

PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

ROBERT ROUSSARIE

Plongements dans les variétés feuilletées et classification de feuilletages sans holonomie

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 43 (1974), p. 101-141

<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1974__43__101_0>

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (<http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

PLONGEMENTS DANS LES VARIÉTÉS FEUILLETÉES ET CLASSIFICATION DE FEUILLETAGES SANS HOLONOMIE

par R. ROUSSARIE

Dans cet article, nous nous proposons de classifier à isotopie topologique près, l'ensemble $\mathcal{F}(V)$ des feuilletages de codimension 1, sans holonomie, transversalement orientés, de classe de différentiabilité supérieure ou égale à deux, transverses à ∂V , définis sur une variété $V = M \times S^1$, où M est une surface compacte orientable.

Deux feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{F}' définis sur une variété V sont dits topologiquement conjugués, s'il existe un homéomorphisme h de V , envoyant les feuilles de \mathcal{F} sur les feuilles de \mathcal{F}' . Si l'homéomorphisme h est isotope à l'identité de V , à travers les homéomorphismes de V , les feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont dits topologiquement isotopes. Enfin si \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont transversalement orientés, on supposera que h préserve les orientations transverses.

Un feuilletage est dit être sans holonomie, si en tout point son groupe d'holonomie est trivial. Nous montrons ci-dessous qu'à chaque feuilletage $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(V)$, où V est une variété compacte quelconque, on peut associer, grâce à un théorème de R. Sacksteder [11], un élément $\delta(\mathcal{F}) \in SH^1(V, \mathbf{R})$ (Sphère des directions orientées de classes de cohomologie réelle de V). Cet élément $\delta(\mathcal{F})$ est invariant par isotopie topologique, se transforme naturellement par les homéomorphismes de conjugaison et coïncide avec la direction de la classe $[\omega]$ si \mathcal{F} est défini par une forme fermée ω . Le résultat essentiel, établi dans la partie II, s'énonce alors de la façon suivante :

Si $V = M \times S^1$, où M est une surface compacte orientable, deux feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{F}' de $\mathcal{F}(V)$ sont topologiquement isotopes si et seulement si $\delta(\mathcal{F}) = \delta(\mathcal{F}')$.

Ce résultat généralise un théorème classique de Denjoy-Siegel [12], affirmant que tout feuilletage par droites du tore T^2 , de classe ≥ 2 , est topologiquement conjugué à un feuilletage linéaire, c'est-à-dire à un feuilletage défini par une forme fermée ω d'équation : $\omega = \alpha dx + \beta dy$ avec $(x, y) \in S^1 \times S^1$ et α, β nombres réels rationnellement indépendants.

Rappelons les deux étapes de la démonstration de ce théorème :

- On construit une courbe simple γ sur T^2 , transverse au feuilletage, par approximation d'une feuille récurrente.

— On applique le théorème d'ergodicité de Denjoy [15] au difféomorphisme de retour sur γ associé à un champ de vecteurs tangent aux feuilles.

Pour étudier la classe d'isotopie d'un feuilletage de $\mathcal{F}(V)$ nous suivons des étapes analogues :

— En découpant la variété V suivant des sous-variétés de dimension 2, transverses au feuilletage, de façon à se ramener à la variété $D^2 \times S^1$ dans laquelle le feuilletage induit est isotope au feuilletage produit, en vertu du théorème de stabilité de G. Reeb [5].

— En appliquant un théorème de Sacksteder [11], généralisant aux groupes de difféomorphismes de S^1 , le théorème d'ergodicité de Denjoy.

Mais alors que la première étape de la démonstration du théorème de Denjoy-Siegel est une trivialité, il n'en est plus de même dans notre démonstration, pour plusieurs raisons : d'une part, il n'est plus possible en général, de construire une sous-variété transverse au feuilletage par approximation d'une feuille; d'autre part, on doit pouvoir contrôler le plongement dans V de cette sous-variété si l'on désire simplifier la variété V et le feuilletage en découpant V suivant la sous-variété. La difficulté à trouver suffisamment de sous-variétés convenables, transverses au feuilletage, explique que le théorème annoncé soit limité aux variétés de dimension 3, de la forme $M \times S^1$.

Ces considérations nous ont conduit à étudier le problème suivant :

Soit φ un plongement d'une variété compacte W^2 dans une variété V^3 munie d'un feuilletage \mathcal{F} de codimension 1. A quelles conditions portant sur le plongement φ et sur le feuilletage \mathcal{F} , le plongement φ est-il isotope à un plongement φ' , transverse à \mathcal{F} ou d'image contenue dans une feuille ?

Le plongement φ ayant été mis en position générale par rapport au feuilletage, on essaie d'éliminer, par isotopie, le maximum de points de contact. Cette méthode a été utilisée par H. Rosenberg pour démontrer que toute sphère plongée dans une variété feuilletée par plans R^2 , borde une boule [7] et [9]. Dans [9], on déduit de ce résultat que tout plongement du tore T^2 , induisant un homomorphisme injectif des groupes fondamentaux, peut être rendu transverse, par isotopie, à un feuilletage par plans d'une variété V^3 compacte.

Le but essentiel de la partie I est de rechercher des conditions moins restrictives sur le feuilletage, pour lesquelles le résultat ci-dessus sera encore valable. Un plongement φ de T^2 en position générale par rapport à un feuilletage \mathcal{F} possède deux types de centres parmi ses points de contact; ces types sont notés ci-dessous : type *a* et type *b*. Dans [10], il est montré que si le feuilletage ne contient pas de composante de Reeb τ_3 on peut éliminer, par isotopie, tous les centres de type *a*. On montre, dans la partie I, que les centres de type *b* peuvent être ensuite éliminés, pourvu que le feuilletage ne contienne pas de composante difféomorphe à un quotient du produit par S^1 de la composante de Reeb τ_2 de dimension 2 (notée composante de type II ci-dessous). La démonstration est assez longue et nécessite l'étude du relèvement sur les feuilles voisines d'une cou-

ronne $\mathbf{S}^1 \times I$ plongée dans une feuille, analogue à l'étude du relèvement d'un disque \mathbf{D}^2 , faite par Novikov [4]. Le résultat principal s'énonce alors de la façon suivante :

Un plongement φ de \mathbf{T}^2 dans une variété compacte V^3 munie d'un feuilletage \mathcal{F} de codimension 1, transversalement orientable, peut être rendu, par isotopie, transverse à \mathcal{F} ou d'image contenue dans une feuille, pourvu que $\varphi_ : \pi_1(\mathbf{T}^2) \rightarrow \pi_1(V^3)$ soit un homomorphisme injectif et que le feuilletage \mathcal{F} ne contienne ni composante de type I (composante de Reeb τ_3) ni composante de type II (quotient de $\tau_2 \times \mathbf{S}^1$).*

Un feuilletage sans holonomie ne contient pas de composante à bord non vide, et en particulier, pas de composante de type I ou II, et le résultat ci-dessus pourra être appliqué dans la partie II à l'étude des feuilletages de $\mathcal{F}(V)$.

I. — PLONGEMENTS DANS LES VARIÉTÉS FEUILLETÉES

Soit V une variété de dimension 3, de classe C^∞ , munie d'un feuilletage \mathcal{F} transversalement orientable. Supposons que φ désigne un plongement différentiable du tore \mathbf{T}^2 dans V . Il est intéressant de savoir, pour l'étude du feuilletage \mathcal{F} , si le plongement φ est isotope à un plongement transverse à \mathcal{F} . Par exemple, dans [9], il est établi que tel est le cas si le plongement φ induit un homomorphisme injectif du groupe fondamental de \mathbf{T}^2 dans celui de V et si \mathcal{F} est un feuilletage par plans, de classe supérieure ou égale à deux. Les résultats des articles [8] et [9] découlent directement de cette propriété. Nous nous proposons ici de montrer que l'on peut considérablement affaiblir la condition imposée ci-dessus au feuilletage \mathcal{F} .

S. P. Novikov a introduit dans [4] la relation d'équivalence suivante entre les feuilles d'un feuilletage transversalement orientable : deux feuilles L et L' sont équivalentes si, et seulement si, il existe une courbe fermée, transverse au feuilletage et coupant L et L' . Si, de plus, la variété V est compacte, les classes d'équivalence sont d'une part des feuilles compactes, d'autre part des ouverts saturés par le feuilletage dont la frontière, si elle n'est pas vide, est réunion de classes du premier type.

On appellera composante du feuilletage \mathcal{F} la fermeture de toute classe ouverte. Une composante de \mathcal{F} peut être la variété tout entière ou bien une sous-variété compacte W de V à bord non vide, de dimension 3. Inversement, supposons donnée une variété W , compacte, à bord non vide, munie d'un feuilletage \mathcal{F}_W transversalement orientable et ne contenant qu'une seule composante. Si W est plongée dans la variété feuilletée V , de façon que le feuilletage induit sur W soit \mathcal{F}_W , il peut arriver que W ne soit pas une composante du feuilletage de \mathcal{F} . Cependant, si le feuilletage \mathcal{F}_W est tel que toute courbe transverse au feuilletage, entrant dans W par un point de ∂W , ne puisse atteindre à nouveau ∂W , il est aisé de montrer que W est composante de toute variété feuilletée dans laquelle elle est plongée comme sous-variété feuilletée. On appellera *composante*

une variété feuilletée telle que W . Deux composantes entre lesquelles il existe un homéomorphisme envoyant feuilles sur feuilles seront considérées comme équivalentes.

Les composantes de Reeb sont des exemples bien connus de telles variétés feuilletées : l'une est orientable et difféomorphe à $D^2 \times S^1$, l'autre est non orientable et difféomorphe au fibré non-trivial en disques D^2 sur S^1 . Nous désignerons ces composantes sous le nom de *composantes de type I* et nous allons décrire un second type de composante appelé à jouer un rôle important dans la suite.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ une application de classe C^∞ telle que

- (i) $f(0) = f(1) = 0$, $f(x) = f(1-x)$, et $f'(x) > 0$ pour $0 < x < 1$.
- (ii) Les points 0 et 1 ne sont pas des points critiques de f .

Considérons l'application C^∞ , $F : I \times S^1 \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$F(x, \theta, z) = f(x)e^z \quad \text{pour } (x, \theta, z) \in I \times S^1 \times \mathbf{R}.$$

L'application F est une submersion de $I \times S^1 \times \mathbf{R}$ dans \mathbf{R} et définit un feuilletage \mathcal{F}_0 de $I \times S^1 \times \mathbf{R}$ dont les feuilles sont les surfaces de niveau de $F : F^{-1}(a)$ pour tout $a \geq 0$.

Considérons maintenant les quatre difféomorphismes suivants de $I \times S^1 \times \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} a_1(x, \theta, z) &= (x, \theta, z+1); & a_2(x, \theta, z) &= (x, -\theta, z+1) \\ b_1(x, \theta, z) &= (1-x, -\theta, z+1); & b_2(x, \theta, z) &= (1-x, \theta, z+1). \end{aligned}$$

Ces quatre difféomorphismes laissent globalement invariant le feuilletage \mathcal{F}_0 . Le feuilletage \mathcal{F}_0 induit donc des feuilletages sur les variétés quotients, qui sont des variétés compactes. Les quatre variétés feuilletées ainsi définies sont clairement des composantes. On les désignera sous le nom de *composantes de type II*. Nous aurons ainsi :

— Deux composantes de type II_a , associées aux difféomorphismes a_1 et a_2 , et difféomorphes respectivement à $T^2 \times [0, 1]$ et $K^2 \times [0, 1]$ (où K^2 désigne la bouteille de Klein, c'est-à-dire le fibré non-trivial de fibre S^1 sur S^1).

— Deux composantes de type II_b , associées à b_1 et b_2 , ayant chacune un bord connexe difféomorphe à T^2 , l'une étant orientable et l'autre non-orientable.

Ceci étant introduit, nous avons le résultat suivant :

Théorème 1. — Soit V une variété de classe C^∞ , compacte, de dimension 3, munie d'un feuilletage \mathcal{F} transverse ou tangent aux composantes de ∂V si $\partial V \neq \emptyset$, transversalement orientable, de classe supérieure ou égale à 2 et ne possédant pas de composantes de type I ou II. Alors, tout plongement φ du tore T^2 dans l'intérieur de V , induisant un homomorphisme injectif sur les groupes fondamentaux, est isotope dans l'intérieur de V à un plongement transverse à \mathcal{F} , ou bien à un plongement dont l'image est une feuille de \mathcal{F} difféomorphe au tore T^2 .

Remarque. — L'absence de composantes de type I ou II est, en général, nécessaire à la conclusion du théorème. Pour en convaincre le lecteur, je citerai les deux exemples suivants :

a) Dans $V = S^1 \times S^1 \times S^1$, on définit un feuilletage par la forme fermée

$$\omega = dx - \alpha dy - \beta dz \quad \text{avec } (x, y, z) \in S^1 \times S^1 \times S^1,$$

les nombres α et β étant irrationnels et rationnellement indépendants. On opère un tourbillonnement de ce feuilletage le long du cercle transverse défini par $\{x=y=0\}$. (Voir [5] pour la définition de cette opération.) Le feuilletage obtenu \mathcal{F} possède une composante de type I. Considérons le tore plongé défini par $z=0$. Ce tore possède au moins deux points de contact avec \mathcal{F} , ainsi que tous les tores qui lui sont isotopes, et n'est pas isotope à la seule feuille compacte de \mathcal{F} .

b) Considérons une composante de Reeb de dimension 2, difféomorphe à $S^1 \times I$. L'identification de cette composante avec elle-même par son bord définit un feuilletage de $T^2 = (S^1 \times [0, 1]) \cup (S^1 \times [0, 1])$. Si p est un point de S^1 , soit γ le cercle

$$\gamma = (\{p\} \times [0, 1]) \cup (\{p\} \times [0, 1]) \subset T^2.$$

Considérons maintenant le tore $T^3 = T^2 \times S^1$, muni du feuilletage produit \mathcal{F} . Alors le tore $\tau = \gamma \times S^1$, plongé dans T^3 , est tel que tout tore qui lui est isotope ait au moins quatre points de contact avec le feuilletage \mathcal{F} , et n'est pas isotope à l'une des feuilles compactes de \mathcal{F} .

De même la condition homotopique sur φ est également nécessaire en général. Considérons par exemple le feuilletage de T^3 , défini par la forme ω écrite ci-dessus et supposons que φ soit contractible dans T^3 . Alors tout plongement isotope à φ possède au moins quatre points de contact avec le feuilletage.

Dans le paragraphe 1 ci-dessous, on développe quelques propriétés des feuilletages sans cycle limite (au sens de Novikov). Rappelons que si la variété est compacte, l'existence de cycle limite est équivalente à l'existence de composante de type I, d'après un théorème classique de Novikov [4]. Le but du paragraphe 1 est de montrer que tout plongement peut être réduit en un sens que l'on précisera.

Le paragraphe 2 est consacré à l'étude des feuilletages des variétés compactes sans composantes de type II. On obtient des résultats analogues à ceux obtenus par Novikov pour les feuilletages sans cycles limites, la couronne $S^1 \times I$ jouant le rôle du disque D^2 . Enfin, le paragraphe 3 utilise les résultats des deux parties précédentes pour démontrer le théorème 1.

1. Les feuilletages sans cycle limite

Dans cette partie, V est une variété de dimension 3, compacte ou non, de classe C^∞ , munie d'un feuilletage \mathcal{F} , de classe supérieure ou égale à deux, transversalement orientable, transverse ou tangent aux composantes de ∂V si $\partial V \neq \emptyset$ et sans cycle limite ni feuille homéomorphe à S^2 . Rappelons qu'un cycle limite (au sens de Novikov) est une application continue f de $[0, 1] \times S^1$ dans V telle que :

- (i) Pour tout $t \in [0, 1]$, $f_t(S^1)$ appartient à une feuille de \mathcal{F} notée L_t .
- (ii) f_0 n'est pas homotope à une application constante dans L_0 , mais f_t , pour $0 < t \leq 1$, est homotope à une application constante dans L_t .
- (iii) Pour tout $x \in S^1$, les chemins $t \mapsto f_t(x)$ sont topologiquement transverses à \mathcal{F} .

Soit R une variété de dimension 2, de classe C^∞ , compacte, orientable, différente du disque D^2 et de la sphère S^2 , et φ un plongement différentiable de R dans V . On supposera que :

- (i) Si $\partial R \neq \emptyset$, chaque composante connexe de ∂R difféomorphe à S^1 a une image par φ contenue dans ∂V ou dans l'intérieur de V .
- (ii) $\varphi(\text{int } R) \subset \text{int } V$, et φ est transverse à ∂V .
- (iii) φ est transverse à \mathcal{F} dans un voisinage de ∂R et l'image de chaque composante de ∂R est transverse à \mathcal{F} ou bien contenue dans une feuille de \mathcal{F} .

Dans la suite, les isotopies du plongement φ considérées se feront à travers les plongements respectant les conditions ci-dessus.

Nous allons déformer le plongement φ par des isotopies successives, de façon à obtenir des plongements de R de plus en plus simples : φ_1, φ_2 , etc. qui aboutiront à un plongement $\bar{\varphi}$ dit de *forme réduite* dont on trouvera la définition à la fin du paragraphe.

Tout d'abord, le plongement φ est isotope à un plongement φ_0 , de classe C^∞ , en *position générale* par rapport à \mathcal{F} , qui peut être choisi aussi proche que voulu de φ , dans la topologie des plongements de la classe de φ . Par position générale, nous entendons que :

- (i) Pour toute application distinguée f du feuilletage, l'application $f \circ \varphi_0$ est localement du type de Morse, lorsque la composition est définie.
- (ii) Les points de contact de φ_0 avec \mathcal{F} , c'est-à-dire les points où φ_0 n'est pas transverse à \mathcal{F} , qui sont en nombre fini et contenus dans $\text{int } R$, ont de plus des images dans V , situées sur les feuilles distinctes de \mathcal{F} .

Pour un plongement en position générale tel que φ_0 , l'image inverse $\varphi_0^{-1}(\mathcal{F})$ est un feuilletage avec singularités de R , dont les singularités sont les points de contact de φ_0 avec \mathcal{F} . Les singularités sont des *centres* ou des *points de selle* sans connexion entre eux en raison des conditions (i) et (ii). S'il n'existe pas de centres, nous poserons $\varphi_0 = \bar{\varphi}$ et nous aurons fini. Aussi, dans la suite, nous supposerons qu'il existe m_0 centres, avec $m_0 \geq 1$.

1. Voisinages adéquats des centres.

Nous allons porter notre attention sur les centres du feuilletage $\varphi_0^{-1}(\mathcal{F})$. Au voisinage d'un centre p , les feuilles de $\varphi_0^{-1}(\mathcal{F})$ sont des courbes fermées, difféomorphes à S^1 . Chacune de ces courbes borde un disque unique sur R , contenant p comme unique singularité de $\varphi_0^{-1}(\mathcal{F})$. Considérons l'ensemble des feuilles de $\varphi_0^{-1}(\mathcal{F})$ avec cette propriété et désignons par E la fermeture de leur réunion dans R . Nous avons le résultat suivant (voir [8] et [10]) :

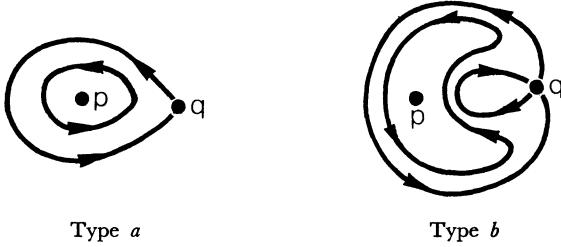
Lemme 1. — La frontière de l'ensemble E est formée :

- a) Soit d'une courbe fermée γ_1 , homéomorphe à S^1 , qui est différentiable sauf en un point de selle q .

b) Soit d'une courbe fermée γ_1 , bouquet de deux cercles, le point double du huit étant un point de selle q .

Dans le premier cas, l'ensemble E est un disque plongé dans R , singulier en q ; dans le second cas, l'ensemble E est un disque pincé en q . Les feuilles de $\varphi_0^{-1}(\mathcal{F})$ contenues dans l'intérieur de E , et distinctes de p , sont difféomorphes à S^1 ; γ_1 est formé de feuilles de $\varphi_0^{-1}(\mathcal{F})$.

L'ensemble E sera appelé le voisinage adéquat du centre E de type *a* ou *b*.



Voisinages adéquats du centre p

Le feuilletage \mathcal{F} étant transversalement orientable et la variété R étant orientable, il existe une orientation globale des feuilles de $\varphi_0^{-1}(\mathcal{F})$. (Autrement dit, il existe un champ de vecteurs sur R dont les orbites sont les feuilles de $\varphi_0^{-1}(\mathcal{F})$). Dans cette orientation, les feuilles, au voisinage d'un point de selle, sont donc orientées comme les orbites d'un champ au voisinage d'un point de selle, avec une direction entrante et une direction sortante du point de selle. De plus, cette orientation permet de construire une *paramétrisation* différentiable du voisinage adéquat E par des applications γ_t , $t \in [0, 1]$, telles que :

(i) $\gamma_0(S^1) = p$, γ_t est un plongement de S^1 sur une feuille de $\varphi_0^{-1}(\mathcal{F})$ pour $0 < t < 1$ et γ_1 paramètre ∂E de façon que γ_1 soit un plongement singulier en q dans le cas *a*, et soit une immersion avec un point double singulier en q dans le cas *b*, comme il est indiqué sur le schéma ci-dessus.

(ii) Les chemins $t \mapsto \gamma_t(x)$ pour tout $x \in S^1$, sont transverses aux feuilles $\gamma_t(S^1)$ en dehors de p et q .

Considérons l'image $\varphi_0(E)$ dans V . Nous désignerons par L_t la feuille de \mathcal{F} contenant $\varphi_0(\gamma_t(S^1)) = C_t$. Comme les courbes C_t sont contractibles dans L_t pour t suffisamment petit, et que \mathcal{F} ne possède pas de cycles limites, cette propriété de contractibilité est vérifiée pour toutes les valeurs $t \in [0, 1]$. Cela entraîne que, pour $0 < t < 1$, la courbe C_t borde un disque unique dans L_t , noté D_t . (L'unicité résulte de l'hypothèse qu'aucune feuille de \mathcal{F} n'est homéomorphe à S^2).

Considérons la courbe C_1 . Dans le cas *a*, cette courbe est un cercle singulier en $\varphi_0(q)$ et borde un disque D_1 dans L_1 , singulier en $\varphi_0(q)$. Dans le cas *b*, on peut approcher C_1 par un cercle plongé C'_1 dans L_1 , ne différant de C_1 que dans un voisinage arbitraire de $\varphi_0(q)$. Le cercle C'_1 étant homotope à C_1 est contractible dans L_1 et borde un disque

unique D'_1 sur L_1 . Si $\varphi_0(q)$ est contenu dans D'_1 , le cercle C_1 est le bord de la réunion de deux disques singuliers en $\varphi_0(q)$. Si $\varphi_0(q)$ est contenu dans le complémentaire de D'_1 , C_1 borde un disque pincé en $\varphi_0(q)$, que nous noterons D_1 . De plus, le fait que le feuilletage $\varphi_0^{-1}(\mathcal{F})$ soit orientable assure que le disque pincé D_1 ait un voisinage difféomorphe à $S^1 \times I$ sur sa feuille L_1 , bien que cette feuille ne soit pas nécessairement orientable.

2. Rappels de quelques résultats relatifs aux feuilletages sans cycle limite ni feuille homéomorphe à S^2 ou à P^2 (espace projectif).

Nous rappelons maintenant quelques résultats qui vont servir de point de départ aux considérations ultérieures. On se référera à [10] pour les détails des démonstrations.

Lemme 2. — Pour qu'un feuilletage \mathcal{F} transversalement orientable soit sans cycle limite, il faut et suffit que l'homomorphisme i_* de $\pi_1(L_x)$ dans $\pi_1(V)$, induit par l'inclusion i de la feuille L_x passant par x dans la variété feuilletée V , soit un homomorphisme injectif pour tout $x \in V$.

Démonstration. — La nécessité de cette condition a été établie dans [10]. Supposons réciproquement qu'un feuilletage vérifie la condition ci-dessus, et supposons que f_t soit un cycle limite. Comme $f_t(S^1)$ est contractible sur sa feuille pour tout $t > 0$, $f_0(S^1)$ est contractible dans V . Or, la condition du lemme implique que $f_0(S^1)$ est aussi contractible sur sa feuille, ce qui est en contradiction avec la définition de cycle limite.

Le lemme 2 a pour conséquence que le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ induit dans le revêtement universel \tilde{V} de V par un feuilletage \mathcal{F} sans cycle limite ni feuille homéomorphe à S^2 ou P^2 , a toutes ses feuilles simplement connexes et difféomorphes à R^2 , si V est de dimension 3. H. Rosenberg a démontré que dans une telle variété \tilde{V} munie d'un feuilletage par plans, toute sphère plongée S est le bord d'une boule D^3 dans la variété ([7] et [9]). \tilde{V} est dite *irréductible*. Cette propriété passe facilement du revêtement universel \tilde{V} à la variété V :

Lemme 3. — Si V possède un feuilletage sans cycle limite ni feuille homéomorphe à S^2 ou P^2 , alors V est irréductible.

Ce dernier lemme permet d'obtenir la réduction suivante du plongement φ_0 [10] :

Lemme 4. — Avec les notations précédentes, si φ_0 est un plongement de R dans V , injectif sur les groupes fondamentaux, en position générale par rapport à \mathcal{F} et possédant quelques centres de type a parmi ses points de contact, φ_0 est isotope à un plongement φ_1 , sans centre de type a , possédant strictement moins de points de contact avec \mathcal{F} que le plongement φ_0 .

3. Plongements sans centre de type a .

Soit φ_1 le plongement isotope à φ_0 , fourni par le lemme 4. Si φ_1 ne possède pas de centres parmi ses points de contact, nous poserons $\bar{\varphi} = \varphi_1$ et nous aurons fini. Sinon, φ_1 possède m_1 centres, avec $m_1 \geq 1$, qui sont tous de type b . C'est ce que nous allons

supposer maintenant. Soient p l'un de ces centres, E son voisinage adéquat. La courbe C_1 associée à p est composition de deux cercles singuliers c'_1 et c''_1 . Nous avons vu plus haut que :

- ou bien c'_1 et c''_1 étaient bords de disques plongés dans L_1 ;
- ou bien c_1 était le bord d'un disque pincé.

Nous allons voir que la première éventualité ne peut arriver, car c'_1 et c''_1 ne peuvent être contractibles sur L_1 . En effet, si c'_1 est contractible sur L_1 , $\varphi_1^{-1}(c'_1) = \gamma'_1$ est contractible sur R , puisque φ_1 induit une injection des groupes fondamentaux. Le cercle γ'_1 borde alors un disque unique Γ'_1 sur R . Un examen des centres de $\varphi_1^{-1}(\mathcal{F})$ contenus dans Γ'_1 montre facilement que l'un d'entre eux au moins est du type a , ce qui est en contradiction avec l'hypothèse faite sur φ_1 . Nous avons donc le résultat suivant :

Lemme 5. — Si φ_1 est un plongement de R dans V , en position générale par rapport à \mathcal{F} , isotope à φ_0 et sans centre de type a , alors chaque centre p possède un voisinage adéquat E du type b , dont le bord a une image C_1 dans V , bord d'un disque pincé D_1 dans sa feuille L_1 ; de plus D_1 n'est pas contractible sur L_1 .

Nous noterons par E^i , D_1^i , C_1^i , $i \in \{1, \dots, m_1\}$, le voisinage adéquat, le disque pincé et sa frontière associés à chaque centre p^i de φ_1 , par q^i le point de selle associé à p^i et par γ_i^i le paramétrage de E^i .

Lemme 6. — Le plongement φ_1 défini ci-dessus est isotope à un plongement φ_2 , en position générale par rapport à \mathcal{F} , sans centre de type a , ayant le même système de disques pincés $D_1^1, \dots, D_1^{m_1}$ que φ_1 et tel que

$$\varphi_2(R) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m_1} \text{int } D_1^i \right) = \emptyset.$$

Remarque. — Le plongement φ_2 ayant les mêmes disques pincés que φ_1 , a le même nombre de centres et donc de points de contact avec \mathcal{F} que φ_1 .

Démonstration. — Supposons que $\varphi_1(R) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m_1} \text{int } D_1^i \right) \neq \emptyset$. Comme les points de contact de φ_1 sont situés sur des feuilles distinctes, l'intersection ci-dessus est formée d'une réunion de k courbes difféomorphes à $S^1 : \ell_1, \dots, \ell_k$. Chacune de ces courbes ℓ_j étant contenue dans l'intérieur d'un certain disque pincé D_1^i , borde dans ce disque pincé un disque différentiable noté Γ_j . Soit ℓ_s une telle courbe qui soit de plus minimale, c'est-à-dire telle que

$$\text{int } \Gamma_s \cap \left(\bigcup_{j=1}^k \ell_j \right) = \emptyset.$$

Cette courbe ℓ_s est le bord sur $\varphi_1(R)$ d'un disque unique E_s , à cause de la condition homotopique sur φ_1 , et $E_s \cup \Gamma_s$ est une sphère anguleuse S , plongée dans V . Le lemme 3 entraîne que S est le bord d'une boule anguleuse B plongée dans V . Comme $R \neq S^2$,

que φ_1 induit une injection sur les groupes fondamentaux et que $\text{int } L_s \cap \varphi_1(R) \neq \emptyset$, nous avons :

$$\text{int } B \cap \varphi_1(R) = \emptyset.$$

C'est une situation analogue à celle étudiée dans [10] : il est possible de trouver un disque \bar{E}_s sur $\varphi_1(R)$ contenant E_s dans son intérieur, tel que :

(i) $\partial \bar{E}_s$ appartienne à une feuille \bar{L}_s et borde un disque $\bar{\Gamma}_s$ sur cette feuille avec $\text{int } \bar{\Gamma}_s \cap \varphi_1(R) = \emptyset$;

(ii) $\bar{E}_s \cap (\bigcup_{i=1}^{m_1} D_i^i) = E_s \cap (\bigcup_{i=1}^{m_1} D_i^i)$.

La réunion $\bar{E}_s \cup \bar{\Gamma}_s$ est également le bord d'une boule \bar{B} contenant B telle que :

$$\text{int } \bar{B} \cap \varphi_1(R) = \emptyset$$

et il existe un disque \bar{E}'_s dans \bar{B} proche de $\bar{\Gamma}_s$, de bord $\partial \bar{E}_s$, tangent à $\varphi_1(W)$ le long de $\partial \bar{E}_s$ et n'ayant qu'un seul point de contact avec \mathcal{F} , et tel que :

$$\text{int } \bar{E}'_s \cap (\bigcup_{i=1}^{m_1} D_i^i) = \emptyset.$$

Les deux disques \bar{E}_s et \bar{E}'_s sont isotopes dans \bar{B} relativement à $\partial \bar{E}_s = \partial \bar{E}'_s$, et comme $\text{int } \bar{B} \cap \varphi_1(R) = \emptyset$, cette isotopie se prolonge en une isotopie de φ_1 jusqu'à un plongement φ'_1 coïncidant avec φ_1 sur $R - \varphi_1^{-1}(\bar{E}_s)$. Les feilletages induits sur R par φ_1 et φ'_1 sont conjugués, car aucun point de selle de φ_1 ne saurait être contenu dans \bar{E}_s .

Le plongement φ'_1 obtenu a le même système de disques pincés que φ_1 , mais possède au moins une composante de moins que φ_1 dans l'intersection $\varphi'_1(R) \cap (\bigcup_{i=1}^{m_1} \text{int } D_i^i)$ puisque $\ell_s \subset \bar{E}_s \cap (\bigcup_{i=1}^{m_1} D_i^i)$ alors que $\bar{E}'_s \cap (\bigcup_{i=1}^{m_1} D_i^i) = \emptyset$. Le lemme résulte de ce qui précède par récurrence sur le nombre de telles composantes ℓ_j .

Soit φ_2 le plongement défini au lemme précédent. Ce plongement possède $m_2 = m_1$ centres. Pour chaque $j \in \{1, \dots, m_2\}$, nous avons remarqué plus haut que le disque pincé D_j^j est contenu dans un voisinage $U^j \simeq S^1 \times I$ de sa feuille. Le lemme 6 permet de plus de choisir U^j tel que :

$$U^j \cap \varphi_2(R) = \partial D_j^j = C_j^j.$$

Nous sommes ainsi conduits à nous intéresser à l'aspect du feilletage au voisinage d'une couronne $U \simeq S^1 \times I$ contenue dans une feuille :

Lemme 7. — Si $U \simeq S^1 \times I$ est une couronne plongée dans une feuille L de \mathcal{F} , il existe un voisinage $M \simeq J \times U$ de U dans V , où $J = [0, 1]$ et U est identifié à $\left\{ \frac{1}{2} \right\} \times U$, tel que le feilletage \mathcal{F}_M induit par \mathcal{F} sur M ait les propriétés suivantes :

(i) \mathcal{F}_M est transverse aux segments $J \times \{x\}$ pour tout point x de U ; pour une métrique donnée dans U , ces segments peuvent être choisis de longueur arbitrairement petite.

(ii) Si f_M est le feuilletage induit sur la couronne $J \times \mathbf{S}^1 \times \left\{ \frac{1}{2} \right\}$, $\frac{1}{2} \in I$, alors $\mathcal{F}_M = f_M \times I$, c'est-à-dire que chaque feuille de \mathcal{F}_M est le produit par I d'une feuille de f_M .

Démonstration. — Considérons un voisinage normal de U dans V pour la métrique donnée. Si la longueur de ses fibres est choisie suffisamment petite, ces fibres sont transverses au feuilletage \mathcal{F} puisque U appartient à une feuille. De plus, le feuilletage \mathcal{F} étant transversalement orientable, ce voisinage est trivial et difféomorphe à $J \times U$ (où $J \times \{x\}$ est la fibre par $x \in U \simeq \left[\frac{1}{2} \right] \times U$). Ainsi la condition (i) du lemme est remplie. Pour vérifier la condition (ii), écrivons U comme

$$U = A \cup B \quad \text{avec} \quad A = \left[0, \frac{1}{2} \right] \times I \quad \text{et} \quad B = \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \times I$$

où :

$$\left[0, \frac{1}{2} \right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1 \right] / 0 \sim 1 = \mathbf{S}^1.$$

En vertu du lemme de stabilité de G. Reeb [5], les carrés A et B se relèvent sur les feuilles voisines suivant les carrés, le long des trajectoires normales. Ainsi, après une restriction éventuelle de la longueur des fibres $J \times \{x\}$ et un reparamétrage de $J \times A$ et de $J \times B$, les traces \mathcal{F}_A de \mathcal{F} sur $J \times A$ et \mathcal{F}_B sur $J \times B$ sont les feuilletages triviaux par les carrés $\{t\} \times A$ et $\{t\} \times B$ avec $t \in J$.

Une fois reparamétrés $J \times A$ et $J \times B$, comme il a été dit ci-dessus, la réunion $(J \times A) \cup (J \times B)$ ne forme peut-être plus un voisinage différentiable de U , mais on peut toujours, quitte à restreindre de nouveau la longueur des fibres, trouver un sous-voisinage différentiable M , vérifiant la condition (ii) du lemme.

Le lemme ci-dessus permet d'associer à tout $i \in \{1, \dots, m_2\}$ un voisinage $M^i \simeq J \times U^i$. De plus, puisque la longueur des fibres J est arbitrairement petite, on peut supposer que :

- (i) $M^i \cap M^j = \emptyset$ si $i \neq j$ (puisque $U^i \cap U^j = \emptyset$ si $i \neq j$).
- (ii) Pour chaque $i \in \{1, \dots, m_2\}$, $M^i \cap \varphi_2(R)$ est connexe et ne contient que la seule singularité q^i (point de selle associé à p).

Soit M l'un des voisinages ainsi construits. Désignons par f_M le feuilletage induit sur la couronne $J \times \mathbf{S}^1 \times \left\{ \frac{1}{2} \right\}$, comme dans le lemme. Le feuilletage f_M contient le cercle $\left\{ \frac{1}{2} \right\} \times \mathbf{S}^1 \times \{1/2\}$ comme feuille.

Si l'holonomie de \mathcal{F} au-dessus de ce cercle est triviale, le feuilletage f_M est formé de cercles concentriques au voisinage de ce cercle. Dans ce cas, puisque la longueur des fibres peut être choisie arbitrairement petite, on peut supposer que le feuilletage f_M

admet pour feuilles les cercles $\{t\} \times \mathbf{S}^1 \times \left\{\frac{1}{2}\right\}$ avec $t \in J$ et donc que les feuilles de \mathcal{F}_M sont les couronnes $t \times U$. C'est ce que l'on supposera par la suite dans ce cas. Nous dirons qu'un tel voisinage M est d'*holonomie triviale*.

Dans le cas contraire, l'intérieur de M admet un feuillement par plans \mathbf{R}^2 et cylindres $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$ et il existe des feuilles planes passant par des points arbitrairement proches d'un point quelconque de U .

Le lemme suivant constitue une nouvelle réduction par isotopie :

Lemme 8. — *Le plongement φ_2 défini ci-dessus, est isotope à un plongement φ_3 , en position générale par rapport à \mathcal{F} ; l'isotopie de φ_2 à φ_3 a un support contenu dans la réunion des intérieurs des E^i , $i \in \{1, \dots, m_2\}$ et φ_3 est tel que :*

- (i) $\varphi_3(E^i) \subset M^i$.
- (ii) $\varphi_3^{-1}(\mathcal{F})$ ne contient qu'un centre comme singularité dans l'intérieur de E^i .

Remarque. — Le plongement φ_3 a donc le même nombre de centres et le même système de disques pincés que φ_2 .

Démonstration. — Soit p un centre quelconque de φ_2 de voisinage adéquat E . L'image du voisinage adéquat $\varphi_2(E)$ est réunion de courbes C_t , difféomorphes à \mathbf{S}^1 pour $0 < t < 1$, chacune bordant un disque D_t sur sa feuille. Puisque $\text{int } D_1 \cap \varphi_2(R) = \emptyset$, par la construction de φ_2 , il existe des valeurs de t suffisamment proches de 1 pour que :

$$(1) \quad \text{int } D_t \cap \varphi_2(R) = \emptyset.$$

Soit E_t le disque unique bordé par C_t sur $\varphi_2(R)$. Alors la réunion $S = E_t \cup D_t$ est une sphère anguleuse plongée dans V , en raison de la condition (1) ci-dessus. Le lemme 3 entraîne que S borde une boule B . Comme $R \neq \mathbf{S}^2$ et que φ_2 induit une injection sur les groupes fondamentaux, on a :

$$(2) \quad \text{int } B \cap \varphi_2(R) = \emptyset.$$

Si maintenant E'_t est un disque de bord C_t , contenu dans $M \cap B$, se raccordant différentiablement à $\varphi_2(R) - E_t$ et ne portant qu'un seul point de contact avec \mathcal{F} , E'_t est isotope à E_t dans B , relativement à C_t . Cette isotopie se prolonge par l'identité dans $V - B$ pour définir une isotopie de φ_2 à un plongement φ'_2 de R , vérifiant les conclusions du lemme relativement au voisinage E . Le raisonnement ci-dessus appliqué successivement aux différents voisinages adéquats de φ_2 , permet de trouver le plongement φ_3 .

Nous sommes maintenant en mesure d'accomplir la dernière étape devant aboutir à la forme réduite. Pour cela, nous allons considérer successivement les voisinages M d'*holonomie non triviale* et ceux d'*holonomie triviale*.

Lemme 9. — *Si M est un voisinage d'*holonomie non triviale*, le plongement φ_3 est isotope à un plongement φ_4 , par une isotopie dont l'image du support est contenue dans M , et telle que φ_4 soit transverse à \mathcal{F} sur $\varphi_4^{-1}(M)$.*

Soit E le voisinage adéquat de φ_3 dont l'image est contenue dans M ; le voisinage

adéquat E est limité sur R par la courbe γ_1 réunion des cercles singuliers en $q : \gamma'_1$ et γ''_1 . Comme γ'_1 et γ''_1 sont homotopes sur R (à travers E), l'holonomie de \mathcal{F} au-dessus des lacets $c'_1 = \varphi_3(\gamma'_1)$ et $c''_1 = \varphi_3(\gamma''_1)$ est la même, à conjugaison près. Il est donc possible de trouver deux courbes γ'_2, γ''_2 difféomorphes à S^1 , plongées dans $R-E$, proches de γ'_1 et γ''_1 respectivement et telles que :

- (i) Ou bien γ'_2 et γ''_2 sont transverses au feuilletage $\varphi_3^{-1}(\mathcal{F})$, ou bien γ'_2 et γ''_2 sont des feuilles de $\varphi_3^{-1}(\mathcal{F})$.
- (ii) $\varphi_3(\gamma'_2)$ et $\varphi_3(\gamma''_2)$ appartiennent à l'intérieur de M .

Désignons par E' la couronne plongée dans R , de bord $\gamma'_2 \cup \gamma''_2$ et contenant E . La condition (ii) entraîne que $\varphi_3(E') \subset \text{int } M$.

Perturbons maintenant le plongement φ_3 dans un voisinage arbitraire de q dans $\text{int } E'$, suffisamment peu pour que le nouveau plongement φ'_3 n'ait encore qu'un point de selle dans ce voisinage, encore noté q , et dont l'image par φ'_3 est portée par une feuille plane de $\mathcal{F} \cap \text{int } M$. (Ceci est possible puisqu'il passe des feuilles planes de $\mathcal{F} \cap \text{int } M$ par des points arbitrairement proches des points de $\text{int } U$.)

Remarquons maintenant que :

1) Le feuilletage $\mathcal{F} \cap \text{int } M$ est un feuilletage sans cycle limite de la variété $\text{int } M$. En effet, il suit du lemme 7 que l'inclusion de chaque feuille induit un homomorphisme injectif des groupes fondamentaux; on peut alors appliquer le lemme 2 à ce feuilletage.

2) Le plongement $\varphi'_{3|E'}$ de E' dans $\text{int } M$ est un plongement vérifiant les conditions indiquées au début du paragraphe 1; il est de plus en position générale par rapport à $\mathcal{F} \cap \text{int } M$, avec seulement deux points de contact p et q , et tel qu'il induit un homomorphisme injectif des groupes fondamentaux. On peut donc appliquer au plongement $\varphi'_{3|E'}$ dans la variété $\text{int } M$ toutes les considérations précédentes. Le voisinage adéquat du centre p de $\varphi'_{3|E'}$ contient nécessairement le point q dans sa frontière γ_1 , puisque p et q sont les seuls points de contact. Le voisinage adéquat ne peut pas être de type b : en effet, dans ce cas $c_1 = \varphi'_3(\gamma_1)$, contenu dans une feuille plane, serait formé des deux cercles contractibles sur cette feuille et γ_1 serait formé de deux cercles contractibles sur E' . Le plongement $\varphi'_{3|E'}$ aurait alors au moins quatre points de contact avec le feuilletage, ce qui est impossible. Le centre p est donc de type a . On peut donc appliquer le lemme 4 au plongement $\varphi'_{3|E'}$ dans $\text{int } M$: $\varphi'_{3|E'}$ est isotope dans $\text{int } M$ à un plongement φ_4 ayant strictement moins de points de contact que φ_3 , c'est-à-dire aucun. Cette isotopie se prolonge à R par l'identité dans $R-E'$ pour donner l'isotopie cherchée.

Soit maintenant M un voisinage d'holonomie triviale. Dans $M = J \times U$, avec $U = S^1 \times I$, on introduit les coordonnées $(z, \theta, x) \in J \times S^1 \times I$. Les feuilles de $\mathcal{F}_M = \mathcal{F} \cap M$ sont les couronnes $z = \text{constante}$.

Soit E le voisinage adéquat contenu dans M . On peut supposer le paramétrage de M choisi de façon que :

- (i) $\varphi_3(p)$ soit dans la couronne $\left\{ z = \frac{3}{4} \right\}$ et que $\varphi_3(E) \subset \left[\frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right] \times U$.

(ii) $\varphi_3(R) \cap (J \times \partial U) = \emptyset$. Plus précisément, l'intersection de $\varphi_3(R)$ avec les couronnes $z = \text{Constante}$ est formée :

- du point $\varphi_3(p)$ sur la couronne $\left\{ z = \frac{3}{4} \right\}$;
- d'un cercle bordant un disque dans chaque couronne associée à $\frac{1}{2} < z < \frac{3}{4}$;
- de la courbe c_1 en forme de huit pour $z = \frac{1}{2}$;
- de deux cercles isotopes au bord de la couronne pour $0 \leq z \leq \frac{1}{2}$.

Soit $E' = \varphi_3^{-1}(M)$; E' , réunion des courbes décrites ci-dessus, est une couronne de bord $\gamma'_2 \cup \gamma''_2$, où γ'_2 et γ''_2 sont les deux cercles situés sur la couronne $\{z=0\}$.

Par un changement local du paramétrage (z, θ, x) , on peut supposer que les cercles $c' = \varphi_3(\gamma'_2)$ et $c'' = \varphi_3(\gamma''_2)$ ont pour équation :

$$\begin{aligned} c' &= \left\{ (z, \theta, x) \in M \mid z = 0, x = \frac{1}{4} \right\} \\ c'' &= \left\{ (z, \theta, x) \in M \mid z = 0, x = \frac{3}{4} \right\}. \end{aligned}$$

On supposera également qu'au voisinage de $\gamma'_2 \cup \gamma''_2$ le plongement φ_3 est transverse aux fibres J . On peut alors énoncer le lemme suivant :

Lemme 10. — Si M est un voisinage d'holonomie triviale, paramétré comme ci-dessus, E le voisinage adéquat associé à M et $E' = \varphi_3^{-1}(M)$, alors il existe un paramétrage de E' par $(u, v) \in \mathbf{S}^1 \times K$ ($K \simeq [0, 1]$) tel que φ_3 restreint à E' soit isotope relativement à $\partial E'$ au plongement φ_4 défini par l'équation :

$$\theta = u, \quad x = \frac{1}{2} \left(v + \frac{1}{2} \right), \quad z - \frac{1}{2} = -2 \left(v - \frac{1}{2} \right)^2.$$

Démonstration. — Par une isotopie de M , conservant les couronnes $z = \text{Constante}$, et égale à l'identité au voisinage de $z = 0$, on peut rendre $\varphi_3(E')$ transverse aux fibres J . Le plongement φ_4 , dont l'équation est écrite dans l'énoncé, a aussi une image transverse aux fibres J et telle que :

$$\varphi_3(E') = c' \cup c'' = \varphi_4(E').$$

Or, deux plongements tels que φ_3 et φ_4 sont clairement isotopes relativement à $\partial E'$, par une isotopie conservant les fibres J .

Le plongement φ_4 introduit dans le lemme 10 est tangent au feuilletage le long du cercle $\left\{ (z, \theta, x) \mid z = x = \frac{1}{2} \right\}$. Nous appellerons un tel cercle *cercle de contact* du plongement avec le feuilletage.

Définition. — Un plongement $\bar{\varphi}$ de R dans V sera dit *réduit* si l'ensemble sur lequel $\bar{\varphi}$ n'est pas transverse à \mathcal{F} est formé par :

- 1) Des points de selle en nombre égal à $|\chi(R)|$, où $\chi(R)$ désigne la caractéristique d'Euler de R . Car ces points sont les seules singularités de $\bar{\varphi}^{-1}(\mathcal{F})$.
- 2) Des cercles de contact $\gamma^1, \dots, \gamma^\ell$ en nombre $\ell \geq 0$, plongés par $\bar{\varphi}$ sur des feuilles distinctes L_1, \dots, L_ℓ . Chacun de ces cercles γ^i , $i \in \{1, \dots, \ell\}$, a une image contenue dans un voisinage $M^i \simeq J \times \mathbf{S}^1 \times I$ de coordonnées (z_i, θ_i, x_i) , où les couronnes $z_i = \text{Constante}$ sont les traces des feuilles de \mathcal{F} , et il existe un paramétrage $(u_i, v_i) \in \mathbf{S}^1 \times K$ de $\bar{\varphi}^{-1}(M^i) = E'_i$ tel que :

$$\begin{aligned}\gamma^i &= \left\{ (u_i, v_i) \mid v_i = \frac{1}{2} \right\} \\ \bar{\varphi}(u_i, v_i) &= \left(-2 \left(v_i - \frac{1}{2} \right)^2, \frac{1}{2} \left(u_i + \frac{1}{2} \right), v_i \right).\end{aligned}$$

De plus, aucun des cercles γ^i n'est contractible sur sa feuille L_i . Les lemmes 9 et 10 ci-dessus ont pour conséquence la proposition suivante, qui est l'aboutissement de l'étude du paragraphe 1 :

Proposition 1. — Soit V une variété compacte ou non, de dimension 3, munie d'un feuilletage \mathcal{F} de classe supérieure ou égale à 2, transversalement orientable, sans cycle limite ni feuille homéomorphe à \mathbf{S}^2 , et transverse ou tangent aux composantes de ∂V , si $\partial V \neq \emptyset$.

Soit R une surface compacte orientable et φ un plongement de R dans V répondant aux conditions précisées au début de cette partie et tel que $\varphi_* : \pi_1(R) \rightarrow \pi_1(V)$ soit un homomorphisme injectif. Alors φ est isotopie à un plongement réduit $\bar{\varphi}$.

Remarque. — Si $R = \mathbf{T}^2$ ou $\mathbf{S}^1 \times [0, 1]$, alors $\chi(R) = 0$ et tout plongement réduit de R ne possède que des cercles de contact et aucun point de contact.

2. Composantes de type II et déplacements de couronnes

Supposons maintenant que V soit une variété compacte, munie d'un feuilletage \mathcal{F} , transverse ou tangent aux composantes de ∂V si $\partial V \neq \emptyset$ et transversalement orientable et que φ soit un plongement réduit de R dans V , avec au moins un cercle de contact γ . Dans le but d'éliminer par isotopie les cercles de contact, portons notre attention sur le feuilletage au voisinage de $\varphi(\gamma)$: il existe une famille de plongements F_t de $C = \mathbf{S}^1 \times I$ dans V , définie pour $t > 0$ et t suffisamment proche de 0, telle que F_t soit un plongement pour tout t dans une feuille L_t avec $F_t(\partial C) \subset \varphi(R)$, et se prolonge en 0 par $F_0(C) = \gamma$. Posons $f_t = F_{t|_{\partial C}}$ et supposons que f_t se prolonge jusqu'à la valeur τ par exemple. Pourra-t-on également prolonger F_t jusqu'en τ ? On rencontre ici un problème analogue à celui où l'on se donne un disque sur une feuille, un relèvement du bord du disque

sur les feuilles voisines, et où l'on essaie de prolonger ce relèvement à l'intérieur du disque. On sait, d'après le théorème de Novikov [4], que l'obstruction à réaliser ce prolongement est l'existence dans le feuilletage de composantes de type I. Notre but est de démontrer que l'obstruction au prolongement dans le cas de la couronne $\mathbf{S}^1 \times I$ est l'existence de composantes de type II.

Supposons choisie une métrique riemannienne sur V telle que :

- (i) si $x \in \partial V$ et \mathcal{F} est transverse à ∂V en x , alors \mathcal{F} est normal à ∂V en x ;
- (ii) si $x \in \text{int } V$, la trajectoire normale à \mathcal{F} par x atteint ∂V ou bien n'est pas adhérente à ∂V .

Nous avons les résultats suivants :

Lemme 11. — Posons $C = \mathbf{S}^1 \times I$, $I = [0, 1]$ et supposons que $F : [0, 1] \times C \rightarrow \text{int } V$ soit une application différentiable de rang maximum en chaque point, telle que :

- 1) Pour tout $t \in [0, 1]$, $F_t = F|_{\{t\} \times C}$ soit un plongement de C sur une feuille notée L_t , non contractible sur L_t .
- 2) Les trajectoires $t \mapsto F_t(x)$ pour tout $x \in C$ soient normales aux feuilles et $f = F|_{[0, 1] \times \partial C}$ soit un plongement.
- 3) f ait un prolongement pour $t=1$ en un plongement f_1 de ∂C dans V tel que chaque composante de $f_1(\partial C)$ appartienne à une feuille de \mathcal{F} .
- 4) $F_0(\text{int } C) \cap f([0, 1] \times \partial C) = \emptyset$.

Supposons en outre qu'il existe un point $x \in C$ tel que $F_t(x)$ n'ait pas de limite pour $t \rightarrow 1$. Alors il existe une composante W de type II plongée dans V telle que $F([0, 1] \times C) \subset \text{int } W$ et $f_1(\partial C) \subset \partial W$. De plus, si W est de type II_a , chaque composante connexe de $f_1(\partial C)$ appartient à une composante connexe différente de ∂W .

Démonstration. — Soit $x \in C$ un point pour lequel $F_t(x)$ n'ait pas de limite quand $t \rightarrow 1$. En raison de la condition 3), le point x appartient à $\text{int } C$. Puisque V est compacte, et que les trajectoires normales à \mathcal{F} par les points intérieurs à U ne sont pas adhérentes à ∂V , ou atteignent ∂V en un temps fini, il existe un point $z \in \text{int } V$ et une suite $\{t_i\}$ croissante tendant vers 1 pour laquelle la suite $\{F(t_i, x)\}$ tende vers z . Soit U un ouvert distingué de z dans $\text{int } V$: $U = A \times [-1, +1]$, où $A \times \{\tau\}$ pour tout $\tau \in [-1, +1]$ est une plaque, où les trajectoires normales à \mathcal{F} sont les segments $m \times [-1, +1]$, et où $z \in A \times \{0\}$.

Puisqu'il existe N tel que pour $i \geq N$, $F(t_i, x) \in U$, on peut modifier la suite $\{t_i\}$ en une autre suite encore notée $\{t_i\}$ tendant vers 1 et telle que :

$$F(t_i, x) \in A \times \{0\} \quad \text{pour } i \geq N.$$

Désignons par L_z la feuille passant par z .

Comme $F(t_i, x)$ appartient à la couronne $F(t_i, C) = C_{t_i}$, la feuille A_z contient toutes les couronnes C_{t_i} pour $i \geq N$.

Montrons qu'il existe $N' \geq N$ tel que pour tout $i \geq N'$, $z \in C_{t_i}$.
Dans le cas contraire, il existerait une sous-suite $\{t_j\}$ de $\{t_i\}$ avec

$$(1) \quad z \notin C_{t_j} \text{ pour tout } j.$$

Pour la métrique riemannienne induite sur A_z par celle de V :

$$\text{dist}(z, \partial C_{t_j}) = \text{dist}(z, C_{t_j}) < \text{dist}(z, F(t_j, x))$$

en raison de (1); or, $F(t_j, x) \rightarrow z$, ce qui entraîne que :

$$(2) \quad \text{dist}(z, \partial C_{t_j}) \rightarrow 0 \quad \text{pour } j \rightarrow \infty.$$

Mais il est clair que dans A_z , les $\text{dist}(\partial C_{t_i}, \partial C_{t_j})$ pour $i \neq j$ sont bornées inférieurement par une constante positive, ce qui est en contradiction avec (2).

Donc pour $i, j \geq N'$, on a $C_{t_i} \cap C_{t_j} \neq \emptyset$.

De plus, remarquons que si deux couronnes C_τ et $C_{\tau'}$ appartenant à une même feuille sont telles que $\tau < \tau'$ et $C_\tau \cap C_{\tau'} \neq \emptyset$, alors $C_\tau \subset C_{\tau'}$. En effet, dans le cas contraire, au moins une des composantes de $\partial C_{\tau'}$ serait contenue dans C_τ . Par exemple :

$$F_{\tau'}(\mathbf{S}^1 \times \{o\}) \subset C_\tau.$$

En déplaçant C_τ jusqu'en C_0 le long des trajectoires normales, on constate que chaque couronne C_θ , avec $\theta \in [0, \tau]$, contient un cercle $F_\theta(\mathbf{S}^1 \times \{o\})$ avec $\theta' > \theta$. Ce qui est en contradiction avec la condition 4).

Ainsi les couronnes C_{t_i} sont emboîtées par ordre croissant :

$$C_{t_i} \subset C_{t_j} \quad \text{pour } N' \leq i < j.$$

Si $C_\tau \subset C_{\tau'}$, alors $F_{\tau'}^{-1} \circ F_\tau$ est un plongement de C dans $\text{int } C$. Comme $C_{\tau'}$ n'est pas contractible sur sa feuille $L_{\tau'} = L_\tau$, ce plongement induit une injection sur le groupe fondamental de C , et cette injection est nécessairement un isomorphisme, car chaque composante de $\partial C_{\tau'}$, étant plongée dans C_τ , est isotope aux composantes de ∂C_τ .

Il est facile de vérifier que chaque plongement de C dans C induisant un isomorphisme sur le groupe fondamental est isotope à l'un des quatre difféomorphismes a_1, a_2, b_1 ou b_2 , entrant dans la définition des composantes de type II.

Supposons que $F_{t_{N'+1}}^{-1} \circ F_{t_N}$ soit isotope à $\alpha \in \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$. Alors pour tout $i \geq N'$, $F_{t_{i+1}}^{-1} \circ F_{t_i}$ est aussi isotope à α .

En effet, le déplacement de la couronne $C_{t_{N'+1}}$ jusqu'en $C_{t_{i+1}}$ déplace C_{t_N} jusqu'en C_{t_i} , et ce déplacement met en évidence une isotopie de $F_{t_{N'+1}}^{-1} \circ F_{t_N}$ avec $F_{t_{i+1}}^{-1} \circ F_{t_i}$.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver que $F([0, 1] \times C)$ appartient à l'intérieur d'une composante de type II_α dont le bord contient $f_1(\partial C)$. La démonstration est tout à fait analogue à celle de Novikov [4], dont on trouvera une forme simplifiée dans l'appendice de [8]; aussi nous ne ferons que l'esquisser.

Si $i \geq N'$, la réunion des couronnes $\{C_\tau | t_i \leq \tau \leq t_i + 1\}$ est une sous-variété de V , anguleuse, homéomorphe à la composante II_α . Nous la noterons W_i . En utilisant ces variétés W_i , on peut montrer tout d'abord que les feuilles contenant les composantes de $f_1(\partial C)$ sont compactes. On utilise l'argument suivant : toute transversale à ces feuilles entre dans une variété M_i pour i assez grand et ne peut en sortir et donc se refermer. Puis en utilisant la compacité ainsi obtenue, on montre que ∂M_i tend vers la réunion des feuilles contenant $f_1(\partial C)$ pour $i \rightarrow \infty$, ce qui entraîne que $W = \overline{\bigcup_{i \geq N'} W_i}$ est une composante de type II_α .

Proposition 2. — *Supposons que la variété feuilletée V ne possède pas de composante de type II et soit F une application vérifiant les conditions 1)-4) du lemme 11. Alors F se prolonge différentiablement, pour $t=1$, en un plongement F_1 sur une feuille notée L_1 et tel que $F_{1|\partial C} = f_1$.*

Démonstration. — Si la variété ne possède pas de composantes de type II, il résulte du lemme 11 que, pour tout $x \in C$, $F_t(x)$ a une limite pour $t \rightarrow 1$. Notons $F_1(x)$ cette limite. Remarquons que $F_1(x)$ ainsi défini est l'unique prolongement possible de F . Clairement F_1 a une image localement contenue dans la même feuille. Ceci entraîne que F_1 est différentiable, de rang maximum, que son image est contenue dans une feuille unique L_1 (puisque C est connexe) et que $F_{1|\partial C} = f_1$. Il nous reste à vérifier que F_1 est bien un plongement de C sur L_1 . Par hypothèse, $F_{1|\partial C} = f_1$ est un plongement. Notons par c_0 et c_1 les composantes connexes de $f_1(\partial C)$ et par K_i les fermetures dans L_1 des composantes connexes de $L_1 - (c_0 \cup c_1)$ (i varie suivant le cas dans $\{1\}$, $\{1, 2\}$ ou $\{1, 2, 3\}$). Appelons degré arithmétique de F_1 , en un point $p \in L_1$, le nombre de points de l'image réciproque $F_1^{-1}(p)$. Comme F_1 est de rang maximum, le degré arithmétique est le même en tout point d'une même composante K_i . Nous désignerons cette valeur par $\deg K_i$. D'autre part, l'application F_1 n'est pas contractible sur L_1 . Sinon, f_1 restreint à $S^1 \times \{0\}$ serait contractible sur L_1 , et par stabilité, f_t restreint à $S^1 \times \{0\}$ serait contractible sur L_t , ainsi que F_t , pour t voisin de 1, ce qui serait contraire à la condition 1. Il en résulte que c_0 et c_1 ne sont pas contractibles sur L_1 et que $F_1^{-1}(c_0 \cup c_1)$ est formé de la réunion de ∂C et d'un nombre éventuellement nul de courbes fermées plongées dans C , isotopes aux composantes de ∂C . Si, pour un i donné, $\deg K_i = k_i \neq 0$, $F_1^{-1}(K_i)$ est donc formé d'une réunion de k_i sous-couronnes de C , isotopes à C , et sur chacune de ces sous-couronnes, F_1 est un plongement. Donc, chaque composante K_i atteinte par F_1 est difféomorphe à $S^1 \times I$. Enfin, remarquons que le degré varie d'une unité lorsqu'on franchit c_0 ou c_1 . Il en résulte que si F_1 n'est pas un plongement, alors $L_1 = K_1 \cup K_2$, où K_1 et K_2 sont difféomorphes à $S^1 \times I$. (La feuille L_1 est alors difféomorphe à T^2 ou K^2). Le feuillement étant trivial par construction, au-dessus de K_1 et de K_2 , dans la direction où s'approchent les normales $F_t(x)$ pour $t \rightarrow 1$, dans le fibré normal trivial à L_1 , il est facile de vérifier que chaque couronne $C_t = F_t(C)$, pour t voisin de 1, contient au moins une composante de $F_\tau(\partial C)$ avec $\tau > t$ si F_1 n'est pas un plongement; mais ceci est impossible à cause de la condition 4), comme on l'a vu plus haut. Donc F_1 est un plongement et la démonstration est achevée.

3. Démonstration du théorème 1

Nous supposons maintenant, comme dans l'énoncé du théorème 1, que V est une variété de classe C^∞ compacte, de dimension 3, munie d'un feuilletage \mathcal{F} transverse ou tangent aux composantes de ∂V si $\partial V \neq \emptyset$, transversalement orientable, de classe supérieure ou égale à 2 et ne possédant pas de composante de type I ou II. D'après le théorème de Novikov, la variété V étant compacte, l'absence de composante de type I est équivalente à l'absence de cycle limite. Soit φ un plongement du tore T^2 dans V induisant un homomorphisme injectif des groupes fondamentaux. Alors le feuilletage \mathcal{F} ne peut pas contenir de feuille homéomorphe à S^2 ou à P^2 ; en effet, dans ce cas, d'après le théorème de stabilité globale de G. Reeb [5], la variété serait difféomorphe à un fibré sur S^1 ou à fibre S^2 ou P^2 , dont le groupe fondamental isomorphe à $\{\text{o}\}$, Z_2 , Z ou $Z \oplus Z_2$ ne pourrait pas contenir le sous-groupe $\varphi_*(\pi_1(T^2))$ isomorphe à $Z \oplus Z$. On peut donc appliquer au plongement φ le résultat de la proposition 1 : φ est isotope dans $\text{int } V$ à un plongement réduit $\bar{\varphi}$. Avec les notations du paragraphe 1, désignons par γ^i , $i \in \{1, \dots, \ell\}$ les cercles de contact, par $M^i \simeq J \times S^1 \times I$, de coordonnées (z_i, θ_i, x_i) , le voisinage d'holonomie triviale associée à γ^i , par E'_i , $\bar{\varphi}^{-1}(M_i)$ avec $E'_i \simeq S^1 \times K$, de coordonnées (u_i, v_i) , où $\bar{\varphi}$ est représenté par :

$$\bar{\varphi}(u_i, v_i) = \left(-2 \left(v_i - \frac{i}{2} \right)^2 + \frac{i}{2}, u_i, \frac{i}{2} \left(v_i + \frac{i}{2} \right) \right).$$

On suppose évidemment que $\ell \geq 1$, sinon $\bar{\varphi}$ est déjà transverse à \mathcal{F} et nous avons fini.

On choisit encore une métrique riemannienne sur V , telle que la sous-variété

$\bar{\varphi}(T^2 - \bigcup_{i=1}^{\ell} E'_i)$ soit normale aux feuilles de \mathcal{F} et que la métrique induite dans M^i , pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$, soit la métrique canonique produit, sauf dans un voisinage de $\bar{\varphi}(\partial E'_i)$ dans M^i . Désignons par C_0^i la sous-couronne bordée par $\bar{\varphi}(\partial E'_i)$ dans la couronne $\{z_i = 0\}$ de M^i . Par construction, $\text{int } C_0^i \cap \bar{\varphi}(T^2) = \emptyset$. Supposons que dans $T^2 - E'_i$, au voisinage de $\partial E'_i$, le feuilletage $\bar{\varphi}^{-1}(\mathcal{F})$ soit formé de courbes difféomorphes à S^1 . (Si cette propriété est vérifiée au voisinage d'une composante de $\partial E'_i$, elle est aussi vérifiée au voisinage de l'autre composante, puisque les images de ces deux composantes sont isotopes à travers C_0^i). Dans ce cas, on peut déplacer C_0^i sur les feuilles voisines, vers l'extérieur de M^i . La proposition 2 va nous permettre de préciser jusqu'où ce déplacement est possible :

Lemme 12. — Pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$, il existe un $\tau \geq 0$ et une application différentiable $F^i : [0, \tau] \times C \rightarrow V$ avec les propriétés suivantes :

(i) F_0^i est un plongement sur C_0^i et F_t^i est un plongement dans une feuille notée L_t pour $0 < t < \tau$.

(ii) $f^i = F_{[0, \tau] \times C}^i$ est un plongement dans $\overline{\varphi(T^2 - E'_i)}$ et les courbes $t \mapsto f_t^i(x)$, pour tout $x \in \partial C$, sont normales aux traces $\mathcal{F} \cap \overline{\varphi(T^2)}$ pour la métrique induite de V sur $\overline{\varphi(T^2)}$, si $\tau \neq 0$.

(iii) L'application F^i entre dans l'une des trois catégories suivantes :

α) Les trajectoires $t \mapsto F_t^i(x)$ sont normales à \mathcal{F} et F^i est de rang maximum en tout point de $[0, \tau] \times C$, si $\tau \neq 0$. De plus, l'holonomie au-dessus de la couronne $C_\tau^i = F_\tau^i(C) \subset L_\tau$ est non triviale.

β) La valeur τ est supérieure à 0. L'application F_τ^i est un plongement et il existe $j \neq i$, $j \in \{1, \dots, \ell\}$, tel que $\overline{\varphi(\gamma^j)} \subset F_\tau^i(\partial C)$ (par exemple $\overline{\varphi(\gamma_j)} = F_\tau^i(S^1 \times \{0\})$). De plus, F^i est de rang maximum sauf le long de $\{\tau\} \times S^1 \times \{0\}$, et les trajectoires $t \mapsto F_t^i(x)$ sont normales à \mathcal{F} , sauf dans un voisinage de $\overline{\varphi(\gamma^j)}$ dans M^j . (Elles sont tangentes au feuilletage aux points de $\overline{\varphi(\gamma^j)}$).

γ) La valeur τ est supérieure à zéro. L'application F_τ^i est une immersion sur une feuille compacte et il existe $j \neq i$, $j \in \{1, \dots, \ell\}$ tel que $F_\tau^i(\partial C) = \overline{\varphi(\gamma^j)}$; F_τ^i est injective sur l'intérieur de C ; les autres propriétés sont analogues à celles du cas β).

L'application F^i avec les propriétés ci-dessus est unique à paramétrisation près.

Démonstration. — Considérons l'ensemble K des applications $\Phi : [0, v] \times C \rightarrow V$ pour $v \geq 0$ ayant les propriétés (i) et (ii) du lemme et vérifiant :

— Soit la condition α' suivante : les trajectoires $t \mapsto F_t^i(x)$ sont transverses à \mathcal{F} et normales à \mathcal{F} en dehors des voisinages M^j ; F^i est de rang maximum en tout point; l'holonomie au-dessus de la couronne $\Phi_v(C)$ n'est pas supposée non triviale.

— Soit la condition β ou la condition γ du lemme.

Ordonnons l'ensemble K par $\Phi \leq \Psi$ si et seulement si $\text{Image } \Phi \subseteq \text{Image } \Psi$. L'ensemble K est non vide, puisqu'il existe un plongement de C sur C_0^i . Nous allons montrer que K est un ensemble inductif croissant. Soit une suite infinie, totalement ordonnée et strictement croissante d'éléments de K :

$$\Phi^1 < \Phi^2 < \dots < \Phi^k < \dots$$

Les éléments de K du type β ou γ étant clairement des éléments maximaux, chaque élément Φ^k est du type α'. Par induction sur l'indice k , on peut donc reparamétriser les Φ^k de façon que :

- Φ^k soit défini sur $[0, v_k]$, où v_k est une suite strictement croissante.
- $\Phi^k = \Phi_{[0, v_k]}^k$.

Posons $\varphi_0^k = \Phi_{[0, v_k]}^k \times S^1 \times \{0\}$ et $\varphi_1^k = \Phi_{[0, v_k]}^k \times S^1 \times \{1\}$.

Les images de φ_0^k et φ_1^k sont des couronnes S_0^k et S_1^k plongées dans $\overline{\varphi(T^2 - E'_i)}$ et telles que :

$$(1) \quad S_0^{k-1} \subset S_0^k, \quad S_1^{k-1} \subset S_1^k \quad \text{et} \quad S_0^k \cap S_1^k = \emptyset.$$

Comme la trace de \mathcal{F} sur $\overline{\varphi(T^2)}$ est un feuilletage sans singularités, les ensembles $\overline{\bigcup_k S_0^k}$ et $\overline{\bigcup_k S_1^k}$, désignés respectivement par S_0 et S_1 , sont également des couronnes plongées dans

$\bar{\varphi}(\mathbf{T}^2 - E')$. La trace de \mathcal{F} dans ces couronnes est formée de courbes difféomorphes à \mathbf{S}^1 (les composantes de ∂S_0 et ∂S_1 étant formées également de telles courbes).

On peut donc reparamétriser les Φ^k de façon que la suite $\{v_k\}$ ait une limite finie $v > 0$, et définir $\varphi : [0, v] \times \partial C \rightarrow V$ telle que :

$$\begin{aligned}\varphi|_{[0, v_k] \times \partial C} &= \Phi^k|_{[0, v_k] \times \partial C} \\ \varphi([0, v] \times \partial C) &= S_0 \cup S_1.\end{aligned}$$

Définissons également $\Phi : [0, v] \times C \rightarrow V$ par :

$$\Phi|_{[0, v_k] \times C} = \Phi^k.$$

Nous allons maintenant examiner les deux possibilités suivantes :

a) $S_0 \cap S_1 = \emptyset$.

Si les courbes $t \mapsto \varphi_t(x)$, pour $x \in \partial C$, sont transverses à \mathcal{F} jusqu'en v compris, l'application Φ vérifie toutes les hypothèses de la proposition 2 et peut donc être étendue sur $[0, v] \times C$ de façon à être de rang maximum en tout point et de façon que Φ_v soit un plongement. L'application Φ ainsi déterminée est de type α' et majore les Φ^k .

Supposons au contraire que, par exemple, il existe $j \neq i$ avec :

$$\gamma^j = \varphi_v(\mathbf{S}^1 \times \{0\}).$$

Les trajectoires $t \mapsto \varphi_t(x)$ pour $x \in \mathbf{S}^1 \times \{0\}$ ne sont pas transverses à \mathcal{F} en v . On peut alors modifier Φ dans un voisinage de γ^j dans M^j , de façon à remplacer Φ par une application Φ' vérifiant les hypothèses de la proposition 2. Φ' admet un prolongement et il en résulte que Φ admet aussi un prolongement de type β . (L'existence de Φ montre *a posteriori*, que $\varphi_v(\mathbf{S}^1 \times \{0\})$ et $\varphi_v(\mathbf{S}^1 \times \{1\})$ appartiennent à la même feuille de \mathcal{F} et ne peuvent être chacun un cercle de contact, puisque, par hypothèse, deux cercles de contacts différents sont portés par deux feuilles différentes.)

b) $S_0 \cap S_1 \neq \emptyset$.

Les relations (1) ci-dessus entraînent que S_0 et S_1 ne peuvent avoir qu'un cercle γ en commun. Ce cercle est nécessairement un cercle de contact γ^j avec $j \neq i$. Sinon \mathcal{F} serait transverse à $\bar{\varphi}(\mathbf{T}^2)$ le long du cercle γ et γ^i serait l'unique cercle de contact, toutes les autres intersections de \mathcal{F} avec $\bar{\varphi}(\mathbf{T}^2)$ étant difféomorphes à \mathbf{S}^1 . Mais ceci est impossible, car le feuilletage \mathcal{F} est transversalement orientable. Supposons que pour une valeur t proche de v , $\Phi_t(C) = C_0^j$. Alors il est facile de vérifier que φ se prolonge en une immersion du tore solide $\mathbf{D}^2 \times \mathbf{S}^1$ dans V (on regarde \mathbf{T}^2 comme le bord de $\mathbf{D}^2 \times \mathbf{S}^1$). Mais ceci est impossible car $\bar{\varphi}_*$ est injectif. Il en résulte, compte tenu de (1), que pour toute valeur $t \in [0, v]$, $\Phi_t(C) \cap \text{int } C_0^j = \emptyset$. Modifions Φ en une application Φ' comme plus haut, et appliquons la proposition 2 à Φ' . Φ' se prolonge en v par un plongement sur la feuille $L(\gamma^j)$ portant γ^j . Comme $\Phi_t(C) \cap \text{int } C_0^j = \emptyset$, on vérifie facilement que $\Phi'(\partial C)$ borde dans $M^j \cap L(\gamma^j)$ une couronne dont l'intérieur est disjoint de la couronne $\Phi'_v(C)$. Il en résulte que la feuille $L(\gamma^j)$ est compacte et difféomorphe à \mathbf{T}^2 ou \mathbf{K}^2 et que Φ admet un pro-

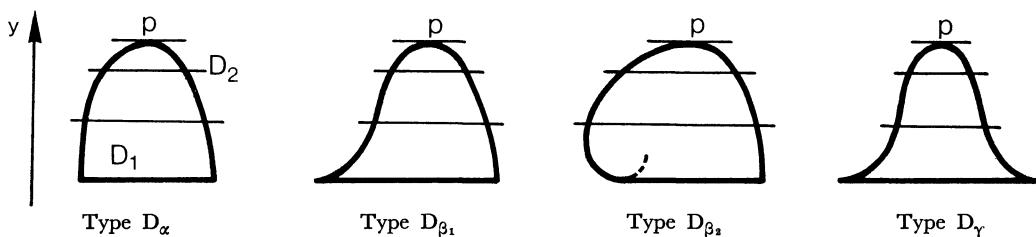
longement du type γ . L'ensemble K est donc inductif. Soit F^i un élément maximal de K . Si F^i est du type α' , la couronne $F_\tau^i(C)$ est d'holonomie non triviale, sinon on pourrait prolonger F^i par stabilité au-delà de la valeur τ , et l'application F^i ne serait pas maximale. Ceci entraîne immédiatement que :

$$F^i([0, \tau] \times C) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\ell} M^j \right) = \emptyset.$$

Les trajectoires $t \mapsto F_t^i(x)$ pour tout $x \in C$, sont donc normales à \mathcal{F} et F^i est du type α .

Clairement, si l'ensemble K possède un élément du type α , β ou γ , cet élément est l'unique élément maximal à paramétrisation près. Il en résulte que l'application F_i trouvée est unique à paramétrisation près.

Dans le plan $\mathbf{R}^2 = \{x, y\}$, considérons les quatre modèles suivants de disques anguleux et singuliers :



Le bord du disque D^2 est formé de la réunion de deux disques de dimension 1, que nous noterons D_1 et D_2 , tels que :

- D_1 soit horizontal, situé sur la droite $y=0$;
- D_2 soit plongé dans $\mathbf{R}_+^2 = \{(x, y) | y \geq 0\}$ de façon que la fonction y soit générique sur D_1 , avec des points critiques situés au milieu p de D_2 et éventuellement en ses extrémités, comme il est indiqué sur le schéma.

Paramétrons D_s , avec $s = \alpha, \beta_1, \beta_2$ ou γ , par des segments horizontaux notés Γ_t , avec $t \in [0, 1]$ et $\Gamma_0 = p$, $\Gamma_1 = D_1$.

Soit $N_s = D_s \times \mathbf{S}^1$ pour $s = \alpha, \beta_1$ ou β_2 , et $N_\gamma = (D_\gamma \times \mathbf{S}^1)/f$, où f est une identification des composantes de $\partial D_1 \times \mathbf{S}^1 = \partial \Gamma_1$. A tout cercle de contact γ^i , $i \in \{1, \dots, \ell\}$, nous pouvons associer une application différentiable $G^i : N_s \rightarrow V$, où $s = \alpha, \beta_1, \beta_2$ ou γ suivant que l'application F^i définie dans le lemme 12 est du type α , β ou γ , avec les propriétés suivantes :

- (i) Pour tout $t \in [0, 1]$, $G^i(\Gamma_t \times \mathbf{S}^1)$ est contenu dans une feuille notée L_t et $G^i(\Gamma_0 \times \mathbf{S}^1) = \gamma^1$.
- (ii) Il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $G^i|_{[0, t] \times \mathbf{S}^1} : (\Gamma_t \times \mathbf{S}^1) \rightarrow L_t$ soit un plongement dans M^i .
- (iii) Pour $\varepsilon \leq t \leq 1$, G^i coïncide avec F^i à paramétrisation près.

Il résulte des propriétés ci-dessus que G^i est une immersion de N_s dans V , unique à automorphisme près de N^s . En général, G^i n'est pas un plongement, car les couronnes $G^i(\Gamma_i \times S^1)$ ne sont pas deux à deux disjointes. Cependant, cette difficulté peut être levée, comme le montre le lemme suivant :

Lemme 13. — Si $\bar{\varphi}$ est un plongement réduit de T^2 , de cercles de contact γ^i , $i \in \{1, \dots, \ell\}$, il existe un plongement $\bar{\varphi}_1$ également réduit, isotope à $\bar{\varphi}$, ayant le même nombre ℓ de cercles de contact de $\bar{\varphi}$ et tel que les applications G^i , $i \in \{1, \dots, \ell\}$, associées à $\bar{\varphi}_1$ soient des plongements.

Démonstration. — Supposons que pour un certain $i \in \{1, \dots, \ell\}$, l'application G_i associée à γ^i par le lemme 12 ne soit pas un plongement. Il existe donc $\tau \neq \tau'$ avec $0 \leq \tau < \tau' \leq 1$ tels que $C_\tau^i \cap C_{\tau'}^i \neq \emptyset$ (on pose $C_\tau^i = G^i(\Gamma_\tau \times S^1)$). On a nécessairement $C_\tau^i \subset C_{\tau'}^i$, comme nous l'avons remarqué dans la démonstration du lemme 11, car pour tout $t > 0$ suffisamment voisin de 0, $\text{int } C_\tau^i \cap \bar{\varphi}(T^2) = \emptyset$. Considérons l'ensemble K des valeurs τ tel qu'il existe $\tau' < \tau$ avec $C_{\tau'}^i \subset C_\tau^i$. Le complémentaire de K dans $[0, 1]$ est ouvert et contient la valeur 0. Soit τ_1 la borne inférieure de K . Puisque K est fermé et ne contient pas 0, $\tau_1 > 0$ et $\tau_1 \in K$. Soit $\tau'_1 < \tau_1$ tel que $C_{\tau'_1}^i \subset C_{\tau_1}^i$. Nécessairement $\tau'_1 = 0$, sinon par stabilité il existerait des valeurs $\tau < \tau_1$ appartenant à K . Donc il existe $\tau_1 > 0$ avec $\gamma^i \subset C_{\tau_1}^i$. Considérons l'ensemble des couronnes C_τ^i contenant γ^i . Cet ensemble est non vide, d'après ce qui précède, et fini, car G^i est une immersion et $D_s \times S^1$ est compact.

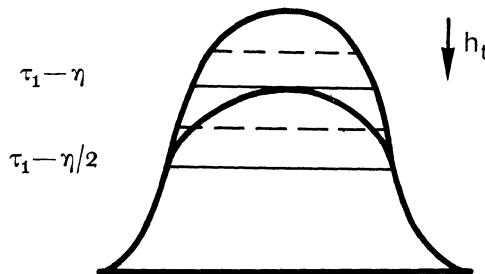
Soit $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m$, $m \geq 1$, l'ensemble des indices des couronnes :

$$\gamma^i \subset C_{\tau_1}^i \subset \dots \subset C_{\tau_m}^i.$$

Par construction, la couronne $C_{\tau_m}^i$ ne contient que les couronnes $C_{\tau_1}^i, \dots, C_{\tau_{m-1}}^i$.

Choisissons une valeur η suffisamment petite pour que $G_{|[\tau_m-\eta, \tau_m] \times C}^i$ soit un plongement (en posant $\Gamma_\tau \times S^1 = \{\tau\} \times C$). Chaque couronne C_τ^i pour $\tau \in [\tau_m - \eta, \tau_m]$ contient exactement $m-1$ couronnes que l'on désigne abusivement par $C_{\tau_i-\varepsilon}$, si $\tau = \tau_i - \varepsilon$ avec $0 \leq \varepsilon \leq \eta$. D'après ce qui précède, $G_{|[0, \tau_1-\eta/2] \times C}^i$ est un plongement dans V . Dans D_s , définissons une isotopie de plongements h_t , $t \in [0, 1]$, de support contenu dans $[0, \tau_1 - \eta/2] \times C$, envoyant les segments Γ_t sur des segments Γ_t et telle que :

- (i) $h_0 = \text{Id}_{D_s}$.
- (ii) $h_1(D_s) \subset [\tau_1 - \eta, 1]$ et que $h_1(D_2)$ soit tangent à $\Gamma_{\tau_1 - \eta}$ au point $h_1(p)$.



Considérons un voisinage U de $G^i\left(\left[0, \tau_1 - \frac{\eta}{2}\right] \times C\right)$ dans V tel que :

$$(1) \quad \bar{\varphi}(\mathbf{T}^2) \cap U = \bar{\varphi}(\mathbf{T}^2) \cap G^i\left(\left[0, \tau_1 - \frac{\eta}{2}\right] \times C\right).$$

Si $g_t = h_t \times \text{Id}_{S^1}$, l'isotopie $G^i \circ g_t$ peut s'étendre en une isotopie ambiante de V , notée H_t , de support contenu dans U .

Posons $G_1^i = H_1 \circ G^i$ et $\varphi' = H_1 \circ \bar{\varphi}$.

Les conditions (i) et (ii) sur h_t , ainsi que la condition (1), ont pour conséquence que φ' est un plongement réduit, ayant même nombre de cercles de contact que $\bar{\varphi}$. De plus, le nouveau cercle de contact γ_1^i n'est plus contenu que dans $m-1$ couronnes : $C_{\tau_2-\eta}, \dots, C_{\tau_m-\eta}$; enfin, si une application G^j , $j \neq i$, est déjà un plongement, l'application correspondante associée à φ' est encore un plongement. On démontre le lemme en répétant $m-1$ fois l'argument précédent pour l'indice i , puis en considérant les autres indices j pour lesquels G^j n'est pas un plongement et en leur appliquant le même traitement.

Nous appellerons *cercle primitif* du plongement $\bar{\varphi}_1$, introduit au lemme 13, tout cercle de contact γ^i vérifiant la condition :

$$\text{int } G^i(N_s) \cap \bar{\varphi}_1(\mathbf{T}^2) = \emptyset.$$

L'application G^i associée à un cercle primitif γ^i est nécessairement du type α , β_1 ou γ . (Nous dirons que le cercle γ^i est du type α , β_1 ou γ respectivement.) La justification de l'épithète primitif apparaît dans le lemme suivant :

Lemme 14. — Si $\bar{\varphi}_1$ possède un cercle primitif, alors $\bar{\varphi}_1$ est isotope à un plongement qui est :

- ou bien un plongement réduit, avec strictement moins de cercles de contact que $\bar{\varphi}_1$ (éventuellement aucun);
- ou bien à un plongement dont l'image est une feuille de \mathcal{F} difféomorphe à \mathbf{T}^2 .

Démonstration. — Soit γ^i un cercle primitif de $\bar{\varphi}_1$. Nous allons examiner successivement les trois cas possibles :

a) *Le cercle γ^i est de type α .* — Soit U un voisinage normal de la couronne $C_1^i = G^i(\Gamma_1 \times S^1)$ difféomorphe à $C \times [-1, +1]$ avec $C = S^1 \times [0, 1]$. La couronne C_1^i est plongée dans l'intérieur de $C \times \{0\}$: par exemple $C_1^i = S^1 \times \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \times \{0\}$. Les fibres normales de U sont choisies de longueur suffisamment petite pour que :

$$\bar{\varphi}_1(\mathbf{T}^2) \cap U = (S^1 \times \left\{\frac{1}{4}\right\} \times [-1, +1]) \cup (S^1 \times \left\{\frac{3}{4}\right\} \times [-1, +1]).$$

(Rappelons que par construction, $\bar{\varphi}_1$ est normal au feuilletage dans un voisinage de ∂C_1^i).

D'autre part, on peut supposer que le feuilletage $\mathcal{F}|_U$ est de la forme $\mathcal{F}|_U = f \times [0, 1]$

où f est le feuilletage induit par \mathcal{F} sur la couronne $\mathbf{S}^1 \times \left\{ \frac{1}{2} \right\} \times [-1, +1]$, et que le feuilletage f lui-même est trivial dans la demi-couronne $\mathbf{S}^1 \times \left\{ \frac{1}{2} \right\} \times [0, +1]$, c'est-à-dire formé des cercles $\mathbf{S}^1 \times \left\{ \frac{1}{2} \right\} \times \{t\}$, $t \in [0, 1]$, et non trivial dans l'autre demi-couronne, au voisinage du cercle $\mathbf{S}^1 \times \left\{ \frac{1}{2} \right\} \times \{0\}$. Le voisinage U de la couronne C_1^i est alors un voisinage d'holonomie non triviale, au sens du paragraphe 1.

Puisque G^i est un plongement, on peut trouver une isotopie de $\bar{\varphi}_1$, de support contenu dans $\bar{\varphi}_1^{-1}(G^i(D_2)) \subset \mathbf{T}^2$ qui amène la couronne $G^i(D_2)$ notée E^i dans le voisinage M^1 . (Voir démonstration du lemme précédent.) Maintenant, on peut trouver une isotopie de la couronne E^i , dans $U_+ = \mathbf{S}^1 \times [0, 1] \times [0, +1]$, telle que la nouvelle couronne E^i à l'étape finale de cette isotopie porte deux points critiques : un centre p et un point de selle q , contenu dans $C \times \{0\} \subset U$. La couronne E^i est alors l'image du voisinage adéquat du centre p et est du type b , au sens du paragraphe 1. Le lemme 9 permet alors de trouver une dernière isotopie dont l'effet est d'éliminer les deux points critiques p et q .

$\beta)$ *Le cercle γ^i est de type β_1 .* — Dans ce cas, une des composantes de ∂C_1^i est formée d'un autre cercle de contact γ^j , avec $j \neq i$. La démarche à suivre est à peu près analogue à celle suivie dans le cas précédent. On définit un voisinage U de C_1^i , qui est d'holonomie triviale, puisque l'holonomie au-dessus du chemin γ^j est triviale, par construction. Une première isotopie permet de ramener $G^i(D_2)$ dans le voisinage U . Supposons que U soit paramétré par les variables $(\theta, x, z) \in \mathbf{S}^1 \times [0, 1] \times [-1, +1]$. Une seconde isotopie de support contenue dans U permet de faire coïncider $\bar{\varphi}_1(\mathbf{T}^2)$ localement avec la surface d'équation :

$$z = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 - \beta \left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \text{avec } \beta > 0 \text{ et petit devant 1.}$$

(Les deux extrema correspondant aux cercles γ^i et γ^j).

On peut alors éliminer les deux cercles γ^i et γ^j simultanément par une dernière isotopie de support contenu dans U et dont l'effet est d'amener le paramètre β dans l'équation ci-dessus, à prendre une valeur négative.

$\gamma)$ *Le cercle γ^i est de type γ .* — Le cercle γ^i est associé à un cercle γ^j porté par une feuille compacte $L(\gamma^j) = C_1^i$ et G^i est un plongement de N_γ dans U . Rappelons que $N_\gamma = D_\gamma \times \mathbf{S}^1_{|f}$ où f est une identification des composantes de $\partial \Gamma_1$; nécessairement, cette identification est isotope à l'identité, puisque l'identification en résultant sur ∂D_2 doit fournir une surface difféomorphe à \mathbf{T}^2 . Dans N_γ , il existe une isotopie envoyant $D_{2|f}$ sur $D_{1|f}$, et laissant fixe $\partial D_{2|f}$. Cette isotopie permet de définir une isotopie de $\bar{\varphi}_1$, via G^i , dont l'étape finale est un plongement de \mathbf{T}^2 sur la feuille $L(\gamma^j)$.

Lemme 15. — *Le plongement $\bar{\varphi}_1$ est isotope à un plongement réduit, ayant le même nombre de cercles de contact que $\bar{\varphi}_1$, dont les applications G^i sont des plongements et possédant au moins un cercle primitif.*

Démonstration. — Si le plongement $\bar{\varphi}_1$ possède un cercle de contact γ^i de type γ ce cercle est nécessairement primitif. En effet, dans ce cas $G^i(D_1) = \bar{\varphi}_1(\mathbf{T}^2)$ et, comme G^i est un plongement, $\text{int } G^i(N_\gamma) \cap \bar{\varphi}_1(\mathbf{T}^2) = \emptyset$.

Supposons maintenant que $\bar{\varphi}_1$ ne possède pas de cercles de contact de type γ . Si un cercle de contact γ^i de $\bar{\varphi}_1$ n'est pas primitif, l'intérieur de $G^i(N_s)$ contient d'autres cercles de contact. Soit γ^i le cercle de contact tel que $\text{int } G^i(N_s)$ contienne un minimum de cercles de contact. Si ce nombre est nul, γ^i est primitif et nous avons fini. Supposons au contraire que $\text{int } G^i(N_s)$ contienne m cercles de contact avec $m \geq 1$. L'intersection $G^i(N_s) \cap \bar{\varphi}_1(\mathbf{T}^2)$ est formée d'une réunion de couronnes, c'est-à-dire de variétés difféomorphes à $S^1 \times I$. L'une de ces couronnes est $G^i(D_1)$. Notons par K l'ensemble des autres couronnes. Chacune des couronnes de K porte au moins un cercle de contact. Montrons qu'elle ne peut en porter plus d'un. Pour cela supposons qu'il existe au contraire une couronne $S \in K$ portant strictement plus d'un cercle de contact. L'un d'eux, disons γ^j , serait porté par $\text{int } S$ et clairement l'image de G^j serait contenue dans l'image de G^i , sinon γ^j serait l'unique cercle de contact porté par S . Mais alors, $\text{int } G^j(N_s)$ contiendrait strictement moins de cercles de contact que $\text{int } G^i(N_s)$ (en particulier $\gamma^j \notin \text{int } G^j(N_s)$), ce qui serait en contradiction avec le choix de γ^i . Donc $G^i(N_s) \cap \bar{\varphi}_1(\mathbf{T}^2)$ est formé de m couronnes portant chacune un cercle de contact et un seul. Cette propriété a pour conséquence que γ^i ne peut être de type β_2 . En effet, dans ce cas, si γ^j désigne le cercle de contact contenu dans C_1^i , l'une des couronnes de K porte γ^j dans son bord et un autre cercle de contact dans son intérieur, donc porte strictement plus d'un cercle de contact.

Examinons maintenant les deux cas possibles :

a) *Le cercle γ^i est de type α .* — Chaque cercle γ^i contenu dans $\text{int } G^i(N_\alpha)$ est également de type α et tel que $\text{int } G^j(N_\alpha) \subset \text{int } G^i(N_\alpha)$. On peut ordonner ces cercles par la relation :

$$\gamma^j, \gamma^k \in \text{int } G^i(N_\alpha), \quad \gamma^j \leq \gamma^k \Leftrightarrow \text{int } G^j(N_\alpha) \subseteq \text{int } G^k(N_\alpha).$$

L'élément minimal pour l'ordre ci-dessus est clairement un cercle primitif.

b) *Le cercle γ^i est de type β_1 .* — Soit γ^j le cercle de contact contenu dans C_1^i . Il est facile d'utiliser le fait que l'holonomie au-dessus de γ^j est triviale, pour définir une isotopie ambiante, de support contenu dans un voisinage arbitraire de $G^i(N_{\beta_1})$ dans V , dont l'effet est de séparer $\text{int } G^i(N_{\beta_1})$ et $\bar{\varphi}_1(\mathbf{T}^2)$, et telle que le nouveau plongement de \mathbf{T}^2 qui en résulte, ne différant de $\bar{\varphi}_1$ que dans un voisinage arbitraire de

$$\bar{\varphi}_1^{-1}(\text{int } G^i(N_{\beta_1}) \cap \bar{\varphi}_1(\mathbf{T}^2)),$$

soit analogue à $\bar{\varphi}_1$, comme dans l'énoncé du lemme. Après cette isotopie, le cercle γ^i (qui n'a pas été perturbé), se trouve être devenu un cercle primitif.

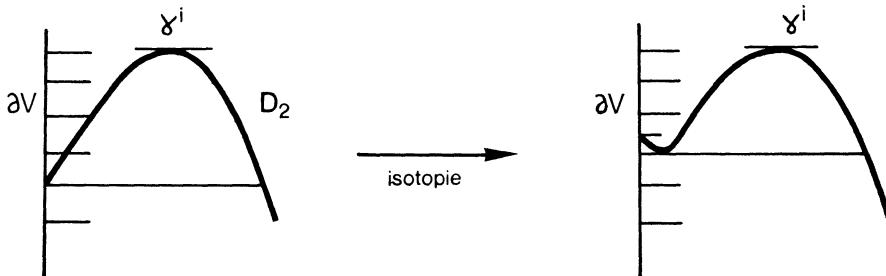
Nous avons maintenant atteint au but, car le théorème 1 découle des lemmes précédents par induction sur le nombre de cercles de contact du plongement $\bar{\varphi}$.

Pour finir, nous allons indiquer comment adapter l'étude précédente aux plongements de $R = S^1 \times I$. Nous supposerons que $\partial V \neq \emptyset$. Soit φ un plongement de R dans V avec les propriétés suivantes :

(i) $\varphi(\partial R) \subset \partial V$, $\varphi(\text{int } R) \subset \text{int } V$ et φ est transverse à ∂V .

(ii) φ est transverse à \mathcal{F} dans un voisinage de ∂R . De plus, chaque composante de ∂R a une image par φ qui est, soit contenue dans une feuille de \mathcal{F} , soit transverse à \mathcal{F} .

Les résultats du paragraphe 1 sont évidemment valables pour un plongement tel que φ . On peut établir l'analogue du lemme 12 du paragraphe 3, en y apportant les modifications suivantes : dans le cas α de la conclusion, l'holonomie au-dessus de la couronne notée C_τ^i peut être triviale (si $\partial C_\tau^i \cap \partial V \neq \emptyset$) et le cas γ ne peut pas se présenter. Les lemmes 13 et 15 restent valables sans modification aucune. Par contre, dans le lemme 14, il apparaît une possibilité nouvelle : γ^i est un cercle de type α , tel qu'une composante au moins de ∂C_1^i appartienne à une composante de ∂V , transverse à \mathcal{F} . Dans ce cas, il est aisément de trouver une isotopie de $\bar{\varphi}_1$, schématisée ci-dessous, de support contenu dans un voisinage arbitraire de cette composante de C_1^i , dont le but est de transformer γ^i en un cercle de type β . Au cours de cette isotopie ∂R se déplace sur ∂V et le plongement de R reste transverse à ∂V , mais l'on n'exige pas que le plongement soit transverse à \mathcal{F} dans un voisinage de ∂R , sauf à l'étape finale de l'isotopie.



On peut ainsi démontrer le résultat suivant :

Théorème 2. — Soient V et \mathcal{F} une variété et un feilletage comme dans l'énoncé du théorème 1, et tels que $\partial V \neq \emptyset$. Soit φ un plongement de $R = S^1 \times I$ dans V , tel que :

(i) $\varphi(\partial R) \subset \partial V$, $\varphi(\text{int } R) \subset \text{int } V$ et φ est transverse à ∂V .

(ii) φ est transverse à \mathcal{F} dans un voisinage de ∂R et chaque composante de ∂R a une image contenue dans une feuille de \mathcal{F} , ou bien transverse à \mathcal{F} .

(iii) φ_* est un homomorphisme injectif.

Alors φ est isotopie à travers les plongements vérifiant la condition (i), à un plongement transverse à \mathcal{F} , ou bien d'image contenue dans une feuille, composante de ∂V .

Remarque. — Le feuilletage \mathcal{F} de l'énoncé ne possède pas de feuille homéomorphe à S^2 ou à P^2 en raison de l'hypothèse que $\partial V \neq \emptyset$ et de la condition (iii), comme permet de le montrer le théorème de stabilité globale de G. Reeb [5].

Naturellement l'étude précédente peut être envisagée pour les variétés de dimension 2. Les seules variétés de dimension 2 possédant des feuilletages sont les fibrés sur S^1 , triviaux ou non, de fibre S^1 ou I , c'est-à-dire $S^1 \times S^1$, $S^1 \times I$, la bouteille de Klein ou le ruban de Moebius. On définit les composantes de Reeb, de dimension 2, de la façon suivante :

Soit f la fonction C^∞ de I dans \mathbf{R} définie au début du I , et F l'application de $I \times \mathbf{R}$ dans \mathbf{R} définie par :

$$F(x, z) = f(x)e^z \quad \text{pour } (x, z) \in I \times \mathbf{R}.$$

L'application F est une submersion dans \mathbf{R} et elle définit un feuilletage \mathcal{F}_0 de $I \times \mathbf{R}$ dont les feuilles sont les surfaces de niveau :

$$F^{-1}(\alpha) \quad \text{pour tout } \alpha \geq 0.$$

Considérons maintenant les deux difféomorphismes suivants de $I \times \mathbf{R}$:

$$a(x, z) = (x, z+1) \quad \text{et} \quad b(x, z) = (1-x, z+1).$$

Ces deux difféomorphismes laissent \mathcal{F}_0 globalement invariant. Ce feuilletage induit donc des feuilletages sur les variétés quotients de $I \times \mathbf{R}$ par a et b . Nous appellerons *composantes de Reeb, de dimension 2*, ces variétés quotients, difféomorphes à $S^1 \times I$ et au ruban de Moebius, munies du feuilletage induit par \mathcal{F}_0 .

On peut alors étudier les plongements de S^1 dans une variété feuilletée de dimension 2. Si cette variété ne contient pas de composante de Reeb, une méthode parallèle à celle employée ci-dessus dans cette partie permet de montrer que :

Théorème 3. — Soit V une variété de classe C^∞ , compacte, de dimension 2, munie d'un feuilletage \mathcal{F} , transverse ou tangent aux composantes de ∂V si $\partial V \neq \emptyset$, transversalement orientable, de classe supérieure ou égale à 2 et ne possédant pas de composante de Reeb. Alors, tout plongement φ de S^1 dans l'intérieur de V , non contractible dans V , est isotope dans l'intérieur de V à un plongement transverse à \mathcal{F} , ou bien à un plongement dont l'image est une feuille de \mathcal{F} , difféomorphe à S^1 .

II. — CLASSIFICATION DE FEUILLETAGES SANS HOLONOMIE

Le problème de la classification des feuilletages à conjugaison près a déjà été abordé dans [9] pour les feuilletages par plans du tore T^3 . Nous allons maintenant voir que les théorèmes de plongements du I permettent de généraliser le résultat de [9]. En fait, nous allons montrer que certains feuilletages sans holonomie peuvent être classifiés à

l'aide d'un invariant algébrique. Pour atteindre ce but, il nous faut tout d'abord développer quelques propriétés générales des feuilletages sans holonomie.

Soit V une variété compacte, de dimension $n \geq 1$ de classe \mathcal{C}^∞ , munie d'un feuilletage \mathcal{F} de codimension 1, de classe $k \geq 1$ et transverse à ∂V si $\partial V \neq \emptyset$. Rappelons que \mathcal{F} est un feuilletage sans holonomie si le groupe d'holonomie G_x , pour tout point $x \in V$, se réduit à un seul élément. Un feuilletage sans holonomie est nécessairement transversalement orientable. Un feuilletage transversalement orientable possède deux orientations transverses possibles. Un atlas distingué (U_i, f_i, h_{ij}) est dit compatible avec une orientation si sur l'ouvert distingué U_i l'orientation transverse est définie par la variation de l'application distinguée f_i , les applications de transition h_{ij} étant des difféomorphismes locaux de \mathbf{R} préservant l'orientation. (Rappelons que sur $U_i \cap U_j$, on a par définition $f_i = h_{ij} \circ f_j$). L'exemple le plus simple de feuilletage sans holonomie est fourni par la donnée d'une 1-forme fermée ω , sans singularité, de classe $k \geq 1$. Une telle forme est intégrable. Désignons par $\mathcal{F}(\omega)$ le feuilletage défini par ω . Il existe un recouvrement $\{U_i\}$ de V par des ouverts tels que $\omega|_{U_i} = df_i$ où f_i est une application de classe k de U_i dans \mathbf{R} .

Si le recouvrement est choisi tel que les intersections $U_i \cap U_j$ soient connexes, alors il existe des $a_{ij} \in \mathbf{R}$ tels que :

$$f_i = a_{ij} + f_j \quad \text{sur } U_i \cap U_j \neq \emptyset.$$

(U_i, f_i, a_{ij}) est un atlas distingué associé à $\mathcal{F}(\omega)$, définissant une orientation transverse. Comme les applications de transition sont des translations, le feuilletage $\mathcal{F}(\omega)$ est sans holonomie.

R. Sacksteder a établi dans [11] le résultat suivant, caractérisant les feuilletages sans holonomie.

Théorème de Sacksteder. — Soit \mathcal{F} un feuilletage sans holonomie, de codimension 1, de classe supérieure ou égale à 2, transversalement orienté. Alors il existe un recouvrement distingué (U_i, f_i, h_{ij}) de \mathcal{F} , compatible avec l'orientation de \mathcal{F} , des homéomorphismes ℓ_i de \mathbf{R} dans \mathbf{R} conservant l'orientation et des nombres $a_{ij} \in \mathbf{R}$ tels que :

$$\ell_i \circ h_{ij} \circ \ell_j^{-1}(x) = x + a_{ij} \quad \text{sur l'image de } \ell_j.$$

La donnée des homéomorphismes $\{\ell_i\}$ est équivalente à la donnée des applications $\{g_i = \ell_i \circ f_i\}$ et (U_i, g_i, a_{ij}) , que nous noterons α , définit un 1-cocycle de Čech de V à valeur réelle. Nous dirons que α est un cocycle associé au feuilletage \mathcal{F} (par le théorème de Sacksteder). Si γ est un chemin dans V , nous noterons par $\int_\gamma \alpha$ la valeur de α sur ce chemin. Elle se calcule facilement à l'aide des $\{g_i, a_{ij}\}$. Nous noterons par :

$$\rho(\alpha, \mathcal{F}) \in H^1(V, \mathbf{R})$$

la classe de cohomologie de α en indiquant \mathcal{F} pour souligner que α est associé à ce feuilletage.

Si Γ est un lacet, $\int_{\Gamma} \alpha = \rho(\alpha, \mathcal{F})[\Gamma]$ et cette valeur ne dépend pas des $\{g_i\}$.

Dans le cas particulier où le feuilletage \mathcal{F} est défini par une 1-forme fermée, cette forme est un cocycle, associé au sens ci-dessus au feuilletage \mathcal{F} , comme le montre ce qui précède l'énoncé.

Avant de poursuivre, remarquons que le théorème de Sacksteder est une généralisation du théorème de Denjoy-Siegel rappelé dans l'introduction :

Si \mathcal{F} est un feuilletage du tore T^2 , de classe supérieure ou égale à 2, et dont aucune feuille n'est compacte, alors \mathcal{F} est topologiquement conjugué avec un feuilletage linéaire de T^2 [12].

Ce dernier résultat est lui-même une conséquence du théorème de Denjoy : *si f est un difféomorphisme de S^1 , de classe supérieure ou égale à 2, sans point périodique, alors f est topologiquement conjugué avec une rotation d'angle irrationnel* [15].

En fait, pour qu'un feuilletage \mathcal{F} de T^2 soit défini par une forme fermée de classe k , il faut et suffit qu'un difféomorphisme de retour f , associé à \mathcal{F} , soit conjugué à une rotation par un difféomorphisme de classe k . Or, V. I. Arnold dans son étude classique des petits dénominateurs, a donné un exemple d'un difféomorphisme de S^1 , analytique, topologiquement conjugué à une rotation irrationnelle, mais non différentiablement conjugué. Il en résulte que *sur T^2 , il existe des feuilletages sans holonomie, de classe C^∞ , non définis par des formes fermées différentiables. A fortiori, les ℓ_i introduits dans le théorème de Sacksteder ne peuvent pas être choisis différentiables en général. Aussi, nous distinguerons sur une variété V , les feuilletages sans holonomie des feuilletages associés aux formes fermées.*

Lemme 1. — Soient α et β deux cocycles associés au même feuilletage sans holonomie \mathcal{F} , transversalement orienté. Alors il existe un nombre $\lambda_{\alpha\beta} > 0$, tel que :

$$\rho(\alpha, \mathcal{F}) = \lambda_{\alpha\beta} \rho(\beta, \mathcal{F}) + 0.$$

Démonstration. — Soit N un champ de vecteurs de classe C^∞ , transverse à \mathcal{F} . Comme \mathcal{F} est transverse à ∂V si $\partial V \neq \emptyset$, on peut supposer que N est tangent à ∂V si $\partial V \neq \emptyset$. Comme V est compact, on peut supposer de plus que N a une orbite fermée Γ par un point x_0 intérieur à V .

Le cocycle α permet de modifier le flot N en un flot topologique $n_\alpha(\tau, x)$, ayant les mêmes orbites que N et tel que, si γ est l'arc d'orbite entre les points x et $n_\alpha(\tau, x)$, le paramètre variant de 0 à τ , l'on ait :

$$\int_{\gamma} \alpha = \tau.$$

Le flot $n_\alpha(\tau, x)$ laisse le feuilletage \mathcal{F} invariant :

Pour tout $x \in V$ et tout $\tau \in \mathbf{R}$, $n_\alpha(\tau, L_x) = L_{n_\alpha(\tau, x)}$ où L_x est la feuille de \mathcal{F} par le point x .

On définit de même le flot $n_\beta(\tau, x)$ avec le même champ N .

Si l'orbite Γ est orienté positivement par rapport à \mathcal{F} , $\lambda_\alpha = \int_{\Gamma} \alpha$ est la période de Γ pour le flot n_α et est donc strictement positif. Ceci montre que $\rho(\alpha, \mathcal{F}) \neq 0$.

Si $\alpha = (U_i, f_i, a_{ij})$, posons $\bar{\alpha} = \frac{1}{\lambda_\alpha} \alpha = \left(U_i, \frac{1}{\lambda_\alpha} f_i, \frac{1}{\lambda_\alpha} a_{ij} \right)$.

On a $\int_{\Gamma} \bar{\alpha} = 1$ et $\rho(\bar{\alpha}, \mathcal{F}) = \frac{1}{\lambda_\alpha} \rho(\alpha, \mathcal{F})$.

On définit de même λ_β et $\bar{\beta} = \frac{1}{\lambda_\beta} \beta$. Nous allons démontrer que $\rho(\bar{\alpha}, \mathcal{F}) = \rho(\bar{\beta}, \mathcal{F})$.

Le lemme en résultera en posant $\lambda_{\alpha\beta} = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta}$.

Il existe un homéomorphisme unique de $S^1 = [0, 1]/0 \sim 1$, tel que le diagramme ci-dessous soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{h} & S^1 \\ n_{\bar{\alpha}}(\tau, x_0) \downarrow & & \downarrow n_{\bar{\beta}}(\tau, x_0) \\ \Gamma & \xrightarrow{\text{Id}} & \Gamma \end{array}$$

D'autre part, dans [7], H. Rosenberg a montré que l'existence d'un cocycle associé à un feuilletage \mathcal{F} permet de démontrer que tout lacet γ en un point quelconque x est homotope à un lacet s'écrivant $\ell_\gamma \circ c_\gamma$, où :

- c_γ est un segment de l'orbite du champ N par x .
- ℓ_γ est un chemin dans la feuille L_x .

Si $\bar{\alpha}$ est un cocycle quelconque associé à \mathcal{F} :

$$\int_{c_\gamma} \bar{\alpha} = \int_{\gamma} \bar{\alpha} = \rho(\bar{\alpha}, \mathcal{F})[\gamma].$$

Ceci montre que la décomposition $\gamma = \ell_\gamma \circ c_\gamma$ est unique si elle existe, c'est-à-dire qu'à une classe d'homotopie $[\gamma]$ est associé un seul chemin c_γ , et par suite une seule classe d'homotopie de chemins ℓ_γ .

Soit γ un lacet quelconque en x_0 . Nous allons démontrer que :

$$\rho(\bar{\alpha}, \mathcal{F})[\gamma] = \rho(\bar{\beta}, \mathcal{F})[\gamma].$$

Décomposons γ en $\gamma = c_\gamma \circ \ell_\gamma$. Soit $\tau \in S^1$ un point quelconque.

Posons $x = n_{\bar{\alpha}}(\tau, x_0) = n_{\bar{\beta}}(h(\tau), x_0)$.

Les deux lacets $\gamma_1 = n_{\bar{\alpha}}(\tau, \gamma)$ et $\gamma_2 = n_{\bar{\beta}}(h(\tau), \gamma)$ sont homotopes au point x , comme étant homotopes au même lacet $c \circ \gamma \circ c^{-1}$, où c est un chemin sur Γ d'origine x_0 et d'extrémité x . Il en résulte que si $n_{\bar{\alpha}}(\tau, \gamma) = c_{\gamma_1} \circ \ell_{\gamma_1}$ et $n_{\bar{\beta}}(h(\tau), \gamma) = c_{\gamma_2} \circ \ell_{\gamma_2}$, alors $c_{\gamma_1} = c_{\gamma_2}$.

Mais comme $\int_{\gamma_1} \bar{\alpha} = \int_{\gamma} \bar{\alpha}$ et $\int_{\gamma_2} \bar{\beta} = \int_{\gamma} \bar{\beta}$ par construction, on a :

$$h(\tau + \rho(\bar{\alpha}, \mathcal{F})[\gamma]) = h(\tau) + \rho(\bar{\beta}, \mathcal{F})[\gamma].$$

La valeur de τ étant quelconque, il en résulte que h conjugue les rotations d'angle $\rho(\bar{\alpha}, \mathcal{F})[\gamma]$ et $\rho(\bar{\beta}, \mathcal{F})[\gamma]$. Ces deux rotations sont donc égales :

$$\rho(\bar{\alpha}, \mathcal{F})[\gamma] \equiv \rho(\bar{\beta}, \mathcal{F})[\gamma] \pmod{\mathbf{Z}}.$$

Comme d'autre part $\rho(\bar{\alpha}, \mathcal{F}) = \int_{c_\gamma} \bar{\alpha}$ et $\rho(\bar{\beta}, \mathcal{F}) = \int_{c_\gamma} \bar{\beta}$, les parties entières (positives ou négatives) de ces deux nombres sont égales comme étant égales aux nombres de facteurs Γ (positifs ou négatifs) contenus dans c_γ . D'où $\rho(\bar{\alpha}, \mathcal{F})[\gamma] = \rho(\bar{\beta}, \mathcal{F})[\gamma]$ pour tout γ .

Dans $H^1(V, \mathbf{R}) - \{0\}$, introduisons la relation d'équivalence suivante :

$$c_1 \sim c_2 \Leftrightarrow \exists \lambda > 0 \text{ tel que } c_1 = \lambda c_2.$$

Notons par $SH^1(V, \mathbf{R})$ l'ensemble des classes d'équivalence.

Le lemme 1 associe à tout feuilletage \mathcal{F} , sans holonomie, transversalement orienté et de classe supérieure ou égale à 2, un élément unique de $SH^1(V, \mathbf{R})$ que nous noterons $\delta(\mathcal{F})$:

$$\delta(\mathcal{F}) = \rho(\alpha, \mathcal{F}) / \sim \quad \text{pour un quelconque cocycle } \alpha \text{ associé à } \mathcal{F}.$$

En particulier, si \mathcal{F} est défini par une forme ω fermée, sans singularité : $\delta(\mathcal{F}) = [\omega] / \sim$, où $[\omega]$ est la classe de cohomologie définie par ω . Le lemme 1 signifie dans ce cas que pour que deux formes ω et ω' définissent le même feuilletage, il faut et suffit qu'il existe $\lambda \neq 0$ et une fonction différentiable f , constante sur les feuilles, tels que :

$$\omega' = \lambda \omega + df.$$

Le lemme 1 a aussi pour conséquence le corollaire suivant :

Corollaire 1. — L'application δ est naturelle au sens suivant :

Si (V, \mathcal{F}) et (V', \mathcal{F}') sont deux structures feuilletées sans holonomie, de classe supérieure ou égale à 2, transversalement orientées, et si h est un homéomorphisme de V sur V' envoyant les feuilles de \mathcal{F} sur les feuilles de \mathcal{F}' en préservant les orientations transverses de \mathcal{F} et \mathcal{F}' , alors :

$$h^*[\delta(\mathcal{F}')] = \delta(\mathcal{F}).$$

En particulier, $\delta(\mathcal{F})$ est invariant par isotopie topologique.

Désignons par $F(V)$ l'ensemble des feuilletages sans holonomie transversalement orientés de classe supérieure ou égale à 2 de V et transverses à ∂V si $\partial V \neq \emptyset$. Nous venons de construire une application naturelle δ :

$$\delta : F(V) \rightarrow SH^1(V, \mathbf{R}).$$

Cette application n'a d'intérêt que pour les variétés V telles que $F(V) \neq \emptyset$.

Signalons à ce sujet que D. Tischler a montré dans [14] qu'une variété compacte V possède des formes fermées, sans singularité, de classe $k \geq 1$, si et seulement si V est C^k -difféomorphe à un fibré différentiable sur S^1 . Associé au théorème de Sacksteder, ce résultat montre que si V est telle que $F(V) \neq \emptyset$, alors V est homéomorphe à un fibré sur S^1 . Si V est une variété telle que $F(V) \neq \emptyset$, on peut se poser les deux questions suivantes :

- 1) Quels sont les éléments de $SH^1(V, \mathbf{R})$ appartenant à l'image de δ , c'est-à-dire réalisables par des feuilletages sans holonomie, ou bien réalisables par des formes fermées, sans singularité ?

2) L'application δ permet-elle de classifier les feuilletages de $F(V)$ ou bien la classe d'une forme fermée sans singularité classifie-t-elle cette forme, à isotopie près ?

Le but de ce qui suit est d'apporter une réponse aux deux questions ci-dessus dans le cas particulier où $V = \mathbf{S}^1 \times M$, M étant une variété compacte de dimension 1 ou 2, connexe, orientable, à bord éventuellement non vide. (Rappelons que si $\partial V \neq \emptyset$, on suppose les feuilletages étudiés transverses à ∂V).

Les résultats peuvent s'énoncer de la façon suivante :

Théorème 1. — Supposons que V , variété de dimension 2 ou 3, s'écrive comme produit $V = \mathbf{S}^1 \times \dots \times L$ de s facteurs \mathbf{S}^1 , avec $1 \leq s \leq \dim V$, et d'un facteur L , variété compacte, connexe, orientable, non produit par \mathbf{S}^1 . Soit $H^1(V, \mathbf{R}) = H^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{R}) \otimes \dots \otimes H^1(L, \mathbf{R})$, la décomposition en somme directe du groupe $H^1(V, \mathbf{R})$, associé à la décomposition de V .

Alors, pour qu'un élément α de $SH^1(V, \mathbf{R})$ soit réalisable par un feuilletage de $F(V)$ ou bien par une forme fermée, sans singularité, de classe supérieure ou égale à 2, il faut et suffit que α corresponde à des classes de $H^1(V, \mathbf{R})$ ayant au moins une composante non nulle sur l'un des facteurs $H^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{R})$.

Remarque. — Supposons que $V = \mathbf{S}^1 \times M_g$ où M_g est une surface compacte orientable de genre $g \geq 1$. Désignons par π la projection de V sur M_g . Soit ω une forme fermée quelconque de M_g . Le théorème 1 entraîne que toute forme fermée cohomologue à $\pi^*\omega$ est singulière.

Théorème 2. — Soit $V = \mathbf{S}^1 \times M$, où M est une variété connexe, compacte, orientable, de dimension 1 ou 2. Alors :

i) Si \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont deux feuilletages de $F(V)$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe un homéomorphisme H isotope à l'identité de V , envoyant les feuilles de \mathcal{F} sur les feuilles de \mathcal{F}' en préservant les orientations transverses.

(ii) $\delta(\mathcal{F}) = \delta(\mathcal{F}')$.

2) Si ω et ω' sont deux formes fermées de V , de classe $k \geq 2$, sans singularité et de restriction non singulière à ∂V si $\partial V \neq \emptyset$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe un difféomorphisme G , de classe k , C^k isotope à l'identité de V , tel que $G^*(\omega) = \omega'$.

(ii) ω' est cohomologue à ω .

Remarque. — Le 2) précise le 1) dans le cas des formes fermées. Les implications (i) \Rightarrow (ii) sont triviales, moyennant le corollaire 1 ci-dessus. Les théorèmes 1 et 2 ci-dessus sont des conséquences assez directes du théorème suivant, dont la démonstration s'appuie sur les résultats de la partie I :

Théorème 3. — Soit une variété V et une décomposition de $H^1(V, \mathbf{R})$ comme dans l'énoncé du théorème 1. Alors si \mathcal{F} est un feuilletage de $F(V)$, $\delta(\mathcal{F})$ est associé à des classes ayant au moins une composante non nulle sur l'un des facteurs $H^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{R})$.

Si S_0^1 désigne l'un des facteurs de V avec la propriété ci-dessus par rapport à $\delta(\mathcal{F})$, alors il existe une C^∞ isotopie de l'identité de V à un difféomorphisme G , tel que $G(\mathcal{F})$ soit transverse à ce facteur S_0^1 .

Démonstration du théorème 3. — La démonstration, sans être délicate, est assez longue en raison des nombreux cas à envisager. Les étapes successives sont notées de a) à i). Certaines de ces étapes, suffisamment claires, seront données sans démonstration complète.

a) *Le théorème 3 est vrai pour $V = S^1 \times I$. L'isotopie de l'identité à G peut être choisie fixe sur ∂V .* — Il suffit de remarquer que tout feuilletage sans holonomie de $S^1 \times I$, transverse au bord a des feuilles difféomorphes à I , avec une extrémité sur $S^1 \times \{0\}$ et l'autre sur $S^1 \times \{1\}$. (Cela suit de la théorie de Poincaré-Bendixon par exemple. Voir [3].) L'existence de l'isotopie découle alors de la connexité des groupes $\text{Diff}^\infty(I, \partial I)$ et $\text{Diff}^\infty(D^2, \partial D^2)$.

b) *Le théorème 3 est vrai pour $V = T^2 = S^1 \times S^1$.* Puisque :

$$H^1(V, \mathbf{R}) = H^1(S^1, \mathbf{R}) \otimes H^1(S^1, \mathbf{R}),$$

$\delta(\mathcal{F})$, pour tout feuilletage $\mathcal{F} \in F(V)$, vérifie la conclusion de l'énoncé. Sans restreindre la généralité de la démonstration, on peut supposer que $\delta(\mathcal{F})$ correspond à des classes ayant une composante non nulle sur le groupe de cohomologie associé au premier facteur S^1 . Soit $p_0 \in S^1$ un point quelconque, et considérons le plongement $S^1 \times \{p_0\} \subset T^2$. Le théorème I, 3 entraîne que ce plongement est isotope à un plongement φ transverse à \mathcal{F} . En effet $\varphi(S^1)$ ne peut être une feuille de \mathcal{F} , sans quoi $\delta(\mathcal{F})$ serait nul sur le cycle $S^1 \times \{p_0\}$ isotope à $\varphi(S^1)$. D'une manière équivalente, il existe une isotopie de l'identité de $V = S^1 \times S^1$ à un difféomorphisme G telle que $G(\mathcal{F})$ soit transverse à $S^1 \times \{p_0\}$. En coupant V le long de $S^1 \times \{p_0\}$, on obtient un feuilletage de $F(S^1 \times I)$. Le résultat suit alors de l'étape a).

c) *Le théorème 3 est vrai pour $V = S^1 \times S^2$ et $V = S^1 \times D^2$.* En fait, tout feuilletage de $F(V)$ est ici isotope au feuilletage par le facteur S^2 ou D^2 , avec l'une ou l'autre des orientations transverses. — Si $V = S^1 \times S^2$ et $\mathcal{F} \in F(V)$, toutes les feuilles de \mathcal{F} sont difféomorphes à S^2 comme il suit facilement du lemme I, 3 et du théorème de stabilité globale de Reeb [5]. Soit L_0 une feuille quelconque de \mathcal{F} . Comme L_0 ne représente pas l'élément nul de $\pi_2(V)$, L_0 est isotope à $\{p_0\} \times S^2$ pour un point quelconque $p_0 \in S^1$ [6]. Donc il existe G , difféomorphisme isotope à l'identité de V , tel que $G(L_0) = \{p_0\} \times S^2$. Le résultat suit alors de la connexité des groupes $\text{Diff}(S^2)$ et $\text{Diff}(D^3, \partial D^3)$ établie dans [13] et [1], respectivement.

Si $V = S^1 \times D^2$, et $\mathcal{F} \in F(V)$, on considère la trace de \mathcal{F} sur $\partial V = S^1 \times \partial D^2$. Considérons le plongement $\{p_0\} \times \partial D^2 \subset S^1 \times \partial D^2$ pour un point quelconque p_0 de S^1 . Appliquons le théorème I, 3 à ce plongement. Si le cercle $\{p_0\} \times \partial D^2$ est isotope à un cercle γ transverse à $\mathcal{F}_{|\partial V}$, on considère un disque D plongé dans V de bord γ et transverse à ∂V et l'on examine la trace de \mathcal{F} sur D . Il est facile de montrer que D porte un cycle limite (voir [2]), ce qui est impossible. Donc $\mathcal{F}_{|\partial V}$ a une feuille, et donc toutes ses feuilles, isotopes au facteur ∂D^2 . Chacune des feuilles de $\mathcal{F}_{|\partial V}$ est le bord d'une feuille de \mathcal{F} difféomorphe

à \mathbf{D}^2 , comme le montre le lemme I, 2. Le résultat suit alors de la connexité des groupes $\text{Diff}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$ et $\text{Diff}(\mathbf{D}^3, \partial\mathbf{D}^3)$.

d) Soit $V = \mathbf{S}^1 \times M$ avec M une surface de genre 0 (c'est-à-dire une sphère \mathbf{S}^2 moins un nombre fini de disques disjoints). Si $\mathcal{F} \in F(V)$ est transverse au facteur \mathbf{S}^1 sur $\partial V = \mathbf{S}^1 \times \partial M$, alors il existe un difféomorphisme G , isotope à l'identité de V , par une isotopie fixe sur ∂V , telle que $G(\mathcal{F})$ soit transverse au facteur \mathbf{S}^1 . — Si $\partial M \neq \emptyset$, c'est-à-dire si $M = \mathbf{S}^2$, le résultat suit de c).

Si ∂M a une seule composante, c'est-à-dire si $M = \mathbf{D}^2$, le résultat suit de la connexité de $\text{Diff}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$ et de $\text{Diff}(\mathbf{D}^3, \partial\mathbf{D}^3)$. Supposons que le résultat soit vrai pour les variétés M avec moins de k composantes dans le bord ($k \geq 2$). Soit M une variété avec k composantes dans le bord K_1, \dots, K_k . Soit γ un plongement de I dans M , transverse à ∂M , et dont les extrémités p_1 et p_2 appartiennent respectivement à K_1 et K_2 .

Soit \mathcal{F} un feuilletage de M , comme dans l'énoncé. Alors $\mathbf{S}^1 \times \gamma$ est un plongement de $\mathbf{S}^1 \times I$ dont le bord est transverse à \mathcal{F} . Le théorème I, 2 entraîne qu'il existe un difféomorphisme G , isotope rel. ∂V à l'identité de V , tel que $G(\mathcal{F})$ soit transverse au facteur \mathbf{S}^1 sur $\mathbf{S}^1 \times \gamma$. En coupant $\mathbf{S}^1 \times M$ le long de $\mathbf{S}^1 \times \gamma$, on obtient une variété $\mathbf{S}^1 \times M'$ où M' est de genre 0, avec $k-1$ composantes dans son bord.

Le résultat suit alors de l'hypothèse de récurrence.

e) Le théorème 3 est vrai pour $V = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times I$. — Soit \mathcal{F} un feuilletage de $F(V)$. Comme $H^1(V, \mathbf{R}) = H^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{R}) \otimes H^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{R})$, $\delta(\mathcal{F})$ vérifie la conclusion de l'énoncé du théorème. Supposons par exemple que $\delta(\mathcal{F})$ ait une composante non nulle sur le groupe de cohomologie associé au premier facteur \mathbf{S}^1 . L'étape a) entraîne alors qu'il existe un difféomorphisme G de V , isotope à l'identité de V , tel que $G(\mathcal{F})$ soit transverse à ce facteur \mathbf{S}^1 sur ∂V . Le résultat suit alors de l'étape d).

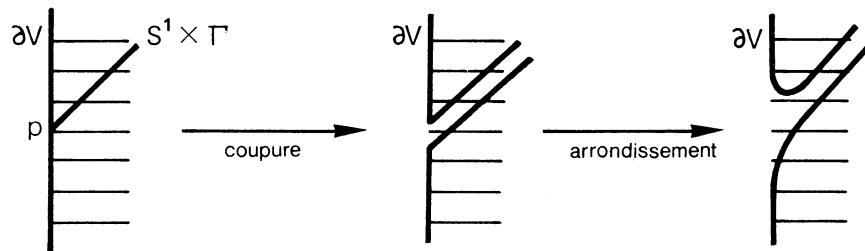
f) Le théorème 3 est vrai pour $V = \mathbf{T}^3 = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$. — Soit $\mathcal{F} \in F(V)$. Comme $H^1(V, \mathbf{R}) = H^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{R}) \otimes H^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{R}) \otimes H^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{R})$, $\delta(\mathcal{F})$ doit vérifier la condition de l'énoncé. Supposons par exemple que $\delta(\mathcal{F})$ ait une composante non nulle sur le groupe de cohomologie correspondant au premier facteur \mathbf{S}^1 . On considère le plongement $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \{p_0\} \subset V$ pour un point quelconque $p_0 \in \mathbf{S}^1$. Le théorème I, 1 entraîne qu'il existe un difféomorphisme G_1 , isotope à l'identité de V , tel que $G_1(\mathcal{F})$ soit transverse à $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \{p_0\}$. L'étape b) permet alors de trouver un difféomorphisme G_2 isotope à G_1 tel que $G_2(\mathcal{F})$ soit transverse au premier facteur \mathbf{S}^1 de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \{p_0\}$. Si l'on coupe V le long de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \{p_0\}$ on obtient un feuilletage de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times I$ transverse au premier facteur \mathbf{S}^1 sur le bord. Le résultat suit alors de l'étape d).

g) Soit $V = \mathbf{S}^1 \times M$, où M est de genre 0 avec $k > 2$ composantes dans son bord. Soit $\mathcal{F} \in F(V)$. Alors $\delta(\mathcal{F})$ a une composante non nulle sur $H^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{R})$. — Supposons au contraire que $\delta(\mathcal{F})$ ait une composante nulle sur le facteur $H^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{R})$. Alors le théorème I, 3 entraîne que les feuilles de $\mathcal{F}|_{\partial V}$ sont isotopes au facteur \mathbf{S}^1 , donc il existe un difféomorphisme G , isotope à l'identité de V , tel que $G(\mathcal{F})_{\partial V}$ ait pour feuilles le facteur \mathbf{S}^1 . Il existe un système Γ de $(k-1)$ chemins plongés dans M , joignant les composantes de ∂M , tel que $\text{int}(M - \Gamma)$ soit difféomorphe à l'intérieur du disque. Le théorème I, 2

permet de trouver un difféomorphisme G_1 , isotope à G , tel que $G_1(\mathcal{F})$ soit transverse à $\mathbf{S}^1 \times \Gamma$ et que $G_1(\mathcal{F})|_{\partial V}$ ait encore pour feuilles le facteur \mathbf{S}^1 . Pour chaque chemin γ de Γ , les composantes de $\mathbf{S}^1 \times \partial\gamma$ appartiennent à \mathcal{F} et à ∂M . Comme \mathcal{F} est sans holonomie, $\mathcal{F} \cap (\mathbf{S}^1 \times \gamma)$ est formé de cercles isotopes au facteur \mathbf{S}^1 . Il existe donc un nouveau difféomorphisme G_2 , isotope à G_1 , rel. ∂V , tel que :

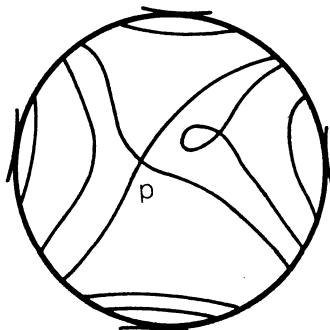
- $G_2(\mathcal{F})|_{\mathbf{S}^1 \times (\partial M \cup \Gamma)}$ ait pour feuilles le facteur \mathbf{S}^1 .
- $G_2(\mathcal{F})$ soit transverse à $\mathbf{S}^1 \times \partial M$ et à chaque composante de $\mathbf{S}^1 \times \Gamma$.

Coupons $\mathbf{S}^1 \times M$ le long de $\mathbf{S}^1 \times \Gamma$. Nous obtenons une variété anguleuse, homéomorphe à $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{D}^2$ et possédant $4(k-1)$ arêtes parallèles au facteur \mathbf{S}^1 . $G_2(\mathcal{F})$ induit un feuilletage transverse à chaque face de dimension 2 du bord, le long du facteur \mathbf{S}^1 . Si l'on examine une des extrémités p de Γ , la situation de $\mathbf{S}^1 \times \Gamma$ au voisinage de $\mathbf{S}^1 \times \{p\}$ peut être représentée par le schéma ci-dessous (dont il faut faire par la pensée le produit par \mathbf{S}^1) :



On a schématisé à droite le résultat de l'arrondissement des arêtes déduites de $\mathbf{S}^1 \times \{p\}$: le résultat obtenu est un feuilletage différentiable de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{D}^2$, transverse au bord au voisinage d'une des deux arêtes et ayant un contact générique rentrant le long du facteur \mathbf{S}^1 , pour l'autre arête. Finalement, on obtient un feuilletage de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{D}^2$, dont la trace sur le bord est formée par le facteur \mathbf{S}^1 , transverse au bord, sauf le long de $2(k-1)$ cercles \mathbf{S}^1 où le contact est générique et rentrant.

Considérons la trace de ce feuilletage sur le disque $\{p_0\} \times \mathbf{D}^2$ pour un point p_0 quelconque appartenant à \mathbf{S}^1 . Mettons ce disque en position générale par rapport au



Exemple $k = 3$

feuilletage, par une isotopie fixe dans un voisinage du bord. La trace du feuilletage sur ce disque est alors formée par les orbites d'un champ X , générique : le champ est transverse au bord, sauf en $2(k-1)$ points où le champ a un contact extérieur et il possède un nombre fini de points critiques, s points de selle et c centres, situés à l'intérieur du disque.

D'après la formule de l'index de Poincaré, on a :

$$I(X) = 1 - \frac{2(k-1)}{2} = 2-k$$

où $I(X)$ désigne l'index du champ X égal à $c-s$.

Il en résulte que :

$$s-c = k-2 > 0.$$

De plus, le feuilletage de $S^1 \times D^2$ étant sans holonomie, les seuls ensembles limites de X , intérieurs au disque, sont les points de selle : autrement dit, toute orbite issue d'un point du bord doit, ou bien revenir sur le bord, ou bien tendre vers un point de selle.

Comme le nombre de points de selle excède de $k-2 > 0$, le nombre des centres, il est facile de démontrer qu'il existe $k-2$ points de selle dont les quatre séparatrices atteignent le bord du disque. Soit p l'un d'eux. La feuille L_p du feuilletage de $S^1 \times D^2$ par le point p contient les quatre séparatrices de p , donc leurs extrémités p_1, p_2, p_3, p_4 ainsi que les quatre cercles $S^1 \times \{p_i\}$, $i \in \{1, \dots, 4\}$.

D'autre part, le feuilletage de $S^1 \times D^2$ étant sans holonomie, l'homéomorphisme $\pi_1(L) \rightarrow \pi_1(S^1 \times D^2) \cong \mathbf{Z}$ est injectif pour toute feuille L de $S^1 \times D^2$. Il en résulte que sur L_p , les deux cercles $S^1 \times p_1$ et $S^1 \times p_2$ sont homotopes et bordant une couronne. Donc L_p est difféomorphe à $S^1 \times I$. Mais ceci est en contradiction avec le fait que ∂L_p contient au moins quatre cercles. D'où le résultat.

h) *Même conclusion qu'à l'étape g) pour $V = S^1 \times M$, avec $M \neq S^1 \times S^1$ et $S^1 \times I$.* — Le résultat est vrai pour les variétés M de genre 0, différentes de $S^1 \times I$, d'après c) et g). Le résultat pour les autres variétés suit alors d'une récurrence sur le genre. En effet, si M est de genre $g \geq 1$ et différente de T^2 , et si γ est un lacet enlaçant une anse de M , la variété $S^1 \times M$, coupée le long de $S^1 \times \gamma$, est une variété s'écrivant comme $S^1 \times M'$, avec M' de genre égal à $g-1$ et telle que M' soit différente de $S^1 \times S^1$ et de $S^1 \times I$.

i) *Le théorème 3 est vrai pour les variétés $V = S^1 \times M$, avec $M \neq D^2, S^2, S^1 \times I$ et $S^1 \times S^1$.* — Soit \mathcal{F} un feuilletage de $F(V)$: $\delta(\mathcal{F})$ a une composante non nulle sur l'unique facteur $H^1(S^1)$, d'après h). L'étape b) entraîne alors qu'il existe un difféomorphisme G isotope à l'identité de V , tel que $G(\mathcal{F})$ soit transverse au facteur S^1 sur $S^1 \times \partial M$. Le résultat suit d'une induction sur le genre en montrant que si le théorème 3 est vrai pour les variétés de genre inférieures à k , avec une isotopie fixe sur $S^1 \times \partial M$ dans le cas où \mathcal{F} est transverse au facteur S^1 sur $S^1 \times \partial M$, alors le théorème 3 est vrai pour les variétés M de genre k , avec une isotopie vérifiant la même condition. L'étape initiale (M de genre 0) suit de la remarque ci-dessus et de l'étape d).

Ceci achève la démonstration du théorème 3.

Nous allons voir maintenant que les théorèmes 1 et 2 découlent assez facilement du théorème 3.

Démonstration du théorème 1. — Le théorème 3 prouve que si \mathcal{F} est un feuilletage de $F(V)$, alors $\delta(\mathcal{F})$ a une composante non nulle sur l'un des facteurs $H^1(S^1, \mathbf{R})$. Réciproquement, supposons que $V = S^1 \times M$ et que $\alpha \in H^1(V, \mathbf{R})$ ait une composante non nulle sur le facteur $H^1(S^1, \mathbf{R})$; alors α est représentable par une forme fermée ω , s'écrivant :

$$\omega = \lambda d\theta + \pi^* \omega_M$$

où $\lambda \neq 0$, θ est le paramètre de S^1 , π la projection de V sur M et ω_M une forme fermée de M .

La forme ω est trivialement non singulière.

Démonstration du théorème 2. — Considérons une représentation de V sous forme de produit $V = S^1 \times \dots \times L$ comme dans le théorème 1. Si \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont des feuilletages de $F(V)$ tels que $\delta(\mathcal{F}) = \delta(\mathcal{F}')$, il existe, d'après le théorème 3, un facteur S^1 de V et des difféomorphismes G et G' , isotopes à l'identité de V , tels que $G(\mathcal{F})$ et $G'(\mathcal{F}')$ soient transverses à ce facteur S^1 . Le théorème 2 découle donc du lemme suivant :

Lemme 2. — Soit $V = S^1 \times M$, où M est une variété compacte de dimension supérieure ou égale à 1. Alors, les conclusions du théorème 2 sont vraies pour les feuilletages de $F(V)$ et les formes fermées dont les feuilletages appartiennent à $F(V)$, qui sont transverses au facteur S^1 , avec des homéomorphismes H , des difféomorphismes G et des isotopies induisant l'identité sur le facteur M .

Démonstration. — Soient \mathcal{F} et \mathcal{F}' deux feuilletages de $F(V)$, transverses au facteur S^1 et tels que $\delta(\mathcal{F}) = \delta(\mathcal{F}')$. Choisissons des cocycles α et β associés respectivement à \mathcal{F} et \mathcal{F}' et tels que :

$$\int_{S^1} \alpha = \int_{S^1} \beta = 1 \quad \text{pour une orientation du facteur } S^1.$$

Il en résulte évidemment que $\rho(\alpha, \mathcal{F}) = \rho(\beta, \mathcal{F}')$.

Soit $x_0 \in M$ un point quelconque. Posons $S_0^1 : S^1 \times \{x_0\}$ et choisissons un point quelconque $\tilde{x}_0 \in S_0^1$.

Soient encore n_α et n_β les flots topologiques, d'orbites le facteur S^1 , associés respectivement à α et β , comme il est indiqué dans le lemme 1. On définit un homéomorphisme h de S_0^1 sur lui-même par la condition :

$$n_\alpha(\tau, \tilde{x}_0) = h \circ n_\beta(\tau, \tilde{x}_0) \quad \text{pour tout } \tau \in \mathbf{R}.$$

Si γ est un chemin de M entre deux points x et y et si p est un point quelconque de $S_x^1 = S^1 \times \{x\}$, alors il existe un relèvement unique Γ de γ dans le feuilletage \mathcal{F} , le long du facteur S^1 , défini par les conditions $\Gamma \in L_p$ (feuille de \mathcal{F} par p) et $\pi(\Gamma) = \gamma$, où π désigne la projection de V sur M .

Le relèvement de γ à partir de chaque point de S_x^1 définit ainsi un difféomorphisme (de classe égale à celle de \mathcal{F}), de S_x^1 sur S_y^1 . Nous noterons ce difféomorphisme $\tilde{\gamma}(\mathcal{F})$. On définit de même $\tilde{\gamma}(\mathcal{F}')$.

Nous allons étendre l'homéomorphisme h en un homéomorphisme H de $M \times S^1$ sur $M \times S^1$, envoyant S_x^1 sur S_x^1 pour tout $x \in M$, par la formule :

$$H(p) = (\tilde{\gamma}(\mathcal{F}')^{-1} \circ h \circ \tilde{\gamma}(\mathcal{F}))(p)$$

où γ est un chemin quelconque d'origine $\pi(p)$ et d'extrémité x_0 .

H est bien défini, car la valeur $H(p)$ écrite ci-dessus ne dépend pas du chemin γ choisi. En effet, considérons tout d'abord un lacet Γ de M en x_0 . Soit p un point quelconque de $S_0^1 : p = n_\alpha(\tau, \tilde{x}_0)$. Alors :

$$(h \circ \tilde{\Gamma}(\mathcal{F}))(p) = (h \circ n_\alpha)(\rho(\alpha, \mathcal{F})[\Gamma], p) = (h \circ n_\alpha)(\rho(\alpha, \mathcal{F}) + \tau, \tilde{x}_0)$$

soit :

$$(h \circ \tilde{\Gamma}(\mathcal{F}))(p) = n_\beta(\rho(\alpha, \mathcal{F})[\Gamma] + \tau, \tilde{x}_0) = n_\beta(\rho(\alpha, \mathcal{F})[\Gamma], h(p))$$

puisque

$$h(p) = n_\beta(\tau, \tilde{x}_0)$$

soit :

$$(h \circ \tilde{\Gamma}(\mathcal{F}))(p) = n_\beta(\rho(\beta, \mathcal{F}')[\Gamma], h(p))$$

puisque

$$\rho(\alpha, \mathcal{F}) = \rho(\beta, \mathcal{F}')$$

soit :

$$(h \circ \tilde{\Gamma}(\mathcal{F}))(p) = (\tilde{\Gamma}(\mathcal{F}') \circ h)(p).$$

Si, maintenant γ et γ' sont deux chemins de mêmes extrémités x et x_0 :

$$\tilde{\gamma}(\mathcal{F}')^{-1} \circ h \circ \tilde{\gamma}(\mathcal{F}) = \tilde{\gamma}'(\mathcal{F}')^{-1} \circ \tilde{\Gamma}(\mathcal{F}')^{-1} \circ h \circ \tilde{\Gamma}(\mathcal{F}) \circ \tilde{\gamma}'(\mathcal{F}) = \tilde{\gamma}'(\mathcal{F}')^{-1} \circ h \circ \tilde{\gamma}'(\mathcal{F})$$

si

$$\Gamma = \gamma \circ \gamma'^{-1}.$$

De plus, par construction, H envoie les feuilles de \mathcal{F} sur celles de \mathcal{F}' . Maintenant, il est facile de vérifier que H , ainsi défini, est isotope à l'identité. En effet, remarquons tout d'abord que :

$$H_* : \pi_1(V, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(V, \tilde{x}_0) \quad \text{est l'homomorphisme identité.}$$

Ceci parce que H envoie S_0^1 sur S_0^1 , et si γ est un lacet quelconque en x_0 de relèvement Γ dans \mathcal{F} , à partir du point \tilde{x}_0 , γ est homotope à la composition de Γ et d'un chemin c de S_0^1 , de longueur $\rho(\alpha, \mathcal{F})[\gamma]$ par rapport à n_α , et d'extrémité \tilde{x}_0 . L'image $H(c \circ \Gamma)$ égale $h(c) \circ H(\Gamma)$.

Le chemin $H(\Gamma)$ est précisément le relèvement de γ dans \mathcal{F}' , à partir de \tilde{x}_0 (point fixe de H), et comme $h(c)$ a une longueur pour β égale à celle de c pour α , c'est-à-dire $\rho(\alpha, \mathcal{F})[\gamma] = \rho(\beta, \mathcal{F}')[\gamma]$, la composition $h(c) \circ H(\Gamma)$ est homotope à γ , d'où :

$$H_*[\gamma] = [\gamma] \quad \text{pour tout lacet } \gamma.$$

Considérons une décomposition simpliciale de M . La propriété précédente entraîne que H est isotope, au-dessus de l'identité de M , à un homéomorphisme H_1 égal à l'identité au-dessus du squelette de dimension 1 de M . On poursuit ensuite par récurrence sur la dimension des squelettes de M . Ceci ne présente pas de difficultés.

Supposons que \mathcal{F} et \mathcal{F}' soient définis par des formes fermées ω et ω' , cohomologues, et de classe $k \geq 2$. On peut choisir comme cocycles associés à \mathcal{F} et \mathcal{F}' , précisément ω

et ω' . La construction précédente va fournir un \mathcal{C}^k difféomorphisme G , \mathcal{C}^k isotope à l'identité.

Par construction :

$$G^*(\omega|_{S_x^1}) = \omega'|_{S_x^1} \quad \text{pour tout } x \in M$$

et $G^*\omega$ est proportionnel en tout point à ω' .

Il en résulte que $G^*\omega = \omega'$, ce qui achève la démonstration du lemme 2.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. CERF, Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension 3 ($\Gamma_4 = 0$), *Lect. Notes in Math.*, **53** (1968).
- [2] A. HAEFLIGER, Variétés feuilletées, *Ann. E. Norm. Sup. Pisa*, série 3, **16** (1962), pp. 367-397.
- [3] HUREWICZ, *Lectures on ordinary differential equations*, Cambridge (M.I.T. Press), 1958.
- [4] S. P. NOVIKOV, Topology of foliations, *Trudy Mosk. Math. Obshch.*, vol. **14** (1965), pp. 248-278.
- [5] G. REEB, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, *Actual. Scient. Ind.*, n° 1183, Paris (Hermann), 1952.
- [6] H. ROSENBERG, The rank of $S^2 \times S^1$, *Am. J. of Math.*, vol. **87** (1965), pp. 11-24.
- [7] H. ROSENBERG, Foliations by planes, *Topology*, vol. **7** (1968), pp. 131-138.
- [8] H. ROSENBERG et R. ROUSSARIE, Reeb Foliations, *Annals of Math.*, vol. **91** (1970), pp. 1-24.
- [9] H. ROSENBERG et R. ROUSSARIE, Topological equivalence of Reeb foliations, *Topology*, vol. **9** (1970), pp. 231-242.
- [10] R. ROUSSARIE, Sur les feuilletages des variétés de dimension 3, *Ann. Inst. Fourier*, vol. **21**, fasc. 3 (1971), pp. 13-81.
- [11] R. SACKSTEDER, Foliations and Pseudogroups, *Amer. J. of Math.*, vol. **87** (1965), pp. 79-102.
- [12] C. L. SIEGEL, Notes on differential equations on the torus, *Annals of Math.*, vol. **46** (1945), pp. 423-428.
- [13] S. SMALE, Diffeomorphisms of the 2-sphere, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. **10** (1959), pp. 621-626.
- [14] D. TISCHLER, On fibering certain foliated manifolds, *Topology*, vol. **9** (1970), pp. 153-154.
- [15] E. R. VAN KAMPEN, The topological transformations of a simple closed curve into itself, *Am. J. of Math.*, vol. **57** (1935).

Manuscrit reçu le 1^{er} octobre 1972.