BERNARD MALGRANGE

Frobenius avec singularités. I. Codimension un

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 46 (1976), p. 163-173

<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1976__46__163_0>

FROBENIUS AVEC SINGULARITÉS
1. CODIMENSION UN

par B. MALGRANGE

0. Introduction.

Soit $\omega=\sum_i a_i dx_i$ un germe en $0\in\mathbf{C}^n$ de forme différentielle holomorphe, et soit X le germe en 0 du lieu singulier de ω, *i.e.* le germe défini par les équations $a_i(x)=0$. Le but de cet article est la démonstration du résultat suivant :

Théorème **(0.1)**. — *Supposons qu'on ait* $\operatorname{codim} X\geq 3$, *et* $\omega\wedge d\omega=0$; *alors* ω *admet un facteur intégrant, c'est-à-dire qu'il existe f et g, fonctions holomorphes en* 0, *avec* $f(0)\neq 0$, *telles qu'on ait* $\omega=fdg$.

Ce théorème a été démontré dans des cas particuliers par Reeb [9] et Moussu [8]. Pour des séries formelles, il est démontré dans le cas général chez Moussu [8] par deux méthodes; on reprend ici la seconde méthode, due à J. Martinet, pour en établir la convergence. Simultanément on démontre aussi le résultat suivant :

Théorème **(0.2)**. — *Supposons qu'on ait* $\operatorname{codim} X\geq 2$, *et que* ω *admette un facteur intégrant formel. Alors* ω *admet un facteur intégrant holomorphe.*

Dans un article ultérieur, ces résultats seront étendus à des systèmes de Pfaff de codimension supérieure. Les méthodes employées dans ces deux articles pourraient peut-être être employées dans d'autres problèmes; on en donne un exemple au § 4.

1. Une amélioration du théorème des voisinages privilégiés.

Divers « théorèmes des voisinages privilégiés » se trouvent dans la littérature — cf. Cartan [2], Grauert [4], Douady [3]. Ici, on va suivre la méthode de Grauert et préciser ses conclusions.

On notera $\mathcal{O}_n$ (ou $\mathcal{O}$, lorsque aucune confusion ne sera possible) l'anneau $\mathbf{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ des séries convergentes à n variables. Pour $\rho=(\rho_1, \ldots, \rho_n)$, avec $\rho_i>0$, on désignera par $P(\rho)$ le polycylindre $|x_i|\leq\rho_i$; pour $f=\sum_\alpha a_\alpha x^\alpha\in\mathcal{O}$, $(\alpha\in\mathbf{N}^n)$, on pose $|f|=\sum_\alpha|a_\alpha|\rho^\alpha$; $|\cdot|_\rho$ est une « pseudonorme » sur $\mathcal{O}$, *i.e.* une norme pouvant prendre la valeur $+\infty$; le sous-espace sur lequel elle est finie sera noté $\mathcal{O}(\rho)$; enfin, pour $f=(f_1, \ldots, f_p)\in\mathcal{O}^p$, on posera $|f|_\rho=\sum_i|f_i|_\rho$.

Soit $u : \mathcal{O}^q \to \mathcal{O}^p$ une application $\mathcal{O}$-linéaire, qu'on peut identifier à une matrice à coefficients dans $\mathcal{O}$; pour tout ρ assez petit, u induit une application continue $\mathcal{O}^q(\rho) \to \mathcal{O}^p(\rho)$, autrement dit, on a pour tout $\rho \in \mathcal{O}^q : |u(f)|_\rho \leq c|f|_\rho$, c indépendant de f (on peut même prendre c indépendant de ρ); ceci résulte immédiatement de l'inégalité suivante : pour $f, g \in \mathcal{O}$, on a $|fg|_\rho \leq |f|_\rho |g|_\rho$.

On dira qu'une application $\mathbf{C}$-linéaire $\lambda : \mathcal{O}^p \to \mathcal{O}^q$ est une *scission* de u si l'on a $u\lambda u = u$; $u\lambda$ est alors un projecteur sur $\mathrm{im}(u)$ et $\mathrm{id} - \lambda u$ un projecteur sur $\ker(u)$ (la vérification est laissée au lecteur). On dira d'autre part que « λ est adapté à $\mathrm{P}(\rho)$ », ou « à ρ » s'il existe $c > 0$ tel qu'on ait, pour $f \in \mathcal{O}^p$ et $1/2 \leq t \leq 1$, $|\lambda f|_{t\rho} \leq c|f|_{t\rho}$. Cela posé, on a le théorème suivant :

Théorème (**1.1**). — *Soient u_i ($i \in \mathrm{I}$, ensemble fini) des matrices à coefficients dans $\mathcal{O}$. On peut trouver des scissions λ_i des u_i possédant la propriété suivante :*

L'ensemble des $\mathrm{P}(\rho)$ tels que les λ_i leur soient simultanément adaptés est un système fondamental de voisinages de zéro.

Avant de passer à la démonstration proprement dite, faisons deux remarques :

(**1.2**) L'énoncé précédent « ne dépend que des $\mathcal{O}$-modules $\mathrm{coker}(u_i)$ » au sens suivant :

Soit $u : \mathcal{O}^q \to \mathcal{O}^p$, et soit $v : \mathcal{O}^s \to \mathcal{O}^r$ une autre présentation de $\mathrm{coker}(u)$; alors, étant donné une scission λ de u, on peut en déduire une scission μ de v ayant la propriété suivante : pour tout ρ assez petit, si λ est adapté à ρ, alors μ est adapté à ρ.

Ceci résulte immédiatement de l'existence d'une homotopie entre deux présentations d'un même module; plus précisément, on peut fabriquer des diagrammes commutatifs de $\mathcal{O}$-modules

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}^q & \xrightarrow{u} & \mathcal{O}^p \\ {\scriptstyle \ell_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \ell} \\ \mathcal{O}^s & \xrightarrow{v} & \mathcal{O}^r \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{O}^q & \xrightarrow{u} & \mathcal{O}^p \\ {\scriptstyle m_1}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle m} \\ \mathcal{O}^s & \xrightarrow{v} & \mathcal{O}^r \end{array}$$

et des $\mathcal{O}$-homomorphismes $k : \mathcal{O}^p \to \mathcal{O}^q$, $k' : \mathcal{O}^r \to \mathcal{O}^s$ tels qu'on ait

$$uk + m\ell = \mathrm{id}, \qquad vk' + \ell m = \mathrm{id}.$$

Alors, si λ est une scission de u, $\mu = \ell_1 \lambda m + k'$ est une scission de v; en effet, on a :

$$v\mu v = v\ell_1\lambda m v + vk'v = \ell u\lambda u m_1 + v - \ell m v = \ell u m_1 + v - \ell m v = v.$$

Enfin, si λ est adapté à ρ, μ est évidemment adapté à ρ si ρ est assez petit.

(**1.3**) Posons $\mathrm{M}_i : \mathrm{coker}(u_i)$, et disons que le théorème est vrai pour (M_i) s'il est vrai pour un choix de présentations des M_i, donc d'après (1.2) pour tout choix de présentations des M_i. Supposons maintenant qu'on ait des suites exactes de $\mathcal{O}$-modules

$$0 \to \mathrm{M}'_i \to \mathrm{M}_i \to \mathrm{M}''_i \to 0.$$

Alors, si le théorème est vrai pour le système (M'_i, M''_i), il est vrai pour (M_i). Ceci résulte de la remarque suivante :

Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de $\mathcal{O}$-modules de type fini, et soient u' et u'' des présentations de M' et M''; il existe alors $\ell : \mathcal{O}^{q''} \to \mathcal{O}^{p'}$ tel que la matrice $u = \begin{pmatrix} u' & \ell \\ 0 & u'' \end{pmatrix}$ soit une présentation de M et que ℓ vérifie la propriété suivante : si $u''(y)=0$, alors $\ell(y) \in \operatorname{im}(u')$. Soient alors λ' et λ'' respectivement des scissions de u' et u''; il est facile de vérifier que

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda' & -\lambda'\ell\lambda'' \\ 0 & \lambda'' \end{pmatrix}$$

est une scission de u; d'autre part, si λ' et λ'' sont adaptés à ρ, λ sera aussi adapté à ρ.

La démonstration du théorème va maintenant se faire par récurrence sur n; suivant l'idée de Grauert, on prend pour M'_i le sous-module de x_n-torsion de M_i; alors $M''_i = M_i/M'_i$ est sans x_n-torsion; d'autre part, comme $\mathcal{O}_n$ est nœthérien, pour k assez grand, on a $x_n^k M'_i = 0$; en appliquant à nouveau la remarque précédente, on peut remplacer chaque M'_i par un nombre fini de modules N_j vérifiant $x_n N_j = 0$. En changeant un peu les notations, on voit qu'il suffit de traiter le cas d'un système (N_j, P_k), les N_j étant annulés par x_n, et les P_k sans x_n-torsion. D'après l'hypothèse de récurrence, on peut supposer le théorème établi pour $\mathcal{O}_{n-1}$ et le système $(N_j, P_k/x_nP_k)$. Le théorème résulte maintenant des considérations suivantes :

(1.4) Soit N un $\mathcal{O}_n$-module de type fini, avec $x_n N = 0$; soit $u_0 : \mathcal{O}_{n-1}^q \to \mathcal{O}_{n-1}^p$ une présentation de N en tant que $\mathcal{O}_{n-1}$-module, et soit λ_0 une scission de u_0; alors

a) $u = (u_0, x_n . \mathrm{id}) : \mathcal{O}_n^q \oplus \mathcal{O}_n^p \to \mathcal{O}_n^p$ est une $\mathcal{O}_n$-présentation de N.

b) Une scission λ de u s'obtient ainsi : pour $f \in \mathcal{O}_n^p$, on pose $f = f_0 + x_n \bar{f}$, $f_0 \in \mathcal{O}_{n-1}$ et on prend $\lambda(f) = \begin{pmatrix} \lambda_0(f_0) \\ \bar{f} \end{pmatrix}$.

De plus, si λ_0 est adapté à $(\rho_1, \ldots, \rho_{n-1})$, pour tout $\rho_n > 0$, λ sera adapté à $(\rho_1, \ldots, \rho_n)$.

(1.5) Soit P un $\mathcal{O}_n$-module de type fini, sans x_n-torsion. Soit $u : \mathcal{O}_n^q \to \mathcal{O}_n^p$ une présentation de P; posons $u = \sum_k u_k x_n^k$; u_0 est une présentation de $P^0 = P/x_nP$ sur $\mathcal{O}_{n-1}$; soit λ_0 une scission de x_0; posons $\widetilde{\mathcal{O}}_n = \mathcal{O}_{n-1}[[x_n]]$, et considérons l'application $\lambda : \widetilde{\mathcal{O}}_n^p \to \widetilde{\mathcal{O}}_n^q$ définie ainsi : si $f = \sum_k f_k x_n^k$, on pose $\lambda(f) = g = \sum_k g_k x_n^k$, les g_k étant définis par récurrence par la formule

$$g_k = \lambda_0(f_k - u_1 g_{k-1} - \ldots - u_k g_0). \tag{1.6}$$

La formule précédente s'écrit encore

$$(\mathrm{id} + \sum_{k \geq 1} \lambda_0 u_k x_n^k) g = \lambda_0(f),$$

ou encore
$$\lambda = (\mathrm{id} + \sum_{k \geq 1} \lambda_0 u_k x_n^k)^{-1} \lambda_0.$$

Supposons que λ_0 soit adapté à $(\rho_1, \ldots, \rho_{n-1})$; on voit alors, par une majoration immédiate, que λ est adapté à $(\rho_1, \ldots, \rho_n)$, dès que ρ_n est assez petit. En particulier, si l'ensemble des $P(\rho_1, \ldots, \rho_{n-1})$ auxquels λ_0 est adapté est un système fondamental de voisinages de o (ce qu'on peut supposer par l'hypothèse de récurrence), λ appliquera $\mathcal{O}_n^p$ dans $\mathcal{O}_n^q$.

Reste à démontrer que, dans ces conditions, λ est bien une scission de u. Il suffit d'établir ceci : si $f \in \mathrm{im}(u)$ et $g = \lambda(f)$, on a $ug = f$; montrons, par récurrence sur k, que

$$u(g_0 + \ldots + g_k x_n^k) - (f_0 + \ldots + f_k x_n^k)$$

est divisible par x_n^{k+1}. Ceci est vrai pour $k = 0$, car $g_0 = \lambda_0 f_0$; supposons donc le résultat établi pour $k - 1$; alors, on peut écrire

$$u(g_0 + \ldots + g_{k-1} x_n^{k-1}) - f = x_n^k h, \qquad h = \sum_\ell h_\ell x_n^\ell;$$

par hypothèse, le premier membre, donc le second, appartient à $\mathrm{im}(u)$; comme $\mathrm{coker}(u)$ est sans x_n-torsion, on aura aussi $h \in \mathrm{im}(u)$, donc $h_0 \in \mathrm{im}(u_0)$, et par suite $u_0 \lambda_0 h_0 = h_0$.

D'autre part, on a $h_0 = u_1 g_{k-1} + \ldots + u_k g_0 - f_k$, donc, d'après (1.6), on a $\lambda_0 h_0 = -g_k$ et par suite $u_0 g_k = -h_0$; enfin, le terme de degré k en x_n dans $u(g_0 + \ldots + g_k x_n^k) - f$ vaut $u_0 g_k + h_0 = 0$; d'où le résultat et le théorème.

Remarque **(1.7)**. — Il est facile de voir que les scissions construites au cours de la démonstration se prolongent en des scissions des u_i, considérés comme applications $\widehat{\mathcal{O}}_n^{q_i} \to \widehat{\mathcal{O}}_n^{p_i}$, $\widehat{\mathcal{O}}_n = \mathbf{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$. D'autre part, le théorème reste vrai (encore, si l'on veut, avec les mêmes scissions), lorsqu'on remplace les pseudonormes $|\cdot|_\rho$ par les suivantes, et peut-être encore par d'autres...

a) $|f|_\rho = (\sum_\alpha (|a_\alpha| \rho^\alpha)^p)^{1/p}$, $1 \leq p$ (le cas $p = 1$ étant celui déjà traité).

b) $|f|_\rho = \sup_\alpha |a_\alpha| \rho^\alpha$.

c) $|f|_\rho = \sup_{x \in P(\rho)} |f(x)|$ si f est holomorphe dans $P^0(\rho)$ et continue dans $P(\rho)$
$= +\infty$ sinon.

(Dans ce dernier cas, on retombe sur les normes considérées par Douady [3].)

2. Intégration des formes holomorphes intégrables.

Soit Ω^p l'espace des germes de formes différentielles holomorphes de degré p en o dans $\mathbf{C}^n$; pour $\omega \in \Omega^1$, non identiquement nulle, on considère le complexe :

$$K(\omega) : 0 \to \mathcal{O} \to \Omega^1 \xrightarrow{\delta} \ldots \xrightarrow{\delta} \Omega^n \to 0, \qquad \text{avec} \qquad \delta(\alpha) = \omega \wedge \alpha.$$

Posons $\omega = \sum_i a_i dx_i$, et soit X le « lieu singulier » de ω, *i.e.* le germe analytique défini par les équations $a_i = 0$. On a la proposition suivante :

Proposition **(2.1)**. — *Pour* $1 \leq p \leq n$, *les assertions suivantes sont équivalentes* :

1) Codim $X \geq p$;
2) $H^i(K(\omega)) = 0$, $i = 0, \ldots, p-1$;
3) $H^{p-1}(K(\omega)) = 0$.

Voir une démonstration en appendice.

Démontrons maintenant le théorème (0.1); pour commencer, nous allons rappeler le raisonnement de Martinet et Moussu [8]; comme codim $X \geq 3$, on a $H^2(K(\omega)) = 0$; de l'hypothèse $\omega \wedge d\omega = 0$, on déduit alors l'existence de $\omega_1 \in \Omega^1$ vérifiant $d\omega = \omega \wedge \omega_1$; en différentiant, on trouve $\omega \wedge d\omega_1 = 0$, d'où l'existence d'un ω_2 vérifiant $d\omega_1 = \omega \wedge \omega_2$; par récurrence, on trouve (Godbillon-Vey [5]) qu'il existe une suite ω_p de formes de Ω^1, avec $p \geq 0$, $\omega = \omega_0$, vérifiant

$$(\mathbf{2.2}.p+1) \qquad d\omega_p = \omega_0 \wedge \omega_{p+1} + \sum_{1 \leq q \leq p} \binom{p}{q} \omega_q \wedge \omega_{p-q+1}.$$

On considère alors la forme à $(n+1)$ variables, à coefficients séries formelles :

$$\alpha = dt + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p}{p!} \omega_p;$$

on a, d'après (2.2)

$$d\alpha = \alpha \wedge \left(\sum_p \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \omega_p \right) \quad \text{et en particulier} \quad \alpha \wedge d\alpha = 0;$$

comme α est non singulière en 0, le théorème de Frobenius formel montre qu'il existe F et $G \in \mathbf{C}[[x_1, \ldots, x_n, t]]$, avec $F(0) \neq 0$, tels qu'on ait $\alpha = F dG$; en faisant $t = 0$, on trouve un facteur intégrant formel pour ω_0.

Pour démontrer le théorème (0.1), il suffit donc manifestement de montrer que l'on peut choisir les ω_p de manière que la série $\sum_p \frac{t^p}{p!} \omega_p$ soit convergente; pour cela, identifions Ω^1 à $\mathcal{O}^n$ et Ω^2 à $\mathcal{O}^m$, où $m = \frac{n(n-1)}{2}$, en identifiant une forme à l'ensemble de ses coefficients; choisissons $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$ tel que l'application $\omega_0 \wedge : \Omega^1 \to \Omega^2$ soit adaptée à ρ; on peut évidemment supposer $|\omega_0|_\rho < +\infty$; par récurrence, on pourra donc choisir les ω_p vérifiant, pour $1/2 \leq t \leq 1$, et $c > 0$ convenable,

$$(\mathbf{2.3}) \qquad |\omega_{p+1}|_{t\rho} \leq c(|d\omega_p|_{t\rho} + \sum_{1 \leq q \leq p} \binom{p}{q} |\omega_q|_{t\rho} |\omega_{p-q+1}|_{t\rho}).$$

Nous allons montrer que la suite ainsi choisie répond à la question; pour cela nous emploierons une variante de la méthode connue dans la théorie des équations elliptiques sous le nom de « méthode de Gevrey » ou « des contours successifs ».

Lemme **(2.4)**. — *Il existe* $c_1 > 0$ *tel qu'on ait, pour* $\omega \in \Omega^1$ *et* $1/2 \leq t < s \leq 1$

$$|d\omega|_{t\rho} \leq \frac{c_1}{s-t} |\omega|_{s\rho}.$$

Il suffit de montrer qu'il existe c_2 vérifiant, pour $f \in \mathcal{O}$ et $1/2 \leq t < s \leq 1$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{t\rho} \leq \frac{c_2}{s-t} |f|_{s\rho}.$$

Soit $f = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha$; avec les notations usuelles, on a

$$|f|_{s\rho} = \sum_\alpha |a_\alpha| s^{|\alpha|} \rho^\alpha, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{t\rho} = \sum_\alpha \alpha_i |a_\alpha| t^{|\alpha|-1} \rho^{\alpha - \varepsilon_i};$$

on a donc $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{t\rho} \leq \mathrm{K} |f|_{s\rho}$, avec $\mathrm{K} = \sup\limits_{\alpha_i} \dfrac{2\alpha_i}{\rho_i} \left(\dfrac{t}{s}\right)^{\alpha_i}$.

D'autre part, pour $x > 0$, $0 < a < 1$, le maximum de la fonction $x \mapsto x a^x$ vaut $-\dfrac{1}{e \log a}$, d'où $\mathrm{K} \leq \dfrac{2}{\rho_i e \log \frac{s}{t}}$ et le résultat suit immédiatement.

Il résulte donc de (2.3) et (2.4) que l'on aura, avec un $c' > 0$ convenable, pour $p \geq 0$ et $1/2 \leq t < s < 1$, l'inégalité :

$$(2.5) \qquad |\omega_{p+1}|_{t\rho} \leq \frac{c'}{s-t} |\omega_p|_{s\rho} + c \sum_{1 \leq q \leq p} \binom{p}{q} |\omega_q|_{t\rho} \cdot |\omega_{p-q+1}|_{t\rho}.$$

Définissons une suite v_p de nombres > 0 par les formules suivantes :

$$\begin{cases} v_0 = |\omega_0|_\rho \\ v_{p+1} = c' e v_p + c \sum\limits_{q=1}^{p} v_q v_{p-q+1}. \end{cases}$$

Pour établir le théorème, il suffit d'établir les deux assertions suivantes :

(2.6) on a $|\omega_p|_{t\rho} \leq \dfrac{p!\, v_p}{(1-t)^p}$ $(1/2 \leq t \leq 1)$;

(2.7) la série $\sum_p v_p t^p$ est convergente.

Démonstration de (2.6). — Pour $p = 0$ et 1 l'assertion est évidente. Supposons-la établie jusqu'à l'ordre $p \geq 1$; on aura alors, d'après (2.5), pour $1/2 \leq t < s < 1$

$$\frac{(1-t)^{p+1}}{(p+1)!} |\omega_{p+1}|_{t\rho} \leq \frac{c'(1-t)^{p+1} v_p}{(s-t)(1-s)^p (p+1)} + c \sum_{q=1}^{p} v_q v_{p-q+1}$$

on minimise le premier terme du second membre en choisissant $1 - s = \dfrac{p}{p+1}(1-t)$, d'où

$$\frac{(1-t)^{p+1}}{(s-t)(1-s)^p(p+1)} = \left(1 + \frac{1}{p}\right)^p \leq e;$$

d'où le résultat.

Démonstration de (2.7). — On pose $F(t)=\sum_{p=1}^{+\infty} v_p t^p$; les relations de définition des v_p équivalent à l'équation

$$F(t)=c'ev_0t+c'etF(t)+cF(t)^2.$$

Le résultat est alors une conséquence immédiate du théorème des fonctions implicites, à moins que l'on ne préfère résoudre une équation du second degré. Le théorème (0.1) est donc démontré.

En vue de la démonstration ultérieure du théorème (0.2), remarquons maintenant ceci : en fait, l'hypothèse $\operatorname{codim} X \geq 3$ (ou, ce qui revient au même, $H^2(K(\omega))=0$) n'a été utilisée que pour résoudre de proche en proche les équations $(2.2.p)$; en fait, la démonstration donne le résultat suivant :

(2.8) *Etant donné* $\omega=\omega_0$, *non identiquement nul, supposons que pour n'importe quel choix de* $\omega_1, \ldots, \omega_p \in \Omega^1$, *vérifiant* (2.2.1), …, $(2.2.p)$, *on puisse trouver* $\omega_{p+1} \in \Omega^1$ *vérifiant* $(2.2.p+1)$. *Alors* ω *admet un facteur intégrant.*

La démonstration du théorème (0.2) va maintenant consister à établir ceci : sous les hypothèses de (0.2), les hypothèses de (2.8) sont satisfaites. Cette démonstration va faire l'objet du § 3.

3. Comparaison des divers morphismes de Godbillon-Vey.

Soit $\omega=\omega_0$ une forme $\in \Omega^1$, avec $\omega \neq 0$. Supposons (ce qui ne sera évidemment pas toujours le cas) qu'il existe $\omega_1, \ldots, \omega_p \in \Omega^1$ vérifiant (2.2.1), …, $(2.2.p)$. Pour écrire plus commodément ces dernières équations, considérons la forme à $n+1$ variables

$$\alpha=dt+\omega_0+\ldots+\omega_p\frac{t^p}{p!}$$

variante « tronquée à l'ordre p » de la forme considérée précédemment.

Lemme **(3.1)**. — *Pour que les équations* (2.2.1), …, $(2.2.p)$ *soient satisfaites, il faut et il suffit que le développement de* $\alpha \wedge d\alpha$ *suivant les puissances de t ne contienne pas de termes de degré* $\leq p-1$. (*On écrira alors* $\alpha\wedge d\alpha \equiv 0 \pmod{t^p}$.)

La démonstration est immédiate, et peut être laissée au lecteur. Soit alors F un automorphisme analytique de $\mathbf{C}^{n+1}$ au voisinage de 0, de la forme $x'_i=x_i$, $t'=t+f(x,t)$ avec $f(x,0)=\frac{\partial f}{\partial t}(x,0)=0$; on peut écrire au voisinage de 0

$$F^*(\alpha)=\left(1+\frac{\partial f}{\partial t}\right)\left(dt+\sum_{k=0}^{+\infty}\omega'_k\frac{t^k}{k!}\right),$$

avec $\omega'_0=\omega_0$; en posant

$$\alpha_F=dt+\sum_{k=0}^{p}\omega'_k\frac{t^k}{k!}$$

on voit qu'on aura encore $F^*(\alpha)\wedge F^*(d\alpha)\equiv 0 \pmod{t^p}$, d'où facilement $\alpha_F\wedge d\alpha_F\equiv 0 \pmod{t^p}$ et par suite $\omega'_0=\omega_0$, $\omega'_1, \dots, \omega'_p$ vérifieront encore (2.2.1), ..., (2.2.p).

Lemme **(3.2)**. — *Supposons qu'on ait* $H^1(K(\omega))=0$ (*ou encore ce qui revient au même,* codim $X\geq 2$, X *le lieu singulier de* ω). *Alors, quels que soient* $\omega'_0=\omega_0, \omega'_1, \dots, \omega'_p$ *vérifiant* (2.2.1), ..., (2.2.p), *il existe* F, *de la forme précédente, telle qu'on ait*

$$\alpha_F = dt + \omega'_0 + \dots + \omega'_p \frac{t^p}{p!}.$$

La démonstration se fait par récurrence sur p; comme on a manifestement $\alpha_{F\circ G}=(\alpha_F)_G$, on peut supposer déjà qu'on a

$$\omega'_1=\omega_1, \dots, \omega'_{p-1}=\omega_{p-1};$$

du fait que ω_p et ω'_p vérifient (2.2.p), on déduit qu'on a

$$\omega_0\wedge\omega'_p=\omega_0\wedge\omega_p;$$

comme $H^1(K(\omega))=0$, ceci entraîne qu'il existe $g\in\mathcal{O}$ tel qu'on ait $\omega'_p=\omega_p+g\omega_0$; on vérifie alors immédiatement que l'automorphisme F défini par $x'_i=x_i$, $t'=t-g(x)\dfrac{t^{p+1}}{(p+1)!}$ répond à la question.

(En fait, la même démonstration de proche en proche montre que F est unique modulo t^{p+2}; ce fait ne nous servira pas dans la suite.)

Pour démontrer maintenant le théorème (0.2), il suffit, compte tenu de la remarque (2.8), d'établir le résultat suivant :

Proposition **(3.3)**. — *Supposons que* $\omega=\omega_0$ *admette un facteur intégrant formel et qu'on ait* $H^1(K(\omega))=0$. *Alors, pour toute suite* $\omega'_1, \dots, \omega'_p\in\Omega^1$ *vérifiant* (2.2.1), ..., (2.2.p), *on peut trouver* $\omega'_{p+1}\in\Omega^1$ *vérifiant* (2.2.$p+1$).

Tout d'abord, on a $\omega=fdg$ avec $f, g\in\widehat{\mathcal{O}}$, l'anneau des séries formelles en 0 et $f(0)\neq 0$; donc $d\omega=df\wedge dg=-\omega\wedge f^{-1}df$. ω admet donc une suite de Godbillon-Vey formelle, d'ordre infini, à savoir $\omega_1=-f^{-1}df$, $\omega_p=0$ pour $p\geq 1$; on posera donc ici $\alpha=dt+\omega_0+t\omega_1$.

Considérons d'autre part le complexe $\hat{K}(\omega)$ obtenu en remplaçant dans $K(\omega)$ « séries convergentes » par « séries formelles »; par platitude des séries formelles sur les séries convergentes, on a encore $H^1(\hat{K}(\omega))=0$; alors, le lemme (3.2) est encore vrai pour les formes à coefficients séries formelles, avec la même démonstration; d'où l'existence d'un automorphisme formel F de la forme $x'_i=x_i$, $t'=t+f(x,t)$, $f\in\widehat{\mathcal{O}}$, $f(x,0)=\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,0)=0$ tel qu'on ait

$$\left(1+\frac{\partial f}{\partial t}\right)^{-1} F^*(\alpha)\equiv dt+\omega_0+\omega'_1 t+\dots+\omega'_p\frac{t^p}{p!} \pmod{t^{p+1}};$$

par suite, en prenant pour ω'_{p+1} le coefficient de $\dfrac{t^{p+1}}{(p+1)!}$ dans $\left(1+\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)^{-1} F^*(\alpha)$, on trouve un ω'_{p+1} à coefficient séries formelles qui vérifie

$$d\omega'_p = \omega_0 \wedge \omega'_{p+1} + \sum_1^p \tbinom{p}{q} \omega'_q \wedge \omega'_{p-q+1}.$$

Enfin, comme $\omega_0, \omega'_1, \ldots, \omega'_p$ sont convergentes, par fidèle platitude des séries convergentes sur les séries formelles, on peut trouver un autre ω'_{p+1} qui soit convergent et vérifie la même équation. D'où la proposition et le théorème (0.2).

4. Sur la cohomologie d'une fibration de Milnor.

Prenons $f \in \mathcal{O}$, avec $f(0)=0$. On pose

$$\Omega^p_{\mathrm{rel}} = \Omega^p / (df \wedge \Omega^{p-1}),$$

et on note d_{rel} l'application $\Omega^p_{\mathrm{rel}} \to \Omega^{p+1}_{\mathrm{rel}}$ obtenue par passage au quotient à partir de la différentielle extérieure $d : \Omega^p \to \Omega^{p+1}$. On note H^k_{rel} les groupes de cohomologie du complexe $(\Omega^p_{\mathrm{rel}}, d_{\mathrm{rel}})_{0 \leq p \leq n}$; on sait que H^k_{rel} est un $\mathbf{C}\{t\}$ module, lorsqu'on fait agir t par la multiplication par f et que $H^k_{\mathrm{rel}} \otimes_{\mathbf{C}\{t\}} \mathbf{C}\{t\}[t^{-1}]$ représente la cohomologie de la fibration de Milnor associée à f au voisinage de 0 (Hamm [6]). On se propose ici de démontrer le résultat suivant :

Théorème (**4.1**). — *Supposons qu'on ait, pour un* $k \geq 1$, $H^{k+1}(K(df))=0$; *alors on a* $H^k_{\mathrm{rel}}=0$.

Prenons en effet $\pi \in \Omega^k_{\mathrm{rel}}$, avec $d_{\mathrm{rel}}\pi=0$; on peut relever π en $\omega_0 \in \Omega^k$, avec $d\omega_0 \in df \wedge \Omega^k$; il existe alors $\omega_1 \in \Omega^k$ avec $d\omega_0 = df \wedge \omega_1$; en différentiant on trouve $df \wedge d\omega_1 = 0$, donc il existe $\omega_2 \in \Omega^k$ tel que $d\omega_1 = df \wedge \omega_2$; par récurrence, on trouve alors qu'il existe une suite ω_p d'éléments de Ω^k tels qu'on ait $d\omega_p = df \wedge \omega_{p+1}$.

En utilisant le théorème (1.1) et un calcul de majoration analogue (en plus simple) à celui fait au § 2, on voit qu'on peut choisir la série $\alpha = \sum_p \omega_p \dfrac{t^p}{p!}$ convergente.

On a $d\alpha = d(f+t) \wedge \sum_p \omega_p \dfrac{t^{p-1}}{(p-1)!}$, par conséquent, la classe de α dans les formes relatives à $n+1$ variables, avec f remplacé par $f+t$, est un cocycle; puisque $f+t$ est non singulière en 0, on peut par un automorphisme analytique supposer que $f+t$ est l'une des coordonnées; le lemme de Poincaré avec paramètres montre alors que c'est un cobord, *i.e.* qu'il existe β et γ, $(p-1)$-formes holomorphes en (x, t) telles qu'on ait

$$\alpha = d\beta + d(f+t) \wedge \gamma;$$

en notant $\bar\beta$ (resp. $\bar\gamma$) la restriction de β (resp. γ) à $t=0$, on trouve $\omega_0 = d\bar\beta + df \wedge \bar\gamma$, ou encore, en notant $[\beta]$ la classe de $\bar\beta$ dans $\Omega^{p-1}_{\mathrm{rel}} : \pi = d_{\mathrm{rel}}[\beta]$. D'où le théorème.

Corollaire **(4.2)**. — *Soit* X *le germe d'ensemble critique de* f *au voisinage de* o; *si* $\operatorname{codim} X \geq p$, *alors on a, pour* $1 \leq k \leq p-2$: $H^k_{\mathrm{rel}} = 0$.

Ceci résulte immédiatement de (4.1) et de (2.1) appliqué à $\omega = df$. Dans le cas d'une singularité isolée, *i.e.* lorsque $p = n$, ceci est un résultat bien connu; voir Brieskorn [1] (ou, par exemple, pour une présentation un peu différente, Malgrange [7]).

5. Appendice. Démonstration de la proposition (2.1).

On peut supposer que tous les a_i s'annulent à l'origine, sinon la proposition est évidente. Nous allons alors établir un résultat un peu plus général : soient $a = (a_1, \ldots, a_r)$ des éléments de l'idéal maximal de $\mathcal{O} = \mathbf{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$; si M est un $\mathcal{O}$-module, on notera comme d'habitude $K(a, M)$ le complexe de l'algèbre extérieure fabriqué avec a et M (voir Serre [10]), et par $H_k(a, M)$ ses groupes d'homologie; si $M = \mathcal{O}$, on écrira simplement $K(a)$ et $H_k(a)$; d'autre part, il sera commode d'écrire $H^k(a, M) = H_{r-k}(a, M)$. Pour $r = n$, $\omega = \sum_i a_i dx_i$, on a un isomorphisme évident $H^k(a) \simeq H^k(K(\omega))$.

L'équivalence de 2) et 3) dans la proposition (2.1) résulte alors du lemme plus général suivant, d'ailleurs encore vrai si $\mathcal{O}$ est remplacé par un anneau nœthérien A, avec $a_i \in \operatorname{rad}(A)$.

Lemme **(5.1)**. — *Si* M *est fini sur* $\mathcal{O}$, *et si, pour un* $k \geq 0$, *on a* $H_k(a, M) = 0$, *alors, pour* $\ell \geq k$, *on a* $H_\ell(a, M) = 0$.

Pour $r = 1$, on a $H_\ell(a_1, M) = 0$, $\ell \geq 2$; il suffit donc d'examiner le cas $k = 0$; or, si $H_0(a_1, M) = M/a_1M = 0$, on a $M = 0$ par Nakayama, d'où évidemment $H_1(a_1, M) = 0$.

Supposons alors le résultat établi pour $r-1$, et démontrons-le pour r. En isolant l'action de a_r, on a une suite exacte (Serre [10]) :

$$0 \to H_0(K(a_r) \otimes_{\mathcal{O}} H_\ell(a', M)) \to H_\ell(a, M) \to H_1(K(a_r) \otimes H_{\ell-1}(a', M)) \to 0$$

avec $a' = (a_1, \ldots, a_{r-1})$.

Si $H_k(a, M) = 0$, on a donc

$$H_0(K(a_r) \otimes_{\mathcal{O}} H_k(a', M)) = H_k(a', M)/a_r H_k(a', M) = 0,$$

d'où $H_k(a', M) = 0$ par Nakayama; l'hypothèse de récurrence montre alors qu'on a $H_\ell(a', M) = 0$ pour $\ell \geq k$; en utilisant à nouveau la suite exacte précédente, on trouve qu'on a $H_\ell(a, M) = 0$ pour $\ell > k$. D'où le lemme (1).

Pour établir l'équivalence de 1) et 2) dans la proposition (2.1), on utilisera la proposition « bien connue » suivante, dont une référence est mise au concours.

---

(1) (Ajouté sur épreuves) Le lemme (5.1) se trouve dans :
M. Auslander and D. Buchsbaum, *Ann. of Math.*, **68** (1958), pp. 625-657, prop. 2.4.

Pour l'équivalence de 1) et 2) dans (2.1), voir aussi :
D. G. Northcott, *Lessons on rings, modules and multiplicities*, Cambridge Univ. Press, 1968, p. 371, th. 6.

Proposition **(5.2)**. — *Si* M *est fini sur* $\mathcal{O}$, *alors on a l'égalité* :

$$n-\dim(\mathrm{M})=\inf\{k\mid \mathrm{Ext}^k(\mathrm{M},\mathcal{O})\neq 0\}.$$

L'équivalence cherchée résulte maintenant de la proposition suivante :

Proposition **(5.3)**. — *Pour* $\mathrm{M}=\mathcal{O}/(a_1,\ldots,a_r)$, $(a_1,\ldots,a_r)$ *l'idéal engendré par* $a_1,\ldots,a_r$, *on a*

$$n-\dim\mathrm{M}=\inf\{k\mid \mathrm{H}^k(a)\neq 0\}.$$

Posons $\dim\mathrm{M}=n-k$. Il existe un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathrm{K}_p(a),\mathcal{O})\simeq \mathrm{K}_{r-p}(a)$$

qui commute à la différentielle de $\mathrm{K}(a)$; donc $\mathrm{H}^p(a)=\mathrm{H}_{r-p}(a)$ est le p-ième groupe de cohomologie du complexe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathrm{K}(a),\mathcal{O})$; or, la cohomologie de ce complexe est l'aboutissement d'une suite spectrale dont le terme E_2 est donné par

$$\mathrm{E}_2^{pq}=\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(\mathrm{H}_q(a),\mathcal{O})\,;$$

comme les $\mathrm{H}_q(a)$ sont annulés par $a_1,\ldots,a_r$, on a $\dim\mathrm{H}_q(a)\leq n-k$; d'après (5.2), on a donc $\mathrm{E}_2^{pq}=0$ pour $p\leq k-1$; d'autre part, on a évidemment $\mathrm{E}_2^{pq}=0$ pour $q<0$; donc on aura $\mathrm{H}^\ell(a)=0$, pour $\ell\leq k-1$, et $\mathrm{H}^k(a)=\mathrm{E}_2^{k0}=\mathrm{Ext}^k(\mathrm{H}_0(a),\mathcal{O})=\mathrm{Ext}^k(\mathrm{M},\mathcal{O})$; or, ce dernier groupe n'est pas nul d'après (5.2); ceci démontre la proposition.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. Brieskorn, Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen, *Manuscripta Math.*, **2** (1970), pp. 103-161.

[2] H. Cartan, Idéaux de fonctions analytiques de *n* variables complexes, *Annales E.N.S.*, **61** (1944), pp. 149-197.

[3] A. Douady, Le problème des modules..., *Ann. Inst. Fourier*, **16-1** (1966), pp. 1-95.

[4] H. Grauert, Ein Theorem der analytischen Garbentheorie..., *Publ. Math. I.H.E.S.*, **5** (1960).

[5] C. Godbillon et J. Vey, Un invariant des feuilletages de codimension un, *Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, **273** (1971), pp. 92-95.

[6] H. Hamm, *Zur analytischen und algebraischen Beschreibung der Picard-Lefschetz Monodromie*, Habilitationsschrift (à paraître).

[7] B. Malgrange, Intégrales asymptotiques et monodromie, *Annales E.N.S.*, **7** (1974), pp. 405-430.

[8] R. Moussu, Sur l'existence d'intégrales premières pour un germe de forme de Pfaff, *Ann. Inst. Fourier*, **26-2** (1976), pp. 171-220.

[9] G. Reeb, *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*, Paris, Hermann, 1952.

[10] J.-P. Serre, Algèbre locale, Multiplicités, *Lectures Notes in Mathematics*, nº **11**, Springer Verlag, 1965.

Manuscrit reçu le 20 décembre 1975.