, C_{sp})} \cap C,$$

où X parcourt $S(A \cap f^{-1}(C_{sp}))$ et Y_i parcourt $Y_1, \ldots, Y_\ell$. Σ est alors un élément de **C** de dimension $< k$.

Désignons par $S(A \cap f^{-1}(C_{sp} - \Sigma))$ l'ensemble des composantes connexes de $X - f^{-1}(\Sigma)$, où X parcourt $S(A \cap f^{-1}(C_{sp}))$. $S(A \cap f^{-1}(C_{sp} - \Sigma))$ est alors une **C**-stratification de $A \cap f^{-1}(C_{sp} - \Sigma)$ compatible avec $X_1, \ldots, X_k$ telle que pour chaque strate X de $S(A \cap f^{-1}(C_{sp} - \Sigma))$, la restriction $f|X : X \to C_{sp} - \Sigma$ est une submersion et que $\bigcup_X f(X) = C_{sp} - \Sigma$, où X parcourt $S(A \cap f^{-1}(C_{sp} - \Sigma))$.

Désignons par $S(C_{sp} - \Sigma)$ l'ensemble des composantes connexes de $C_{sp} - \Sigma$. $S(C_{sp} - \Sigma)$ est alors une **C**-stratification de $C_{sp} - \Sigma$ compatible avec $Y_1, \ldots, Y_\ell$, et l'application restreinte $f : A \cap f^{-1}(C_{sp} - \Sigma) \to C_{sp} - \Sigma$ est un W-morphisme compatible avec $X_1, \ldots, X_k$ et $Y_1, \ldots, Y_\ell$.

On pose $\Sigma^* = \Sigma \cup (C - C_{sp})$. Or, comme $\dim \Sigma^* < k$, par l'hypothèse de récurrence, il existe des **C**-stratifications $S(\Sigma^*)$ de Σ^* et $S(A \cap f^{-1}(\Sigma^*))$ de $A \cap f^{-1}(\Sigma^*)$, compatibles avec $X_1, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_\ell$ et avec toutes les strates de $S(A \cap f^{-1}(C_{sp} - \Sigma))$ et de $S(C_{sp} - \Sigma)$.

Posons $S(A) = S(A \cap f^{-1}(C_{sp} - \Sigma)) \cup S(A \cap f^{-1}(\Sigma))$ et $S(C) = S(\Sigma^*) \cup S(C_{sp} - \Sigma)$. On voit alors facilement que $f : A \to C$ est un morphisme **C**-stratifié, muni des stratifications S(A) et S(C) ainsi obtenues, compatible avec $X_1, \ldots, X_k$ et $Y_1, \ldots, Y_\ell$. Q.E.D.

Démonstration du théorème 2.

Comme d'habitude, on le démontre par induction sur la dimension de B. Dans le cas où $\dim B = 0$, le théorème est vrai par la proposition (4.3).

On montre que le théorème est vrai pour un couple (A, B) d'éléments de **C** tels que $\dim B = k$, en supposant le théorème vrai pour tout couple (A', B') d'éléments de **C** tels que $\dim B' < k$. Prenons un tel couple (A, B) avec $\dim B = k$. Posons $C = f(A)$ et $D = B \cap (\overline{C} - C_{sp})$. D est alors un fermé de $\overline{C} \cap B$, et on a $C \cup D = \overline{C} \cap B$.

Par la proposition (4.3), il existe une **C**-stratification $S(B - \overline{C})$ de $B - \overline{C}$ compatible avec $Y_1, \ldots, Y_\ell$. Puis on considère l'application $f : (A - f^{-1}(D)) \to (C - D)$. Par la proposition (5.2), il existe des $\mathbf{C}$-stratifications $S(A-f^{-1}(D))$ de $A-f^{-1}(D)$ et $S(C-D)$ de $C-D$ pour lesquelles $f:(A-f^{-1}(D))\to(C-D)$ est un morphisme $\mathbf{C}$-stratifié compatible avec $X_1, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_\ell$ et, de plus, avec les strates de $S(B-\overline{C})$.

Comme $\dim D < \dim B = k$, par l'hypothèse de récurrence, il existe des $\mathbf{C}$-stratifications $S(f^{-1}(D)\cap A)$ de $f^{-1}(D)\cap A$ et $S(D)$ de D pour lesquelles $f:f^{-1}(D)\cap A\to D$ est un W-morphisme compatible avec $X_1, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_\ell$ et avec les strates de $S(B-\overline{C})$, de $S(A-f^{-1}(D))$ et de $S(C-D)$.

Posons $S(A)=S(A-f^{-1}(D))\cup S(f^{-1}(D)\cap A)$ et $S(B)=S(D)\cup S(C-D)\cup S(B-\overline{C})$. On termine la démonstration en montrant que $S(A)$ et $S(B)$ sont des W-complexes. On va le montrer pour $S(B)$. Pour $S(A)$, l'argument est le même.

Soient $Z_1\in S(D)$, $Z_2\in S(C-D)$ et $Z_3\in S(B-\overline{C})$. On a construit les stratifications de manière que $S_b(Z_2, Z_1)=S_b(Z_3, Z_1)=S_b(Z_3, Z_2)=\emptyset$. Or, comme D et $C\cup D$ sont des fermés de B, $Z_3\cap\overline{Z}_1=Z_3\cap\overline{Z}_2=Z_2\cap\overline{Z}_1=\emptyset$. Par suite

$$S_b(Z_1, Z_3)=S_b(Z_1, Z_2)=S_b(Z_2, Z_3)=\emptyset.$$

$S(B)$ est donc un W-complexe. Q.E.D.

III. — FINITUDE DES TYPES TOPOLOGIQUES

6. Démonstration du théorème 1.

(6.0) On désigne par (f, r) la restriction d'une application $f: K^n\to K^m$ au disque $D^n(r)=\{z\in K^n \mid \|z\|\leqq r\}$. Pour la simplicité d'expression, on adopte les notations (f, ∞) pour f elle-même et $(f, 0)$ pour le germe en $0\in K^n$ de f. On désigne par $\mathbf{R}^+$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs, par $\mathbf{R}^{++}$ l'ensemble $\mathbf{R}^+\cup\{\infty\}$ et par $\mathbf{R}^{+++}$ l'ensemble $\mathbf{R}^{++}\cup\{0\}$. Pour un sous-ensemble A de $\mathbf{R}^{+++}$, $P(n, m, k; K)\times A$ désigne l'ensemble des applications (f, r) telles que $f\in P(n, m, k; K)$ et $r\in A$. On dira que (f, r) et (g, s) sont topologiquement équivalentes, et on notera $(f, r)\overset{\text{top}}{\sim}(g, s)$ s'il existe des homéomorphismes $h: D^n(r)\to D^n(s)$ et $h': K^m\to K^m$ (dans le cas où $r=s=0$, h et h' sont des germes d'homéomorphismes) tels que $h'\circ f=g\circ h$. Ceci définit entre éléments de $P(n, m, k; K)\times A$ une relation d'équivalence. On désigne par

$$P(n, m, k; K)\times A/\overset{\text{top}}{\sim}$$

l'ensemble quotient de $P(n, m, k; K)\times A$ par cette équivalence.

On va démontrer le

Théorème 3. — 1) *Les types topologiques des germes des polynômes de degré* $<k$ *sont finis:* $P(n, 1, k; K)\times\{0\}/\overset{\text{top}}{\sim}$ *est un ensemble fini.*

2) $P(n, 1, k; \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^{+} / \overset{\text{top}}{\sim}$ *est un ensemble fini.*

3) *Les types topologiques des polynômes de degré* $<k$ *sont finis* : $P(n, 1, k; K) \times \{\infty\} / \overset{\text{top}}{\sim}$ *est un ensemble fini.*

On remarquera que l'assertion 3) n'est autre que notre théorème 1 énoncé au paragraphe 0.1.

(6.1) *Esquisse de la démonstration.*

Dans ce paragraphe, on explique comment on démontre le théorème 3. Soit $F(n, k)$ l'ensemble des applications de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ dans l'ensemble $\{0, 1, \ldots, k\}$. On dit qu'un élément α de $F(n, k)$ est de degré r si $\alpha(1)+\alpha(2)+\ldots+\alpha(n)=r$. Soit $C(n, k)$ le sous-ensemble des éléments de $F(n, k)$ de degré $\leqq k$. Soit N le nombre cardinal de $C(n, k)$: $N=\sharp C(n, k)$. Considérons $C(n, k)$ comme un ensemble ordonné : soit

$$C(n, k)=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}.$$

Alors on a une bijection $Q : K^N \rightarrow P(n, 1, k; K)$ définie par

$$Q(a)=Q(a_1, \ldots, a_N)=\sum_{i=1}^{N} a_i X^{\alpha_i},$$

où pour $\alpha \in C(n, k)$, $X^{\alpha}=X_1^{\alpha(1)} \ldots X_n^{\alpha(n)}$, $X_1, \ldots, X_n$ étant les indéterminées.

On considère l'application $F=(p_1, \ldots, p_N, f) : K^N \times K^n \rightarrow K^N \times K$ définie par les équations suivantes :

$$p_i(a_1, \ldots, a_N, x)=a_i,$$

$$f(a_1, \ldots, a_N, x)=Q(a)(x)=\sum_{i=1}^{N} a_i x^{\alpha_i},$$

où $a=(a_1, \ldots, a_N) \in K^N$ et $x \in K^n$.

On considère la suite des applications

$$K^N \times K^n \xrightarrow{F} K^N \times K \xrightarrow{\pi} K^N,$$

π étant la projection canonique. On va stratifier cette suite d'applications de manière que l'on puisse lui appliquer le lemme d'isotopie (local). Pour ceci, on va prouver les trois propositions (6.A), (6.B) et (6.C) suivantes.

(6.2) *Réduction aux propositions.*

Proposition **(6.A)**. — *Il existe une* C-*stratification* $S(K^N)$ *de* K^N *telle que pour chaque strate* Z *de* $S(K^N)$, *on ait des* C-*stratifications* $S(Z \times K^n)$ *de* $Z \times K^n$ *et* $S(Z \times K)$ *de* $Z \times K$ *pour lesquelles la restriction de* F *à* $Z \times K^n$, $F \mid (Z \times K^n) : Z \times K^n \rightarrow Z \times K$, *est un morphisme de Thom au-dessus de* $\pi : Z \times K \rightarrow Z$.

On voit facilement que la proposition (6.A) et le lemme d'isotopie local de Thom (la proposition (2.9)) impliquent la première partie du théorème 3. Car le nombre des éléments de $P(n, 1, k; K) \times \{0\}/\overset{\text{top}}{\sim}$ coïncide avec la somme des nombres des strates de $S(Z \times K^n)$, $Z \in S(K^N)$, qui est finie.

Pour la seconde partie du théorème, remarquons d'abord que pour toute fonction $(f, r) \in P(n, 1, k; \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^+$, il existe toujours un polynôme $(g, 1) \in P(n, 1, k; \mathbf{R}) \times \{1\}$ tel que $(f, r) \overset{\text{top}}{\sim} (g, 1)$. (Poser $g(x) = f(x/r)$.) Posons $D^n = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| \leqq 1\}$.

Proposition **(6.B)**. — *Il existe une* C*-stratification* $S(\mathbf{R}^N)$ *de* $\mathbf{R}^N$ *telle que pour chaque strate* Z *de* $S(\mathbf{R}^N)$, *on ait des* C*-stratifications* $S(Z \times D^n)$ *de* $Z \times D^n$ *et* $S(Z \times \mathbf{R})$ *de* $Z \times \mathbf{R}$ *pour lesquelles la restriction de* F *à* $Z \times D^n$, $F \mid (Z \times D^n) : Z \times D^n \to Z \times \mathbf{R}$, *est un morphisme de Thom au-dessus de* $\pi : Z \times \mathbf{R} \to Z$.

On voit que la proposition (6.B) et le lemme d'isotopie impliquent la finitude de $P(n, 1, k; \mathbf{R}) \times \{1\}/\overset{\text{top}}{\sim}$, par suite la finitude de $P(n, 1, k; \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^+/\overset{\text{top}}{\sim}$. Ici l'application $\pi : Z \times \mathbf{R} \to Z$ n'est pas propre, cependant la restriction de π à l'image de F, $\pi : F(Z \times D^n) \to Z$, est propre. Donc, pour deux points a et b de Z, $f_a : D^n \to f_a(D^n)$ et $f_b : D^n \to f_b(D^n)$ ont même type topologique. Comme on peut toujours étendre un homéomorphisme $h : f_a(D^n) \to f_b(D^n)$ en un homéomorphisme $h' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, on a $f_a : D^n \to \mathbf{R} \overset{\text{top}}{\sim} f_b : D^n \to \mathbf{R}$. Alors $\# P(n, 1, k; \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^+/\overset{\text{top}}{\sim} = \# S(\mathbf{R}^N)$ qui est fini.

Une compactification.

Pour la dernière partie du théorème, il faut que l'application F soit propre. Soit PK^n l'espace projectif de dimension n sur le corps K. On désigne par $[x_1, \ldots, x_n, z]$ les coordonnées homogènes. Considérons le sous-ensemble G de $K^N \times PK^n \times K$ défini par :

$$(a, [x_1, \ldots, x_n, z], c) \in G$$

si et seulement si

$$z^d Q(a)(x_1/z, \ldots, x_n/z) = z^d c,$$

où d est le degré de $Q(a)$.

On considère la projection canonique $P : K^N \times PK^n \times K \to K^N \times K$ et la suite des applications

$$G \xrightarrow{P|G} K^N \times K \xrightarrow{\pi} K^N.$$

Posons $G_0 = G \cap (K^N \times PK^{n-1} \times K)$, où PK^{n-1} est plongé comme le sous-espace de PK^n défini par la dernière coordonnée $z = 0$.

Soit $j : K^N \times K^n \to K^N \times PK^n \times K$ l'injection définie par

$$j(a, (x_1, \ldots, x_n)) = (a, [x_1, \ldots, x_n, 1], Q(a)(x_1, \ldots, x_n)).$$

j est alors une bijection de $K^N \times K^n$ sur $G - G_0$. Et on a $F = P \circ j$.

Par suite, on voit que la proposition (6.C) suivante et le lemme d'isotopie de Thom impliquent la finitude de $P(n, 1, k; K) \times \{\infty\}/\overset{\text{top}}{\sim}$.

Proposition **(6.C)**. — *Il existe une* C*-stratification* $S(K^N)$ *de* K^N *telle que pour chaque strate* Z *de* $S(K^N)$, *on ait une* C*-stratification* $S((\pi \circ P)^{-1}(Z) \cap G)$ *de* $(\pi \circ P)^{-1}(Z) \cap G$ *pour* *laquelle* $(\pi\circ \mathrm{P})^{-1}(\mathrm{Z})\cap \mathrm{G}_0$ *est un sous-ensemble de* $(\pi\circ \mathrm{P})^{-1}(\mathrm{Z})\cap \mathrm{G}$, *et on ait une* **C**-*stratification* $\mathrm{S}(\mathrm{Z}\times\mathrm{K})$ *de* $\mathrm{Z}\times\mathrm{K}$, *pour laquelle la restriction de* P *à* $\mathrm{G}\cap(\pi\circ \mathrm{P})^{-1}(\mathrm{Z})$,

$$\mathrm{P} : \mathrm{G}\cap(\pi\circ \mathrm{P})^{-1}(\mathrm{Z}) \to \mathrm{Z}\times\mathrm{K},$$

est un morphisme de Thom au-dessus de $\pi : \mathrm{Z}\times\mathrm{K}\to\mathrm{Z}$.

Pour éviter d'être verbeux, on ne démontre que la proposition (6.C). On peut démontrer les propositions (6.A) et (6.B) en calquant la démonstration de (6.C). D'ailleurs, la proposition (6.C) implique la proposition (6.A).

(6.3) *Lemmes.*

Soient $f : \mathrm{K}^\mathrm{N}\times\mathrm{K}^n\to\mathrm{K}$ le polynôme défini au paragraphe 6.1, $p : \mathrm{K}^\mathrm{N}\times\mathrm{K}^n\to\mathrm{K}^\mathrm{N}$ la projection canonique. Soient X une sous-**C**-variété de $\mathrm{K}^\mathrm{N}\times\mathrm{K}^n$ et Y une sous-**C**-variété de X telles que les restrictions de p, $p\,|\,\mathrm{X} : \mathrm{X}\to p(\mathrm{X})$ et $p\,|\,\mathrm{Y} : \mathrm{Y}\to p(\mathrm{Y})$, soient des submersions et que la restriction de f à $\mathrm{Y}\cap p^{-1}(x)$ soit une fonction localement constante pour tout point x de $p(\mathrm{X})$. On pose alors

$$\mathrm{S}_\beta(f : \mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \bigcup_{x\in p(\mathrm{X})} \mathrm{S}_\alpha(f : \mathrm{X}\cap p^{-1}(x), \mathrm{Y}\cap p^{-1}(x)),$$

pour la définition de $\mathrm{S}_\alpha(f : \ \ , \ \ )$, voir la définition donnée au début de la proposition (3.10).

Lemme **(6.3.1)**. — $\mathrm{S}_\beta(f : \mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *est un élément de* **C** *de dimension* $<\dim \mathrm{Y}$.

Preuve. — La démonstration de l'appartenance de $\mathrm{S}_\beta(f : \mathrm{X}, \mathrm{Y})$ à **C** est analogue à celle de la proposition (3.10). Pour la dimension, on a, par définition, l'expression $\mathrm{S}_\beta(f : \mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \bigcup_{x\in\mathrm{X}} \mathrm{S}_\alpha(f : \mathrm{X}\cap p^{-1}(x), \mathrm{Y}\cap p^{-1}(x))$ et on voit par la proposition (3.11) que $\dim \mathrm{S}_\alpha(f : \mathrm{X}\cap p^{-1}(x), \mathrm{Y}\cap p^{-1}(x)) < \dim(\mathrm{Y}\cap p^{-1}(x))$. Il en résulte que

$$\dim \mathrm{S}_\beta(f : \mathrm{X}, \mathrm{Y}) < \dim \mathrm{Y}. \qquad \text{Q.E.D.}$$

Soit $f^* : \mathrm{G}\to\mathrm{K}$ le polynôme défini par $f^*(a, [x_1, \dots, x_n, z], c) = c$. On a alors $f^*\circ j = f$. Soit $p^* : \mathrm{G}\to\mathrm{K}^\mathrm{N}$ la restriction à G de la projection canonique de $\mathrm{K}^\mathrm{N}\times\mathrm{PK}^n\times\mathrm{K}$ sur K^N. On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K}^\mathrm{N}\times\mathrm{K}^n \arrow[r, "j"] \arrow[d, "(p, f) = \mathrm{F}"'] & \mathrm{G}-\mathrm{G}_0 \subset \mathrm{G} \subset \mathrm{K}^\mathrm{N}\times\mathrm{PK}^n\times\mathrm{K} \arrow[d, "\mathrm{F}^* = (p^*, f^*)"', "\mathrm{P}"] \\
\mathrm{K}^\mathrm{N}\times\mathrm{K} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathrm{K}^\mathrm{N}\times\mathrm{K} \arrow[d, "\pi"] \\
 & \mathrm{K}^\mathrm{N}
\end{tikzcd}$$

Soient X une sous-**C**-variété de G et Y une sous-**C**-variété de X telles que les restrictions de p^*, $p^*\,|\,\mathrm{X} : \mathrm{X}\to p^*(\mathrm{X})$ et $p^*\,|\,\mathrm{Y} : \mathrm{Y}\to p^*(\mathrm{Y})$ soient des submersions et que la restriction de f^* à $Y \cap p^{*-1}(x)$ soit une fonction localement constante pour tout point x de $p^*(X)$. On pose alors

$$S_\beta(f^* : X, Y) = \bigcup_{x \in X} S_\alpha(f^* : X \cap p^{*-1}(x), Y \cap p^{*-1}(x)).$$

Pareillement au lemme (6.3.1), on a

Lemme **(6.3.2).** — $S_\beta(f^* : X, Y)$ *est un élément de* $\mathbf{C}$ *de dimension* $< \dim Y$.

Notation. — Pour un sous-ensemble A de K^N, on pose

$$G_A = G \cap (\pi \circ P)^{-1}(A) = G \cap (A \times PK^n \times K) \qquad \text{et} \qquad G_{0,A} = G_0 \cap G_A.$$

Lemme **(6.3.3).** — *Il existe une* $\mathbf{C}$*-stratification* $S(K^N)$ *de* K^N *ayant les propriétés suivantes :*

(i) *Pour toute strate* Z *de* $S(K^N)$, *il existe une* $\mathbf{C}$*-stratification* $S(G_Z)$ *de* G_Z *pour laquelle* $G_{0,Z}$ *est un sous*-W-*objet de* G_Z, *et il existe une* $\mathbf{C}$*-stratification* $S(Z \times K)$ *de* $Z \times K$ *pour laquelle* $P : G_Z \to Z \times K$ *et* $\pi : Z \times K \to Z$ *sont des morphismes* $\mathbf{C}$*-stratifiés,* Z *étant considérée comme un* W-*objet muni de sa stratification triviale.*

(ii) $S_\beta(f^* : G_Z, X)$ (resp. $S_\beta(f^* : G_{0,Z}, X)$) *est bien défini et* $= \emptyset$ *pour toute strate* Z *de* $S(K^N)$ *et* $X \in S(G_Z)$ *telle que* $\dim X < \dim G_Z$ (resp. $X \in S(G_{0,Z})$ *telle que* $\dim X < \dim G_{0,Z}$).

(iii) *Si* $\dim F^*(X) = \dim(Z \times K)$ *pour une strate* $X \in S(G_Z) - S(G_{0,Z})$ (resp. $X \in S(G_{0,Z})$), *alors on a* $\dim X = \dim G_Z$ (resp. $\dim X = \dim G_{0,Z}$).

($S(G_{0,Z})$ *est la stratification de* $G_{0,Z}$ *induite de* $S(G_Z)$.)

Démonstration. — On démontre le lemme en construisant une suite

$$C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_N = K^N$$

d'éléments de $\mathbf{C}$ satisfaisant aux propriétés (iv) à (viii) suivantes :

(iv) $\dim C_i \leqq i$ et C_{i-1} est un fermé de C_i.

(v) $C_i - C_{i-1}$ est une $\mathbf{C}$-variété et $S_b(C_j - C_{j-1}, C_i - C_{i-1}) = \emptyset$ pour toute paire $j > i$.

(vi) Il existe une $\mathbf{C}$-stratification $S(G_{C_i - C_{i-1}})$ de $G_{C_i - C_{i-1}}$ pour laquelle $G_{0, C_i - C_{i-1}}$ est un sous-W-objet de $G_{C_i - C_{i-1}}$, et il existe une $\mathbf{C}$-stratification $S((C_i - C_{i-1}) \times K)$ de $(C_i - C_{i-1}) \times K$ pour laquelle

$$P : G_{C_i - C_{i-1}} \to C_i - C_{i-1} \qquad \text{et} \qquad \pi : (C_i - C_{i-1}) \times K \to C_i - C_{i-1}$$

sont des W-morphismes; ici $C_i - C_{i-1}$ est munie de sa stratification triviale.

(vii) $S_\beta(f^* : G_{C_i - C_{i-1}}, X)$ (resp. $S_\beta(f^* : G_{0, C_i - C_{i-1}}, X)$) est bien défini et $= \emptyset$ pour toute strate X de $S(G_{C_i - C_{i-1}})$ de dimension $< \dim G_{C_i - C_{i-1}}$ (resp. X de $S(G_{0, C_i - C_{i-1}})$ de dimension $< \dim G_{0, C_i - C_{i-1}}$).

(viii) Si $\dim P(X) = \dim (C_i - C_{i-1}) \times K$ pour une strate X de $S(G_{C_i - C_{i-1}})$ (resp. X de $S(G_{0, C_i - C_{i-1}})$), alors on a

$$\dim X = \dim G_{C_i - C_{i-1}}$$

(resp. $\dim X = \dim G_{0, C_i - C_{i-1}}$).

On va construire une telle suite $\{C_i\}$ par récurrence descendante sur la dimension de C_i. On commence la récurrence en posant $C_N = K^N$. En supposant que l'on ait déjà construit C_i, on va construire un tel C_{i-1}.

Si $\dim C_i < i$, on pose alors $C_{i-1} = C_i$, ce qui termine l'étape de la récurrence. Supposons donc $\dim C_i = i$ et posons

$$(C_i)_{sp} = \text{l'ensemble des points réguliers de } C_i \text{ de dimension } i,$$

$$C_i^* = (C_i)_{sp} - \bigcup_{j>i} \overline{S_b(C_j - C_{j-i}, (C_i)_{sp})},$$

$$R^* = \text{l'ensemble des valeurs régulières communes de } P : G_{C_i} \to C_i \times K \text{ et de } P : G_{0, C_i} \to C_i \times K.$$

R^* est alors un ouvert de $C_i \times K$ et on voit que $C_i^* - \pi(R^*)$ est un fermé de C_i^* de dimension $< i$.

L'application restreinte $P : P^{-1}(R^*) \cap G \to R^*$ est un morphisme $\mathbf{C}$-stratifié muni des stratifications triviales $S(P^{-1}(R^*) \cap G)$, son sous-W-complexe $S(P^{-1}(R^*) \cap G_0)$, et $S(R^*)$; ici les strates de $S(P^{-1}(R^*) \cap G)$ sont les composantes connexes de $P^{-1}(R^*) \cap (G - G_0)$ et de $P^{-1}(R^*) \cap G_0$, celles de $S(R^*)$ sont les composantes connexes de R^*.

Pour toute sous-$\mathbf{C}$-variété Y de $G_{\pi(R^*)} - P^{-1}(R^*)$ (resp. toute sous-$\mathbf{C}$-variété Y de $G_{0, \pi(R^*)} - P^{-1}(R^*)$) et pour tout point $a \in \pi(R^*)$, la fonction $f | Y \cap p^{-1}(a)$ est une fonction localement constante, car son image $f(Y \cap p^{-1}(a))$ est contenue dans l'ensemble des valeurs critiques de $f | G_{\{a\}} : G_{\{a\}} \to K$ et de $f | G_{0, \{a\}} : G_{0, \{a\}} \to K$. Par suite, l'ensemble $S_\beta(f^* : G_{\pi(R^*)}, Y)$ (resp. $S_\beta(f^* : G_{0, \pi(R^*)}, Y)$) est bien défini pour une telle variété Y, et par le lemme (6.3.2), c'est un élément de $\mathbf{C}$ de dimension $< \dim Y$.

On voit donc, pareillement à la proposition (5.2), qu'il existe des stratifications $S(G_{\pi(R^*)} - P^{-1}(R^*))$ de $G_{\pi(R^*)} - P^{-1}(R^*)$ et $S((\pi(R^*) \times K) - R^*)$ de $((\pi(R^*) \times K) - R^*)$, compatibles avec toutes les strates de $S(P^{-1}(R^*))$ et de $S(R^*)$, satisfaisant aux propriétés suivantes :

(ix) $G_{0, \pi(R^*)} - P^{-1}(R^*)$ est un sous-W-objet de $G_{\pi(R^*)} - P^{-1}(R^*)$;

(x) $F : G_{\pi(R^*)} - P^{-1}(R^*) \to \pi(R^*) \times K$ est un W-morphisme;

(xi) $S_\beta(f^* : G_{\pi(R^*)}, Y) = \emptyset$ pour toute strate Y de $S((\pi(R^*) \times K^n) - P^{-1}(R^*))$, et $S_\beta(f^* : G_{0, \pi(R^*)}, Y) = \emptyset$ pour toute strate Y de $S(G_{0, \pi(R^*)} - P^{-1}(R^*))$.

Pour chaque strate X de $S((\pi(R^*) \times K) - R^*)$, on désigne par Σ_X l'ensemble des points x de X où le rang de $d(\pi | X)_x < \dim(R^*) = \dim C_i = i$. Posons

$$C_{i-1} = \overline{(C_i - \pi(R^*)) \cup \bigcup_X \pi(\Sigma_X)};$$

ici X parcourt $S((\pi(R^*) \times K) - R^*)$. C_{i-1} est alors un fermé de C_i de dimension $< i$ et $C_{i-1} \in \mathbf{C}$.

On désigne par $S(G_{C_i - C_{i-1}})$ l'ensemble des composantes connexes de $X - p^{-1}(C_{i-1})$, où X parcourt les strates de $S(P^{-1}(R^*)) \cup S(G_{\pi(R^*)} - P^{-1}(R^*))$, par $S((C_i - C_{i-1}) \times K)$ l'ensemble des composantes connexes de $Y - \pi^{-1}(C_{i-1})$, où Y parcourt les strates de

$S(R^*) \cup S((\pi(R^*)\times K)-R^*)$ et par $S(C_i - C_{i-1})$ l'ensemble des composantes connexes de $C_i - C_{i-1}$. Il est facile de vérifier que C_{i-1} et les stratifications ainsi obtenus ci-dessus satisfont aux propriétés (iv) à (viii). Q.E.D.

(6.4) *Démonstration de la proposition* (6.C).

Prenons une strate Z de la stratification $S(K^N)$ obtenue dans le lemme (6.3.3) et montrons que $P : G_Z \to Z\times K$ est un morphisme de Thom au-dessus de $\pi : Z\times K \to Z$: c'est-à-dire que la restriction de f^* à $G_{\{a\}}$, $f^* : G_{\{a\}} \to \{a\}\times K$, est sans éclatement pour tout point a de Z.

Soient X et Y deux strates de $S(G_Z)$ telles que $F(X) \succ F(Y)$. Comme

$$\dim(Z\times K) \geqq \dim P(X) > \dim P(Y) \geqq \dim Z,$$

on voit par la condition (iii) du lemme (6.3.3) que X doit être un ouvert de G_Z ou de $G_{0,Z}$, et on voit que la restriction de f^* à $Y\cap p^{*-1}(a)$ est une fonction constante pour tout point a de Z. Par suite, par la condition (ii) du lemme (6.3.3), on a

$$S_\alpha(f^* : X\cap p^{*-1}(a), Y\cap p^{*-1}(a)) = \emptyset;$$

car $$\emptyset = S_\beta(f^* : G_Z, Y) = \bigcup_{a\in Z} S_\alpha(f^* : G_{\{a\}}, Y\cap p^{*-1}(a))$$

et $$S_\alpha(f^* : X\cap p^{*-1}(a), Y\cap p^{*-1}(a)) \subset S_\alpha(f^* : G_{\{a\}}, Y\cap p^{*-1}(a)).$$

$f^* : G_{\{a\}} \to \{a\}\times K$ est donc sans éclatement. Q.E.D.

7. Un corollaire du théorème 2.

Comme application du théorème 2, on a le

Théorème 4. — Le nombre des types topologiques des sous-variétés algébriques de K^n *définies par m polynômes de degré* $\leqq k$ *est fini.*

Précisons ce que le théorème veut dire. Gardons les notations du paragraphe 6.0. On dira que (f, r) et $(g, s) \in P(n, m, k; K)\times \mathbf{R}^{+++}$ sont v-équivalentes, et on écrira $(f, r) \overset{v}{\sim} (g, s)$, s'il existe un homéomorphisme $h : D^n(r) \to D^n(s)$ tel que

$$h(f^{-1}(0)\cap D^n(r)) = g^{-1}(0)\cap D^n(s).$$

On désigne par $P(n, m, k; K)\times A/\overset{v}{\sim}$ l'ensemble quotient de $P(n, m, k; K)\times A$ par cette relation d'équivalence $\overset{v}{\sim}$. Notre théorème 4 s'énonce alors sous la forme suivante :

Théorème 4. — $P(n, m, k; K)\times \mathbf{R}^{+++}/\overset{v}{\sim}$ *est un ensemble fini.*

Pour le démontrer, on va prouver les trois lemmes suivants :

Lemme **(7.1)**. — $P(n, m, k; K)\times\{1\}/\overset{v}{\sim}$ *est un ensemble fini.*

Lemme **(7.2)**. — *Pour toute* $(f, r) \in P(n, m, k; K)\times \mathbf{R}^+$, *il existe une application* $g \in P(n, m, k; K)$ *telle que* $(g, 1) \overset{v}{\sim} (f, r)$.

Lemme (**7.3**). — $P(n, m, k; K)\times\{\infty\}/\overset{v}{\sim}$ *est un ensemble fini.*

Il est clair que ces lemmes 1 à 3 impliquent le théorème 4.

Preuve du lemme (7.1).

Considérons l'application $F=(p, f_1, \ldots, f_m) : K^{mN}\times K^n \to K^{mN}\times K^m$ définie par les équations

$$p(a_1, \ldots, a_m, x)=(a_1, \ldots, a_m)\in K^N\times\ldots\times K^N=K^{mN},$$

$$f_i(a_1, \ldots, a_m, x)=Q(a_i)(x),$$

ici l'application $Q : K^N \to P(n, 1, k; K)$ est celle définie au paragraphe 6.1. Notons que l'on peut identifier $P(n, m, k; K)$ avec K^{mN} par l'application

$$Q^m=Q\times\ldots\times Q \; : \; K^N\times\ldots\times K^N \to P(n, 1, k; K)\times\ldots\times P(n, 1, k; K).$$

Soit D^n la boule unitaire fermée centrée en o de K^n. Posons

$$A \;=F^{-1}(K^{mN}\times o)\cap(K^{mN}\times D^n),$$

$$M_1=(K^{mN}\times(D^n-\partial D^n))-A$$

et $$M_2=(K^{mN}\times\partial D^n)-A.$$

A, M_1 et M_2 sont alors des ensembles semi-algébriques.

Considérons la projection canonique $p : K^{mN}\times K^n \to K^{mN}$. Par le théorème 2, il existe des **C**-stratifications $S(A)$ de A et $S(K^{mN})$ de K^{mN}, compatibles avec M_1 et M_2, pour lesquelles $p\,|\,A : A\to K^{mN}$ est un morphisme **C**-stratifié. Pour chaque strate $Y\in S(K^{mN})$, $S_Y(A)=\{X\in S(A)\,|\,p(X)=Y\}$ est une stratification de $A\cap(Y\times D^n)$. Posons $M_{i,Y}=M_i\cap(Y\times D^n)$ et $S_Y=S_Y(A)\cup\{M_{1,Y}, M_{2,Y}\}$.

On voit alors que

(i) S_Y est une **C**-stratification de $Y\times D^n$;

(ii) $A\cap(Y\times D^n)$ est un sous-ensemble stratifié de $Y\times D^n$;

(iii) $p : Y\times D^n\to Y$ est un morphisme **C**-stratifié propre, Y étant un W-objet muni de sa stratification triviale.

Par la proposition (2.3), pour deux points a et b d'une strate Y de $S(K^{mN})$, les paires $(p^{-1}(a)\cap(Y\times D^n), p^{-1}(a)\cap A)$ et $(p^{-1}(b)\cap(Y\times D^n), p^{-1}(b)\cap A)$ sont homéomorphes. Or

$$p^{-1}(a)\cap(Y\times D^n)=A\times D^n$$

et $$p^{-1}(a)\cap A=a\times(D^n\cap Q(a_1)^{-1}(o)\cap\ldots\cap Q(a_m)^{-1}(o)).$$

Par suite, ce que l'on a vu ci-dessus veut dire que si a et b appartiennent à la même strate Y de $S(K^{mN})$, alors $(Q^m(a), 1)$ et $(Q^m(b), 1)$ sont v-équivalentes. Comme $S(K^{mN})$ n'a qu'un nombre fini de strates, le nombre des classes de v-équivalence des éléments de $P(n, m, k; K)\times\{1\}$ est fini. Q.E.D.

Preuve du lemme (7.2).

Étant donné une application (f, r), on a $(f(rx), 1) \overset{v}{\sim} (f(x), r)$.

Esquisse de preuve du lemme (7.3).

On peut démontrer le lemme (7.3) en calquant la démonstration sur celle du lemme (7.1) et sur l'argument de compactification dans la proposition (6.C).

Q.E.D.

RÉFÉRENCES

[1] C. CHEVALLEY, *Fondements de la géométrie algébrique*, miméographié à Univ. de Paris (1958).

[2] LÊ DUNG TRÁNG, thèse à l'Université de Paris VII (1971), p. II.9.

[3] S. ŁOJASIEWICZ, *Ensembles semi-analytiques*, miméographié à l'I.H.E.S. (1965).

[4] J. MATHER, *Notes on topological stability. Lecture notes*, Harvard University (1970).

[5] J. MATHER, Stratifications and mappings, publié dans *Dynamical systems*, edited by M. M. PEIXOTO, Academic Press (1973).

[6] A. SEIDENBERG, A new decision method for elementary algebra, *Ann. of Math.*, **60** (1954), 365-375.

[7] R. THOM, La stabilité topologique des applications polynomiales, *Enseignement Math.*, **8** (1962), 24-33.

[8] R. THOM, Ensembles et morphismes stratifiés, *Bull. A.M.S.*, **75** (1969), 240-284.

[9] H. WHITNEY, *Local properties of analytic varieties. Differential and combinatorial topology*, Princeton Univ. Press (1965).

[10] H. WHITNEY, Tangents to an analytic variety, *Ann. of Math.*, **81** (1965), 496-549.

Département de Mathématiques,
Université de Chiba,
Yayoi-cho Chiba-shi, Japon.

Manuscrit reçu le 28 septembre 1974.