PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

CHRISTIAN PESKINE
LUCIEN SZPIRO

Dimension projective finie et cohomologie locale

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 42 (1973), p. 47-119
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1973__42__47_0>

DIMENSION PROJECTIVE FINIE ET COHOMOLOGIE LOCALE

Applications à la démonstration de conjectures de M. Auslander, H. Bass et A. Grothendieck

par C. PESKINE *et* L. SZPIRO

TABLE DES MATIÈRES

INDEX DES NOTATIONS

$\mathrm{Ass}_A(M)$	ensemble des idéaux premiers associés au A-module M ([7], chapitre IV).
$\mathrm{di}_A(M)$	dimension injective du A-module M [6].
$\dim(M)$	dimension de Krull du A-module M [23].
$\mathrm{dp}_A(M)$	dimension projective du A-module M [23].
f	morphisme de Frobenius, I-1.
F	foncteur de Frobenius, I-1.
(M.L)	condition de Mittag-Leffler ([12], 0_{III}).
Proj(A)	spectre gradué de l'anneau gradué A ([12], II).
prof(M)	profondeur du A-module M [5].
$\mathrm{Supp}_A(M)$	support du A-module M [23].
$H^i_{\mathfrak{I}}(M)$	i-ème groupe de cohomologie locale du A-module M, à support dans le fermé défini par l'idéal $\mathfrak{I}$ de A [11].
$\mu_i(\mathfrak{p}, M)$	i-ème nombre de H. Bass pour le module M, relatif à l'idéal premier $\mathfrak{p}$.

INTRODUCTION

Les résultats.

La méthode originale introduite dans ce travail consiste à calculer les groupes de cohomologie locale $H^i_{\mathfrak{J}}(\cdot)$, pour un idéal $\mathfrak{J}$ d'un anneau noethérien A, tel que $V(\mathfrak{J})$ soit le support d'un A-module de type fini et de dimension projective finie. Pour atteindre ce but nous avons allié deux points de vue :

a) le point de vue de M. Auslander qui consiste à faire une étude fine des modules de type fini et de dimension projective finie ;

b) le point de vue de la cohomologie locale introduit par A. Grothendieck.

Pour voir le lien étroit entre ces deux notions il suffit de connaître l'égalité suivante, due à M. Auslander :

Soient A un anneau local noethérien, M un A-module de type fini et de dimension projective finie ; alors

$$\dim \operatorname{proj}(M) + \operatorname{prof}(M) = \operatorname{prof}(A).$$

En effet, la profondeur est entièrement caractérisée en termes de cohomologie locale.

Cette méthode permet l'approche de deux sortes de problèmes :

— Dans un schéma ambiant avec des singularités on cherche les propriétés des fermés définis comme supports de modules de dimension projective finie. L'idée générale de M. Auslander est que ces fermés se comportent comme les fermés d'un schéma non singulier. Dans cette direction nous prouvons au chapitre II le théorème suivant, dit théorème d'intersection :

Soient A un anneau local essentiellement de type fini sur un corps, M un A-module non nul de dimension projective finie et de type fini, N un A-module de type fini tel que $\dim(M \otimes_A N) = 0$; alors : $\dim(N) \leqslant \dim. \operatorname{proj}(M)$ (ici $\dim(\cdot)$ désigne la dimension de Krull).

Ce théorème d'intersection nous permet de démontrer les deux théorèmes suivants (cf. chap. II) :

(A) (conjecturé par M. Auslander). Soient A un anneau local essentiellement de type fini sur un corps, M un A-module de type fini et de dimension projective finie ; alors toute suite M-régulière est une suite A-régulière [2].

(B) (conjecturé par H. Bass). Soit A un anneau local essentiellement de type fini sur un corps; alors, pour que A soit un anneau de Cohen-Macaulay, il faut et il suffit qu'il existe un A-module de type fini non nul, de dimension injective finie [6].

— Quand le schéma ambiant est régulier, on cherche des conditions de finitude pour la cohomologie des faisceaux cohérents sur un ouvert. Le fermé complémentaire est bien entendu défini par un idéal de dimension projective finie (théorème des syzygies). Nous démontrons dans ce sens, au chapitre III, le théorème suivant, dit théorème de finitude :

Soit X un sous-schéma fermé de l'espace projectif $P = \mathbf{P}_k^n$, où k est un corps de caractéristique $p > 0$. Soit d la plus petite des dimensions des composantes irréductibles de X. Supposons que $\mathcal{O}_X$ vérifie la condition S_i de Serre, avec $i \leqslant d$. Alors, pour tout entier $s \geqslant n - i$ et tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur $P - X$:

(i) $H^s(P - X, \mathcal{F})$ est un k-espace vectoriel de dimension finie;
(ii) $H^s(P - X, \mathcal{F}(n)) = 0$ pour tout entier n suffisamment grand.

Cet énoncé avait été conjecturé par A. Grothendieck quand X est localement intersection complète [10] (cf. aussi [15], chap. III, § 6).

La méthode.

On pourra s'étonner que dans l'énoncé des théorèmes (A) et (B) aussi bien que dans celui du théorème d'intersection il y ait une hypothèse de finitude sur un corps. En fait nous prouvons d'abord ces théorèmes pour tous les anneaux de caractéristique $p > 0$ et nous en déduisons les théorèmes annoncés.

Comme on veut calculer des groupes de cohomologie locale, la connaissance d'un seul module de dimension projective finie M, d'annulateur un idéal $\mathfrak{J}$ de l'anneau A n'est pas suffisante. Il faut connaître une suite M_n de A-modules tels que $\operatorname{dp} M_n = \operatorname{dp} M$ et tels que les $\operatorname{ann}(M_n)$ définissent la topologie $\mathfrak{J}$-adique. C'est ce qu'on arrive à faire pour un *anneau* A *contenant* $\mathbf{F}_p$, où p est un nombre premier, grâce au lemme suivant :

Soit $0 \to L_s \xrightarrow{\varphi_s} L_{s-1} \to \ldots \to L_1 \xrightarrow{\varphi_1} L_0$ une suite exacte de A-modules libres de rang fini; alors la suite obtenue en élevant les coefficients des matrices φ_i (pour les bases données des L_i) à la puissance p-ième, est encore exacte.

Ce lemme permet de démontrer le théorème d'intersection en caractéristique $p > 0$. En caractéristique nulle, on arrive à se réduire à la caractéristique $p > 0$ grâce à un théorème de comparaison entre la dimension projective sur la fibre générique et sur la fibre spéciale, d'un module de type fini, sur un anneau qui est essentiellement de type fini sur un anneau de valuation discrète V, dont l'uniformisante n'est pas diviseur de zéro dans un certain nombre, fini, de modules de type fini. (Pour plus de détails voir chap. II, § 2).

Le lemme que nous venons de citer s'interprète de la façon suivante : l'homomorphisme de Frobenius est plat dans la « catégorie » des modules de dimension projective finie. Quand l'anneau est régulier on sait que l'homomorphisme de Frobenius est plat. D'ailleurs cette propriété caractérise les anneaux réguliers [18]; cette manière de voir permet la démonstration du théorème de finitude (chap. III, § 4).

On est bien entendu fondé à penser que le théorème d'intersection et ses conséquences (A) et (B) sont vrais pour un anneau local nœthérien quelconque, et qu'une autre méthode permettrait de le démontrer. Ceci est sans doute vrai, mais la seule méthode qui semble naturelle est de « relever » au sens du chapitre I, § 2, les modules de dimension projective finie, sur des anneaux réguliers. Malheureusement ce relèvement est impossible comme il est montré au chapitre I, § 2. Quoi qu'il en soit, nous espérons que le présent travail convaincra que l'utilisation de la cohomologie locale est un outil très fructueux pour l'étude du support des modules de dimension projective finie, et que, réciproquement, la finitude de la dimension projective d'un idéal permet d'obtenir des renseignements précis sur les groupes de cohomologie locale à support dans le fermé qu'il définit.

L'étude des modules de dimension projective finie, comme outil en géométrie algébrique, remonte à la théorie des syzygies de Hilbert. Citons l'utilisation récente qu'en ont faite J.-P. Serre pour analyser les multiplicités d'intersection [23] et M. Auslander pour démontrer le théorème de pureté [4]. Dans son théorème de finitude pour un morphisme d'immersion [10], A. Grothendieck utilise comme techniques essentielles le théorème de dualité locale et la suite spectrale associée à un module de dimension projective finie. Nous emploierons ici, systématiquement et simultanément, ces deux approches.

Indiquons brièvement l'organisation générale de ce travail. Pour plus de détails le lecteur se reportera aux paragraphes o des trois chapitres.

— Dans le chapitre I on développe les propriétés de stabilité des modules de dimension projective finie qui sont nécessaires pour obtenir les résultats des chapitres suivants.

— Dans le chapitre II on énonce les questions fondamentales liées aux modules de type fini et de dimension projective finie. Dans ce contexte, on démontre le théorème d'intersection et les conjectures de M. Auslander et H. Bass qui s'en déduisent.

— Dans le chapitre III, on étudie la cohomologie des ouverts P—X d'un espace projectif P sur un corps, définis comme complémentaires de fermés X ayant de bonnes propriétés de régularité (non singulier, localement intersection complète, Cohen-Macaulay, condition S_i de Serre). Pour ce faire, nous utilisons l'anneau local du sommet du cône au-dessus de l'espace projectif P. En fait, nous prouvons des résultats locaux plus généraux que les énoncés globaux qui leur correspondent. Nous démontrons enfin, dans le cas local connexe, que l'annulation de l'avant-dernier groupe de cohomologie locale est équivalente à sa finitude.

Nous tenons ici à remercier très vivement M. Auslander, avec qui nous avons eu, à l'Université de Brandeis en 1968-1969, des conversations très enrichissantes, et qui nous a pratiquement permis de mener à bien ces recherches. Nous remercions aussi P. Samuel qui a bien voulu être notre directeur de recherches, ainsi que Daniel Ferrand et Michel Raynaud qui, au long de discussions, nous ont permis d'aiguiser notre réflexion. Cet article a été réalisé pendant que les auteurs travaillaient pour les institutions suivantes : Faculté des Sciences de Paris, Faculté des Sciences d'Orsay, Brandeis University (Waltham (Mass.) U.S.A.), C.N.R.S., NFS GP 8398.

Un *preprint* recouvrant une partie des chapitres I et II a été réalisé au Département de mathématiques de Brandeis University et un autre du chapitre III dans les *preprint series* de l'Université d'Oslo.

Le 3 février 1971.

Chapitre I

CONSTRUCTIONS DE MODULES DE DIMENSION PROJECTIVE FINIE

0. Introduction

Le présent chapitre est entièrement algébrique, et développe certaines propriétés des modules de dimension projective finie. Le but de tout ce travail est le calcul de groupes de cohomologie locale à support égal à celui d'un module de dimension projective finie. Une certaine habitude des groupes de cohomologie locale montre que la connaissance d'un seul tel module ne semble pas suffisante. On peut s'en convaincre en regardant l'expression

$$H^i_{\mathfrak{J}}(M) = \varinjlim_n \mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{J}^n, A)$$

où $\mathfrak{J}$ est un idéal de l'anneau A. Le foncteur de Frobenius (§ 7) permet la construction de suffisamment de tels modules en caractéristiques $p>0$.

Les § 2 et 3 sont des variations sur le thème : les modules de type fini et de dimension projective finie se comportent-ils comme les modules de type fini sur un anneau régulier? Au § 2 on voit que l'étude des premiers ne se ramène pas à celle des derniers (contre-exemple au relèvement). On verra cependant au chapitre II que la formule de la dimension des intersections a un analogue.

Les § 4 et § 5 montrent que pratiquement l'étude des modules de type fini et de dimension injective finie se ramène à celle des modules de type fini et de dimension projective finie.

Enfin, au § 6, le théorème d'approximation d'Artin [1], permet d'approcher un module de dimension projective finie sur $\hat{A}$, par un module de dimension projective finie sur le hensélisé $\tilde{A}$ d'un anneau A satisfaisant aux hypothèses du théorème d'Artin. Le fait le plus remarquable est que la dimension projective de l'approchant est égale à la dimension projective de l'approché, et donc que leurs profondeurs sont égales.

1. Le foncteur de Frobenius

Définition (1.1). — *On dira qu'un anneau* A *est de caractéristique* p, *où* p *est premier, s'il existe une injection* $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \to A$ *qui est un homomorphisme d'anneaux.*

Soit A un anneau de caractéristique $p>0$. L'endomorphisme $f: A \to A$ défini par $f(x)=x^p$ pour tout x est un homomorphisme d'anneau, appelé homomorphisme de Frobenius. Notons ${}^f\mathrm{A}$ la bi-A-algèbre A munie de la structure de A-algèbre à gauche définie par f, et de la structure de A-algèbre à droite définie par l'identité. C'est-à-dire que pour $\alpha\in\mathrm{A}$ et $x\in{}^f\mathrm{A}$, on a $\alpha.x=\alpha^p x$ et $x.\alpha=x\alpha$.

Considérons la catégorie $\mathfrak{C}$ des A-modules.

Définition (**1.2**). — *On appelle foncteur de Frobenius, le foncteur* F *de* $\mathfrak{C}$ *dans* $\mathfrak{C}$ *défini par* $\mathrm{F}(\cdot)=\cdot\otimes_{\mathrm{A}}{}^f\mathrm{A}$ *muni de la structure de droite. Plus précisément, pour tout* A-*module* M, *on a* $\mathrm{F}(\mathrm{M})=\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{A}}{}^f\mathrm{A}$, *muni de la structure de* A-*module donnée par la structure de* A-*algèbre à droite de* ${}^f\mathrm{A}$.

Exemples (**1.3**) :

a) $\mathrm{F}(\mathrm{A})=\mathrm{A}$.

b) Si α_x est la multiplication par x dans A, alors $\mathrm{F}(\alpha_x)=\alpha_{x^p}$.

c) Soient n et m des entiers positifs, et soit $\varphi:\mathrm{A}^n\to\mathrm{A}^m$ un homomorphisme. Si (φ_{ij}) est une matrice représentant φ, alors $\mathrm{F}(\varphi)$ est représentée par (φ_{ij}^p).

d) Soit $\mathfrak{J}$ un idéal de A et $(x_1,\ldots,x_s)$ un système de générateurs de $\mathfrak{J}$, alors $\mathrm{F}(\mathrm{A}/\mathfrak{J})=\mathrm{A}/\mathfrak{J}_p$ où $\mathfrak{J}_p$ est l'idéal engendré par $x_1^p,\ldots,x_s^p$.

Proposition (**1.4**). — *Le foncteur* F *commute à la localisation en un idéal premier. Autrement dit, pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* A, *on a un isomorphisme de foncteurs :*

$$\mathrm{F}(\cdot)\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}_{\mathfrak{p}}\simeq\mathrm{F}(\cdot\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}_{\mathfrak{p}}).$$

Remarquons qu'à l'homomorphisme de Frobenius $f:\mathrm{A}\to\mathrm{A}$ correspond un morphisme entier de schémas affines $\bar{f}:\operatorname{spec}\mathrm{A}\to\operatorname{spec}\mathrm{A}$ qui induit l'identité sur les ensembles sous-jacents. On en déduit $\mathrm{A}_{\mathfrak{p}}\otimes_{\mathrm{A}}{}^f\mathrm{A}={}^f\mathrm{A}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}_{\mathfrak{p}}$, donc l'isomorphisme annoncé d'après la définition de F.

Proposition (**1.5**). — *Pour tout* A-*module* M, *on a* $\operatorname{supp}\mathrm{F}(\mathrm{M})\subset\operatorname{supp}\mathrm{M}$. *De plus, si* M *est de type fini, on a* $\operatorname{supp}\mathrm{F}(\mathrm{M})=\operatorname{supp}\mathrm{M}$.

La première partie de la proposition est une conséquence immédiate de (1.4). De plus, toujours d'après (1.4), pour démontrer la deuxième partie, il suffit de montrer que lorsque A est local et M est un A-module non nul de type fini, alors $\mathrm{F}(\mathrm{M})\neq 0$. Mais alors, si $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de A, on sait qu'il existe une surjection $\mathrm{M}\to\mathrm{A}/\mathfrak{m}\to 0$. On en déduit une surjection $\mathrm{F}(\mathrm{M})\to\mathrm{F}(\mathrm{A}/\mathfrak{m})\to 0$. Mais d'après l'exemple (1.3), *d)*, $\mathrm{F}(\mathrm{A}/\mathfrak{m})\neq 0$, donc $\mathrm{F}(\mathrm{M})\neq 0$.

(**1.6**) Dans cette section notre but est de montrer que le foncteur de Frobenius se comporte bien, plus précisément est exact, dans la catégorie des modules de type fini et de dimension projective finie.

Remarquons d'ailleurs que lorsque A est régulier, il est élémentaire de prouver que le morphisme de Frobenius est plat. On a en fait le théorème général suivant dû à Kunz [18].

Théorème. — *Soit* A *un anneau noethérien de caractéristique* $p>0$. *Alors pour que* A *soit régulier, il faut et il suffit que le morphisme de Frobenius soit plat,* i.e. *que le foncteur de Frobenius soit exact.*

Théorème (**1.7**). — *Soit* A *un anneau noethérien de caractéristique* $p>0$. *Soit* M *un* A-*module de type fini et de dimension projective finie. Alors,* $\mathrm{Tor}_i^A(M, {}^f A)=0$ *pour* $i\geqslant 1$, *et* $F(M)$ *est un* A-*module de type fini et de dimension projective finie, tel que pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* A *on ait*

$$\mathrm{dp}_{A_\mathfrak{p}}((F(M))_\mathfrak{p})=\mathrm{dp}_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}).$$

On utilisera le résultat suivant :

Lemme d'acyclicité (**1.8**). — *Soit* A *un anneau local noethérien. Considérons un complexe fini de* A-*modules de type fini* $0\to L_s\to L_{s-1}\to\ldots\to L_1\to L_0\to 0$. *Supposons que pour tout entier* $i>0$, *on ait :*

1) $\mathrm{prof}(L_i)\geqslant i$;

2) $\mathrm{prof}(H_i(L))=0$ *ou* $H_i(L)=0$.

Alors, $H_i(L_\bullet)=0$ *pour* $i\geqslant 1$.

On peut évidemment supposer $s\geqslant 1$, sinon il n'y a rien à prouver.

Pour $i\leqslant s$, posons $S_i=\mathrm{Coker}(L_{i+1}\to L_i)$. Par une récurrence descendante, on va prouver que pour $1\leqslant i\leqslant s$, on a $\mathrm{prof}\, S_i\geqslant i$ et $H_i(L_\bullet)=0$.

Remarquons qu'on a $S_s=L_s$, donc $\mathrm{prof}\, S_s\geqslant s$. De plus, comme $H_s(L_\bullet)\hookrightarrow L_s$, on ne peut avoir $\mathrm{prof}(H_s(L_\bullet))=0$. Donc, $H_s(L_\bullet)=0$.

Supposons maintenant $\mathrm{prof}(S_i)\geqslant i$ et $H_i(L_\bullet)=0$ pour $i>r$, avec $1\leqslant r<s$. On a alors une suite exacte :

$$(*)\qquad 0\to S_{i+1}\to L_r\to S_r\to 0.$$

Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A; la suite exacte donnée par le foncteur $H^0_\mathfrak{m}(\cdot)$ et ses dérivés, appliqués à $(*)$, prouve que $H^e_\mathfrak{m}(S_r)=0$ pour $e<r$, donc que $\mathrm{prof}(S_r)\geqslant r$. Soit K_r le noyau de la flèche $L_r\to L_{r-1}$. On a une suite exacte $0\to S_{r+1}\to K_r\to H_r(L_\bullet)\to 0$. Comme $K_r\hookrightarrow L_r$, on a $\mathrm{prof}\, K_r\geqslant 1$. Mais alors, toujours par la suite exacte de cohomologie locale, $\mathrm{prof}\, H_r(L_\bullet)=0$ implique $\mathrm{prof}(S_{r+1})=1$. Mais comme $r+1\geqslant 2$, nous savons que $\mathrm{prof}(S_{r+1})\geqslant 2$, on en déduit $H_r(L_\bullet)=0$, et le lemme est démontré.

Corollaire (**1.9**). — *Soit* A *un anneau local noethérien de profondeur* r.

Soit $0\to L_s\to\ldots\to L_0\to 0$ *un complexe de* A-*modules libres de type fini, avec* $s\leqslant r$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour* $i\geqslant 1$, *les* A-*modules* $H_i(L_\bullet)$ *sont de longueur finie.*

(ii) *Pour* $i\geqslant 1$, *on a* $H_i(L_\bullet)=0$.

Le corollaire suivant nous a été communiqué, avec une démonstration différente, par M. Auslander. Dans le contexte de ce paragraphe, il a l'intérêt de bien éclairer la preuve du théorème (1.7).

Corollaire **(1.10)**. — *Soit* $\varphi : A \to B$ *un homomorphisme d'anneaux noethériens. Soit* M *un* A-*module de type fini et de dimension projective finie. Supposons que pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* B, *appartenant au support de* $M \otimes_A B$, *on ait* $\operatorname{prof}(B_\mathfrak{p}) \geqslant \operatorname{prof}(A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})})$. *Alors* $\operatorname{Tor}_i^A(M, B) = 0$, *pour tout entier* $i \geqslant 1$, *et* $M \otimes_A B$ *est un* B-*module de dimension projective finie.*

Réciproquement, si A *est local d'idéal maximal* $\mathfrak{m}$, *et si pour tout* A-*module* M *de type fini et de dimension projective finie,* $\operatorname{Tor}_i^A(M, B) = 0$ *pour* $i \geqslant 1$, *alors, pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *au-dessus de* $\mathfrak{m}$, *on a* $\operatorname{prof} B_\mathfrak{p} \geqslant \operatorname{prof} A$.

La réciproque ne présente pas de difficulté. Soit $f_1, \ldots, f_r$ une A-suite régulière. Le complexe de Koszul, sur A, associé à la suite $f_1, \ldots, f_r$, est exact. Ce complexe étant fonctoriel, $\operatorname{Tor}_i^A(A/(f_1, \ldots, f_r), B_\mathfrak{p}) = 0$ implique que le complexe de Koszul, sur $B_\mathfrak{p}$, associé à la suite $f_1, \ldots, f_r$, est exact, donc que cette suite est $B_\mathfrak{p}$-régulière.

Démontrons maintenant la proposition directe. Supposons que les $\operatorname{Tor}_i^A(M, B)$ ne soient pas tous nuls. Soit alors $\mathfrak{p}$ un idéal premier de B qui est minimal dans la réunion des supports des B-modules $\operatorname{Tor}_i^A(M, B)$ pour $i \geqslant 1$. Soit $\mathfrak{q} = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$. Considérons une résolution libre minimale (L_i) du $A_\mathfrak{q}$-module $M_\mathfrak{q}$, de dimension projective finie. Appliquons au complexe (L_i) le foncteur $\cdot \otimes_{A_\mathfrak{q}} B_\mathfrak{p}$. On obtient un complexe de $B_\mathfrak{p}$-modules libres admettant $(\operatorname{Tor}_i^{A_\mathfrak{q}}(M_\mathfrak{q}, B_\mathfrak{q}))_i$ pour homologie. D'après le choix de $\mathfrak{p}$, cette homologie est de longueur finie en degré $\geqslant 1$. Mais (L_i) étant une résolution minimale de $M_\mathfrak{q}$ sur $A_\mathfrak{q}$, la longueur du complexe (L_i) est égale à $\operatorname{dp}_{A_\mathfrak{q}} M_\mathfrak{q}$, donc inférieure ou égale à la profondeur de $A_\mathfrak{q}$. Comme $\operatorname{prof}(A_\mathfrak{q}) \leqslant \operatorname{prof}(B_\mathfrak{p})$, on en déduit que la longueur du complexe $(L_i \otimes_{A_\mathfrak{q}} B_\mathfrak{p})$ est inférieure ou égale à $\operatorname{prof} B_\mathfrak{p}$. Par (1.9), cela implique $H_i(L_\bullet \otimes_{A_\mathfrak{q}} B_\mathfrak{p}) = 0$ pour $i \geqslant 1$, c'est-à-dire $\operatorname{Tor}_i^{A_\mathfrak{q}}(M_\mathfrak{q}, B_\mathfrak{p}) = 0$ pour $i \geqslant 1$, et on a la contradiction cherchée.

Démonstration du théorème **(1.7)**.

On sait que le morphisme de Frobenius f induit l'identité sur les spectres, c'est-à-dire que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, on a $f^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$. D'après (1.10), on a donc $\operatorname{Tor}_i^A(M, {}^fA) = 0$ pour tout $i \geqslant 1$, et $M \otimes_A {}^fA$ est un ${}^fA$-module de type fini et de dimension projective finie. Autrement dit, F(M) est un A-module de type fini et de dimension projective finie.

Remarquons de plus que si A est local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, et $(L_\bullet)$ une résolution libre de M, alors pour que $L_\bullet$ soit une résolution minimale, il faut et il suffit que $F(L_\bullet)$ soit une résolution minimale de F(M). En effet, posons $L_i = A^{r_i}$, et considérons le complexe exact :

$$(*) \qquad 0 \to A^{r_s} \xrightarrow{\varphi_s} A^{r_{s-1}} \to \ldots \to A^{r_1} \xrightarrow{\varphi_1} A^{r_0} \to M \to 0.$$

Représentons les applications φ_i, $i = 1, \ldots, s$, par des matrices $(\varphi_i^{n,m})$. Dire que $(*)$ est une résolution minimale, c'est dire que pour tous i, n, m, l'élément $\varphi_i^{n,m}$ appartient à l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A. Mais alors $F((*))$ peut s'écrire :

$$o \to A^{r_s} \xrightarrow{(\varphi_s)_p} A^{r_{s-1}} \to \ldots \to A^{r_1} \xrightarrow{(\varphi_1)_p} A^{r_0} \to F(M) \to o,$$

où, d'après l'exemple (1.3), *c)*, pour tout $i = 1, \ldots, s$, l'application $(\varphi_i)_p$ est représentée par la matrice $((\varphi_i^{n,m})^p)$. On a évidemment $\varphi_i^{n,m} \in \mathfrak{m} \Leftrightarrow (\varphi_i^{n,m})^p \in \mathfrak{m}$, donc

$$(L_\bullet) \text{ résolution minimale de } M \Leftrightarrow F(L_\bullet) \text{ résolution minimale de } F(M).$$

On sait que le foncteur de Frobenius commute à la localisation, on en déduit donc la fin du théorème, c'est-à-dire que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, on a

$$\mathrm{dp}_{A_\mathfrak{p}}(F(M))_\mathfrak{p} = \mathrm{dp}_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}).$$

Corollaire (**1.11**). — *Soit* A *un anneau local noethérien de caractéristique* $p > 0$, *et soit* $\mathfrak{m}$ *son idéal maximal. Soit* L *un* A*-module libre de type fini, et soit* K *un sous-module de* L. *Supposons que* K *soit de dimension projective finie. Alors, il existe une suite de sous-modules* K_i *de* L *tels que :*

1) $K_0 = K$,
2) *pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* A, *on a* $\mathrm{dp}_{A_\mathfrak{p}}(L/K_i)_\mathfrak{p} = \mathrm{dp}_{A_\mathfrak{p}}(L/K)_\mathfrak{p}$,
3) *si* $K \subset \mathfrak{m}L$, *alors* $K_i \subset \mathfrak{m}^{p^i}L$ *pour tout* $i \geqslant 0$.

On pose $M = L/K$, et on prend $K_i = \mathrm{Ker}(F^i(L) \to F^i(M))$. Comme $F^i(L) = L$, on remarque que K_i est bien un sous-module de L. La condition 1) est évidente. La condition 2) ne fait que traduire le théorème (1.7). La condition 3) se démontre en considérant une présentation finie $L_1 \xrightarrow{\varphi} L \to M \to 0$ de M. Dire que $K \hookrightarrow \mathfrak{m}L$, c'est dire qu'une matrice représentant φ a ses coefficients dans $\mathfrak{m}$. Mais alors, pour tout i, d'après (1.3), *c)*, une matrice représentant $F^i(\varphi)$ aura ses coefficients dans $\mathfrak{m}^{p^i}$. Dans le cas particulier où $L = A$ et où K est un idéal de dimension projective finie, on a un résultat plus fort qui sera particulièrement intéressant pour calculer, plus précisément qu'au moyen du résultat précédent, la cohomologie locale à support dans le fermé défini par un idéal de dimension projective finie.

Corollaire (**1.12**). — *Soit* A *un anneau noethérien de caractéristique* $p > 0$. *Soit* $\mathfrak{J}$ *un idéal de* A, *de dimension projective finie. Alors, il existe une suite décroissante d'idéaux* $(\mathfrak{J}_n)$ *de* A, *définissant sur* A *la même topologie que la topologie* $\mathfrak{J}$*-adique, et tels qu'en tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* A, *on ait* $\mathrm{dp}_{A_\mathfrak{p}}(A/\mathfrak{J}_n)_\mathfrak{p} = \mathrm{dp}_{A_\mathfrak{p}}(A/\mathfrak{J})$ *pour tout* $n \geqslant 0$.

En effet, on prend simplement comme précédemment $\mathfrak{J}_n = \mathrm{Ker}(F^n(A) \to F^n(A/\mathfrak{J}))$. Comme $F^n(A) = A$, on applique le théorème (1.7), et il reste seulement à vérifier que les idéaux $\mathfrak{J}_n$ définissent la même topologie que la topologie $\mathfrak{J}$-adique, dans A. Mais on a vu (1.3), *d)*, que si $x_1, \ldots, x_s$ est un système de générateurs de $\mathfrak{J}$, alors $\mathfrak{J}_n = (x_1^{p^n}, \ldots, x_s^{p^n})$. On a évidemment $\mathfrak{J}_n \subset \mathfrak{J}^n$, et $\mathfrak{J}_n \supset \mathfrak{J}^{sp^n}$, et le corollaire est démontré.

Terminons cette section en donnant une forme plus imagée du théorème (1.7).

Théorème (**1.7** *bis*) (**1.13**). — *Soit* A *un anneau noethérien de caractéristique* $p>0$. *Considérons un complexe exact de* A-*modules libres de type fini*

$$0 \to L_s \xrightarrow{\varphi_s} L_{s-1} \to \ldots \to L_1 \xrightarrow{\varphi_1} L_0.$$

Notons $\varphi_{i,n,m}$ *les coefficients des matrices représentant les* φ_i *pour des bases données des* L_i.

Soit $\varphi_i^{(p)}$ *la matrice dont les coefficients sont* $\varphi_{i,n,m}^p$; *alors le complexe*

$$0 \to L_s \xrightarrow{\varphi_s^{(p)}} L_{s-1} \xrightarrow{\varphi_{s-1}^{(p)}} \ldots \to L_1 \xrightarrow{\varphi_1^{(p)}} L_0$$

est exact.

2. Contre-exemple au relèvement

Définition (**2.1**). — *Soient* R *un anneau local régulier, et* A *un quotient de* R. *Soit* M *un* A-*module de type fini et de dimension projective finie. On dit que* M *se relève à* R, *s'il existe un* R-*module de type fini* N *tel que* $M \simeq A \otimes_R N$, *et que* $\mathrm{Tor}_i^R(A, N) = 0$ *pour* $i \geqslant 1$.

Remarque 1 : Ceci revient à dire que l'on obtient une résolution projective de M sur A, en tensorisant une résolution projective de N sur R par A.

Remarque 2 : Les modules de dimension projective $\leqslant 1$ se relèvent.

Rappelons qu'on dit qu'un A-module M de type fini et de dimension projective finie est *rigide*, s'il vérifie la « conjecture des Tors », autrement dit, si, pour un A-module Q et un entier r, on a $\mathrm{Tor}_r^A(M, Q) = 0$, alors $\mathrm{Tor}_i^A(M, Q) = 0$ pour $i \geqslant r$. On sait que sur un anneau régulier tout module de type fini est rigide [2] [19]. On en déduit la proposition suivante qui dit bien pourquoi le problème du relèvement se pose dans le cadre des questions étudiées ici.

Proposition (**2.2**). — *Soit* A *un anneau local quotient d'un anneau régulier* R. *Si un* A-*module* M, *de type fini et de dimension projective finie, se relève à* R, *alors* M *est rigide.*

Nous reviendrons au chapitre II sur la question de la rigidité et ses conséquences.

Notre intention est de montrer qu'on peut construire des A-modules de type fini et de dimension projective finie qui ne se relèvent pas à un anneau régulier.

Proposition (**2.3**). — *Soit* A *un anneau local quotient d'un anneau régulier local* R. *Soit* r *un entier* $\geqslant 2$, *et soit* M *un* A-*module de type fini et de dimension projective* r. *On suppose que* M *est* r-*sphérique, c'est-à-dire que* $\mathrm{Ext}_A^i(M, A) = 0$ *pour* $i \neq 0, r$. *Alors, si* M *se relève à* R, *le* A-*module* $\mathrm{Ext}_A^r(M, A)$ *est de dimension projective finie et se relève à* R.

En effet, soit N un R-module de type fini relevant M. Considérons la suite spectrale :

$$\mathrm{Ext}_A^p(\mathrm{Tor}_q^R(N, A), A) = E_2^{p,q},$$

dont l'aboutissement est $\mathrm{Ext}_R^n(N, A)$. Comme $\mathrm{Tor}_i^R(N, A) = 0$ pour $i \neq 0$, elle dégénère, et on obtient des isomorphismes :

$$\mathrm{Ext}_A^p(N \otimes_R A, A) \simeq \mathrm{Ext}_R^p(N, A).$$

Mais, comme $N \otimes_R A \simeq M$, et comme M est r-sphérique, on en déduit $\mathrm{Ext}^p_R(N, A) = 0$ pour $p \neq 0, r$.

Cela implique, en premier lieu, que N est de dimension projective r, donc que :

$$\mathrm{Ext}^r_A(M, A) \simeq \mathrm{Ext}^r_R(N, A) \simeq \mathrm{Ext}^r_R(N, R) \otimes_R A.$$

Pour démontrer que $\mathrm{Ext}^r_A(M, A)$ est un A-module de dimension projective finie qui se relève à R, il suffira donc de montrer que $\mathrm{Tor}^R_i(\mathrm{Ext}^r_R(N, R), A) = 0$ pour $i \geqslant 1$. Mais nous savons que sur un anneau régulier tout module de type fini est rigide, donc $\mathrm{Ext}^r_R(N, R)$ est un R-module rigide, et il suffit de démontrer que $\mathrm{Tor}^R_1(\mathrm{Ext}^r_R(N, R), A) = 0$. Soit $\mathfrak{J}$ l'idéal de R tel que $A = R/\mathfrak{J}$. Considérons le diagramme commutatif suivant où les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Ext}^{r-1}_R(N, A) \to & \mathrm{Ext}^r_R(N, \mathfrak{J}) & \to & \mathrm{Ext}^r_R(N, R) & \to & \mathrm{Ext}^r_R(N, A) & \to 0 \\
& \big\| \wr & & \big\| \wr & & \big\| \wr & \\
& \mathrm{Ext}^r_R(N, R) \otimes_R \mathfrak{J} & \to & \mathrm{Ext}^r_R(N, R) \otimes_R R & \to & \mathrm{Ext}^r_R(N, R) \otimes_R A & \to 0.
\end{array}$$

Comme on a vu que $\mathrm{Ext}^{r-1}_R(N, A) = 0$, on a une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Ext}^r_R(N, R) \otimes_R \mathfrak{J} \to \mathrm{Ext}^r_R(N, R) \otimes_R R \to \mathrm{Ext}^r_R(N, R) \otimes_R A \to 0,$$

qui prouve bien que $\mathrm{Tor}^R_1(\mathrm{Ext}^r_R(N, R), A) = 0$.

Pour construire un contre-exemple au relèvement, il suffira donc de construire un A-module r-sphérique Q tel que $\mathrm{Ext}^r_A(Q, A)$ ne soit pas de dimension projective finie. Pour cela nous utiliserons une technique de M. Auslander sur laquelle on trouvera plus de détails dans [22], chapitre II, § 3.

Proposition **(2.4)**. — *Soit* A *un anneau local, et soit* s *un entier inférieur ou égal à* prof A. *Soit* M *un* A-*module de type fini tel que* grade $M \geqslant s$. *Alors, il existe un* A-*module* N *de type fini et* s-*sphérique* (i.e. *tel que* $\mathrm{dp}\, N = s$ *et* $\mathrm{Ext}^i_A(N, A) = 0$ *pour* $i \neq 0, s$) *tel que* $\mathrm{Ext}^s_A(N, A) \simeq M$. *De plus, si* N′ *est un* A-*module de type fini de dimension projective* s, *et si* η *est un homomorphisme de* $\mathrm{Ext}^s_A(N', A)$ *dans* $\mathrm{Ext}^s_A(N, A)$, *il existe un homomorphisme* $\varphi : N \to N'$ *tel que* $\eta = \mathrm{Ext}^s_A(\varphi, A)$.

En effet, considérons une résolution projective de longueur s de M :

$$(*) \qquad L_s \to L_{s-1} \to \ldots \to L_1 \to L_0 \to M \to 0.$$

Dire que grade $M \geqslant s$, c'est dire que $\mathrm{Ext}^i_A(M, A) = 0$ pour $i < s$, donc c'est dire que la suite $0 \to L_0^\vee \to L_1^\vee \to \ldots \to L_{s-1}^\vee \to L_s^\vee$ est exacte (où $\cdot^\vee$ dénote le foncteur $\mathrm{Hom}_A(\cdot, A)$). Soit $N = \mathrm{coker}(L_{s-1}^\vee \to L_s^\vee)$. On a évidemment $\mathrm{dp}\, N \leqslant s$. En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_A(\cdot, A)$ à la résolution projective de N :

$$0 \to L_0^\vee \to L_1^\vee \to \ldots \to L_{s-1}^\vee \to L_s^\vee \to N \to 0,$$

on obtient $(*)$, et on voit que $\mathrm{Ext}^i_A(N, A) = 0$ pour $i \neq 0, s$ et que $\mathrm{Ext}^s_A(N, A) = M$. La première partie de la proposition est donc démontrée.

Considérons maintenant une résolution projective de N' :

$$0 \to P_s \to P_{s-1} \to \dots \to P_1 \to P_0 \to N' \to 0.$$

Appliquons au complexe $P_\bullet$ le foncteur $\mathrm{Hom}_A(\cdot, A)$. On obtient un complexe $P_\bullet^\vee$ tel que $\mathrm{coker}(P_{s-1}^\vee \to P_s^\vee) = \mathrm{Ext}_A^s(N', A)$. Le morphisme $\mathrm{Ext}_A^s(N', A) \to \mathrm{Ext}_A^s(N, A)$ induit naturellement un morphisme du complexe de modules projectifs $P_\bullet^\vee$ dans toute résolution projective de $\mathrm{Ext}_A^s(N, A)$, en particulier dans $L_\bullet$, envoyant $P_i^\vee$ dans L_{s-i}. En appliquant de nouveau le foncteur $\mathrm{Hom}_A(\cdot, A)$, on trouve un morphisme de complexes $L_\bullet^\vee \to P_\bullet$ (envoyant $L_i^\vee$ dans P_{s-i}), donc en passant à l'homologie, un morphisme $\varphi : N \to N'$ qui par construction a la propriété voulue.

Corollaire **(2.5)**. — *Soit* A *un anneau local de profondeur* $\geqslant 2$ *quotient d'un anneau local régulier* R. *Si tout* A-*module de type fini de dimension projective finie se relève à* R, *alors* A *est régulier.*

En effet, on considère le corps résiduel k de A qui est évidemment de grade $\geqslant 2$. D'après la proposition précédente, il existe un A-module M, 2-sphérique, tel que $\mathrm{Ext}_A^2(M, A) = k$. Mais alors d'après (2.3), comme M se relève et est 2-sphérique, k est de dimension projective finie sur A, donc A est régulier.

3. Structure des idéaux de dimension projective un (1)

Notre intention est de montrer que sur un anneau local, tout idéal de dimension projective un est, à une multiplication par un élément régulier près, un idéal déterminantiel. En corollaire, on verra que si l'anneau local est quotient d'un anneau régulier, un idéal de dimension projective un se relève en un idéal de l'anneau régulier.

On utilisera un lemme technique préliminaire.

Considérons un anneau nœthérien A. Comme précédemment, nous noterons $\cdot^\vee$ le foncteur $\mathrm{Hom}_A(\cdot, A)$.

Lemme **(3.1)**. — *Soit* $\varphi : A^n \to A^{n+1}$ *un homomorphisme de* A-*modules libres de type fini. Soit* $\varphi^\vee : (A^{n+1})^\vee \to (A^n)^\vee$ *son dual. Soit* $\wedge^n \varphi^\vee : \wedge^n (A^{n+1})^\vee \to \wedge^n (A^n)^\vee$ *la puissance extérieure n-ième de* $\varphi^\vee$. *Un choix de bases pour* A^{n+1} *et* A^n *donne un isomorphisme* $\wedge^n(A^{n+1})^\vee \simeq A^{n+1}$. *On en déduit un complexe :*

$$0 \to A^n \xrightarrow{\varphi} A^{n+1} \xrightarrow{\wedge^n \varphi^\vee} A,$$

qui est exact si et seulement si l'image de $\wedge^n \varphi^\vee$ *dans* A *définit un fermé, de* spec A, *de* grade $\geqslant 2$ (i.e. *ne contenant aucun idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* A *tel que* $\mathrm{prof}\, A_{\mathfrak{p}} \leqslant 1$).

Montrons d'abord l'existence du complexe. Pour ceci, considérons φ comme

---

(1) Le théorème (3.3) de ce paragraphe nous a été communiqué dans le cas d'un anneau factoriel par D. A. Buschbaum (cf. [24]).

une matrice φ_{ij} à $(n+1)$ lignes et n colonnes. Alors $\wedge^n\varphi^\vee$ est une matrice à 1 ligne et $(n+1)$ colonnes dont les coefficients α_s sont les déterminants des matrices carrées $(\varphi_{ij})_{i\neq s}$ affectés du signe $(-1)^s$. Considérons alors le produit de matrices $\wedge^n\varphi^\vee\circ\varphi$. Multiplier une colonne de φ par la ligne $\wedge^n\varphi^\vee$, c'est développer un déterminant d'ordre $(n+1)$ ayant deux colonnes égales, ce qui prouve bien que $\wedge^n\varphi^\vee\circ\varphi=0$. Pour démontrer l'équivalence annoncée, nous aurons besoin du résultat préliminaire suivant :

Proposition **(3.2)**. — *Les conoyaux de $\varphi^\vee$ et de $\wedge^n\varphi^\vee$ ont même support.*

En effet, dire qu'un idéal premier n'est pas dans le support du conoyau de $\varphi^\vee$, c'est dire que $\varphi^\vee\otimes A_\mathfrak{p} : (A_\mathfrak{p}^{n+1})^\vee\to(A_\mathfrak{p}^n)^\vee$ est surjectif. C'est donc dire qu'il existe un mineur d'ordre n de la matrice $\varphi^\vee$ qui n'est pas contenu dans $\mathfrak{p}$. Mais comme l'image de $\wedge^n\varphi^\vee$ dans A est l'idéal engendré par les mineurs d'ordre n de $\varphi^\vee$, c'est bien dire que $\wedge^n\varphi^\vee\otimes A_\mathfrak{p}$ est surjectif, donc que $\mathfrak{p}$ n'est pas dans le support du conoyau de $\wedge^n\varphi^\vee$.

Revenons au lemme, et supposons que le complexe $0\to A^n\xrightarrow{\varphi}A^{n+1}\xrightarrow{\wedge^n\varphi^\vee}A$ soit exact. Soit $A/\mathfrak{A}$ le conoyau de $\wedge^n\varphi^\vee$. Alors le conoyau de $\varphi^\vee$ est $\mathrm{Ext}^2_A(A/\mathfrak{A}, A)$. Comme $A/\mathfrak{A}$ est par hypothèse de dimension projective finie, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A tel que $\operatorname{prof} A_\mathfrak{p}\leqslant 1$, $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{A}A_\mathfrak{p}$ est, soit nul, soit de dimension projective $\leqslant 1$. Donc $\mathrm{Ext}^2_{A_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}/\mathfrak{A}A_\mathfrak{p}, A_\mathfrak{p})=0$. Autrement dit $\mathrm{Ext}^2_A(A/\mathfrak{A}, A)$ est de grade$\geqslant 2$, et d'après la proposition (3.2) $A/\mathfrak{A}$ aussi.

Réciproquement, soit toujours $A/\mathfrak{A}$ le conoyau de $\wedge^n\varphi^\vee$. Supposons grade $A/\mathfrak{A}\geqslant 2$. Alors, les groupes de cohomologie locale $H^0_\mathfrak{A}(A)$ et $H^1_\mathfrak{A}(A)$ sont nuls. Posons $X=\operatorname{Spec} A$ et $U=X-V(\mathfrak{A})$. D'après la proposition (3.2), $\varphi^\vee|U$ est surjective. Soit $\mathscr{L}$ son noyau. On a donc une suite exacte de faisceaux sur U :

$$(*)\qquad 0\to\mathscr{L}\to(\mathcal{O}_U^{n+1})^\vee\xrightarrow{\varphi^\vee|U}(\mathcal{O}_U^n)^\vee\to 0.$$

Cette suite exacte montre que $\mathscr{L}$ est un faisceau inversible sur U, et qu'on a

$$\mathscr{L}\simeq(\wedge^n\mathcal{O}_U^n)\otimes(\wedge^{n+1}(\mathcal{O}_U^{n+1})^\vee),$$

donc $\mathscr{L}\simeq\mathcal{O}_U$. Le foncteur $\Gamma(U,\cdot)$ appliqué à $(*)$ donne une suite exacte :

$$(**)\qquad 0\to A\to(A^{n+1})^\vee\xrightarrow{\varphi^\vee}(A^n)^\vee.$$

Revenons maintenant au complexe :

$$A^n\xrightarrow{\varphi}A^{n+1}\xrightarrow{\wedge^n\varphi^\vee}A,$$

qui donne, en dualisant, un complexe :

$$A\xrightarrow{\wedge^n\varphi}(A^{n+1})^\vee\xrightarrow{\varphi^\vee}(A^n)^\vee.$$

En comparant ce dernier complexe à la suite exacte (**), on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} & & A & \xrightarrow{\wedge^n\varphi} & (A^{n+1})^\vee & \xrightarrow{\varphi^\vee} & (A^n)^\vee \\ & & \downarrow & & \| & & \| \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & (A^{n+1})^\vee & \xrightarrow{\varphi^\vee} & (A^n)^\vee \end{array}$$

dans lequel la deuxième ligne est exacte.

En dualisant à nouveau, on trouve un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} & & A^n & \xrightarrow{\varphi} & A^{n+1} & \xrightarrow{\wedge^n\varphi^\vee} & A \\ & & \| & & \| & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & A^n & \xrightarrow{\varphi} & A^{n+1} & \longrightarrow & A \end{array}$$

Comme le conoyau $\mathrm{Ext}^2_A(A/\mathfrak{A}, A)$ de $\varphi^\vee$ est de grade $\geqslant 2$, la deuxième ligne de ce dernier diagramme est exacte, ce qui prouve déjà que φ est injective. Tout A-homomorphisme de A étant une multiplication, soit f l'élément de A correspondant à la dernière flèche verticale du diagramme. Le diagramme montre qu'on a $\mathfrak{A} \subset fA$. Si f n'est pas inversible, f est contenu dans un idéal premier de hauteur 1, ce qui est contraire à l'hypothèse $\mathrm{grade}\, A/\mathfrak{A} \geqslant 2$. Donc f est inversible, et l'exactitude de la deuxième ligne du diagramme implique l'exactitude de la première, ce que nous voulions montrer.

Théorème **(3.3).** — *Soit* A *un anneau local noethérien. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un idéal* $\mathfrak{J}$ *de* A *soit de dimension projective* 1, *est qu'il existe un entier n, une matrice correspondant à un homomorphisme* $\varphi : A^n \to A^{n+1}$ *et un élément f de* A *non diviseur de* 0 *dans* A, *tels que, si* $\mathfrak{J}'$ *est l'idéal de* A *engendré par les mineurs d'ordre n de la matrice, on ait* $\mathrm{grade}\, A/\mathfrak{J}' \geqslant 2$, *et* $\mathfrak{J} = f\mathfrak{J}'$.

Ce théorème est une conséquence directe du lemme (3.1). Remarquons d'abord que si à un homomorphisme $\varphi : A^n \to A^{n+1}$ correspond une matrice dont les mineurs d'ordre n engendrent un idéal $\mathfrak{J}'$ tel que $\mathrm{grade}\, A/\mathfrak{J}' \geqslant 2$, alors d'après le lemme (3.1), il y a une suite exacte :

$$0 \to A^n \xrightarrow{\varphi} A^{n+1} \xrightarrow{\wedge^n\varphi^\vee} A \to A/\mathfrak{J}' \to 0.$$

Donc $\mathfrak{J}'$ est un idéal de dimension projective 1 et bien entendu $f\mathfrak{J}'$ aussi, pour tout élément f de A, non diviseur de 0.

Réciproquement, soit :

$$(*) \qquad 0 \to A^n \xrightarrow{\varphi} A^{n+1} \xrightarrow{\psi} A \to A/\mathfrak{J} \to 0,$$

une résolution projective de $A/\mathfrak{J}$. On peut voir comme dans la démonstration du lemme (3.1) que $\mathrm{grade}(\mathrm{Ext}^2_A(A/\mathfrak{J}, A)) \geqslant 2$. On en déduit que $\varphi^\vee$ a un conoyau de grade$\geqslant 2$, et par la proposition (3.2) que $\wedge^n\varphi^\vee$ a un conoyau de grade$\geqslant 2$. Le lemme (3.1) dit alors qu'on a une suite exacte :

$$(**) \qquad 0 \to A^n \xrightarrow{\varphi} A^{n+1} \xrightarrow{\wedge^n\varphi^\vee} A \to A/\mathfrak{J}' \to 0,$$

en posant $A/\mathfrak{J}' = \operatorname{coker} \wedge^n\varphi^\vee$.

En dualisant $(*)$ et $(**)$, on peut construire un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\psi^\vee} & A^{n+1} & \xrightarrow{\varphi^\vee} & A^n & \longrightarrow & \operatorname{Ext}^2_A(A/\mathfrak{J}, A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \| & & \| & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\wedge^n\varphi} & A^{n+1} & \xrightarrow{\varphi^\vee} & A^n & \longrightarrow & \operatorname{Ext}^2_A(A/\mathfrak{J}', A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où la deuxième ligne est exacte, car grade $A/\mathfrak{J}' \geqslant 2$. Tout A-homomorphisme de A étant une multiplication par un élément, ce diagramme montre que l'isomorphisme entre $\mathfrak{J}'$ et $\mathfrak{J}$ qu'on obtient en comparant $(*)$ et $(**)$, provient d'une multiplication dans A, autrement dit qu'on a $\mathfrak{J} = f\mathfrak{J}'$, pour un élément f de A. Il reste à démontrer que f n'est pas diviseur de 0 dans A. Mais puisque la multiplication par f définit un isomorphisme entre $\mathfrak{J}'$ et $\mathfrak{J}$, la restriction de la multiplication par f à $\mathfrak{J}'$ est injective. Comme grade $A/\mathfrak{J}' \geqslant 2$, $\mathfrak{J}'$ contient au moins un élément régulier dans A, donc $\mathfrak{J}'$ contient un sous-module isomorphe à A, sur lequel la multiplication par f sera *a fortiori* injective. Finalement, f est bien régulier dans A et le théorème est démontré.

Remarque. — Le fait que A est local n'a été utilisé dans cette démonstration que pour dire qu'un idéal de dimension projective 1 admet une résolution libre de longueur 1, ce qui, bien sûr, peut être vrai dans des cas plus généraux.

Corollaire **(3.4)**. — *Soit* A *un anneau local noethérien quotient d'un anneau local régulier* R. *Soit* $\mathfrak{J}$ *un idéal de dimension projective* 1 *de* A. *Alors il existe un idéal* $\mathfrak{J}$ *de* R *de dimension projective* 1 *relevant* $\mathfrak{J}$ (i.e. *tel que* $\mathfrak{J}\otimes_R A = \mathfrak{J}$ *et* $\operatorname{Tor}_1^R(\mathfrak{J}, A) = 0$).

En effet, d'après le théorème (3.2), il suffit de démontrer le cas où $A/\mathfrak{J}$ admet une résolution libre sur A, de la forme :

$$(*) \qquad 0 \to A^n \xrightarrow{\varphi} A^{n+1} \xrightarrow{\wedge^n\varphi^\vee} A \to A/\mathfrak{J} \to 0.$$

Soit Φ une matrice à coefficients dans R, relevant la matrice φ.

D'après le lemme (3.1), on a un complexe de R-modules :

$$(**) \qquad 0 \to R^n \xrightarrow{\Phi} R^{n+1} \xrightarrow{\wedge^n\Phi^\vee} R \to R/\mathfrak{J} \to 0,$$

où $R/\mathfrak{J}$ est le conoyau de $\wedge^n\Phi^\vee$. Toujours d'après (3.1), pour prouver que $(**)$ est exact, il suffit de prouver que $R/\mathfrak{J}$ est de grade$\geqslant 2$ dans R. Dans un anneau régulier, le grade est égal à la codimension. On sait [23] qu'on a :

$$\operatorname{codim}_R(R/\mathfrak{J}) + \operatorname{codim}_R(A) \geqslant \operatorname{codim}_R(A/\mathfrak{J}).$$

Mais, $\mathrm{grade}_A(A/\mathfrak{J}) \geqslant 2$ implique :

$$\mathrm{codim}_R(A/\mathfrak{J}) \geqslant \mathrm{codim}_R(A) + 2.$$

Donc, on a $\mathrm{codim}_R(R/\mathfrak{I}) \geqslant 2$, ce que nous voulions montrer. Finalement, $(**)$ est bien exact, et dire qu'il reste exact après tensorisation par A, c'est dire que $R/\mathfrak{I}$ relève $A/\mathfrak{J}$, donc que l'idéal $\mathfrak{I}$ relève $\mathfrak{J}$.

4. Modules de type fini et de dimension injective finie

Dans cette section, nous nous proposons de mettre en évidence trois propriétés importantes des modules de type fini de dimension *injective* finie sur un anneau local nœthérien.

Pour ceci, nous rappellerons d'abord les résultats démontrés par H. Bass dans [6]. Nous donnerons ensuite quelques exemples pour éclairer le problème. Enfin, si T est un module non nul de type fini et de dimension injective finie sur un anneau local nœthérien A, nous montrerons que T possède les trois propriétés suivantes, dont les deux premières apparaîtront de façon primordiale dans le chapitre II, pour démontrer une conjecture de H. Bass.

a) $\mathrm{grade}\, T + \dim T = \mathrm{prof}\, A$. Cette situation est minimale, car pour tout A-module de type fini M, on a $\mathrm{prof}\, A \leqslant \mathrm{grade}\, T + \dim T \leqslant \dim A$.

b) Si $\hat{A}$ est le complété de A, il existe un $\hat{A}$-module de type fini et de dimension projective finie ayant même support que $\hat{T}$.

c) On a le théorème suivant, du type Hilbert-Serre : pour tout A-module de type fini M, on a la relation :

$$\mathrm{prof}\, M + \sup\{i, \text{ tel que } \mathrm{Ext}^i_A(M, T) \neq 0\} = \mathrm{prof}\, A.$$

Rappelons la conjecture centrale de H. Bass, que nous démontrerons dans le chapitre II, pour les anneaux locaux de la géométrie algébrique :

S'il existe un A-*module non nul de type fini et de dimension injective finie, alors* A *est un anneau de Cohen-Macaulay.*

a) et *b)* montrent que la conjecture suivante de M. Auslander implique la conjecture de Bass :

Pour tout A-*module* M *de type fini et de dimension projective finie, on a*

$$\mathrm{grade}\, M + \dim M = \dim A.$$

Remarquons, enfin, à propos du résultat *c)*, qu'il conduit naturellement à chercher un A-module de profondeur aussi grande que possible, et en particulier que si on peut trouver un A-module de type fini de profondeur égale à la dimension de l'anneau (ce qu'on peut faire pour les anneaux de dimension $\leqslant 2$), alors l'existence de T entraîne que A est de Cohen-Macaulay.

Proposition (Bass) **(4.1)**. — *Soit* A *un anneau noethérien local. Pour tout* A*-module* T *non nul de type fini et de dimension injective finie, on a* $\dim.\mathrm{inj}\,T = \mathrm{prof}\,A$.

Ce résultat se déduit directement des deux lemmes suivants que nous ne prouverons pas.

Lemme **(4.2)**. — *Si* $i = \dim.\mathrm{inj}\,T$, *on a* $\mathrm{Ext}^i_A(k, T) \neq 0$, *où* k *est le corps résiduel de* A.

Lemme **(4.3)**. — *Si* $r = \mathrm{prof}\,A$, *et si* M *est un* A*-module de type fini et de dimension projective* r, *on a* $\mathrm{Ext}^r_A(M, N) \neq 0$ *pour tout* A*-module de type fini* N.

Proposition (Bass) **(4.4)**. — *Soit* T *un module de type fini sur un anneau local noethérien* A. *Soit* $(E^\bullet)$ *une résolution injective minimale de* T. *Alors, pour tout* i, *on a*

$$E^i \simeq \prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,A} \mu_i(\mathfrak{p}, T) E(A/\mathfrak{p}),$$

où $E(A/\mathfrak{p})$ *est une enveloppe injective de* $A/\mathfrak{p}$, *et où* $\mu_i(\mathfrak{p}, T) = \dim_{k(\mathfrak{p})} \mathrm{Ext}^i_{A_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}), T_\mathfrak{p})$.

Proposition (Bass) **(4.5)**. — *Soit* M *un module de type fini sur un anneau local noethérien* A, *et soient* $\mathfrak{p}$ *et* $\mathfrak{q}$ *deux idéaux premiers successifs de* A (i.e. *tels que* $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ *et* $\dim A_\mathfrak{q}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{q} = 1$). *Alors, si* $\mu_i(\mathfrak{p}, M) \neq 0$, *on a* $\mu_{i+1}(\mathfrak{q}, M) \neq 0$.

Exemples de modules de type fini de dimension injective finie **(4.6)**.

A) Pour qu'un anneau local R soit régulier, il faut et il suffit que tout R-module de type fini soit de dimension injective finie. En fait, il suffit que son corps résiduel soit de dimension injective finie.

B) Soit A un anneau local de Gorenstein (*i.e.*, tel que si $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de A, on ait $H^i_\mathfrak{m}(A) = 0$ pour $i \neq n = \dim A$ et que $H^n_\mathfrak{m}(A)$ soit injectif). Alors tout A-module de dimension projective finie est de dimension injective finie et réciproquement.

C) Soit A un anneau local de Cohen-Macaulay, quotient d'un anneau local régulier R. Alors, si s est la codimension de A dans R, le A-module $\mathrm{Ext}^s_R(A, R)$ est de type fini et de dimension injective finie. Soit E un module dualisant pour A (*i.e.* une enveloppe injective du corps résiduel k de A), et soient n la dimension de A et $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A; alors on sait que $\mathrm{Hom}_A(H^n_\mathfrak{m}(A), E)$ est isomorphe au complété de $\mathrm{Ext}^s_R(A, R)$, et que ce A-module que nous noterons $\Omega^0(A)$ est indépendant du plongement régulier.

Proposition **(4.7)**. — *Soit* A *un anneau local noethérien, et soit* T *un* A*-module de type fini et de dimension injective finie. Alors, pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *du support de* T, *on a* :

$$\dim A/\mathfrak{p} + \mathrm{prof}\,A_\mathfrak{p} = \mathrm{prof}\,A.$$

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A tel que $T_\mathfrak{p} \neq 0$. D'après (4.1), on a

$$\dim.\mathrm{inj}_{A_\mathfrak{p}} T_\mathfrak{p} = \mathrm{prof}\,A_\mathfrak{p}.$$

Soit $s = \operatorname{prof} A_{\mathfrak{p}}$. On a alors $\operatorname{Ext}^s_{A_{\mathfrak{p}}}(k(\mathfrak{p}), T_{\mathfrak{p}}) \neq 0$, autrement dit $\mu_s(\mathfrak{p}, T) \neq 0$. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A, et soit $d = \dim A/\mathfrak{p}$. Par (4.5), on a $\mu_{s+d}(\mathfrak{m}, T) \neq 0$. On en déduit évidemment $\dim A/\mathfrak{p} + \operatorname{prof} A_{\mathfrak{p}} \leqslant \operatorname{prof} A$. Mais compte tenu du fait que

$$\operatorname{prof} A_{\mathfrak{p}} \geqslant \operatorname{grade}_A A/\mathfrak{p},$$

la proposition sera une conséquence immédiate du lemme général suivant.

Lemme **(4.8)**. — *Pour tout module de type fini* M *sur un anneau local noethérien* A, *on a la double inégalité* :

$$\operatorname{prof} A \leqslant \operatorname{grade} M + \dim M \leqslant \dim A.$$

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier du support de M tel que $\dim A/\mathfrak{p} = \dim M$. On a évidemment $\dim A_{\mathfrak{p}} + \dim A/\mathfrak{p} \leqslant \dim A$. Mais comme $\operatorname{grade} M \leqslant \operatorname{prof} A_{\mathfrak{p}} \leqslant \dim A_{\mathfrak{p}}$, on en déduit immédiatement l'inégalité de droite.

Prouvons l'inégalité de gauche par récurrence sur grade M.

Dire que $\operatorname{grade} M = 0$, c'est dire que $\inf_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M} (\operatorname{prof} A_{\mathfrak{p}}) = 0$, donc c'est dire qu'il existe un idéal $\mathfrak{p}$ dans le support de M, associé à 0 dans A. On a alors

$$\dim M \geqslant \dim A/\mathfrak{p},$$

et comme pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ associé à 0 dans A, on a $\dim A/\mathfrak{q} \geqslant \operatorname{prof} A$, on peut conclure.

Supposons maintenant que l'inégalité de gauche soit prouvée pour $\operatorname{grade} M < n$, avec $n > 0$. Soit N un A-module de grade n. Il existe un élément A-régulier α dans l'annulateur de N. Donc N est un $A/\alpha A$-module de grade $n-1$. On en déduit

$$\operatorname{grade}_{A/\alpha} N + \dim N \geqslant \operatorname{prof} A/\alpha A,$$

et évidemment $\operatorname{grade}_A N + \dim N \geqslant \operatorname{prof} A$.

Corollaire **(4.9)**. — *Si* T *est un module de type fini non nul et de dimension injective finie sur un anneau local noethérien* A, *on a* :

$$\operatorname{grade} T + \dim T = \operatorname{prof} A.$$

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier du support de T tel que $\dim A/\mathfrak{p} = \dim T$. D'après (4.7), on a $\dim T + \operatorname{prof} A_{\mathfrak{p}} = \operatorname{prof} A$. Mais comme $\operatorname{grade} T \leqslant \operatorname{prof} A_{\mathfrak{p}}$, d'après (4.8), on a $\operatorname{prof} A_{\mathfrak{p}} = \operatorname{grade} T$ et $\dim T + \operatorname{grade} T = \operatorname{prof} A$.

Théorème **(4.10)**. — *Soit* T *un module non nul de type fini et de dimension injective finie sur un anneau local noethérien* A. *Soit* E *une enveloppe injective du corps résiduel k de* A. *Soit* $\hat{A}$ *le complété de* A, *et soit* $r = \operatorname{prof} A = \operatorname{prof} \hat{A}$. *Alors* $M = \operatorname{Ext}^r_A(E, T)$ *est un* $\hat{A}$*-module ayant les propriétés suivantes* :

(i) M *est de type fini et de dimension projective finie sur* $\hat{A}$ *et sa dimension projective est* $r - \operatorname{prof} T$.

(ii) M *a même support que le complété* $\hat{T}$ *de* T.

(iii) *Soit* $\mathfrak{m}$ *l'idéal maximal de* A, *et soit* R *un anneau local de Gorenstein de dimension* n *dont* $\hat{A}$ *est quotient; alors, pour tout* i, *on a des isomorphismes*

$$\mathrm{Ext}^i_{\hat{A}}(M, \hat{A}) \simeq \mathrm{Hom}_A(H^{r-i}_{\mathfrak{m}}(T), E) \simeq \mathrm{Ext}^{n-(r-i)}_R(\hat{T}, R).$$

Prouvons d'abord (i). Pour ceci, considérons une résolution injective minimale de T :

$$(*) \qquad 0 \to T \to I^0 \to I^1 \to \dots \to I^r \to 0.$$

Nous voulons appliquer le foncteur $\mathrm{Hom}_A(E, \cdot)$ à cette suite exacte. On sait que pour tout $i \geq 0$, le module I^i peut s'écrire comme un produit direct $\prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A} \mu_i(\mathfrak{p}, T) E(A/\mathfrak{p})$, où $E(A/\mathfrak{p})$ est une enveloppe injective de $A/\mathfrak{p}$. Prouvons que pour $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$, on a

$$\mathrm{Hom}_A(E, E(A/\mathfrak{p})) = 0.$$

Soit $f : E \to E(A/\mathfrak{p})$. Si $x \in E$, le module Ax est de longueur finie, donc $Af(x)$ est un sous-module de longueur finie de $E(A/\mathfrak{p})$, donc $f(x) = 0$, car $E(A/\mathfrak{p})$, étant une extension essentielle de $A/\mathfrak{p}$, ne contient pas de sous-module de longueur finie non trivial. Autrement dit, pour tout i :

$$\mathrm{Hom}_A(E, I^i) = \mathrm{Hom}_A(E, E^{\mu_i(\mathfrak{m}, T)}) = \mathrm{Hom}_A(E, H^0_{\mathfrak{m}}(I^i)).$$

Donc, comme $\mathrm{Hom}_A(E, E) = \hat{A}$, en appliquant $\mathrm{Hom}_A(E, \cdot)$ à $(*)$, on obtient un complexe :

$$(**) \qquad 0 \to \hat{A}^{\mu_0(\mathfrak{m}, T)} \to \hat{A}^{\mu_1(\mathfrak{m}, T)} \to \dots \to \hat{A}^{\mu_n(\mathfrak{m}, T)} \to 0,$$

dont la cohomologie $H^i(\hat{A}^{\mu_\cdot})$ est $\mathrm{Ext}^i_A(E, T)$. Finalement, il nous suffira de prouver $\mathrm{Ext}^i_A(E, T) = 0$ pour $i < r$, pour prouver que $\mathrm{Ext}^r_A(E, T)$ est un $\hat{A}$-module de type fini et de dimension projective finie.

Remarquons que comme E est aussi une enveloppe injective du corps résiduel k de $\hat{A}$, on aurait aussi obtenu le complexe $(**)$ en remplaçant T par $\hat{T}$ et $(*)$ par une résolution injective finie minimale du $\hat{A}$-module de type fini et de dimension injective finie $\hat{T}$. Il suffira donc de démontrer que $\mathrm{Ext}^i_{\hat{A}}(E, \hat{T}) = 0$ pour $i < r$. Mais alors, par la dualité classique [9], on sait que $\mathrm{Hom}_{\hat{A}}(\mathrm{Hom}_{\hat{A}}(\hat{T}, E), E) = \hat{T}$. Considérons $T' = \mathrm{Hom}_{\hat{A}}(\hat{T}, E)$. Alors, par un isomorphisme de dualité [8] :

$$\mathrm{Ext}^i_{\hat{A}}(E, \hat{T}) \simeq \mathrm{Ext}^i_{\hat{A}}(E, \mathrm{Hom}(T', E)) \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{Tor}^{\hat{A}}_i(E, T'), E).$$

Par construction, on sait que T' est limite inductive des $\hat{A}$-modules de longueur finie $T'_n = \mathrm{Hom}_{\hat{A}}(\hat{T}/\mathfrak{m}^n\hat{T}, E)$. En utilisant l'exactitude du foncteur limite inductive et les propriétés du foncteur dualisant $\mathrm{Hom}_{\hat{A}}(\cdot, E)$, on en déduit des isomorphismes :

$$\mathrm{Hom}_{\hat{A}}(\mathrm{Tor}^{\hat{A}}_i(E, \varinjlim_n T'_n), E) \simeq \mathrm{Hom}_{\hat{A}}(\varinjlim_n \mathrm{Tor}^{\hat{A}}_i(E, T'_n), E)$$

$$\simeq \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{\hat{A}}(\mathrm{Tor}^{\hat{A}}_i(E, T'_n), E) \simeq \varprojlim_n \mathrm{Ext}^i_{\hat{A}}(T'_n, \mathrm{Hom}(E, E)) \simeq \varprojlim_n \mathrm{Ext}^i_{\hat{A}}(T'_n, \hat{A}).$$

Mais comme $\operatorname{prof}\hat{A}=r$, et comme pour tout n, T'_n est un $\hat{A}$-module de longueur finie, $\operatorname{Ext}^i_{\hat{A}}(T'_n, \hat{A})=0$ pour $i<r$, donc $\operatorname{Ext}^i_{\hat{A}}(E, \hat{T})=0$ pour $i<r$.

Remarquons maintenant que pour finir de prouver (i) et pour prouver (ii), il suffira de prouver (iii), car d'après (iii) :

$$\operatorname{Ext}^i_{\hat{A}}(M, \hat{A})=0 \text{ pour } i>r-\operatorname{prof} T \quad \text{et} \quad \operatorname{Ext}^i_{\hat{A}}(M, \hat{A})\neq 0 \text{ pour } i=r-\operatorname{prof} T,$$

donc $\operatorname{dp}_{\hat{A}} M=r-\operatorname{prof} T$.

D'autre part, toujours par (iii) :

$$\operatorname{Supp} M=\bigcup_{i\geqslant 0}\operatorname{Supp}(\operatorname{Ext}^i_{\hat{A}}(M, \hat{A}))=\bigcup_{i\geqslant 0}\operatorname{Supp}(\operatorname{Ext}^{n-(r-i)}_{R}(\hat{T}, R))=\operatorname{Supp}\hat{T}.$$

Pour démontrer (iii), considérons le foncteur $\operatorname{Hom}_A(\operatorname{Hom}(\cdot, E), \hat{A})$.

Lemme **(4.11)**. — *Il existe un morphisme canonique de foncteurs*

$$\operatorname{Hom}_A(E, \cdot) \to \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Hom}_A(\cdot, E), \hat{A})$$

qui induit un isomorphisme sur ces foncteurs restreints à la catégorie des A-*modules artiniens* (i.e. *tel que pour tout module artinien* C, *l'homomorphisme* : $\operatorname{Hom}_A(E, C) \to \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Hom}_A(C, E), \hat{A})$ *soit un isomorphisme*).

En effet, rappelons qu'on a $\hat{A}\simeq\operatorname{Hom}_A(E, E)$. D'après un isomorphisme classique de dualité, on en déduit :

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_A(\operatorname{Hom}(\cdot, E), \hat{A}) &\simeq \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Hom}_A(\cdot, E), \operatorname{Hom}_A(E, E))\\ &\simeq \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Hom}_A(\cdot, E)\otimes_A E, E)\\ &\simeq \operatorname{Hom}_A(E\otimes_A \operatorname{Hom}(\cdot, E), E)\\ &\simeq \operatorname{Hom}_A(E, \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Hom}_A(\cdot, E), E)).\end{aligned}$$

Le morphisme canonique de foncteurs $\mathrm{id}\to\operatorname{Hom}_A(\operatorname{Hom}_A(\cdot, E), E)$ induit donc bien un morphisme $\operatorname{Hom}_A(E, \cdot)\to\operatorname{Hom}_A(\operatorname{Hom}(\cdot, E), \hat{A})$. Mais ces deux foncteurs sont covariants, exacts à gauche, et prennent la même valeur sur E. Les modules artiniens étant les modules qui admettent une résolution injective du type $E^{\mu_\bullet}$, où les μ_i sont des entiers, on en déduit bien l'isomorphisme annoncé.

Revenons à la démonstration du théorème, et rappelons que c'est en appliquant le foncteur $\operatorname{Hom}_A(E, H^0_{\mathfrak{m}}(\cdot))$ à une résolution injective $I^\bullet$ de T, qu'on a obtenu la résolution projective :

$$(**) \qquad 0\to\hat{A}^{\mu_0}\to\ldots\to\hat{A}^{\mu_1}\to\ldots\to\hat{A}^{\mu_r},$$

du $\hat{A}$-module $M=\operatorname{Ext}^r_A(E, T)$. D'après le lemme, cette résolution s'obtient aussi en appliquant le foncteur $\operatorname{Hom}_A(\operatorname{Hom}_A(H^0_{\mathfrak{m}}(\cdot), E), \hat{A})$ à la résolution injective $I^\bullet$ de T. En appliquant le foncteur $\operatorname{Hom}_{\hat{A}}(\cdot, \hat{A})$ à $(**)$, on obtient le complexe de $\hat{A}$-modules libres :

$$(***) \qquad \hat{A}^{\mu_r}\to\hat{A}^{\mu_{r-1}}\to\ldots\to\hat{A}^{\mu_1}\to\hat{A}^{\mu_0}.$$

Ce dernier complexe peut donc aussi s'obtenir en appliquant le foncteur

$$\mathrm{Hom}_{\hat{\mathrm{A}}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(\cdot), \mathrm{E}), \hat{\mathrm{A}}), \hat{\mathrm{A}})$$

à la résolution injective $\mathrm{I}^\bullet$ de T. Mais comme $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(\mathrm{I}^\bullet), \mathrm{E})$, est un complexe de $\hat{\mathrm{A}}$-modules libres de type fini, et comme $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{A}}) = \mathrm{Hom}_{\hat{\mathrm{A}}}(\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{A}})$, le morphisme de complexes de A-modules libres de type fini :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(\mathrm{I}^\bullet), \mathrm{E}) \to \mathrm{Hom}_{\hat{\mathrm{A}}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(\mathrm{I}^\bullet), \mathrm{E}), \hat{\mathrm{A}}), \hat{\mathrm{A}})$$

est un isomorphisme, c'est-à-dire que le complexe $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(\mathrm{I}^\bullet), \mathrm{E})$ est isomorphe au complexe $(***)$. On sait que la cohomologie du complexe $\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(\mathrm{I}^\bullet)$ est $\mathrm{H}^i(\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(\mathrm{I}^\bullet)) = \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(\mathrm{T})$. Le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\cdot, \mathrm{E})$ étant bien sûr exact, on en déduit que l'homologie du complexe $(***)$ est :

$$\mathrm{Ext}^{r-i}_{\hat{\mathrm{A}}}(\mathrm{M}, \hat{\mathrm{A}}) = \mathrm{H}_i(\hat{\mathrm{A}}^{\mu_\bullet}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(\mathrm{T}), \mathrm{E})$$

et le premier isomorphisme annoncé est démontré.

Le deuxième, l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(\mathrm{T}), \mathrm{E}) \simeq \mathrm{Ext}^{n-i}_{\mathrm{R}}(\mathrm{T}, \mathrm{R})$ n'est rien d'autre que le théorème de dualité locale [10].

Remarque **(4.12)**. — L'isomorphisme de complexes de A-modules libres de type fini :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, \mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(\mathrm{I}^\bullet)) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(\mathrm{I}^\bullet), \mathrm{E}), \hat{\mathrm{A}})$$

donne un isomorphisme de complexes :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, \mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(\mathrm{I}^\bullet)), \hat{\mathrm{A}}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(\mathrm{I}^\bullet), \mathrm{E}).$$

Au cours de la démonstration du théorème, nous avons donc vu qu'en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, \mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(\cdot)), \hat{\mathrm{A}})$ à une résolution injective de T, on obtenait un complexe de $\hat{\mathrm{A}}$-modules libres de type fini, ayant pour homologie les $\hat{\mathrm{A}}$-modules $\mathrm{Ext}^{n-i}_{\mathrm{R}}(\hat{\mathrm{T}}, \mathrm{R})$.

On sait que si l'anneau local A admet un complexe dualisant $\mathrm{C}^\bullet$ (en particulier, si A est quotient d'un anneau régulier), l'homologie $\Omega^\bullet$ du complexe $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{T}, \mathrm{C}^\bullet)$ est telle que $\hat{\Omega}^\bullet \simeq \mathrm{Ext}^\bullet_{\mathrm{R}}(\hat{\mathrm{T}}, \mathrm{R})$. C'est ce fait que nous utiliserons dans le paragraphe suivant pour démontrer que dans le cas où A admet un complexe dualisant, on peut descendre le $\hat{\mathrm{A}}$-module $\mathrm{M} = \mathrm{Ext}^r_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, \mathrm{T})$ en un A-module (§ 5, th. (5.7)).

Donnons enfin le corollaire suivant, qui démontre dans un cas particulier la conjecture de Bass dont nous avons parlé plus haut.

Corollaire **(4.13)**. — *Soit* A *un anneau noethérien local. Soit* T *un* A-*module non nul, de type fini, de dimension injective finie et de grade* 0 (i.e. *tel que* $\mathrm{Ass}\,\mathrm{A} \cap \mathrm{Supp}\,\mathrm{T} \neq \emptyset$). *Alors, l'annulateur de* T *est* (0), *et* A *est un anneau de Cohen-Macaulay.*

En effet, soit $\alpha \in \mathrm{A}$ tel que $\alpha\mathrm{T} = 0$. Alors, si $r = \mathrm{prof}\,\mathrm{A}$, $\alpha\,\mathrm{Ext}^r_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}) = 0$. Mais d'après le théorème, $\mathrm{M} = \mathrm{Ext}^r_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, \mathrm{T})$ est un $\hat{\mathrm{A}}$-module de type fini et de dimension projective finie. La première partie du corollaire sera alors une conséquence de la proposition (4.14) ci-dessous. La deuxième partie est une conséquence de (4.7); en effet, $\operatorname{ann}(T)=(0)$ implique $\operatorname{Supp} T=\operatorname{Spec} A$. Mais alors soit $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec} A$ tel que $\dim A/\mathfrak{p}=\dim A$. D'après (4.7), comme $\mathfrak{p}\in\operatorname{Supp} T$, on a $\operatorname{prof} A_{\mathfrak{p}}+\dim A/\mathfrak{p}=\operatorname{prof} A$. Ceci implique évidemment $\dim A=\dim A/\mathfrak{p}=\operatorname{prof} A$, donc A est de Cohen-Macaulay.

Proposition (Auslander) **(4.14)**. — *Soit* M *un module de type fini et de dimension projective finie sur un anneau local noethérien* A. *Alors si* M *est de grade* 0, *l'annulateur de* M *est* (0).

Rappelons que pour démontrer ce résultat, on prend une résolution projective de M. Par un raisonnement sur les rangs, on prouve que $\operatorname{Supp} M=\operatorname{Spec} A$. Si $\mathfrak{A}$ est l'annulateur de M, on en déduit que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}\in\operatorname{Ass} A$, on a $\mathfrak{A}A_{\mathfrak{p}}=0$, donc $\mathfrak{A}=0$.

Nous terminerons ce paragraphe avec un théorème donnant des conditions d'annulation de cohomologie. Nous donnerons ce théorème sous la forme la plus générale possible, car il montre que si l'on a un anneau local A, il est non seulement intéressant de trouver un A-module de type fini et de profondeur la plus grande possible, mais qu'on peut, en fait, se permettre de le prendre à une certaine « distance » de A.

Théorème **(4.15)**. — *Soit* T *un module non nul de type fini et de dimension injective finie sur un anneau local noethérien* A. *Soit* B *une* A-*algèbre noethérienne locale telle que l'homomorphisme de structure* $f: A\to B$ *soit local, et telle que si* $\mathfrak{m}$ *est l'idéal maximal de* A, *l'anneau* $B/\mathfrak{m}B$ *soit artinien. Alors pour tout* B-*module de type fini* M, *on a* :

$$\operatorname{prof}_B M+\sup\{i\in\mathbf{Z} \text{ tel que } \operatorname{Ext}^i_A(M, T)\neq 0\}=\operatorname{prof} A.$$

Remarquons d'abord que dans les hypothèses du théorème, la profondeur de M en tant que B-module est la même que sa profondeur en tant que A-module. En effet, la seule difficulté est de montrer que si $\operatorname{prof}_B M>0$, il existe un élément M-régulier dans $\mathfrak{m}$. Sinon, $\mathfrak{m}$ est contenu dans la réunion des idéaux premiers de B associés à M. D'après le lemme d'évitement, $\mathfrak{m}B$ est contenu dans un idéal premier associé à M. Comme $\mathfrak{m}B$ est un idéal de définition de B, ceci est contraire à l'hypothèse $\operatorname{prof}_B M>0$.

Raisonnons maintenant par récurrence sur prof M. Si $\operatorname{prof} M=0$, il existe une suite exacte de A-modules $0\to k\to M$, où k est le corps résiduel de A. Si $r=\operatorname{prof} A$, on en déduit une suite exacte $\operatorname{Ext}^r_A(M, T)\to\operatorname{Ext}^r_A(k, T)\to 0$. D'après (4.2), $\operatorname{Ext}^r_A(k, T)\neq 0$, donc $\operatorname{Ext}^r_A(M, T)\neq 0$. Supposons maintenant $\operatorname{prof} M>0$, c'est-à-dire qu'il existe un élément $\alpha\in\mathfrak{m}$ qui est M-régulier. Considérons la suite exacte :

$$(*)\qquad 0\to M\xrightarrow{\alpha} M\to M/\alpha M\to 0.$$

Remarquons qu'on peut supposer A complet, car on ne changera ni les données ni la conclusion du théorème en remplaçant A et B par leurs complétés.

Soit alors E une enveloppe injective du corps résiduel k de A. On sait que le foncteur

$\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(\cdot, E), E)$ se réduit, à isomorphisme près, à l'identité sur la catégorie des A-modules de type fini. En posant $T' = \mathrm{Hom}(T, E)$, on a alors par dualité :

$$(**) \qquad \mathrm{Ext}^i_A(M, T) \simeq \mathrm{Ext}^i_A(M, \mathrm{Hom}_A(T', E)) \simeq \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Tor}^A_i(M, T'), E).$$

Supposons $\mathrm{prof}\, M = s$. On a donc $\mathrm{prof}\, M/\alpha M = s-1$, et d'après l'hypothèse de récurrence $\mathrm{Ext}^i_A(M/\alpha M, T) = 0$ pour $i > r-(s-1)$. D'après $(**)$, on en déduit :

$$\mathrm{Tor}^A_i(M/\alpha M, T') = 0 \quad \text{pour} \quad i > r-(s-1).$$

La suite exacte des Tors associés à $(*)$ dit alors qu'on a des suites exactes :

$$0 \to \mathrm{Tor}^A_i(M, T') \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Tor}^A_i(M, T') \quad \text{pour} \quad i \geqslant r-(s-1).$$

Mais comme T' est limite inductive dénombrable de modules de longueurs finies, il en est de même de $\mathrm{Tor}^A_i(M, T')$ pour tout i, donc si $\mathrm{Tor}^A_i(M, T') \neq 0$, il n'y a pas d'élément régulier pour $\mathrm{Tor}^A_i(M, T')$.

On en déduit bien :

$$\mathrm{Tor}^A_i(M, T') = 0 \quad \text{pour} \quad i \geqslant r-(s-1)$$

c'est-à-dire d'après $(**)$

$$\mathrm{Ext}^i_A(M, T) = 0 \quad \text{pour} \quad i \geqslant r-(s-1).$$

D'un autre côté, toujours d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\mathrm{Ext}^{r-(s-1)}_A(M/\alpha M, T) \neq 0.$$

Mais alors la suite exacte :

$$\mathrm{Ext}^{r-s}_A(M, T) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ext}^{r-s}_A(M, T) \to \mathrm{Ext}^{r-(s-1)}_A(M/\alpha M, T) \to 0$$

montre que $\mathrm{Ext}^{r-s}_A(M, T) \neq 0$, et le théorème est démontré.

5. Théorèmes de descente pour les modules de dimension projective finie

Nous avons dit au paragraphe précédent que, partant d'un module de dimension injective finie T, de type fini sur un anneau local noethérien A, de profondeur r, le $\hat{A}$-module de type fini $\mathrm{Ext}^r_A(E, T)$ était de dimension projective finie. Nous nous proposons ici de montrer que, pour de « bons » anneaux, c'est le complété d'un A-module de type fini de dimension projective finie. Pour ceci nous avons besoin du théorème de dualité locale énoncé dans le cadre des catégories dérivées, qu'on trouve dans R. Hartshorne [13]. La lecture de ce paragraphe n'est pas essentielle pour la suite. Cependant, il permet de montrer que pour de « bons anneaux » l'étude des modules de dimension injective finie se ramène à celle des modules de dimension projective finie. La technique employée permet aussi de retrouver de façon naturelle un théorème de

G. Horrocks [16]. Pour la raison précédemment citée nous utiliserons sans rappel la terminologie des catégories dérivées pour laquelle on peut se reporter à [13].

Proposition (5.1). — *Soient* A *un anneau local noethérien,* $\hat{A}$ *le complété de* A, M *un* $\hat{A}$*-module de type fini et de dimension projective finie. Soit* $L_\bullet$ *une résolution projective finie de* M. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe un* A*-module* N *tel que* $N \otimes_A \hat{A} = M$;

(ii) *il existe un complexe* $P_\bullet$ *dans* $D_c^-(A)$ *tel que* $P_\bullet \otimes_A \hat{A} \simeq \mathrm{Hom}_{\hat{A}}(L_\bullet, \hat{A})$ *dans* $D_c^-(\hat{A})$.

Il est visible que (i) implique (ii) car un tel N sera de type fini et de dimension projective finie sur A. On prendra alors pour $P_\bullet$ le complexe $\mathrm{Hom}_A(Q_\bullet, A)$ où $Q_\bullet$ est une résolution projective finie de N sur A. Il y a une équivalence d'homotopie $Q_\bullet \otimes_A \hat{A} \to L_\bullet$ qui donne le résultat cherché en vertu de [13].

Réciproquement, on peut toujours supposer que $P_\bullet$ est un complexe de modules projectifs. Posant $Q_\bullet = \mathrm{Hom}_A(P_\bullet, A)$ on a $Q_\bullet \otimes_A \hat{A} \simeq L_\bullet$ toujours en vertu de [13]. Comme la tensorisation par $\hat{A}$ commute à l'homologie, il n'y a qu'un seul module d'homologie non nul dans $Q_\bullet$: c'est le module N cherché.

Remarque (5.2). — Soit A un anneau local noethérien de profondeur r et d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Nous avons construit au paragraphe précédent, partant d'un module de dimension injective finie T, de type fini sur A, un $\hat{A}$-module M de type fini et de dimension projective finie de même support que $\hat{T}$. On a même vu que $\mathrm{Ext}^i_{\hat{A}}(M, \hat{A})$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\hat{A}}(H^{r-i}_{\mathfrak{m}}(T), E)$, où E est l'enveloppe injective du corps résiduel de A. En fait si $I^\bullet$ est une résolution injective de T, on obtient une résolution projective de M en appliquant à $I^\bullet$ le foncteur $\mathrm{Hom}_{\hat{A}}(\mathrm{Hom}_{\hat{A}}(H^0_{\mathfrak{m}}(-), E), \hat{A})$. C'est-à-dire que si $L_\bullet$ est une résolution projective finie de M sur A, on a :

$$\mathrm{Hom}_{\hat{A}}(L_\bullet, \hat{A}) \simeq \mathrm{Hom}_{\hat{A}}(H^0_{\mathfrak{m}}(I^\bullet), E) \quad \text{dans} \quad D_c^-(\hat{A}).$$

Or, le théorème de dualité locale sous sa forme catégorie dérivée est justement fait pour calculer les complexes $H^0_{\mathfrak{m}}(I^\bullet)$. Plus précisément (cf. [13]) :

Définition (5.3). — *Soit* A *un anneau local. Un complexe dualisant pour* A *est un élément* $R^\bullet \in D_c^-(A)$ *tel que :*

(i) $R^\bullet$ *a une résolution injective finie;*

(ii) *pour tout* $F_\bullet \in D_c^+(A)$ *l'homomorphisme naturel* $F_\bullet \to \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_\bullet(\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_\bullet(F_\bullet, R^\bullet), R^\bullet)$ *est un isomorphisme.*

Exemple (5.4). — Tout quotient A d'un anneau local de Gorenstein R possède un complexe dualisant à savoir : si $I^\bullet$ est une résolution injective (finie) de R en tant que R-module, $\mathrm{Hom}_R(A, I^\bullet)$ est un complexe dualisant sur A.

Proposition (5.5). — *Soit* A *un anneau local noethérien. Si* A *possède un complexe dualisant* $R^\bullet$, *alors* $R^\bullet \otimes_A \hat{A}$ *est un complexe dualisant sur* $\hat{A}$.

Théorème (dualité locale) **(5.6)**. — *Soit* A *un anneau local possédant un complexe dualisant* $R^\bullet$, *soient* $\mathfrak{m}$ *son idéal maximal et* E *une enveloppe injective du corps résiduel* $A/\mathfrak{m}$ *de* A*; alors il existe un isomorphisme de foncteurs de* $D_c^+(A)$ *dans* $D_c^+(A)$:

$$H_{\mathfrak{m}}^0(-) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}(-, R^\bullet), E)$$

([13], chap. V, th. (6.2)).

Nous avons maintenant tout le matériel nécessaire pour prouver le théorème suivant :

Théorème **(5.7)**. — *Soit* A *un anneau local possédant un complexe dualisant. Soit* T *un* A-*module de type fini et de dimension injective finie ; alors il existe un* A-*module de type fini* M, *de dimension projective finie et tel que* Supp (M) = Supp (T).

En vertu de la proposition (5.1) et de la remarque (5.2) il suffit de trouver $F_\bullet$ dans $D_i^-(A)$ tel que $\mathrm{Hom}_{\hat{A}}(H_{\mathfrak{m}}^0(I^\bullet), E)$ soit isomorphe à $F_\bullet \otimes_A \hat{A}$ dans $D_c^-(\hat{A})$, où $I^\bullet$ est une résolution injective finie de T.

Prenons $F_\bullet = \mathrm{Hom}_A(I^\bullet, R^\bullet)$. En vertu du théorème de dualité locale :

$$\mathrm{Hom}_{\hat{A}}(H_{\mathfrak{m}}^0(I^\bullet), E) \simeq \mathrm{Hom}_{\hat{A}}(H_{\mathfrak{m}}^0(I^\bullet \otimes_A \hat{A}), E) \simeq \mathrm{Hom}_{\hat{A}}(I^\bullet \otimes_A \hat{A}, R^\bullet \otimes_A \hat{A})$$

dans $D_c^+(\hat{A})$, où $R^\bullet$ est un complexe dualisant sur A. Or :

$$\mathrm{Hom}_{\hat{A}}(I^\bullet \otimes_A \hat{A}, R^\bullet \otimes_A \hat{A}) \simeq \mathrm{Hom}_A(I^\bullet, R^\bullet) \otimes_A \hat{A}$$

en vertu de [13], et le théorème est donc démontré.

La proposition (5.1) permet dans certains cas de « descendre » un module de dimension projective finie M sachant que ses $\mathrm{Ext}_{\hat{A}}^i(M, \hat{A})$ se descendent pour $i > 0$. En voici quelques exemples.

Rappelons qu'un A-module M est dit *r-sphérique*, si :

a) $\mathrm{dp}(M) = r$;

b) $\mathrm{Ext}_A^i(M, A) = 0$ pour $i \neq 0$ et $i \neq r$.

Proposition **(5.8)**. — *Soient* A *un anneau local noethérien,* M *un* $\hat{A}$-*module r-sphérique de type fini ; alors, si* $\mathrm{Ext}_{\hat{A}}^r(M, \hat{A})$ *est le complété d'un* A-*module de type fini, il existe un* A-*module* N, *r-sphérique, tel que* $N \otimes_A \hat{A} = M$.

On peut remarquer que rien n'est supposé sur $\mathrm{Hom}_{\hat{A}}(M, \hat{A})$. Soit :

$$0 \to L_r \to L_{r-1} \to \ldots \to L_1 \to L_0 \to M \to 0$$

une résolution libre de M, alors notant

$$\cdot^\vee = \mathrm{Hom}_{\hat{A}}(\cdot, \hat{A})$$

$$L^\vee \to L_1^\vee \to \ldots \to L_{r-1}^\vee \to L_r^\vee \to \mathrm{Ext}_{\hat{A}}^r(M, \hat{A}) \to 0$$

est une résolution libre de $\mathrm{Ext}_{\hat{A}}^r(M, \hat{A})$. Choisissons :

$$F_0 \to F_1 \to \ldots \to F_{r-1} \to F_r \to K \to 0$$

une résolution projective du A-module K, tel que $K\otimes_A \hat{A} \overset{\varphi}{\simeq} \mathrm{Ext}^r_{\hat{A}}(M, \hat{A})$. On obtient un morphisme de complexes $L^{\vee}_{\bullet} \xrightarrow{f} \hat{F}_{\bullet}$ tel que $H_r(f) = \varphi$.

Comme $\operatorname{grade} \mathrm{Ext}^r_{\hat{A}}(M, \hat{A}) \geqslant r$ on a une suite exacte :

$$0 \to \hat{F}^{\vee}_r \to \dots \to \hat{F}^{\vee}_1 \to \hat{F}^{\vee}_0 \to \hat{N} \to 0,$$

où $N = \mathrm{Coker}(F^{\vee}_1 \to F^{\vee}_0)$. On obtient ainsi un homomorphisme $g : \hat{N} \to M$ tel que $\mathrm{Ext}^r_{\hat{A}}(g, \hat{A}) = \varphi$. Quitte à rajouter à N un module libre sur A on peut supposer que g est surjectif. On a donc une suite exacte

$$0 \to C \to \hat{N} \to M \to 0$$

d'où l'on déduit que :

a) $\mathrm{dp}_{\hat{A}} C < \infty$;

b) $\mathrm{Ext}^i_{\hat{A}}(C, \hat{A}) = 0 \quad \forall\, i > 0$;

donc, C *est un* $\hat{A}$*-module libre* d'après (4.3).

Mais, comme l'application $\mathrm{Ext}^1_{\hat{A}}(M, \hat{A}) \to \mathrm{Ext}^1_{\hat{A}}(\hat{N}, \hat{A})$ est un isomorphisme, la suite $0 \to M^{\vee} \to \hat{N}^{\vee} \to C^{\vee} \to 0$ est exacte et scindée. Donc $C \simeq C^{\vee\vee}$ est un facteur direct de $\hat{N}^{\vee\vee}$, donc de $\hat{N}$. Donc $M \oplus C \simeq \hat{N}$. Comme on peut supposer que M n'a pas de facteur direct libre, le théorème de Krull-Schmidt-Azumaya implique que M est isomorphe au complété du facteur de N qui n'a pas de facteur direct libre. c.q.f.d. [9].

La proposition qui suit a été démontrée d'une autre façon par Horrocks [16].

Proposition (Horrocks) **(5.9).** — *Soient* A *un anneau local noethérien,* $X = \mathrm{Spec}\, A - \{\mathfrak{m}\}$ *où* $\mathfrak{m}$ *est l'idéal maximal de* A. *Posons* $Y = \mathrm{Spec}\, \hat{A} - \{\hat{\mathfrak{m}}\}$. *Soit* M *un* $\hat{A}$*-module de dimension projective finie et de type fini qui soit localement libre sur* Y. *Alors, il existe un* A*-module* N *de type fini et de dimension projective finie tel que* $\hat{N} = M$.

On peut bien sûr supposer que M n'a pas de facteur direct non trivial. Soit r la dimension projective de M. Posons $t = \inf\{i > 0,\ \text{tels que } \mathrm{Ext}^i_{\hat{A}}(M, \hat{A}) \neq 0\}$. Raisonnons par récurrence sur $r - t$. Si $r - t = 0$, alors M est r-sphérique, et la proposition précédente nous permet de conclure.

Supposons donc $r > t$. Considérons une résolution projective de M :

$$0 \to L_r \to \dots \to L_0 \to M \to 0.$$

En notant comme précédemment $\cdot^{\vee}$ le foncteur $\mathrm{Hom}_{\hat{A}}(\cdot, \hat{A})$, posons $T = \mathrm{Coker}(L^{\vee}_{t-1} \to L^{\vee}_t)$. Alors, on a une injection naturelle :

$$(*) \qquad \mathrm{Ext}^t_{\hat{A}}(M, \hat{A}) \hookrightarrow T.$$

Considérons une résolution projective de $\mathrm{Ext}^t_{\hat{A}}(M, \hat{A})$ en tant que A-module de longueur finie :

$$F_0 \to F_1 \to \dots \to F_t \to \mathrm{Ext}^t_{\hat{A}}(M, \hat{A}) \to 0.$$

L'injection $(*)$ se prolonge en un morphisme de complexes :

$$(\hat{F}_i)_{i\geqslant 0} \to (L_i^{\vee})_{0\leqslant i\leqslant t}.$$

En appliquant le foncteur $\cdot^{\vee}$ à ce morphisme de complexes, on trouve un morphisme de complexes :

$$(L_i)_{0\leqslant i\leqslant t} \to (\hat{F}_i^{\vee})_{i\geqslant 0}$$

qui induit un homomorphisme $M \xrightarrow{g} \hat{N}$, où $N = \mathrm{Coker}(F_1^{\vee} \to F_0^{\vee})$. Remarquons que N est un A-module t-sphérique tel que $\mathrm{Ext}^t_{\hat{A}}(\hat{N}, \hat{A}) = \mathrm{Ext}^t_{\hat{A}}(M, \hat{A})$. L'application :

$$\mathrm{Ext}^t_{\hat{A}}(g, \hat{A}) : \mathrm{Ext}^t_{\hat{A}}(\hat{N}, \hat{A}) \to \mathrm{Ext}^t_{\hat{A}}(M, \hat{A})$$

factorise l'injection $\mathrm{Ext}^t_{\hat{A}}(\hat{N}, \hat{A}) \hookrightarrow T$, donc c'est une injection, et comme il s'agit de $\hat{A}$-modules de longueurs finies, c'est un isomorphisme. En ajoutant, au besoin, un $\hat{A}$-module libre P de rang fini à M, on peut supposer que g est surjectif. Soit K le noyau de g. On voit facilement que K est localement libre sur Y, que K est de dimension projective r, et que $\mathrm{Ext}^i_{\hat{A}}(K, \hat{A}) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant t$. D'après l'hypothèse de récurrence, K se descend, c'est-à-dire qu'il existe un A-module C tel que $K = \hat{C}$. Comme N est localement libre sur X, le A-module $\mathrm{Ext}^1_A(N, C)$ est de longueur finie, donc

$$\mathrm{Ext}^1_A(N, C) = \mathrm{Ext}^1_{\hat{A}}(\hat{N}, \hat{C}),$$

c'est-à-dire que toute extension de $\hat{N}$ par K provient d'une extension de N par C. Donc $M \oplus P$ se descend, *i.e.* il existe un A-module D tel que $M \oplus P = \hat{D}$, et on en déduit, au moyen du théorème de Krull-Schmidt-Azumaya, que M se descend. c.q.f.d.

Remarque **(5.10)**. — Si A est régulier de dimension $\geqslant 2$, cette proposition permet à Horrocks de montrer que tout fibré vectoriel $\mathfrak{E}$ sur Y est l'image réciproque $f^*(\mathfrak{F})$ d'un fibré vectoriel $\mathfrak{F}$ sur X, où $f : Y \to X$ est le morphisme de schémas déduit de l'homomorphisme canonique $A \to \hat{A}$. En effet, sous ces hypothèses, le foncteur sections globales donne une équivalence de catégories entre les fibrés vectoriels sur X (resp. Y) et les A-modules (resp. $\hat{A}$-modules) de type fini, réflexifs, localement libres sur X (resp. Y).

6. Théorème d'approximation pour les modules de type fini et de dimension projective finie

Introduction **(6.0)**. — Soit A un anneau local noethérien. La donnée d'un A-module M de type fini et de dimension projective finie est la donnée d'un complexe fini de A-modules libres de type fini, soit : $0 \to L_r \xrightarrow{\varphi_r} L_{r-1} \to \ldots \to L_1 \xrightarrow{\varphi_1} L_0$, tel que :

(i) $\mathrm{Coker}\,\varphi_1 = M$;

(ii) les modules d'homologie $H^i(L_\bullet)$ sont nuls pour $i > 0$.

Nous avons donné en (1.8), un lemme (dit d'acyclicité) qui donne une méthode pour vérifier qu'un complexe fini de modules libres de type fini a son homologie nulle en degré>0. Nous avons utilisé ce lemme en (1.7), pour vérifier l'exactitude d'un complexe obtenu à partir de considérations géométriques (morphisme de Frobenius). Dans ce paragraphe, nous allons répéter l'opération pour montrer l'exactitude d'un complexe obtenu au moyen du théorème d'approximation de M. Artin, que nous rappellerons ici.

Théorème (M. Artin [1], th. (1.10), p. 26). **(6.1).** — *Soit* R *un corps ou un anneau de valuation discrète excellent. Soit* A *un anneau local essentiellement de type fini sur* R, *et soit* A^h *son hensélisé. Soit* (f_i) *un système fini d'équations polynomiales à coefficients dans* A^h. *Soit* $\mathfrak{m}$ *un idéal de* A^h, *et soit* $\hat{A}$ *la complétion* $\mathfrak{m}$-*adique de* A^h. *Alors si* $\bar{y}=(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_N)$ *est une solution des équations* (f_i), *formée d'éléments de* $\hat{A}$, *pour tout entier* c, *il existe une solution* $y=(y_1, \ldots, y_N)$, *formée d'éléments de* A^h, *telle que* $y_j \equiv \bar{y}_j\ (\mathfrak{m}^c)$ *pour* $i=1, \ldots, N$.

On se place dans la situation du théorème d'Artin. C'est-à-dire qu'on considère le complété $\hat{A}$ d'un anneau local A essentiellement de type fini sur R, où R est soit un corps, soit un anneau de valuation discrète excellent. Soit alors $(L_\bullet)$ un complexe fini de modules libres de type fini sur $\hat{A}$. En fixant une base pour chaque L_i, et en posant $\mu_i = \operatorname{rang} L_i$, on peut écrire ce complexe sous la forme suivante :

$$(*) \qquad \hat{A}^{\mu_i} \xrightarrow{\varphi_i} \hat{A}^{\mu_{i-1}} \to \ldots \xrightarrow{\varphi_1} \hat{A}^{\mu_0}$$

où aux applications φ_i correspondent des matrices $((\varphi_i^{p,q})_{p,q})$. Pour tout $i=1, \ldots, r$, considérons Φ_i la matrice à μ_i colonnes et à μ_{i-1} lignes, et à coefficients indéterminés $X_i^{p,q}$. Dire que $(*)$ est un complexe, c'est dire que les matrices $((\varphi_i^{p,q})_{p,q})_i$ sont solutions des équations $\Phi_{i-1} \circ \Phi_i = 0$, pour $i=1, \ldots, r$. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A, et soit c un entier. D'après le théorème d'Artin, il existe des matrices $((\Psi_i^{p,q})_{p,q})_i$ à coefficients dans le hensélisé A^h de A, telles que $\Psi_{i-1} \circ \Psi_i = 0$, et que $\Psi_i^{p,q} = \varphi_i^{p,q} (\mathfrak{m}^c)$.

Théorème **(6.2).** — *Soit* R *un corps ou un anneau de valuation discrète excellent. Soit* A *un anneau local essentiellement de type fini sur* R. *Soit* $\hat{A}$ *le complété de* A *pour la topologie définie par l'idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *de* A. *Soit* M *un* A-*module de type fini et de dimension projective finie. Considérons une résolution libre minimale de* M *sur* $\hat{A}$:

$$0 \to L_r \xrightarrow{\varphi_r} L_{r-1} \to \ldots \to L_1 \xrightarrow{\varphi_1} L_0 \to M \to 0.$$

Alors, pour tout entier c, *il existe un complexe exact* :

$$0 \to P_r \xrightarrow{\Psi_r} P_{r-1} \to \ldots \to P_1 \xrightarrow{\Psi_1} P_0,$$

de modules libres de type fini sur le hensélisé A^h *de* A, *tel que* $P_\bullet \otimes_{A^h} (A^h/\mathfrak{m}^c A^h) = L_\bullet \otimes_{\hat{A}} (\hat{A}/\mathfrak{m}^c \hat{A})$.

Corollaire **(6.3).** — *Soit* A *un anneau local essentiellement de type fini sur un corps ou sur un anneau de valuation discrète excellent. Soit* $\mathfrak{m}$ *son idéal maximal. Soit* M *un module de type fini* *de dimension projective finie sur le complété* $\hat{A}$ *de* A. *Alors pour tout entier c, il existe un anneau local* A′, *localisé en un point fermé d'un revêtement étale de* A, *et un* A′*-module* M′ *de type fini et de dimension projective finie, tels que*

(i) $M'/(\mathfrak{m}^c M') \simeq M/(\mathfrak{m}^c M)$;

(ii) $\mathrm{dp}_{A'} M' = \mathrm{dp}_{\hat{A}} M$ (*donc* $\mathrm{prof}_{A'} M' = \mathrm{prof}_{\hat{A}} M$).

Remarquons tout de suite que le corollaire est une conséquence immédiate du théorème. En effet, on prend une résolution minimale $(L_\bullet, \varphi_\bullet)$ de M par des $\hat{A}$-modules libres. On construit le complexe exact $(P_\bullet, \Psi_\bullet)$ de modules libres de type fini sur le hensélisé A^h de A. On fixe des bases pour les P_i, et on représente les homomorphismes Ψ_i par des matrices. Comme A^h est limite inductive de revêtements étales pointés de A, on peut trouver un revêtement étale pointé A′ qui contient tous les coefficients des matrices $\Psi_i^{p,q}$. Comme A^h est fidèlement plat sur A′, le complexe $(P_\bullet, \Psi_\bullet)$ se descend alors naturellement en un complexe exact $(P'_\bullet, \Psi'_\bullet)$ de A′-modules libres. On prend $M' = \mathrm{Coker}(P'_1 \xrightarrow{\varphi'_1} P'_0)$, et, compte tenu du théorème, on vérifie facilement que M′ possède les propriétés demandées.

Démontrons maintenant le théorème. On a vu qu'on a construit un complexe $(P_\bullet, \varphi_\bullet)$ de A^h-modules libres de type fini tel que $(P_\bullet/\mathfrak{m}^c P_\bullet, \Psi_\bullet/\mathfrak{m}^c \Psi_\bullet) = (L_\bullet/\mathfrak{m}^c L_\bullet, \varphi_\bullet/\mathfrak{m}^c \varphi_\bullet)$. Montrons que si c est assez grand, le complexe construit est exact. Pour cela nous utiliserons le lemme d'acyclicité. Comme la longueur r du complexe $(P_\bullet)$ est égale à dp M, on a $r \leqslant \mathrm{prof}\,\hat{A} = \mathrm{prof}\,A^h$. Donc, d'après le lemme d'acyclicité, pour montrer que $(P_\bullet)$ est exact en degré$>$o, il suffit de montrer que son homologie est de longueur finie en degré$>$o. C'est une conséquence du lemme suivant :

Lemme **(6.4)**. — *Soit* A *un anneau local noethérien d'idéal maximal* $\mathfrak{m}$. *Considérons une suite exacte à trois termes de* A*-modules libres de type fini* $L' \xrightarrow{\varphi'} L \xrightarrow{\varphi} L''$. *Il existe un entier* c_0 *tel que si* $L' \xrightarrow{\Psi'} L \xrightarrow{\Psi} L''$ *est un complexe tel que*

$$\Psi' \equiv \varphi' \bmod \mathfrak{m}^{c_0} \quad \textit{et} \quad \Psi \equiv \varphi \bmod \mathfrak{m}^{c_0},$$

alors $\mathrm{Ker}\,\Psi/\mathrm{Im}\,\Psi'$ *est un* A*-module de longueur finie.*

Considérons Im φ (resp. Im φ'), sous-module de L″ (resp. L). Le lemme d'Artin-Rees dit qu'il existe μ (resp. ν) tel que

$$\mathfrak{m}^n L'' \cap \mathrm{Im}\,\varphi \hookrightarrow \mathfrak{m}^{n-\mu}(\mathrm{Im}\,\varphi)$$

(resp. $\mathfrak{m}^n L \cap \mathrm{Im}\,\varphi' \hookrightarrow \mathfrak{m}^{n-\nu}(\mathrm{Im}\,\varphi')$).

Prenons $c_0 > \sup(\mu, \nu)$, et montrons que si $\psi' \equiv \varphi' \bmod \mathfrak{m}^{c_0}$ et $\psi \equiv \varphi \bmod \mathfrak{m}^{c_0}$, alors on a :

$$(*) \qquad \mathfrak{m}^s L \cap \mathrm{Ker}\,\psi \hookrightarrow \mathrm{Im}\,\psi' + (\mathfrak{m}^{s+1} L \cap \mathrm{Ker}\,\psi) \qquad \text{pour } s > c_0,$$

ce qui démontrera bien le lemme. En effet, on en déduit que pour tout entier $i>$o,

$$\mathfrak{m}^s L \cap \mathrm{Ker}\,\psi \hookrightarrow \mathrm{Im}\,\psi' + (\mathfrak{m}^{s+i} L \cap \mathrm{Ker}\,\psi).$$

Donc $\mathfrak{m}^s \operatorname{Ker} \psi \subset \operatorname{Im} \psi'$. Soit $x \in \mathfrak{m}^s \mathrm{L} \cap \operatorname{Ker} \psi$. Alors $\psi(x) = 0$, et :

$$x = \sum_i m_i x_i \quad \text{où} \quad x_i \in \mathrm{L} \quad \text{et} \quad m_i \in \mathfrak{m}^s.$$

On a donc :

$$\varphi(x) = \varphi(x) - \psi(x) = \sum_i m_i (\varphi - \psi)(x_i) \in \mathfrak{m}^{s+c_0} \mathrm{L}'' \cap \operatorname{Im} \varphi.$$

On sait qu'on a $\mathfrak{m}^{s+c_0} \mathrm{L}'' \cap \operatorname{Im} \varphi \hookrightarrow \mathfrak{m}^{s+c_0-\mu}(\operatorname{Im} \varphi)$.

Donc, il existe des éléments $n_i \in \mathfrak{m}^{s+c_0-\mu}$, et des éléments $y_i \in \mathrm{L}$ tels que :

$$\varphi(x) = \varphi(\sum_i n_i y_i).$$

Autrement dit, $\varphi(x - \sum_i n_i y_i) = 0$, donc d'après l'exactitude de la suite $\mathrm{L}' \xrightarrow{\varphi'} \mathrm{L} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{L}''$, il existe un élément y' de L' tel que $\varphi'(y') = x - \sum_i n_i y_i$. Comme $x \in \mathfrak{m}^s \mathrm{L}$ par hypothèse, et comme $n_i \in \mathfrak{m}^{s+c_0-\mu} \subset \mathfrak{m}^s$, on en déduit :

$$x - \sum_i n_i y_i \in \mathfrak{m}^s \mathrm{L} \cap \operatorname{Im} \varphi'.$$

Mais comme $s > c_0 > \nu$, on a $\varphi'(y') = x - \sum_i n_i y_i \in \mathfrak{m}^{s-\nu}(\operatorname{Im} \varphi')$. Donc, il existe $y'' \in \mathfrak{m}^{s-\nu} \mathrm{L}'$ tel que $x - \sum_i n_i y_i = \varphi'(y'')$. D'où

$$x - \psi'(y'') = \sum_i n_i y_i + (\varphi' - \psi')(y''),$$

ce qui implique $x - \psi'(y'') \in (\mathfrak{m}^{s+c_0-\mu} \mathrm{L} + \mathfrak{m}^{s+c_0-\nu} \mathrm{L}) \cap \operatorname{Ker} \psi$.

On en déduit bien $x \in \operatorname{Im} \psi' + (\mathfrak{m}^{s+1} \mathrm{L} \cap \operatorname{Ker} \psi)$, c'est-à-dire (*), que nous voulions démontrer.

Remarque. — Le lemme (6.4) permet d'approcher M plus précisément si l'on veut. Par exemple, si M′ est un module de type fini et de dimension projective finie sur A^{h}, on peut demander $\operatorname{grade}_{\mathrm{A}^{\mathrm{h}}}(\mathrm{M}') \geqslant \operatorname{grade}_{\hat{\mathrm{A}}} \mathrm{M}$. En effet, dire que $\operatorname{grade} \mathrm{M} \geqslant g$, c'est dire que le complexe suivant est exact :

$$0 \to \mathrm{L}_0^{\vee} \xrightarrow{\varphi_1^{\vee}} \mathrm{L}_1^{\vee} \to \dots \xrightarrow{\varphi_g^{\vee}} \mathrm{L}_g^{\vee},$$

où $.^{\vee}$ dénote le foncteur $\operatorname{Hom}_{\hat{\mathrm{A}}}(\cdot, \mathrm{A})$. Mais alors, d'après le lemme, il existe c_0 tel que $(\mathrm{P}_{\bullet}^{\vee}, \psi_{\bullet}^{\vee}) \equiv (\mathrm{L}_{\bullet}^{\vee}, \varphi_{\bullet}^{\vee})$ modulo $\mathfrak{m}^{c_0}$ implique $0 \to \mathrm{P}_0^{\vee} \xrightarrow{\psi_1^{\vee}} \mathrm{P}_1^{\vee} \to \dots \xrightarrow{\psi_g^{\vee}} \mathrm{P}_g^{\vee}$ exact ($.^{\vee}$ dénote bien sûr ici $\operatorname{Hom}_{\mathrm{A}^{\mathrm{h}}}(\cdot, \mathrm{A}^{\mathrm{h}})$).

CHAPITRE II

THÉORÈME D'INTERSECTION
APPLICATION A LA DÉMONSTRATION DE CONJECTURES DE M. AUSLANDER ET H. BASS

0. Questions fondamentales sur les modules de type fini et de dimension projective finie, sur un anneau local noethérien

Rappelons le théorème suivant prouvé par Serre dans [23].

Théorème **(0.1)**. — *Soit* R *un anneau local régulier. Si* M *et* N *sont deux* R-*modules de type fini tels que* $M \otimes_R N$ *soit de longueur finie, alors* $\dim M + \dim N \leqslant \dim R$.

Ce théorème contient bien sûr la formule des codimensions d'intersection en géométrie algébrique : La codimension de l'intersection de deux sous-variétés d'une variété algébrique non singulière est inférieure ou égale à la somme des codimensions de ces deux sous-variétés.

Pour démontrer ce théorème, Serre généralise la méthode de la diagonale au moyen des Tor complétés et il en déduit le cas où R est équicaractéristique. Pour prouver le cas où R est non ramifié, puis le cas général, il utilise les caractéristiques d'Euler-Poincaré associées aux foncteurs Tor.

(0.2) On voit facilement que ce résultat ne peut pas s'étendre en oubliant complètement l'hypothèse de régularité. Les méthodes homologiques étant ici déterminantes, on est naturellement amené à conjecturer que tout module $M \neq 0$, de type fini et de dimension projective finie sur un anneau local noethérien A, possède la propriété suivante :

(a) *Pour tout* A-*module de type fini* N, *et pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *minimal dans*

$$\operatorname{Supp} M \cap \operatorname{Supp} N,$$

on a
$$\dim N_{\mathfrak{p}} \leqslant \dim A_{\mathfrak{p}} - \dim M_{\mathfrak{p}}.$$

Remarquons que le théorème de Serre est équivalent au théorème suivant :

Théorème **(0.3)**. — *Soit* M *un module de type fini sur un anneau local régulier* R, *alors tout système de paramètres de* M *peut se prolonger en un système de paramètres de* R.

Démontrons (0.1) $\Rightarrow$ (0.3). Soit $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ un système de paramètres de M. Comme $M/\alpha M$ est de longueur finie, $\dim R/\alpha \leqslant \dim R - \dim M$. Posons $d=\dim R$. Comme $\dim M = s$, on peut trouver des éléments $\alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_d$ de R engendrant un idéal de définition dans R/α. Autrement dit $R/(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ est de longueur finie, ce qui implique évidemment que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ est un système de paramètres de R. Réciproquement, soient M et N deux R-modules de type fini ayant leur produit tensoriel de longueur finie. Soit $\mathfrak{A}$ l'annulateur de N. Le module $M \otimes_R (R/\mathfrak{A})$ est aussi de longueur finie. On en déduit que $\mathfrak{A}$ contient un système de paramètres $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ de M. D'après (0.3), si $d=\dim R$, on a $\dim R/(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = d-s$. On en déduit $\dim N = \dim R/\mathfrak{A} \leqslant d-s$, et l'équivalence est démontrée.

Sous cette dernière forme, le théorème de Serre contient bien sûr le résultat suivant :

Théorème **(0.4)**. — *Soit* M *un module de type fini sur un anneau local régulier* R. *Alors toute suite* M-*régulière est* R-*régulière.*

Il est clair qu'ici aussi l'hypothèse de régularité ne peut être oubliée. Néanmoins, en restreignant cette hypothèse, il est naturel de conjecturer (Auslander) que tout module M de type fini de dimension projective finie sur un anneau local noethérien A possède la propriété :

(b) *Toute suite* M-*régulière est* A-*régulière.*

(0.5) Dans [3], M. Auslander a prouvé que c'était un corollaire de sa conjecture, dite des Tor, de nature plus clairement homologique, qu'on formulera de la façon suivante :

Soit M un module de type fini et de dimension projective finie sur un anneau local noethérien A, alors :

(c) *Pour tout* A-*module de type fini* N, *et tout entier* s, *si* $\mathrm{Tor}_s^A(M, N)=0$, *alors*

$$\mathrm{Tor}_j^A(M, N)=0 \quad \textit{pour } j \geqslant s$$

(autrement dit, M *est rigide).*

(0.6) C'est pour résoudre la conjecture relative à (b) et la conjecture de H. Bass citée plus haut (chap. I, § 4), que nous montrerons « presque généralement » que tout module M de type fini de dimension projective finie sur un anneau local noethérien possède la propriété :

(d) *Pour tout* A-*module de type fini* N, *et pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* A *tel que* $M_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} N_\mathfrak{p}$ *soit un* $A_\mathfrak{p}$-*module* $\neq 0$ *de longueur finie, on a* $\dim N_\mathfrak{p} \leqslant \mathrm{dp}_{A_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}$.

Nous verrons, dans le § 3, que les modules de type fini et de dimension projective finie sur un anneau local noethérien qui est soit de caractéristique $p>0$, soit essentiellement de type fini sur un corps de caractéristique 0, soit le hensélisé d'un anneau de ce type, possèdent la propriété (d).

(0.7) On a évidemment (d) $\Rightarrow$ (a) lorsque M est de Cohen-Macaulay, ou plus généralement lorsque $\mathrm{dp}_A M = \mathrm{grade}_A M$ (un tel module est appelé parfait, car c'est la généralisation la plus naturelle d'un quotient de l'anneau A par une suite A-régulière, dont nous connaissons bien les propriétés topologiques du support grâce au complexe de Koszul). C'est pour cette raison que nous conjecturons qu'un module $M \neq 0$ de type fini et de dimension projective finie sur un anneau local noethérien possède la propriété suivante :

(e) *Pour tout* A*-module de type fini* N *et pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* A *tel que* $M_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} N_\mathfrak{p}$ *est de longueur finie, non nulle, on a* $\dim N_\mathfrak{p} \leqslant \mathrm{grade}_{A_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}$.

(0.8) On constate que (e) entraîne non seulement (a), mais aussi le fait suivant conjecturé par M. Auslander : Tout module M de type fini et de dimension projective finie sur un anneau local noethérien A possède la propriété :

(f) *Pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *du support de* M, *on a*

$$\dim M_\mathfrak{p} + \mathrm{grade}_{A_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} = \dim A_\mathfrak{p}.$$

(0.9) Avant de montrer précisément quelles sont les relations entre ces six propriétés, soulignons qu'à notre sens, les questions les concernant recouvrent les problèmes essentiels quant à la topologie des sous-schémas fermés définis comme supports de faisceaux cohérents de dimension projective finie, dans un schéma ambiant admettant éventuellement des singularités.

Théorème **(0.10)**. — *Soit* M *un module non nul de type fini et de dimension projective finie sur un anneau local noethérien* A. *On a les relations suivantes entre les propriétés définies plus haut* :

$$\begin{tikzcd} (e) \arrow[rr, Leftrightarrow] \arrow[dd, Rightarrow] & & (a)+(f) \\ & (c) \arrow[dr, Rightarrow] & \\ (d) \arrow[rr, Leftrightarrow] & & (b) \end{tikzcd}$$

De plus, si pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ *du support de* M, *le complété* $\widehat{M}_\mathfrak{p}$ *de* $M_\mathfrak{p}$ *possède la propriété* (c) *en tant que* $\widehat{A}_\mathfrak{p}$*-module, alors* M *possède la propriété* (d).

Prouvons d'abord (e) $\Leftrightarrow$ (a) + (f).

On sait (chap. I, § 4, n° 8), qu'on a toujours $\mathrm{grade}_{A_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} + \dim M_\mathfrak{p} \leqslant \dim A_\mathfrak{p}$.

Donc, $\dim N_\mathfrak{p} \leqslant \mathrm{grade}_{A_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}$ implique $\dim N_\mathfrak{p} + \dim M_\mathfrak{p} \leqslant \dim A_\mathfrak{p}$, soit (e) $\Rightarrow$ (a). Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, où $s = \dim M_\mathfrak{p}$, un système de paramètres de $M_\mathfrak{p}$. Comme $M_\mathfrak{p}/\alpha M_\mathfrak{p}$ est de longueur finie, (e) implique $\dim A_\mathfrak{p}/\alpha A_\mathfrak{p} \leqslant \mathrm{grade}_{A_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}$. Mais, d'après (a), α peut se prolonger en un système de paramètres de $A_\mathfrak{p}$, donc

$$\dim A_\mathfrak{p}/\alpha A_\mathfrak{p} = \dim A_\mathfrak{p} - \dim M_\mathfrak{p}.$$

Il reste $\mathrm{grade}_{A_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} + \dim M_\mathfrak{p} \geqslant \dim A_\mathfrak{p}$, donc (e) $\Rightarrow$ (f).

Réciproquement, supposons $(a)+(f)$. Soit N un A-module de type fini, et soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal dans $\operatorname{Supp} M \cap \operatorname{Supp} N$. Alors (a) implique

$$\dim N_{\mathfrak{p}} \leqslant \dim A_{\mathfrak{p}} - \dim M_{\mathfrak{p}},$$

mais d'après (f), $\dim A_{\mathfrak{p}} - \dim M_{\mathfrak{p}} = \operatorname{grade}_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}}$. Il reste $\dim N_{\mathfrak{p}} \leqslant \operatorname{grade}_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}}$, donc $(a)+(f) \Rightarrow (e)$.

$(c) \Rightarrow (b)$ est prouvé par M. Auslander dans [3].

$(e) \Rightarrow (d)$ est évident compte tenu de $\operatorname{grade}_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \leqslant \operatorname{dp}_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}}$.

$(d) \Rightarrow (b)$ Remarquons que si α est un élément non inversible de A, régulier dans A et dans M, le $A/\alpha A$-module de type fini et de dimension projective finie $M/\alpha M$ possède la propriété (d). En effet, si N est un $A/\alpha A$-module de type fini, et $\mathfrak{p}/\alpha A$ un idéal premier de $A/\alpha A$, minimal dans $\operatorname{Supp} N \cap \operatorname{Supp}(M/\alpha M)$, alors N a une structure naturelle de A-module de type fini, et $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A minimal dans $\operatorname{Supp} N \cap \operatorname{Supp} M$. D'après (d), on en déduit $\dim N_{\mathfrak{p}} \leqslant \operatorname{dp}_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}}$. Mais comme $\operatorname{dp}_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} = \operatorname{dp}_{A_{\mathfrak{p}}/\alpha A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}/\alpha M_{\mathfrak{p}})$, on a bien montré que $M/\alpha M$ possédait la propriété (d).

En procédant par récurrence, il nous reste donc à montrer que tout élément M-régulier est A-régulier. Mais ceci est équivalent à l'assertion suivante, que nous prouverons par récurrence sur $\dim M$:

Tout idéal premier associé à A *est contenu dans un idéal premier associé à* M. Si $\dim M = 0$, comme $\operatorname{Ass} M$ est réduit à l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, c'est évident.

Si $\dim M > 0$, soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier associé à A. S'il existe un idéal premier non maximal $\mathfrak{p}$ de $\operatorname{Supp} M$, contenant $\mathfrak{q}$, comme $\dim M_{\mathfrak{p}} < \dim M$, et comme $M_{\mathfrak{p}}$ possède la propriété (d) en tant que $A_{\mathfrak{p}}$-module, il existe un idéal premier $\mathfrak{q}'A_{\mathfrak{p}}$, associé à $M_{\mathfrak{p}}$, contenant $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$. Mais alors $\mathfrak{q}'$ est associé à M, et contient $\mathfrak{q}$.

Si le seul idéal premier de $\operatorname{Supp} M$ contenant $\mathfrak{q}$ est $\mathfrak{m}$, alors $A/\mathfrak{q} \otimes_A M$ est de longueur finie, donc $\dim A/\mathfrak{q} \leqslant \operatorname{dp} M$. Mais $\mathfrak{q}$ étant associé à A, on sait que $\dim A/\mathfrak{q} \geqslant \operatorname{prof} A$. Il reste $\operatorname{prof} A \leqslant \operatorname{dp} M$, ce qui implique $\operatorname{prof} M = 0$, donc $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass} M$, d'après la formule $\operatorname{dp} M + \operatorname{prof} M = \operatorname{prof} A$.

Pour terminer la démonstration du théorème, il suffit de montrer que si le complété $\hat{M}$ de M est un $\hat{A}$-module rigide (*i.e.* possède la propriété (c) en tant que $\hat{A}$-module), alors, si N est un A-module de type fini tel que $M \otimes_A N$ est de longueur finie, on a $\dim N \leqslant \operatorname{dp}_A M$.

Considérons une résolution injective minimale $(E^{\bullet})$ de N. D'après le chapitre I, (4.4), pour tout i, on a :

$$E^i = \prod_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} N} E(A/\mathfrak{p})^{\mu_i(\mathfrak{p}, N)},$$

où, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$, le module $E(A/\mathfrak{p})$ est une enveloppe injective de $A/\mathfrak{p}$. Comme $E(A/\mathfrak{p})$ est une extension essentielle de $A/\mathfrak{p}$, on a $\operatorname{Ass}(E(A/\mathfrak{p})) = \{\mathfrak{p}\}$. Comme $\operatorname{Supp} M \cap \operatorname{Supp} N$ est réduit à l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, pour tout idéal premier non maximal $\mathfrak{p}$ de $\operatorname{Supp} N$ on a $\operatorname{Hom}_A(M, E(A/\mathfrak{p})) = (0)$, car :

$$\operatorname{Ass}(\operatorname{Hom}_A(M, E(A/\mathfrak{p}))) = (\operatorname{Supp} M) \cap \{\mathfrak{p}\} = \emptyset.$$

On en déduit que pour tout i, on a :

$$\mathrm{Hom}_A(M, E^i) = \mathrm{Hom}_A(M, \mu_i(\mathfrak{m}, N)E(A/\mathfrak{m})) = \mathrm{Hom}_A(M, H^0_{\mathfrak{m}}(E^i)).$$

C'est-à-dire que le complexe $\mathrm{Hom}_A(M, H^0_{\mathfrak{m}}(E^\bullet))$ admet pour cohomologie les A-modules $H^i(\mathrm{Hom}_A(M, H^0_{\mathfrak{m}}(E^\bullet)) = \mathrm{Ext}^i_A(M, N)$. Considérons le complexe $H^0_{\mathfrak{m}}(E^\bullet)$, dont on sait qu'il admet les modules $H^i_{\mathfrak{m}}(N)$ pour cohomologie. En chaque degré, on peut le décomposer en suites exactes de la façon suivante :

(1) $$0 \to K^{i-1} \to H^0_{\mathfrak{m}}(E^{i-1}) \to C^i \to 0$$

(2) $$0 \to K^i \to H^0_{\mathfrak{m}}(E^i) \to H^0_{\mathfrak{m}}(E^{i+1})$$

(3) $$0 \to C^i \to K^i \to H^i_{\mathfrak{m}}(N) \to 0$$

Posons $r = \mathrm{dp}\, M$. Pour $i > r$, comme $\mathrm{Ext}^i_A(M, N) = 0$, on a une suite exacte :

(*) $$\mathrm{Hom}_A(M, H^0_{\mathfrak{m}}(E^{i-1})) \xrightarrow{f_{i-1}} \mathrm{Hom}_A(M, H^0_{\mathfrak{m}}(E^i)) \xrightarrow{f_i} \mathrm{Hom}_A(M, H^0_{\mathfrak{m}}(E^{i+1})).$$

En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_A(M, \cdot)$ aux suites exactes (1), (2), (3), on obtient des suites exactes :

(1') $$0 \to \mathrm{Hom}_A(M, K^{i-1}) \to \mathrm{Hom}_A(M, H^0_{\mathfrak{m}}(E^{i-1})) \to \mathrm{Hom}_A(M, C^i) \to \mathrm{Ext}^1_A(M, K^{i-1}) \to 0$$

(2') $$0 \to \mathrm{Hom}_A(M, K^i) \to \mathrm{Hom}_A(M, H^0_{\mathfrak{m}}(E^i)) \to \mathrm{Hom}_A(M, H^0_{\mathfrak{m}}(E^{i+1}))$$

(3') $$0 \to \mathrm{Hom}_A(M, C^i) \to \mathrm{Hom}_A(M, K^i) \to \mathrm{Hom}_A(M, H^i_{\mathfrak{m}}(N)) \to \mathrm{Ext}^1_A(M, C^i)$$

et des isomorphismes :

(1'') $$\mathrm{Ext}^j_A(M, C^i) \simeq \mathrm{Ext}^{j+1}_A(M, K^{i-1}) \quad \text{pour } j \geqslant 1.$$

Compte tenu de (*) et de (2'), on a :

$$\mathrm{Im}(f_{i-1}) = \mathrm{Hom}_A(M, K^i).$$

Mais, d'après (1'), on a $\mathrm{Im}(f_{i-1}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, C^i)$, et d'après (3') :

$$\mathrm{Hom}_A(M, C^i) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, K^i).$$

Il reste $\mathrm{Im}(f_{i-1}) = \mathrm{Hom}_A(M, C^i) = \mathrm{Hom}_A(M, K^i)$.

On en déduit $\mathrm{Ext}^1_A(M, K^{i-1}) = 0$ par (1'), et $\mathrm{Hom}_A(M, H^i_{\mathfrak{m}}(N)) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^2_A(M, K^{i-1})$ par (3') et (1'').

Montrons que $\mathrm{Ext}^2_A(M, K^{i-1})$ est nul. Comme $K^{i-1} \hookrightarrow H^0(E^{i-1})$, le A-module K^{i-1} est artinien. Posons $E = E(A/\mathfrak{m})$. Rappelons que le foncteur contravariant $\mathrm{Hom}_A(\cdot, E)$ établit une anti-équivalence entre la catégorie des A-modules artiniens et la catégorie des $\hat{A}$-modules de type fini. Pour tout $j \geqslant 0$, on a donc un isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_{\hat{A}}(\mathrm{Tor}^{\hat{A}}_j(\hat{M}, \mathrm{Hom}_{\hat{A}}(K^{i-1}, E)), E) \simeq \mathrm{Ext}^j_{\hat{A}}(\hat{M}, K^{i-1}) \simeq \mathrm{Ext}^j_A(M, K^{i-1}).$$

Alors, on a la suite d'implications :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_A(M, K^{i-1}) = 0 &\Rightarrow \mathrm{Tor}^{\hat{A}}_1(\hat{M}, \mathrm{Hom}(K^{i-1}, E)) = 0\\ &\Rightarrow \mathrm{Tor}^{\hat{A}}_2(\hat{M}, \mathrm{Hom}(K^{i-1}, E)) = 0\\ &\Rightarrow \mathrm{Ext}^2_A(M, K^{i-1}) = 0.\end{aligned}$$

On en déduit $\mathrm{Hom}_A(M, H^i_{\mathfrak{m}}(N)) = 0$, ce qui implique $H^i_{\mathfrak{m}}(N) = 0$, car $H^i_{\mathfrak{m}}(N) \neq 0$ entraîne $\mathrm{Ass}(\mathrm{Hom}_A(M, H^i_{\mathfrak{m}}(N))) = \{\mathfrak{m}\}$. On a donc prouvé $H^i_{\mathfrak{m}}(N) = 0$ pour $i > \mathrm{dp}\, M$. Mais d'après le théorème de dualité locale, $\dim N = \sup\{j \text{ tel que } H^j_{\mathfrak{m}}(N) \neq 0\}$. Il reste $\dim N \leqslant \mathrm{dp}\, M$, ce que nous voulions démontrer.

1. La propriété d'intersection

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de revenir sur la propriété (d) définie en (0.6), et d'examiner quelques cas élémentaires.

Définition **(1.1)**. — *Soit* A *un anneau local noethérien. On dit qu'un* A-*module non nul* M, *de type fini et de dimension projective finie, possède la propriété d'intersection si, pour tout* A-*module de type fini* N, *on a* $\dim N_{\mathfrak{p}} \leqslant \mathrm{dp}_A M$ *pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *minimal dans* $\mathrm{Supp}\, M \cap \mathrm{Supp}\, N$.

Exemples **(1.2)**.

a) *Quotient de* A *par une suite* A-*régulière*. Il est facile de voir qu'un tel module possède la propriété (e), et *a fortiori* la propriété d'intersection. De plus, le complexe de Koszul montre qu'un tel module possède aussi la propriété (c), et donc toutes les propriétés définies dans le § 1.

b) *Module de dimension projective finie, de grade* 0. On sait (I, (4.14)) qu'un tel module admet pour support le spectre de l'anneau. On en déduit qu'il possède la propriété (e), et *a fortiori* la propriété d'intersection.

c) *Module de dimension projective* 1. Si $\mathrm{grade}\, M > 0$, alors M admet une résolution projective de la forme $0 \to A^s \xrightarrow{f} A^s \to M \to 0$, qui montre que si α est le déterminant de f, on a $\mathrm{Supp}\, M = \mathrm{Supp}\, A/\alpha$, donc, d'après a), le module M possède toutes les propriétés définies dans le § 1.

Si $\mathrm{grade}\, M = 0$, d'après b), M possède la propriété (e); comme M possède évidemment la propriété (c), dans ce cas-là aussi, il possède les propriétés (a), (b), (c), (d), (e) et (f).

Théorème **(1.3)**. — *Tout module non nul, de type fini et de dimension projective inférieure ou égale à* 2, *sur un anneau local noethérien* A, *possède la propriété d'intersection.*

D'après l'exemple b), il suffit de prouver le cas $\mathrm{grade}\, M > 0$. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de Supp M, le complété $\hat{M}_{\mathfrak{p}}$ de $M_{\mathfrak{p}}$ est un $\hat{A}_{\mathfrak{p}}$-module de dimension projective $\leqslant 2$. Donc, d'après (0.10), il suffira de démontrer la proposition suivante.

Proposition **(1.4)**. — *Soit* A *un anneau local noethérien. Alors, tout* A-*module non nul* M, *de type fini, de dimension projective finie* $\leqslant 2$, *et de grade*>0, *est rigide* (i.e. *tel que si* N *est un* A-*module de type fini et* s *un entier tel que* $\mathrm{Tor}_s^A(M, N)=0$, *on a* $\mathrm{Tor}_j^A(M, N)=0$ *pour* $j \geqslant s$).

Soient donc N un A-module de type fini et s un entier tels que $\mathrm{Tor}_s^A(M, N)=0$. L'unique incertitude est dans le cas $s=1$ et $\mathrm{dp}_A M=2$. Par récurrence sur dim M, on peut supposer que $\mathrm{Tor}_2^A(M, N)$ est de longueur finie. La proposition sera alors une conséquence des deux lemmes suivants :

Lemme **(1.5)**. — *Si* Q *est un* A-*module de profondeur* >0, *et si* $\mathrm{Tor}_2^A(M, Q)$ *est de longueur finie, alors* $\mathrm{Tor}_2^A(M, Q)=0$.

En effet, considérons une résolution projective $0 \to L_2 \to L_1 \to L_0 \to M \to 0$ de M. Alors $\mathrm{Tor}_2^A(Q, M)$ est le noyau de $Q \otimes_A L_2 \to Q \otimes L_1$, mais comme Q est de profondeur>0, il en est de même de $Q \otimes_A L_2$ qui ne contient donc pas de sous-module non trivial de longueur finie.

Lemme **(1.6)**. — *Si* Q *est un* A-*module de longueur finie, notons* $\ell(Q)$ *sa longueur. Alors pour tout* A-*module* E, *de longueur finie, on a* $\sum_{i=0}^{2}(-1)^i \ell(\mathrm{Tor}_i^A(M, E))=0$.

En effet, comme M est de dimension projective 2, la fonction caractéristique d'Euler-Poincaré $\sum_{i=0}^{2}(-1)^i \ell(\mathrm{Tor}_i^A(M, \cdot))$, définie sur la catégorie des A-modules de longueur finie, est additive. Il suffira donc de montrer qu'elle s'annule sur le corps résiduel k de A. Mais, comme $\ell(\mathrm{Tor}_i^A(M, k))$ est le rang du i-ème module libre d'une résolution libre minimale de M, la somme alternée $\sum_{i=0}^{2}(-1)^i \ell(\mathrm{Tor}_i^A(M, k))$ est égale au rang de M, donc à 0 puisque M est de grade>0.

Démontrons maintenant la proposition. D'après le lemme (1.5), il suffit de prouver que $\mathrm{Tor}_1(M, N)=0$ implique $\mathrm{prof}\, N>0$.

Supposons $N \neq 0$ et $\mathrm{prof}\, N=0$. Alors, il existe une suite exacte

$$0 \to H_{\mathfrak{m}}^0(N) \to N \to N' \to 0,$$

où $H_{\mathfrak{m}}^0(N)$ est le plus grand sous-module de longueur finie de N, et N′ est soit nul soit de profondeur>0. On en déduit une suite exacte :

$$(*) \qquad 0 \to \mathrm{Tor}_2^A(M, H_{\mathfrak{m}}^0(N)) \to \mathrm{Tor}_2^A(M, N) \to \mathrm{Tor}_2^A(M, N') \to \mathrm{Tor}_1^A(M, H_{\mathfrak{m}}^0(N)) \to 0.$$

Comme $\mathrm{Tor}_2^A(M, N)$ et $\mathrm{Tor}_1^A(M, H_{\mathfrak{m}}^0(N))$ sont tous deux de longueur finie, $(*)$ implique que $\mathrm{Tor}_2^A(M, N')$ est de longueur finie, donc nul d'après (1.5). Mais ceci implique $\mathrm{Tor}_1^A(M, H_{\mathfrak{m}}^0(N))=0$, par $(*)$. Or, cette dernière égalité n'est pas possible, puisque d'après le lemme (1.6), on a $\ell(\mathrm{Tor}_1^A(M, H_{\mathfrak{m}}^0(N)))-\ell(M \otimes H_{\mathfrak{m}}^0(N)) \geqslant 0$.

Corollaire **(1.7)**. — *Si* M *est un module de type fini et de dimension projective finie* $\leqslant 2$, *sur un anneau local noethérien* A, *toute suite* M-*régulière est* A-*régulière*.

C'est l'implication (d) $\Rightarrow$ (b) dans le théorème (0.10).

2. Le théorème d'intersection

Ce paragraphe est entièrement consacré à la démonstration du théorème essentiel de ce chapitre.

Théorème (**2.1**). — *Soit* A *un anneau local noethérien. On suppose vérifiée une des conditions suivantes* :

(i) A *est de caractéristique* $p>0$ (i.e. *il existe un homomorphisme injectif d'anneaux* $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \hookrightarrow A$).

(ii) A *est essentiellement de type fini sur un corps de caractéristique* 0.

(iii) A *est ind-étale sur un anneau essentiellement de type fini sur un corps de caractéristique* 0 (i.e. *il existe un anneau local* B *essentiellement de type fini sur un corps de caractéristique* 0, *tel que* A *soit limite inductive filtrante de* B-*algèbres locales-étales, les morphismes de transition étant locaux*).

Alors, tout A-*module non nul de type fini et de dimension projective finie possède la propriété d'intersection.*

On procédera de la façon suivante : on démontrera d'abord le cas où A vérifie la condition (i); on en déduira par réduction successive le cas où A vérifie la condition (ii); enfin, le cas (iii) se déduira simplement de (ii).

Remarquons d'abord que les propriétés (i), (ii) et (iii) se conservent par localisation, c'est-à-dire que dans les trois cas il suffira de montrer que si M est un A-module non nul de type fini et de dimension projective finie, et si N est un A-module non nul de type fini tel que $M \otimes_A N$ est de longueur finie, on a $\dim N \leqslant \mathrm{dp}_A M$.

Considérons d'abord le cas où A *est de caractéristique* $p>0$. Pour commencer, on procédera comme dans la démonstration de (c) $\Rightarrow$ (d) dans le théorème (0.10). C'est-à-dire qu'on considère une résolution injective minimale $(E^{\bullet})$ de N. On sait que pour tout i, on a $E^i = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}\, N} E(A/\mathfrak{p})^{\mu_i(\mathfrak{p}, N)}$, où $E(A/\mathfrak{p})$ est une enveloppe injective de $A/\mathfrak{p}$. Comme $\mathrm{Supp}\, M \cap \mathrm{Supp}\, N$ est réduit à l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, on montre que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ non maximal de Supp N, on a $\mathrm{Hom}_A(M, E(A/\mathfrak{p})) = 0$. On en déduit que pour tout i, on a :

$$\mathrm{Hom}_A(M, E^i) = \mathrm{Hom}_A(M, E(A/\mathfrak{m})^{\mu_i(\mathfrak{m}, N)}) = \mathrm{Hom}_A(M, H^0_{\mathfrak{m}}(E^i)).$$

Autrement dit, le complexe $\mathrm{Hom}_A(M, H^0_{\mathfrak{m}}(E^{\bullet}))$ admet pour cohomologie les A-modules $H^i(\mathrm{Hom}_A(M, H^0_{\mathfrak{m}}(E^{\bullet}))) = \mathrm{Ext}^i_A(M, N)$. Ceci implique que pour $i > \mathrm{dp}_A M$, on a des suites exactes :

$$(*) \qquad \mathrm{Hom}_A(M, H^0_{\mathfrak{m}}(E^{i-1})) \to \mathrm{Hom}_A(M, H^0_{\mathfrak{m}}(E^i)) \to \mathrm{Hom}_A(M, H^0_{\mathfrak{m}}(E^{i+1})).$$

Considérons maintenant le complexe $H^0_{\mathfrak{m}}(E^{\bullet})$, dont la cohomologie est

$$H^i(H^0_{\mathfrak{m}}(E^{\bullet})) = H^i_{\mathfrak{m}}(N).$$

Près du degré i, on peut décomposer ce complexe en suites exactes :

$$(1) \qquad 0 \to K^{i-1} \to H^0_{\mathfrak{m}}(E^{i-1}) \to C^i \to 0,$$

$$(2) \qquad 0 \to K^i \to H^0_{\mathfrak{m}}(E^i) \to H^0_{\mathfrak{m}}(E^{i+1}),$$

$$(3) \qquad 0 \to C^i \to K^i \to H^i_{\mathfrak{m}}(N) \to 0.$$

L'exactitude de $(*)$ montre alors que :

$$\operatorname{Coker}(\operatorname{Hom}_A(M, K^{i-1}) \to \operatorname{Hom}_A(M, H^0_{\mathfrak{m}}(E^{i-1})) = \operatorname{Hom}_A(M, K^i),$$

et, *a fortiori*, que :

$$(**) \qquad \operatorname{Hom}_A(M, C^i) = \operatorname{Hom}_A(M, K^i).$$

C'est ce dernier fait que nous allons utiliser pour démontrer le théorème. Considérons une suite exacte $0 \to \Omega \to L \to M \to 0$, où L est un A-module libre de type fini et $\Omega \hookrightarrow \mathfrak{m}L$. Comme A est de caractéristique $p>0$, nous avons vu au chapitre I (1.11), qu'on pouvait construire une suite de sous-modules Ω_j de L tels que :

1) $\Omega_0 = \Omega$;

2) pour tout j, le A-module L/Ω_j a même support et même dimension projective que $L/\Omega = M$;

3) $\Omega_j \subset \mathfrak{m}^{p^j}L$ pour tout j.

D'après la propriété 2) des modules Ω_j, on voit, comme pour M, que pour tout j, on a :

$$(**j) \qquad \operatorname{Hom}_A(L/\Omega_j, C^i) = \operatorname{Hom}(L/\Omega_j, K^i) \quad \text{pour } i > \operatorname{dp}_A M = \operatorname{dp}_A L/\Omega_j.$$

D'après la propriété 3) des modules Ω_j, on en déduit, pour tout j, des égalités :

$$(***) \qquad \operatorname{Hom}_A(L/\mathfrak{m}^{p^j}L, C^i) = \operatorname{Hom}_A(L/\mathfrak{m}^{p^j}L, K^i).$$

Mais les modules C^i et K^i étant à support dans $V(\mathfrak{m})$, tout élément de C^i ou de K^i est annulé par une puissance de $\mathfrak{m}$. Autrement dit,

$$\operatorname{Hom}_A(L, C^i) = \varinjlim_j \operatorname{Hom}_A(L/\mathfrak{m}^{p^j}L, C^i) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Hom}_A(L, K^i) = \varinjlim_j \operatorname{Hom}_A(L/\mathfrak{m}^{p^j}L, K^i).$$

D'après $(***)$, ceci implique $\operatorname{Hom}_A(L, C^i) = \operatorname{Hom}_A(L, K^i)$, donc $C^i = K^i$, et d'après la suite exacte (3), $H^i_{\mathfrak{m}}(N) = 0$. On a donc montré que $H^i_{\mathfrak{m}}(N) = 0$ pour $i > \operatorname{dp}_A M$. Comme d'après le théorème de dualité locale $\dim N = \sup\{s \text{ tels que } H^s_{\mathfrak{m}}(N) \neq 0\}$, il reste $\dim N \leqslant \operatorname{dp}_A M$, ce que nous voulions démontrer.

Considérons maintenant le cas où A *est essentiellement de type fini sur un corps de caractéristique* 0. Soit donc M un A-module non nul de type fini et de dimension projective finie, et soit N un A-module non nul de type fini tel que $M \otimes_A N$ soit de longueur finie. On va construire un anneau local noethérien $\overline{A}$ de caractéristique $p>0$, un $\overline{A}$-module non nul $\overline{M}$ de type fini et de dimension projective finie égale à $\operatorname{dp}_A M$, et un $\overline{A}$-module de type fini $\overline{N}$ tels que $\dim_{\overline{A}} \overline{N} \geqslant \dim_A N$ et que $\overline{M} \otimes_{\overline{A}} \overline{N}$ soit de longueur finie. On pourra alors conclure en utilisant le résultat déjà prouvé en caractéristique $p>0$.

Lemme **(2.2)**. — *Soit* M *un module non nul de type fini et de dimension projective finie* r, *sur un anneau local noethérien* A *essentiellement de type fini sur un corps* k *de caractéristique* 0. *Soit* N *un* A-*module de type fini tel que* $\operatorname{Supp} M \cap \operatorname{Supp} N$ *soit réduit à l'idéal maximal de* A. *Alors,* *il existe une k-algèbre de type fini* A', *un idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* A', *et des* A'*-modules de type fini* M' *et* N' *ayant les propriétés suivantes :*

(i) $A'_{\mathfrak{p}}=A$, $M'_{\mathfrak{p}}=M$, $N'_{\mathfrak{p}}=N$.

(ii) M' *est un* A'*-module de dimension projective r, admettant une résolution de longueur r par des* A'*-modules libres de type fini.*

(iii) *L'idéal premier* $\mathfrak{p}$ *appartient à toutes les composantes irréductibles de* $\operatorname{Supp} N'$, *et c'est l'unique idéal premier minimal de* $\operatorname{Supp} N' \cap \operatorname{Supp} M'$.

Il existe une k-algèbre de type fini B, et un idéal premier $\mathfrak{m}$ de B tel que $A=B_{\mathfrak{m}}$. Soient X et Y, deux B-modules de type fini tels que $X_{\mathfrak{m}}=M$ et $Y_{\mathfrak{m}}=N$. Considérons une résolution, par des B-modules libres de type fini, du B-module X. Soit Ω le r-ième module de syzygie de X fourni par cette résolution. Comme $X_{\mathfrak{m}}$ est de dimension projective r sur $B_{\mathfrak{m}}$, le $B_{\mathfrak{m}}$-module $\Omega_{\mathfrak{m}}$ est libre, donc il existe un élément $s \in B-\mathfrak{m}$ tel que Ω_s soit libre sur B_s. D'un autre côté, considérons les idéaux premiers minimaux $\mathfrak{q}_i$ $(i=1, \ldots, n)$ du support du B-module Y. En les rangeant convenablement, on peut supposer qu'on a $\mathfrak{q}_i \subset \mathfrak{m}$ pour $i \leqslant \ell$, et $\mathfrak{q}_i \not\subset \mathfrak{m}$ pour $i > \ell$. D'après le lemme d'évitement, on peut trouver un élément $t \in \bigcap_{i>\ell} \mathfrak{q}_i$, tel que $t \notin \mathfrak{m}$. Soient enfin $\mathfrak{p}_i$ $(i=1, \ldots, n')$ les idéaux premiers minimaux de $\operatorname{Supp} X \cap \operatorname{Supp} Y$, avec $\mathfrak{m}=\mathfrak{p}_1$. Toujours d'après le lemme d'évitement, il existe $u \in \bigcap_{i>1} \mathfrak{p}_i$, avec $u \notin \mathfrak{m}$. On vérifie facilement que

$$A'=B_{stu},\ \mathfrak{p}=\mathfrak{m}A', \quad M'=X_{stu} \quad \text{et} \quad N'=Y_{stu}$$

ont les propriétés réclamées, la première par construction, la deuxième par le choix de s, et la troisième par le choix de t et u.

Lemme (**2.3**). — *Soit* A' *une algèbre de type fini sur un corps k, et soient* $\mathfrak{p}$ *un idéal premier de* A' *et* M' *et* N' *des* A'*-modules de type fini ayant les propriétés suivantes :*

M' *est un* A'*-module de dimension projective r, admettant une résolution de longueur r par des* A'*-modules libres de type fini.*

L'idéal premier $\mathfrak{p}$ *appartient à toutes les composantes irréductibles de* $\operatorname{Supp} N'$, *et c'est l'unique idéal premier minimal de* $\operatorname{Supp} N' \cap \operatorname{Supp} M'$.

Alors, il existe un sous-corps $\bar{k}$ *de k, qui est une extension de type fini de son corps premier, une* $\bar{k}$*-algèbre de type fini* $\overline{A'}$ *et des* $\overline{A'}$*-modules de type fini* $\overline{M'}$ *et* $\overline{N'}$ *ayant les propriétés suivantes :*

(i) $A'=k\otimes_{\bar{k}}\overline{A'}$, $M'=\overline{M'}\otimes_{\overline{A'}}A'$ *et* $N'=\overline{N'}\otimes_{\overline{A'}}A'$.

(ii) $\overline{M'}$ *est un* $\overline{A'}$*-module de dimension projective r, admettant une résolution de longueur r par des* $\overline{A'}$*-modules libres de type fini.*

(iii) *Si* $\bar{\mathfrak{p}}=\mathfrak{p}\cap\overline{A'}$, *alors* $\bar{\mathfrak{p}}$ *est l'unique idéal premier minimal de* $\operatorname{Supp}\overline{M'}\cap\operatorname{Supp}\overline{N'}$, *le* $\overline{A'}_{\bar{\mathfrak{p}}}$*-module* $\overline{M'}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ *est de dimension projective r, enfin* $\dim \overline{N'}_{\bar{\mathfrak{p}}} \geqslant \dim N'_{\mathfrak{p}}$.

Considérons une résolution libre de longueur r du A'-module M', par des modules libres de type fini, et une présentation finie du A'-module N', soient :

$$0 \to L_r \xrightarrow{\varphi_r} L_{r-1} \to \ldots \xrightarrow{\varphi_1} L_0 \to M' \to 0 \quad \text{et} \quad F_1 \xrightarrow{\psi} F_0 \to N' \to 0.$$

Choisissons une base pour chaque L_i et chaque F_i, et représentons les homomorphismes φ_i $(i=1, \ldots, r)$ et ψ par des matrices $(\varphi_i^{p,q})$ et $(\psi^{p,q})$. On sait que A' est de la forme $k[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{A}$. Prenons dans $k[X_1, \ldots, X_n]$ des polynômes $\alpha_i^{p,q}(X)$ et $\beta^{p,q}(X)$ tels que leurs images dans A' soient $\varphi_i^{p,q}$ et $\psi^{p,q}$. Prenons des polynômes $a_s(X)$, dans $k[X_1, \ldots, X_n]$, formant un système fini de générateurs de $\mathfrak{A}$. Choisissons enfin une famille finie de polynômes $b_t(X)$ tels que leurs images dans A' engendrent l'idéal premier $\mathfrak{p}$.

Il est possible de trouver un corps $\bar{k}$ contenu dans k, qui soit une extension de type fini du corps premier de k, et qui contienne les coefficients des polynômes $\alpha_i^{p,q}(X)$, $\beta^{p,q}(X)$, $a_s(X)$ et $b_t(X)$. Considérons alors l'anneau $\overline{A'}=\bar{k}[X_1, \ldots, X_n]/\overline{\mathfrak{A}}$, où $\overline{\mathfrak{A}}$ est l'idéal engendré par les polynômes $a_s(X)$ dans $\bar{k}[X_1, \ldots, X_n]$. On a évidemment $A'=k\otimes_{\bar{k}}\overline{A'}$, donc A' est une $\overline{A'}$-algèbre fidèlement plate. Pour tous i, p, q, soit $\bar{\varphi}_i^{p,q}$ l'image de $\alpha_i^{p,q}(X)$ dans $\overline{A'}$. Les coefficients $\bar{\varphi}_i^{p,q}$ forment des matrices $\bar{\varphi}_i$ telles que $A'\otimes_{\overline{A'}}\bar{\varphi}_i=\varphi_i$. Comme A' est fidèlement plat sur $\overline{A'}$, le complexe exact $(L_\bullet, \varphi_\bullet)$ se descend en un complexe exact de $\overline{A'}$-modules libres :

$$0 \to \bar{L}_r \xrightarrow{\bar{\varphi}_r} \bar{L}_{r-1} \to \ldots \xrightarrow{\bar{\varphi}_1} \bar{L}_0.$$

Soit $\overline{M'}$ le conoyau de $\bar{\varphi}_1$. On a $\overline{M'}\otimes_{\overline{A'}}A'=M'$, et $\overline{M'}$ admet une résolution libre de longueur r par des $\overline{A'}$-modules de type fini. On construit de la même façon un $\overline{A'}$-module de type fini $\overline{N'}$ tel que $\overline{N'}\otimes_{\overline{A'}}A'=N'$. On a donc prouvé (i) et (ii).

Montrons que (iii) est vérifiée. Soit $\bar{\mathfrak{q}}$ un idéal premier de $\overline{A'}$ tel que

$$\bar{\mathfrak{q}} \in \operatorname{Supp} \overline{M'} \cap \operatorname{Supp} \overline{N'}.$$

Comme A' est fidèlement plat sur $\overline{A'}$, il existe un idéal premier $\mathfrak{q}$ de A' au-dessus de $\bar{\mathfrak{q}}$. Mais alors, $A'_{\mathfrak{q}}$ est fidèlement plat sur $\overline{A'_{\bar{\mathfrak{q}}}}$, donc $\mathfrak{q}\in\operatorname{Supp} M' \cap \operatorname{Supp} N'$, et d'après l'hypothèse (2), $\mathfrak{q}\supset\mathfrak{p}$, ce qui implique $\bar{\mathfrak{q}}\supset\bar{\mathfrak{p}}$.

Comme $A'_{\mathfrak{p}}$ est fidèlement plat sur $\overline{A'_{\bar{\mathfrak{p}}}}$, on a $\operatorname{dp}_{\overline{A'_{\bar{\mathfrak{p}}}}}\overline{M'_{\bar{\mathfrak{p}}}}=\operatorname{dp}_{A'_{\mathfrak{p}}}M'_{\mathfrak{p}}=r$.

Enfin, nous devons prouver $\dim \overline{N'_{\bar{\mathfrak{p}}}} \geqslant \dim N'_{\mathfrak{p}}$. Soit alors d la dimension de $\overline{N'_{\bar{\mathfrak{p}}}}$, et soit $x=(x_1, \ldots, x_d)$ une suite d'éléments de $\bar{\mathfrak{p}}\overline{A'_{\bar{\mathfrak{p}}}}$ tels que $\overline{N'_{\bar{\mathfrak{p}}}}/x\overline{N'_{\bar{\mathfrak{p}}}}$ est de longueur finie. Pour montrer que $\dim N'_{\mathfrak{p}}\leqslant d$, il nous suffit de montrer que $N'_{\mathfrak{p}}/xN'_{\mathfrak{p}}$ est de longueur finie. Mais, comme $N'_{\mathfrak{p}}/xN'_{\mathfrak{p}}=A'\otimes_{\overline{A'}}(\overline{N'_{\bar{\mathfrak{p}}}}/x\overline{N'_{\bar{\mathfrak{p}}}})$, on sait ([7], chap. IV, § 2, th. 2) que :

$$\operatorname{Supp} N'_{\mathfrak{p}}/xN'_{\mathfrak{p}} = \bigcup_{\bar{\mathfrak{q}} \in \operatorname{Supp} \overline{N'_{\bar{\mathfrak{p}}}}/x\overline{N'_{\bar{\mathfrak{p}}}}} \operatorname{Supp} A'_{\mathfrak{p}}/\bar{\mathfrak{q}}A'_{\mathfrak{p}} = \operatorname{Supp} A'_{\mathfrak{p}}/\bar{\mathfrak{p}}A'_{\mathfrak{p}}.$$

Mais, on a construit $\overline{A'}$ et $\bar{\mathfrak{p}}$ de façon à avoir $\bar{\mathfrak{p}}A'=\mathfrak{p}$. *A fortiori*, on aura $\dim A'_{\mathfrak{p}}/\bar{\mathfrak{p}}A'_{\mathfrak{p}}=0$, donc le lemme est démontré.

Lemme **(2.4)**. — *Soit* R *un anneau de Dedekind ayant une infinité d'idéaux maximaux. Soit* B *une* R-*algèbre de type fini. Soit* V *un* B-*module de type fini de dimension projective r. Soit* T *un* B*-module de type fini. Supposons qu'il existe un idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* B *ayant les propriétés suivantes* :

(i) $\mathfrak{p} \cap R = 0$.

(ii) $\mathfrak{p}$ *est le seul idéal premier minimal de* $\operatorname{Supp} V \cap \operatorname{Supp} T$, *et* $\mathfrak{p}$ *est contenu dans toutes les composantes irréductibles de* $\operatorname{Supp} T$.

(iii) $V_{\mathfrak{p}}$ *est un* $B_{\mathfrak{p}}$*-module de dimension projective* r.

Alors, il existe un idéal maximal $\mathfrak{m}$ *de* R, *et un élément* α *de* $\mathfrak{m}$, *qui est une uniformisante de* $R_{\mathfrak{m}}$, *ayant les propriétés suivantes* :

1) α *n'est pas inversible dans* $B/\mathfrak{p}$.

2) α *est régulier dans* B, V *et* T.

3) *Si* $\mathfrak{q}$ *est un idéal premier de* B *minimal parmi ceux contenant* $\mathfrak{p} + \alpha B$, *alors* :

a) $V_{\mathfrak{q}}/\alpha V_{\mathfrak{q}}$ *est un* $B_{\mathfrak{q}}/\alpha B_{\mathfrak{q}}$*-module de dimension projective* r;

b) $\dim T_{\mathfrak{q}}/\alpha T_{\mathfrak{q}} = \dim T_{\mathfrak{p}}$;

c) $\operatorname{Supp}(V_{\mathfrak{q}}/\alpha V_{\mathfrak{q}}) \cap \operatorname{Supp}(T_{\mathfrak{q}}/\alpha T_{\mathfrak{q}})$ *est réduit à l'idéal* $\mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}/\alpha B_{\mathfrak{q}}$.

Comme $\mathfrak{p} \cap R = 0$, l'anneau $B/\mathfrak{p}$ est une R-algèbre de type fini, qui contient R. Le lemme de normalisation dit qu'il existe un élément s de R, tel que $(B/\mathfrak{p})_s$ est entier sur une algèbre de polynômes sur R_s. Cela prouve que tous les idéaux maximaux de R, sauf au plus un nombre fini, se relèvent dans $B/\mathfrak{p}$. Autrement dit, pour tout idéal maximal $\mathfrak{A}$ de R, sauf au plus un nombre fini, on a $\mathfrak{A}(B/\mathfrak{p}) \neq B/\mathfrak{p}$. Comme les idéaux premiers de B, associés à B, V ou T sont en nombre fini, on voit qu'on peut trouver un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de R, tel que $\mathfrak{m}(B/\mathfrak{p}) \neq B/\mathfrak{p}$, et tel que $\mathfrak{m}$ n'est pas contenu dans la réunion des idéaux premiers appartenant à $\operatorname{Ass} B \cup \operatorname{Ass} V \cup \operatorname{Ass} T$. Donc, si $\alpha \in R$ est une uniformisante de $R_{\mathfrak{m}}$, on a choisi $\mathfrak{m}$ de sorte que α soit régulier dans B, V et T et que α ne soit pas inversible dans $B/\mathfrak{p}$. Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de B, minimal parmi ceux contenant $\mathfrak{p} + \alpha B$. Comme $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$, le $A_{\mathfrak{q}}$-module $V_{\mathfrak{q}}$ est de dimension projective r. Comme α est $B_{\mathfrak{q}}$-régulier et $V_{\mathfrak{q}}$-régulier, cela implique que $V_{\mathfrak{q}}/\alpha V_{\mathfrak{q}}$ est un $B_{\mathfrak{q}}/\alpha B_{\mathfrak{q}}$-module de dimension projective r. Comme tout idéal premier minimal de $\operatorname{Supp} T$ est contenu dans $\mathfrak{p}$, et comme l'anneau B est caténaire, on a $\dim T_{\mathfrak{q}} = \dim T_{\mathfrak{p}} + \dim B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}} = \dim T_{\mathfrak{p}} + 1$, donc $\dim T_{\mathfrak{q}}/\alpha T_{\mathfrak{q}} = \dim T_{\mathfrak{p}}$. Enfin, soit $\mathfrak{q}'B_{\mathfrak{q}}$ un idéal premier de $B_{\mathfrak{q}}$ appartenant à

$$\operatorname{Supp}(V_{\mathfrak{q}}/\alpha V_{\mathfrak{q}}) \cap \operatorname{Supp}(T_{\mathfrak{q}}/\alpha T_{\mathfrak{q}}).$$

Alors $\mathfrak{q}'B_{\mathfrak{q}} \in \operatorname{Supp} V_{\mathfrak{q}} \cap \operatorname{Supp} T_{\mathfrak{q}}$, donc $\mathfrak{q}'B_{\mathfrak{q}} \supset \mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}}$. Mais $\mathfrak{q}'B_{\mathfrak{q}} \ni \alpha$, donc $\mathfrak{q}'B_{\mathfrak{q}} \supset \mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}} + \alpha B_{\mathfrak{q}}$, donc, comme $\mathfrak{q}$ a été choisi minimal parmi les idéaux contenant $\mathfrak{p} + \alpha B$, on ne peut qu'avoir $\mathfrak{q}'B_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}$, ce qui prouve bien :

$$\operatorname{Supp}(V_{\mathfrak{q}}/\alpha V_{\mathfrak{q}}) \cap \operatorname{Supp}(T_{\mathfrak{q}}/\alpha T_{\mathfrak{q}}) = \{\mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}/\alpha B_{\mathfrak{q}}\},$$

et le lemme est démontré.

En utilisant d'abord le lemme (2.2), puis le lemme (2.3), en localisant la situation à l'idéal premier $\overline{\mathfrak{p}}$, enfin en la délocalisant avec précision en appliquant à nouveau (2.2), on se trouve ramené au problème suivant :

Soit k un corps qui est une extension de type fini de $\mathbf{Q}$. Soit B′ une algèbre de type fini sur k. Soient V′ et T′ deux B′-modules de type fini, et $\mathfrak{p}'$ un idéal premier de B′, tels que :

1) V′ est de dimension projective r sur B′.

2) $V'_{\mathfrak{p}'}$ est un $B'_{\mathfrak{p}'}$-module de dimension projective r.

3) $\mathfrak{p}'$ est le seul idéal premier minimal de $\operatorname{Supp} V' \cap \operatorname{Supp} T'$.

4) $\{\mathfrak{p}'\}$ est contenu dans toutes les composantes irréductibles de Supp T′.

Montrer qu'il existe un anneau noethérien local $\bar{A}$, de caractéristique $p>0$, un $\bar{A}$-module $\bar{M}$ de type fini et de dimension projective r et un $\bar{A}$-module de type fini $\bar{N}$ tels que $\dim_{\bar{A}} \bar{N} = \dim_{B'_{\mathfrak{p}'}} T'_{\mathfrak{p}'}$, et que $\bar{M} \otimes_{\bar{A}} \bar{N}$ soit de longueur finie.

Soit n le degré de transcendance de k sur $\mathbf{Q}$. Il existe des éléments $X_1, \ldots, X_n$ de k formant une base de transcendance de k sur $\mathbf{Q}$, c'est-à-dire tels que k soit fini sur $\mathbf{Q}(X_1, \ldots, X_n)$.

Considérons la fermeture intégrale D dans k de :

a) $\mathbf{Z}$ si $n=0$;

b) $\mathbf{Q}(X_1, \ldots, X_{n-1})[X_n]$ si $n>0$.

Alors D est un anneau de Dedekind ayant une infinité d'idéaux maximaux. En procédant directement, comme dans la démonstration de (2.2), on voit qu'on peut trouver un élément s de D, une D_s-algèbre de type fini B, et des B-modules de type fini V et T tels que, si $S = D_s - \{0\}$, on ait :

1) $S^{-1}B = B'$, $S^{-1}V = V'$ et $S^{-1}T = T'$.

2) V est un B-module de dimension projective r.

3) Si $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap B$, alors $\mathfrak{p}$ est le seul idéal premier minimal de $\operatorname{Supp} V \cap \operatorname{Supp} T$, et $\{\mathfrak{p}\}$ est contenu dans toutes les composantes irréductibles de Supp T.

Posons $R = D_s$. Alors, R est un anneau de Dedekind ayant une infinité d'idéaux maximaux. Comme $\mathfrak{p} \cap R = 0$, toutes les conditions sont réunies pour appliquer le lemme (2.4). Alors, $B_{\mathfrak{q}}/\alpha B_{\mathfrak{q}}$ est une algèbre essentiellement de type fini sur le corps $R_{\mathfrak{m}}/\alpha R_{\mathfrak{m}}$. Deux cas se présentent alors :

a) Si $n=0$, alors $R_{\mathfrak{m}}/\alpha R_{\mathfrak{m}}$ est un corps de caractéristique >0, et nous sommes au bout de nos peines.

b) $n>0$, alors $R_{\mathfrak{m}}/\alpha R_{\mathfrak{m}}$ est une extension de type fini de $\mathbf{Q}$, de degré de transcendance $n-1$ sur $\mathbf{Q}$. On délocalise alors avec précision grâce au lemme (2.2), et on répète l'opération $n-1$ fois, de façon à se ramener au cas précédent, qu'on a résolu.

Considérons maintenant le cas où A *vérifie la condition* (iii).

C'est-à-dire qu'il existe un système inductif filtrant d'anneaux locaux B_α, tel que :

1) $A = \varinjlim_{\alpha} B_\alpha$.

2) Pour tout α, l'anneau local B_α est essentiellement de type fini sur un corps.

3) Tout morphisme de transition $B_\alpha \to B_{\alpha'}$ est local, et fait de $B_{\alpha'}$ une B_α-algèbre locale-étale (*i.e.*, une B_α-algèbre locale obtenue par localisation d'un revêtement étale de B_α).

Soit donc M un A-module de type fini et de dimension projective finie, et soit N un A-module de type fini, tel que $M \otimes_A N$ soit de longueur finie. On veut montrer que $\dim_A N \leqslant dp_A M$. On ne change donc rien au problème en remplaçant N par $A/\mathfrak{A}$, où $\mathfrak{A}$ est l'annulateur de N. Considérons une résolution libre minimale de M, soit :

$$0 \to A^{n_r} \xrightarrow{\varphi_r} A^{n_{r-1}} \to \ldots \xrightarrow{\varphi_1} A^{n_0} \to M \to 0.$$

Pour $i=1, \ldots, r$, représentons les homomorphismes φ_i par des matrices $(\varphi_i^{p,q})$, et choisissons un système de générateurs a_j de l'idéal $\mathfrak{A}$.

On peut trouver α tel que l'image de B_α dans A contienne les coefficients des matrices φ_i $(i=1, \ldots, r)$, et les éléments a_j. Comme les coefficients $\varphi_i^{p,q}$ des matrices φ_i sont dans B_α, les applications $B_\alpha^{n_i} \xrightarrow{\varphi_i} B_\alpha^{n_{i-1}}$ sont définies, et comme A est fidèlement plat sur B_α, l'existence et l'exactitude du complexe $(A^{n_\cdot}, \varphi_\cdot)$ impliquent que :

$$0 \to B_\alpha^{n_r} \xrightarrow{\varphi_r} B_\alpha^{n_{r-1}} \to \ldots \xrightarrow{\varphi_1} B_\alpha^{n_0},$$

est un complexe exact de B_α-modules libres.

Soit $M_\alpha = \operatorname{coker}(B_\alpha^{n_1} \xrightarrow{\varphi_1} B_\alpha^{n_0})$. Alors M_α est un B_α-module de type fini de dimension projective finie et égale à $dp_A M$, tel que $M_\alpha \otimes_{B_\alpha} A = M$. Soit $\mathfrak{A}_\alpha$ l'idéal engendré par les a_j dans B_α. Considérons $M_\alpha \otimes_{B_\alpha} (B_\alpha/\mathfrak{A}_\alpha)$. Alors, comme

$$(M_\alpha \otimes_{B_\alpha} (B_\alpha/\mathfrak{A}_\alpha)) \otimes_{B_\alpha} A = M \otimes_A (A/\mathfrak{A}),$$

et comme A est fidèlement plat sur B_α, on constate que $M_\alpha \otimes_{B_\alpha} (B_\alpha/\mathfrak{A}_\alpha)$ est un B_α-module de longueur finie. Puisque B_α est essentiellement de type fini sur un corps, on en déduit $\dim B_\alpha/\mathfrak{A}_\alpha \leqslant dp_{B_\alpha} M_\alpha = dp_A M$. Il reste que pour démontrer le théorème, il suffit de montrer $\dim B_\alpha/\mathfrak{A}_\alpha = \dim A/\mathfrak{A}$. Mais, comme $A/\mathfrak{A}$ est fidèlement plat sur $B_\alpha/\mathfrak{A}_\alpha$, on a évidemment $\dim A/\mathfrak{A} \geqslant \dim B_\alpha/\mathfrak{A}_\alpha$. D'un autre côté, comme $A/\mathfrak{A}$ est une localisation d'un anneau entier sur $B_\alpha/\mathfrak{A}_\alpha$, on a $\dim A/\mathfrak{A} \leqslant \dim B_\alpha/\mathfrak{A}_\alpha$ d'après le théorème de Cohen-Seidenberg. c.q.f.d.

Corollaire **(2.5)**. — *Soit* X *un schéma localement de type fini sur un corps. Soit* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent, localement de dimension projective finie. Soit* Y *un sous-schéma irréductible fermé de* X. *On suppose que* $\operatorname{Supp} \mathscr{F} \cap Y$ *est non vide. Alors, si* C *est une composante irréductible de* $\operatorname{Supp} \mathscr{F} \cap Y$, *on a* $\dim Y - \dim C \leqslant \inf_{x \in C} dp_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathscr{F}_x$.

Ce corollaire est la forme géométrique du théorème (2.1).

3. Démonstration d'une conjecture de M. Auslander

Ce paragraphe se réduit pratiquement à l'énoncé suivant :

Théorème **(3.1)**. — *Soit* A *un anneau local noethérien. On suppose vérifiée l'une des conditions suivantes* :

(i) A *est de caractéristique* $p > 0$.

(ii) A *est ind-étale sur un anneau essentiellement de type fini sur un corps.*

Alors, si $M \neq 0$ *est un* A*-module de type fini de dimension projective finie, toute suite* M*-régulière est une suite* A*-régulière.*

Compte tenu du théorème d'intersection, c'est une conséquence de l'implication (d) $\Rightarrow$ (b) du théorème (0.10).

Remarque. — Soit A un anneau qui est le complété d'un anneau local, essentiellement de type fini sur un corps de caractéristique 0. Alors A est aussi le complété d'un anneau excellent hensélien B, pour lequel le théorème d'intersection est vrai. Le morphisme canonique $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} B$ définit une bijection entre Ass A et Ass B. Soit alors $\mathfrak{p}$ un idéal premier associé à A, et soit M un A-module de type fini et de dimension projective finie tel que $M/\mathfrak{p}M$ soit de longueur finie. Posons $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap B$. En utilisant le théorème d'approximation pour les modules de dimension projective finie, on peut construire un B-module de type fini N, de dimension projective finie égale à $\mathrm{dp}_A M$, tel que $N/\mathfrak{q}N$ est de longueur finie. Par le théorème d'intersection pour B, on en déduit que N est de profondeur 0, donc que M est de profondeur 0.

En utilisant cette remarque et le lemme technique (5.2), ci-dessous, on démontre le résultat suivant, par récurrence sur dim M :

Proposition **(3.2)**. — *Soit* B *un anneau local essentiellement de type fini sur un corps, et soit* A *son complété. Alors, si* M *est un* A*-module de type fini et de dimension projective finie, tout élément* M*-régulier est* A*-régulier.*

On constate que la difficulté pour généraliser aux suites régulières dans le cas un peu plus général vient du fait que si x est un élément A-régulier, A/xA n'est plus le complété d'un anneau essentiellement de type fini sur un corps. Néanmoins, (3.2) nous suffit pour démontrer le résultat suivant dû à M. Auslander.

Corollaire **(3.3)**. — *Soit* A *un anneau local noethérien. On suppose vérifiée l'une des conditions suivantes* :

(i) A *est de caractéristique* $p > 0$.

(ii) *Le complété de* A *est isomorphe au complété d'un anneau essentiellement de type fini sur un corps.*

Alors, pour que A *soit intègre, il faut et il suffit qu'il existe un idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* A *qui soit de dimension projective finie sur* A.

La condition est évidemment nécessaire, car si A est intègre (0) est un idéal premier.

Réciproquement, soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier tel que $A/\mathfrak{p}$ soit de dimension projective finie. Alors, par (3.1) ou (3.2), tout élément $A/\mathfrak{p}$-régulier est A-régulier. Cela implique que la flèche canonique $A \to A_\mathfrak{p}$ est une injection. Mais, comme $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ est de dimension projective finie, $A_\mathfrak{p}$ est un anneau régulier, donc intègre. L'injection $A \hookrightarrow A_\mathfrak{p}$ entraîne alors l'intégrité de A.

4. Modules parfaits

Rappelons la terminologie suivante qui généralise la notion d'idéaux parfaits due à Macaulay [20].

Définition (4.1). — *Soit* A *un anneau local noethérien. On dira qu'un* A-*module de type fini* M *est parfait s'il est de dimension projective finie, et si sa dimension projective est égale à son grade* (i.e. $\mathrm{Ext}^i_A(M, A)=0$ *pour* $i \neq \mathrm{dp}_A M$).

Exemples :

1) Si $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_g)$ est une suite A-régulière, A/α est un A-module parfait.

2) Si M est un A-module de longueur finie de dimension projective finie, c'est un A-module parfait.

3) Si M est un A-module de Cohen-Macaulay de dimension projective finie, c'est un A-module parfait, car si α est M-régulier et A-régulier, M est parfait si et seulement si $M/\alpha M$ est parfait.

4) Si M est un module parfait et $\mathfrak{p}$ un idéal premier du support de M, alors $M_\mathfrak{p}$ est un $A_\mathfrak{p}$-module parfait.

De la définition même des modules parfaits découle le théorème suivant qui montre que sur un anneau local pour lequel le théorème d'intersection est vrai, un module parfait vérifie les conjectures (a), (b), (d), (e) et (f) énoncées au § 0.

Théorème (4.2). — *Soit* A *un anneau local noethérien pour lequel le théorème d'intersection est vrai. Soit* M *un* A-*module parfait. Alors* :

1) *Tout système de paramètres pour* M *se prolonge en un système de paramètres pour* A.

2) *Toute suite* M-*régulière est une suite* A-*régulière.*

3) grade M + dim M = dim A.

4) *Si* N *est un* A-*module de type fini et si* $\mathfrak{p}$ *est un idéal premier minimal de* $\mathrm{Supp}\, M \cap \mathrm{Supp}\, N$, *alors* $\dim N_\mathfrak{p} + \dim M_\mathfrak{p} \leqslant \dim A_\mathfrak{p}$.

Le théorème est une conséquence immédiate de (0.10), compte tenu du fait que le théorème d'intersection est vrai pour A, et du fait que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de Supp M, on a $\mathrm{grade}\, M_\mathfrak{p} = \mathrm{dp}_{A_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}$.

Remarquons, enfin, le fait suivant qui lie la régularité d'un module de dimension projective finie à celle de l'anneau.

Proposition (4.3). — *Soit* A *un anneau local noethérien pour lequel le théorème d'intersection est vrai. Soit* M *un* A-*module de type fini de dimension projective finie. Pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* Supp M, *si* $M_\mathfrak{p}$ *est de Cohen-Macaulay, alors il en est de même de* $A_\mathfrak{p}$.

En effet, si $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ est une suite $M_\mathfrak{p}$-régulière de longueur maximale, $M_\mathfrak{p}/\alpha M_\mathfrak{p}$ est un $A_\mathfrak{p}$-module de longueur finie de dimension projective finie. Le théorème d'intersection dit alors que $\dim A_\mathfrak{p} \leqslant \mathrm{dp}_{A_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}/\alpha M_\mathfrak{p}$. Mais, comme tout module de dimension projective finie a une dimension projective inférieure à la profondeur de l'anneau, on a $\dim A_\mathfrak{p} \leqslant \mathrm{prof}\, A_\mathfrak{p}$, ce qui implique bien $\dim A_\mathfrak{p} = \mathrm{prof}\, A_\mathfrak{p}$.

Donnons enfin une caractérisation homologique des systèmes de paramètres, non forcément maximaux, qui sont des suites régulières :

Proposition **(4.4).** — *Soient* A *un anneau local noethérien,* $(x_1, \ldots, x_s)$ *un système de paramètres de* A, i.e. $\dim A/(x_1, \ldots, x_s) = \dim A - s$; *alors une condition nécessaire et suffisante pour que* $(x_1, \ldots, x_s)$ *soit une suite* A*-régulière est que* $\mathrm{dp}_A A/(x_1, \ldots, x_s) < \infty$.

La nécessité est bien connue. Pour prouver la suffisance, nous allons montrer que le complexe de Koszul $K_\bullet(x_1, \ldots, x_s, A)$ est exact. Ce complexe est égal à

$$(*) \qquad 0 \to \overset{s}{\wedge} A^s \to \overset{s-1}{\wedge} A^s \to \ldots \to \overset{2}{\wedge} A^s \to A^s \to A.$$

(i) Nous allons montrer que $(*)_{\mathfrak{p}}$ est exact si $\mathrm{prof}\, A_{\mathfrak{p}} < s$, où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A.

En effet, si $\mathfrak{p} \not\supset (x_1, \ldots, x_s)$ on sait que $(*)_{\mathfrak{p}}$ est scindé. D'autre part, nous allons montrer que : $\mathrm{dp}_{A_{\mathfrak{p}}}(A/x_1, \ldots, x_s)_{\mathfrak{p}} \geqslant s$ pour tout $\mathfrak{p} \supset (x_1, \ldots, x_s)$. Il suffira de le prouver pour $\mathfrak{p}$ minimal contenant $(x_1, \ldots, x_s)$. Or, en un tel $\mathfrak{p}$, $(A/(x_1, \ldots, x_s))_{\mathfrak{p}}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$-module de longueur finie, donc, par (4.3), $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de Cohen-Macaulay, donc le système de paramètres $x_1, \ldots, x_s$ de $A_{\mathfrak{p}}$ est une $A_{\mathfrak{p}}$-suite, donc $(*)_{\mathfrak{p}}$ est exact et est une résolution minimale, projective, de $(A/(x_1, \ldots, x_s))_{\mathfrak{p}}$.

(ii) Montrons maintenant que $(*)$ est exact. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal dans $\bigcup_{i=1}^{s} \mathrm{Supp}(H_i(x_1, \ldots, x_s, A))$. Alors $\mathfrak{p} \supset (x_1, \ldots, x_s)$, donc $\mathrm{prof}\, A_{\mathfrak{p}} \geqslant s$, puisque $\mathrm{dp}_{A_{\mathfrak{p}}}(A/x_1, \ldots, x_s)_{\mathfrak{p}} \geqslant s$.

Appliquant le lemme d'acyclicité (1.8) au complexe $(*)_{\mathfrak{p}}$, dont l'homologie en degré positif est de longueur finie, on trouve $(H_i(x_1, \ldots, x_s, A))_{\mathfrak{p}} = 0$ quel que soit $i = 1, \ldots, s$, ce qui est contradictoire. Donc $\bigcup_{1}^{s} \mathrm{Supp}(H_i(x_1, \ldots, x_s, A)) = \emptyset$, c.q.f.d.

5. Démonstration d'une conjecture de H. Bass

Le théorème qui suit démontre dans un cadre « presque » général un résultat conjecturé par H. Bass dans [6].

Théorème **(5.1).** — *Soit* A *un anneau local noethérien. On suppose vérifiée l'une des conditions suivantes :*

(i) A *est de caractéristique* $p > 0$.

(ii) A *est essentiellement de type fini sur un corps de caractéristique* 0.

(iii) A *est ind-étale sur un anneau essentiellement de type fini sur un corps de caractéristique* 0.

(iv) *Le complété* $\hat{A}$ *de* A *est isomorphe au complété d'un anneau local essentiellement de type fini sur un corps de caractéristique* 0.

Alors, s'il existe un A*-module non nul* T, *de type fini et de dimension injective finie,* A *est un anneau de Cohen-Macaulay.*

Remarque. — Il est évident que pour tout anneau noethérien local de Cohen-Macaulay A, il existe un A-module non nul de type fini de dimension injective finie. En effet, soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ un système de paramètres de A. C'est une suite A-régulière, donc A/α est un A-module de longueur finie de dimension projective finie. Alors, si E est une enveloppe injective du corps résiduel de A (*i.e.* un module dualisant pour A), $\mathrm{Hom}_A(A/\alpha, E)$ est un A-module de longueur finie (donc de type fini) et de dimension injective finie.

Rappelons d'abord quelques faits très simples que nous utiliserons au cours de la démonstration.

(*) Pour qu'un anneau local soit de Cohen-Macaulay, il faut et il suffit que son complété soit de Cohen-Macaulay.

(**) Pour qu'un module T (resp. M) de type fini soit de dimension injective finie (resp. de dimension projective finie) sur un anneau local noethérien A, il faut et il suffit que son complété $\hat{T}$ (resp. $\hat{M}$) soit de dimension injective finie (resp. de dimension projective finie) sur le complété $\hat{A}$ de A.

Compte tenu de (*) et (**), on constate qu'il suffit de démontrer le théorème lorsque A vérifie l'une des conditions (i) ou (iv), et même plus généralement lorsque le complété de A vérifie une des conditions (i) ou (iv).

Notre intention est de prouver le théorème par récurrence sur dim T. Pour ceci, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme **(5.2)**. — *Soit* A *un anneau local noethérien. On suppose que le complété* $\hat{A}$ *de* A *vérifie l'une des conditions* (i) *ou* (iv) *de* (5.1). *Alors pour tout idéal premier* $\bar{\mathfrak{p}}$ *de* $\hat{A}$, *le complété* $(\hat{A}_{\bar{\mathfrak{p}}})^\wedge$ *de* $\hat{A}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ *vérifie l'une des conditions* (i) *ou* (iv).

La propriété d'être de caractéristique $p>0$ se conserve évidemment par localisation et complétion, donc la condition (i) ne pose pas de problème.

Supposons donc que A est essentiellement de type fini sur k, un corps de caractéristique 0. Soit $\bar{\mathfrak{p}}$ un idéal premier du complété $\hat{A}$ de A, et soit $\mathfrak{p}$ sa trace sur A. Comme A est un anneau excellent, ses fibres formelles sont régulières. C'est-à-dire que $\hat{A}_{\bar{\mathfrak{p}}}/\mathfrak{p}\hat{A}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ est un anneau local régulier. Si C est le complété de l'anneau local $\hat{A}_{\bar{\mathfrak{p}}}$, alors $C/\mathfrak{p}C$ est le complété de $\hat{A}_{\bar{\mathfrak{p}}}/\mathfrak{p}\hat{A}_{\bar{\mathfrak{p}}}$, et comme $C/\mathfrak{p}C$ est équicaractéristique, $C/\mathfrak{p}C$ est isomorphe à un anneau de séries formelles $K[[X_1, \ldots, X_s]]$, où K est le corps résiduel de C. Comme $\hat{A}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ est plat sur $A_\mathfrak{p}$, alors C est plat sur $A_\mathfrak{p}$ et le critère local de lissité formelle implique que C est formellement lisse sur $A_\mathfrak{p}$ ([12], chap. 0_{IV}). Mais alors, C est aussi formellement lisse sur le complété $(A_\mathfrak{p})^\wedge$ de $A_\mathfrak{p}$. Soit k' le corps résiduel de $A_\mathfrak{p}$. Alors k' est une extension de type fini de k. Donc k' est une extension algébrique monogène (séparable, bien entendu) d'une extension transcendante pure de k. Cela implique que k' est contenu dans le hensélisé de $A_\mathfrak{p}$, et plus précisément qu'il existe un anneau local A', localisé d'un recouvrement étale de $A_\mathfrak{p}$, tel que A' soit essentiellement de type fini sur son corps résiduel k'. Comme l'homomorphisme $A_\mathfrak{p} \to C$ se factorise à travers $(A_\mathfrak{p})^\wedge$, il se factorise à travers A'. Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} C \arrow[rr, "(1)"] \arrow[dr, "(3)"'] & & \operatorname{Spec} A_\mathfrak{p} \\ & \operatorname{Spec} A' \arrow[ur, "(2)"'] & \end{tikzcd}$$

Comme (1) est formellement lisse, et (2) formellement non ramifié, on sait ([12], chap. IV, (17.1.4)) que (3) est formellement lisse. Soit $\mathfrak{p}'$ l'idéal maximal de A'. Alors $C/\mathfrak{p}'C$ est isomorphe à un anneau de séries formelles $K[[X_1, \ldots, X_s]]$. On sait qu'il existe un anneau B de type fini sur k', et un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de B tels que $A' = B_{\mathfrak{m}}$ et tel que $B/\mathfrak{m} = k'$. Considérons l'anneau $B' = B \otimes_{k'} K[X_1, \ldots, X_s]$. Soit $\mathfrak{m}'$ l'idéal maximal $(\mathfrak{m}, X_1, \ldots, X_s)$ de B'. Comme $K[X_1, \ldots, X_s]$ est formellement lisse sur k', alors B' est formellement lisse sur B, et $B'_{\mathfrak{m}'}$ est formellement lisse sur $B_{\mathfrak{m}} = A'$. Mais alors, l'isomorphisme $(\widehat{B'_{\mathfrak{m}'}})/\mathfrak{p}'(\widehat{B'_{\mathfrak{m}'}}) \simeq C/\mathfrak{p}'C$ se remonte ([12], chap. 0_{IV}, (19.7.1.5)) en un isomorphisme $\widehat{B'_{\mathfrak{m}'}} \simeq C$, ce qui montre bien que C est isomorphe au complété d'une algèbre locale essentiellement de type fini sur un corps de caractéristique o.

Démontrons maintenant le théorème par récurrence sur dim T. On a vu (chap. I, (4.10)) qu'on peut construire un $\hat{A}$-module M, de type fini et de dimension projective finie, ayant même support que $\hat{T}$.

Si dim T=0, alors dim M=0. Par hypothèse, $\hat{A}$ est le complété d'un anneau local noethérien B pour lequel le théorème d'intersection est vrai. Mais alors, M est aussi un B-module de longueur finie de dimension projective finie. Comme $B \otimes_B M$ est de longueur finie, le théorème d'intersection dit que $\dim B \leqslant \mathrm{dp}_B M$. Mais comme $\mathrm{dp}_B M \leqslant \mathrm{prof}\, B$, il reste $\dim B \leqslant \mathrm{prof}\, B$, ce qui exprime bien que B est de Cohen-Macaulay, donc que le complété $\hat{A}$ de B est de Cohen-Macaulay.

Supposons que $\dim T > 0$. Par l'hypothèse de récurrence, compte tenu du lemme (5.2), on peut supposer que pour tout idéal premier $\bar{\mathfrak{p}}$ non maximal du support du $\hat{A}$-module $\hat{T}$, l'anneau $\hat{A}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ est de Cohen-Macaulay. Soit donc M un $\hat{A}$-module de type fini et de dimension projective finie, ayant même support que $\hat{T}$. Soit $\bar{\mathfrak{q}}$ un idéal premier minimal de $\hat{A}$ tel que $\dim \hat{A}/\bar{\mathfrak{q}} = \dim \hat{A}$. Deux situations sont possibles :

1) $M/\bar{\mathfrak{q}}M$ n'est pas de longueur finie. Dans ce cas, il existe un idéal premier $\bar{\mathfrak{p}}$ du support de $\hat{T}$, contenant $\bar{\mathfrak{q}}$. On peut prendre $\bar{\mathfrak{p}}$ maximal parmi les idéaux premiers différents de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\hat{A}$. Comme $\hat{A}$ est un anneau caténaire,

$$\dim \hat{A}/\bar{\mathfrak{p}} + \dim \hat{A}_{\bar{\mathfrak{p}}}/\bar{\mathfrak{q}}\hat{A}_{\bar{\mathfrak{p}}} = \dim \hat{A}/\bar{\mathfrak{q}}.$$

Donc $\dim \hat{A}_{\bar{\mathfrak{p}}} = \dim \hat{A} - 1$. Comme $\bar{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Supp}\, \hat{T}$, on sait (I, § 4, n° 1) qu'on a $\mathrm{prof}\, \hat{A}_{\bar{\mathfrak{p}}} + \dim \hat{A}/\bar{\mathfrak{p}} = \mathrm{prof}\, \hat{A}$, donc $\mathrm{prof}\, \hat{A} = \mathrm{prof}\, \hat{A}_{\bar{\mathfrak{p}}} + 1$. Mais d'après l'hypothèse de récurrence, $\hat{A}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ est de Cohen-Macaulay, donc $\mathrm{prof}\, \hat{A}_{\bar{\mathfrak{p}}} = \dim \hat{A} - 1$. Il reste $\mathrm{prof}\, \hat{A} = \dim \hat{A}$, ce qui exprime bien que $\hat{A}$ est de Cohen-Macaulay.

2) $M/\bar{\mathfrak{q}}M$ est de longueur finie. D'après l'hypothèse, il existe un anneau B essentiellement de type fini sur un corps tel que $\hat{A}$ soit le complété de B. Soit B^h le hensélisé de B. Alors $\hat{A}$ est aussi le complété de B^h. Considérons l'idéal premier de B^h, $\mathfrak{q} = \bar{\mathfrak{q}} \cap B^h$. Comme B^h est un anneau hensélien excellent, ses fibres formelles sont régulières. Compte tenu de $\dim \hat{A}/\bar{\mathfrak{q}} = \dim \hat{A}$, cela implique évidemment $\mathfrak{q}\hat{A} = \bar{\mathfrak{q}}$. Donc $M/(\mathfrak{q}\hat{A})M$ est un module de longueur finie. Autrement dit, il existe un entier c, tel que si $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de $\hat{A}$, l'homomorphisme canonique :

$$(\hat{A}/\mathfrak{m}^{c+1}) \otimes_{\hat{A}} (M/(\mathfrak{q}\hat{A})M) \to (\hat{A}/\mathfrak{m}^c) \otimes_{\hat{A}} (M/(\mathfrak{q}\hat{A})M)$$

est un isomorphisme. On utilise alors le théorème d'approximation pour les modules de dimension projective finie (chap. I, § 6). On sait qu'il existe un B^h-module M' de type fini et de dimension projective finie, égale à $\mathrm{dp}_{\hat{A}}M$, tel que :

$$M' \otimes_{B^h} (\hat{A}/\mathfrak{m}^{c+1}) \simeq M/\mathfrak{m}^{c+1}M.$$

On en déduit que l'homomorphisme canonique :

$$M' \otimes_{B^h} (\hat{A}/\mathfrak{m}^{c+1}) \otimes_{\hat{A}} (\hat{A}/\mathfrak{q}\hat{A}) \to M' \otimes_{B^h} (\hat{A}/\mathfrak{m}^{c}) \otimes_{\hat{A}} (\hat{A}/\mathfrak{q}\hat{A})$$

est un isomorphisme. Il en résulte que l'homomorphisme :

$$(M'/\mathfrak{q}M') \otimes_{B^h} (\hat{A}/\mathfrak{m}^{c+1}) \to (M'/\mathfrak{q}M') \otimes_{B^h} (\hat{A}/\mathfrak{m}^{c})$$

est un isomorphisme, donc que $M'/\mathfrak{q}M'$ est de longueur finie. Mais comme le théorème d'intersection est vrai pour B^h, on en déduit $\dim B^h/\mathfrak{q} \leqslant \mathrm{dp}_{B^h} M'$. Mais comme

$$\dim B^h/\mathfrak{q} = \dim B^h, \qquad \text{et} \qquad \mathrm{dp}_{B^h} M' \leqslant \mathrm{prof}\, B^h,$$

cela implique que B^h est de Cohen-Macaulay et donc que le complété $\hat{A}$ de B^h est de Cohen-Macaulay, ce que nous voulions démontrer.

Corollaire (5.3). — *Si dans les hypothèses du théorème, on suppose de plus que* T *est monogène* (i.e. *un quotient de* A *par un idéal*), *alors* A *est un anneau de Gorenstein.*

D'après le théorème, on sait déjà que A est de Cohen-Macaulay. Soit n la dimension de A, et soit k son corps résiduel. D'après Bass [6], il suffira de montrer que $\mathrm{Ext}^n_A(k, A) \simeq k$. C'est une conséquence du lemme suivant :

Lemme (5.4). — *Soit* T *un module de type fini et de dimension injective finie sur un anneau local noethérien* A. *Soit r la profondeur de* A, *et soit* $x = (x_1, \ldots, x_r)$ *une suite* A-*régulière de longueur maximale. Alors, il y a un isomorphisme de foncteurs définis dans la catégorie des* A-*modules de type fini* :

$$\mathrm{Ext}^r_A(\mathrm{Hom}(\cdot, A/x), T) \simeq \cdot \otimes_A (T/xT).$$

On peut supposer $T \neq 0$. Comme la dimension injective de T est r, le foncteur $\mathrm{Ext}^r_A(\cdot, T)$ est contravariant exact à droite, donc $\mathrm{Ext}^r_A(\mathrm{Hom}_A(\cdot, A/x), T)$ est covariant exact à droite. Il est bien connu ([22], § 2.3, lemme 3), que la restriction à la catégorie des modules de type fini, d'un tel foncteur, est isomorphe au produit tensoriel par sa valeur sur l'anneau de base. Comme $\mathrm{Ext}^r_A(A/x, T) = T/xT$, le lemme est démontré.

(5.3) se déduit alors simplement du lemme, car comme A est de Cohen-Macaulay, $r = \mathrm{prof}\, A = \dim A = n$. Donc, $\mathrm{Ext}^n(k, A) = \mathrm{Hom}_A(k, A/x)$, où $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est une suite régulière de longueur maximale. Mais dire que T est monogène, c'est dire que $k \otimes_A T \simeq k$, cela implique donc $\mathrm{Hom}_A(k, A/x) \simeq k$, et le corollaire (5.3) est démontré.

Pour terminer ce paragraphe, nous allons voir que dans le cas particulier où le module de dimension injective finie est monogène (corollaire (5.3)), on peut donner une démonstration générale, sans restriction sur l'anneau, de la conjecture de Bass. Encore une fois, l'outil essentiel sera la cohomologie locale.

Théorème (5.5). — *Soit* A *un anneau local noethérien. Pour que* A *soit un anneau de Gorenstein, il faut et il suffit qu'il existe un idéal* $\mathfrak{A}$ *de* A *tel que* $A/\mathfrak{A}$ *soit de dimension injective finie.*

La condition est évidemment nécessaire puisqu'un anneau de Gorenstein est de dimension injective finie sur lui-même. Pour démontrer la réciproque, supposons que A est complet, ce qui ne pose aucun problème puisque $\mathrm{di}_A A/\mathfrak{A} < \infty \Rightarrow \mathrm{di}_{\hat{A}} \hat{A}/\mathfrak{A}\hat{A} < \infty$, et

$$\hat{A} \text{ de Gorenstein} \Rightarrow A \text{ de Gorenstein}.$$

Soit r la profondeur de A, donc aussi la dimension injective de $A/\mathfrak{A}$. Nous allons montrer que si k est le corps résiduel de A, on a $\mathrm{Ext}^i_A(k, A) = 0$ pour $i > r$, ce qui en vertu de (1.4.4) et (1.4.5) montrera que A est de dimension injective finie sur lui-même, donc qu'il est de Gorenstein.

Pour toute A-suite régulière de longueur r, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, le lemme (5.4) donne un isomorphisme de foncteurs définis dans la catégorie des A-modules de type fini :

$$\mathrm{Ext}^r_A(\mathrm{Hom}_A(\cdot, A/\alpha), A/\mathfrak{A}) \simeq \cdot \otimes_A (A/(\alpha + \mathfrak{A})).$$

On en déduit évidemment :

$$\mathrm{Ext}^r_A(k, A) = \mathrm{Hom}_A(k, A/\alpha) \simeq k \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ext}^r_A(k, A/\mathfrak{A}) \simeq k.$$

Comme le foncteur $\mathrm{Ext}^r_A(\cdot, A)$ (resp. $\mathrm{Ext}^r_A(\cdot, A/\mathfrak{A})$) est exact à gauche (resp. à droite) dans la catégorie des A-modules de longueur finie, on démontre par récurrence sur $\ell(N) =$ longueur de N que pour tout A-module N de longueur finie, on a :

$$\ell(\mathrm{Ext}^r_A(N, A)) \leqslant \ell(N) \qquad (\text{resp. } \ell(\mathrm{Ext}^r_A(N, A/\mathfrak{A})) \leqslant \ell(N)).$$

Si N est un $A/\mathfrak{A}$-module de longueur finie, soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ une suite A-régulière telle que $\alpha N = 0$. Alors, on a :

$$\mathrm{Ext}^r_A(N, A) \simeq \mathrm{Hom}_A(N, A/\alpha),$$

et $\mathrm{Ext}^r_A(\mathrm{Hom}(N, A/\alpha), A/\mathfrak{A}) \simeq N \otimes_A (A/(\alpha + \mathfrak{A})) = N$ implique alors :

$$\ell(\mathrm{Ext}^r(N, A)) = \ell(N) \qquad \text{et} \qquad \ell(\mathrm{Ext}^r(N, A/\mathfrak{A})) = \ell(N).$$

En particulier, ceci implique que le foncteur $\mathrm{Ext}^r_A(\cdot, A)$ est exact dans la catégorie des $A/\mathfrak{A}$-modules de longueur finie. La suite exacte associée au foncteur $\mathrm{Ext}^\bullet_A(\cdot, A)$ montre alors que le foncteur $\mathrm{Ext}^{r+1}_A(\cdot, A)$ est exact à gauche dans la catégorie des $A/\mathfrak{A}$-modules de longueur finie. On utilisera alors le résultat suivant :

Lemme (5.6). — *Soit* E *une enveloppe injective du corps résiduel de* A*; alors* $\mathrm{Ext}^r_A(E, A/\mathfrak{A})$ *est un* A*-module monogène de dimension projective finie.*

Le fait que $\mathrm{Ext}^r_A(E, A/\mathfrak{A})$ est un A-module de dimension projective finie n'est rien d'autre que (1.4.10). Considérons une résolution injective minimale $I^\bullet$ de $A/\mathfrak{A}$.

Alors $I^\bullet$ est bien sûr de longueur r, et on sait ((1.4.4) et (1.4.5)) qu'on a un isomorphisme $I^r \simeq E^{\mu_r}$ où $\mu_r = \dim_R(\mathrm{Ext}^r_A(k, A/\mathfrak{A}))$. Donc $I^r \simeq E$, et $\mathrm{Ext}^r_A(E, A/\mathfrak{A})$ est un quotient de $\mathrm{Hom}_A(E, E) \simeq A$, ce qui prouve bien qu'il est monogène.

Remarque. — En fait $\mathrm{Ext}^r_A(E, A/\mathfrak{A}) \simeq A/\mathfrak{A}$. C'est une conséquence du théorème que nous démontrons et de ((1.4.10) (iii)).

Posons donc $A/\mathfrak{b} = \mathrm{Ext}^r_A(E, A/\mathfrak{A})$. Comme c'est évidemment un quotient de $A/\mathfrak{A}$, on sait que $\mathrm{Ext}^{r+1}_A(\cdot, A)$ est exact à gauche dans la catégorie des $A/\mathfrak{b}$-modules de longueur finie. Pour démontrer le théorème, nous allons montrer que si $i > r$, et si $\mathrm{Ext}^i_A(\cdot, A)$ est exact à gauche dans la catégorie des $A/\mathfrak{b}$-modules de longueur finie, alors $\mathrm{Ext}^i_A(\cdot, A)$ est nul dans la catégorie des $A/\mathfrak{b}$-modules de longueur finie. Cela démontrera bien le théorème, car si $\mathrm{Ext}^i_A(\cdot, A)$ est nul dans la catégorie des $A/\mathfrak{b}$-modules de longueur finie, alors $\mathrm{Ext}^{i+1}_A(\cdot, A)$ est exact à gauche et donc nul dans cette catégorie, ce qui montrera bien que $\mathrm{Ext}^i_A(k, A) = 0$ pour $i > r$.

Rappelons ([10], chap. IV, prop. 2) que si un foncteur contravariant F défini dans la catégorie des modules de longueur finie sur un anneau local noethérien R d'idéal maximal $\mathfrak{n}$, est exact à gauche, il y a un isomorphisme canonique de foncteurs

$$F(\cdot) \simeq \mathrm{Hom}_R(\cdot, \varinjlim_s F(R/\mathfrak{n}^s)).$$

Dans le cas qui nous intéresse, on aura donc un isomorphisme de foncteurs définis dans la catégorie des $A/\mathfrak{b}$-modules de longueur finie :

$$\mathrm{Ext}^i_A(\cdot, A) \simeq \mathrm{Hom}_A(\cdot, \varinjlim_s \mathrm{Ext}^i_A(A/(\mathfrak{b} + \mathfrak{m}^s), A)).$$

Pour démontrer le théorème, il nous suffit donc de montrer que

$$\varinjlim_s \mathrm{Ext}^i_A(A/(\mathfrak{b} + \mathfrak{m}^s), A) = 0 \quad \text{pour } i > r.$$

Pour cela, nous utiliserons la suite spectrale associée à un foncteur composé. On considère le foncteur $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{b}, \cdot)$ défini dans la catégorie des A-modules, et le foncteur

$$H^0_\mathfrak{m} = \varinjlim_s \mathrm{Hom}_{A/\mathfrak{b}}(A/(\mathfrak{b} + \mathfrak{m}^s), \cdot)$$

défini dans la catégorie des $A/\mathfrak{b}$-modules. On a bien sûr un isomorphisme de foncteurs :

$$H^0_\mathfrak{m} \circ \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{b}, \cdot) = \varinjlim_s \mathrm{Hom}_A(A/(\mathfrak{b} + \mathfrak{m}^s), \cdot).$$

Comme $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{b}, \cdot)$ transforme un A-module injectif en un $A/\mathfrak{b}$-module acyclique pour le foncteur $H^0_\mathfrak{m}(\cdot)$, la suite spectrale associée au foncteur composé converge. On vérifie facilement que les dérivés à droite du foncteur exact à gauche $\varinjlim_s \mathrm{Hom}_A(A/(\mathfrak{b}+\mathfrak{m}^s), \cdot)$ sont les foncteurs $\varinjlim_s \mathrm{Ext}^i_A(A/(\mathfrak{b}+\mathfrak{m}^s), \cdot)$. On a donc une suite spectrale convergente $H^p_\mathfrak{m}(\mathrm{Ext}^q_A(A/\mathfrak{b}, A)) \Rightarrow H^n = \varinjlim_s \mathrm{Ext}^n_A(A/(\mathfrak{b}+\mathfrak{m}^s), A)$. Pour démontrer que $H^n = 0$ pour $n > r$, il suffira donc de démontrer $H^p_\mathfrak{m}(\mathrm{Ext}^q_A(A/\mathfrak{b}, A)) = 0$ pour $p + q > r$.

Rappelons que comme $A/\mathfrak{A}$ est de dimension injective finie, alors (1.4.7), pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} A/\mathfrak{A}$ on a $\dim A/\mathfrak{p} + \operatorname{prof} A_\mathfrak{p} = \operatorname{prof} A = r$.

Soit alors M un A-module de type fini tel que $\operatorname{Supp} M \hookrightarrow V(\mathfrak{A})$.

Soit $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ tel que $\dim M = \dim A/\mathfrak{p}$. Comme $\operatorname{grade} M \leqslant \operatorname{prof} A_\mathfrak{p}$, on en déduit $\dim M + \operatorname{grade} M \leqslant r$ (il y a donc égalité en vertu de (1.4.8)). Prenons $M = A/\mathfrak{b}$. Comme $A/\mathfrak{b}$ est de dimension projective finie, pour tout entier q, on a

$$\operatorname{grade}(\operatorname{Ext}^q_A(A/\mathfrak{b}, A)) \geqslant q$$

puisque si $\operatorname{prof} A_\mathfrak{p} < q$ on a $\operatorname{dp}_A A/\mathfrak{b} < q$, donc $(\operatorname{Ext}^q_A(A/\mathfrak{b}, A))_\mathfrak{p} = 0$. On en déduit donc $\dim \operatorname{Ext}^q_A(A/\mathfrak{b}, A) \leqslant r - q$. Et, la dimension cohomologique étant inférieure à la dimension de Krull, $H^p_\mathfrak{m}(\operatorname{Ext}^q(A/\mathfrak{b}, A)) = 0$, pour $p > r - q$, ce que nous voulions démontrer.

Corollaire (5.7). — *Soit* A *un anneau local noethérien. Une condition nécessaire et suffisante pour que* A *soit de Gorenstein, est qu'il existe un idéal de définition* $\mathfrak{q}$, *irréductible et de dimension projective finie. Si de plus* A *est de dimension* $\leqslant 2$, *alors* $\mathfrak{q}$ *est nécessairement engendré par une suite régulière.*

Soit E une enveloppe injective du corps résiduel de A. Comme $A/\mathfrak{q}$ est un anneau de Gorenstein de dimension 0, on a $\operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{q}, E) \simeq A/\mathfrak{q}$. Donc $A/\mathfrak{q}$ est aussi de dimension injective finie, et A est un anneau de Gorenstein d'après (5.5). Si de plus A est de dimension 2, considérons une résolution projective minimale de $A/\mathfrak{q}$, soit :

$$0 \to A^{\mu_2} \to A^{\mu_1} \to A \to A/\mathfrak{q} \to 0.$$

Comme $A/\mathfrak{q}$ est de Gorenstein de codimension 2 dans A, on a :

$$\operatorname{Ext}^2_A(A/\mathfrak{q}, A) \simeq \operatorname{Hom}(A/\mathfrak{q}, E) \simeq A/\mathfrak{q}.$$

Ceci implique $\mu_2 = 1$ car :

$$0 \to A^* \to (A^{\mu_1})^\vee \to (A^{\mu_2})^\vee \to \operatorname{Ext}^2_A(A/\mathfrak{q}, A) \to 0,$$

(où $\cdot^\vee$ est le foncteur $\operatorname{Hom}_A(\cdot, A)$) est une résolution libre minimale de $\operatorname{Ext}^2_A(A/\mathfrak{q}, A)$. Comme $\mu_1 - \mu_2 - 1 = \operatorname{rang}(A/\mathfrak{q}) = 0$, on en déduit bien $\mu_1 = 2$, ce que nous voulions démontrer.

CHAPITRE III

THÉORÈMES DE FINITUDE ET D'ANNULATION POUR LA COHOMOLOGIE DES SCHÉMAS

0. Introduction

Dans [10], A. Grothendieck pose la question suivante (XIII, (1.3)) :

Soit k un corps algébriquement clos, et soit X *un sous-schéma fermé de l'espace projectif* $\mathrm{P}=\mathbf{P}^n(k)$ *sur k. On suppose que* X *est équidimensionnel de dimension d et que* X *est localement intersection complète dans* P. *Montrer que pour tout faisceau cohérent* $\mathscr{F}$ *sur* $\mathrm{P}-\mathrm{X}$, *les groupes de cohomologie* $\mathrm{H}^i(\mathrm{P}-\mathrm{X}, \mathscr{F})$ *sont finis sur k pour* $i \geqslant n-d$.

Dans [14], R. Hartshorne prouve cette conjecture lorsque k est de caractéristique 0 et lorsque le faisceau normal à X dans P est ample (en particulier, lorsque X est non singulier en caractéristique 0). De plus, Hartshorne prouve le résultat suivant :

Théorème. — Soit X *un sous-schéma fermé connexe de dimension* $\geqslant 1$ *de* $\mathrm{P}=\mathbf{P}^n(k)$. *Alors pour tout faisceau quasi-cohérent* $\mathscr{F}$ *sur* $\mathrm{P}-\mathrm{X}$, *on a* :

$$\mathrm{H}^{n-1}(\mathrm{P}-\mathrm{X}, \mathscr{F})=0.$$

A ces énoncés globaux correspondent des énoncés locaux, plus généraux, concernant la finitude des groupes de cohomologie locale définis par un idéal d'un anneau régulier local. Notre intention est de démontrer ici deux théorèmes locaux qui auront pour corollaires la conjecture de Grothendieck et le théorème de Hartshorne en caractéristique $p>0$ et qui, plus généralement, montreront que l'annulation de l'avant-dernier groupe de cohomologie est équivalente, dans le cas connexe, à sa finitude. Nous utiliserons, comme au chapitre II, l'itération du morphisme de Frobenius pour calculer certains groupes de cohomologie locale, ici pour des schémas formels.

1. Relations entre cohomologie locale et cohomologie des variétés projectives

Le but de ce paragraphe est de montrer que les théorèmes locaux sont plus généraux que les théorèmes projectifs. Pour ceci on montre d'abord (prop. (1.1) à corollaire (1.5)) que des hypothèses sur la profondeur, ou la régularité, ou la dimension, des anneaux locaux d'une variété projective X plongée dans un espace projectif P, se transmettent aux anneaux locaux du complémentaire du sommet du cône, au-dessus de cette variété projective. Ensuite, on montre (prop. (1.6) à (1.8)) que les conclusions sur la finitude ou la nullité de certains groupes de cohomologie locale, dans l'anneau local du sommet de ce cône, donnent des conditions de finitude et d'annulation pour la cohomologie des faisceaux cohérents sur le complémentaire de X dans P.

Nous fixons une fois pour toutes les notations pour ce paragraphe :

Soit X une variété projective plongée dans un espace projectif $P=\mathbf{P}^n(k)$ sur un corps k.

Soient $A=k[T_0, \ldots, T_n]$ l'anneau du cône au-dessus de P, et $\mathfrak{J}$ un idéal gradué de A définissant X. On a, posant $B=A/\mathfrak{J}$, $X=\mathrm{Proj}(B)$ et $P=\mathrm{Proj}(A)$. On notera t_i l'image de T_i dans B, i.e. $B=k[t_0, \ldots, t_n]$. Soit $\mathfrak{m}=(T_0, \ldots, T_n)$ l'idéal de A définissant le sommet du cône au-dessus de P. On pose $R=A_{\mathfrak{m}}$; c'est un anneau local régulier. On pose $\mathfrak{a}=\mathfrak{J}R$ et $C=R/\mathfrak{a}$; on voit que C est l'anneau local du sommet du cône au-dessus de X.

On pose $U=\mathrm{Spec}\, R-\{\mathfrak{m}R\}$.

Soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur P, et soit M un A-module gradué de type fini qui permet de définir $\mathscr{F}$.

Pour comparer $\mathrm{Spec}\, B-\{\mathfrak{m}\}$, et donc $U\cap \mathrm{Spec}\, B$, avec X, on utilisera le lemme fondamental suivant. Les trois propositions qui le suivent en sont des corollaires immédiats.

Lemme préliminaire **(1.1)** ([12], chap. II, (8.3.6)). — *Pour* $j=0, 1, \ldots, n$, *on a* $\mathrm{Spec}\, B_{t_j} \simeq X_{t_j}[T, T^{-1}]$, *où* T *est une variable.*

Proposition **(1.2)**. — *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

a) *Les composantes irréductibles de* X *sont de dimension supérieure ou égale à d.*

b) *Les composantes irréductibles de* C *sont de dimension supérieure ou égale à* $d+1$.

Proposition **(1.3)**. — *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

a) X *est non singulier* (resp. *localement intersection complète*).

b) *Pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* A, *différent de* $\mathfrak{m}$, *l'anneau* $B_{\mathfrak{p}}$ *est régulier* (resp. *intersection complète dans* $A_{\mathfrak{p}}$).

Proposition **(1.4)**. — *Soit i un entier. Les conditions suivantes sont équivalentes* :

a) *Les anneaux locaux de* X *vérifient la condition* S_i *de Serre.*

b) *Pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* A, *différent de* $\mathfrak{m}$, *l'anneau* $B_{\mathfrak{p}}$ *vérifie la condition* S_i, *et de plus si* $\mathfrak{p}$ *est maximal*, $\mathrm{prof}\, B_{\mathfrak{p}} \geqslant i+1$.

Corollaire **(1.5)**. — *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

a) *Les anneaux locaux de* X *sont de Cohen-Macaulay.*

b) *Les anneaux locaux de* $\mathrm{Spec}\, B-\{\mathfrak{m}\}$ *sont de Cohen-Macaulay.*

Pour comparer les groupes de cohomologie locale à support dans $V(\mathfrak{J})$ et les groupes de cohomologie des faisceaux cohérents sur $P-X$, l'outil essentiel est le résultat suivant :

Lemme **(1.6)** ([12], chap. III). — *Aves les notations introduites au début de ce paragraphe, on a une suite exacte :*

$$0 \to H^0_{\mathfrak{J}}(M) \to M \to \sum_{v \in \mathbf{Z}} H^0(P-X, \mathscr{F}(v)) \to H^1_{\mathfrak{J}}(M) \to 0,$$

et des isomorphismes :

$$\sum_{v \in \mathbf{Z}} H^i(P-X, \mathscr{F}(v)) \simeq H^{i+1}_{\mathfrak{J}}(M) \qquad \textit{pour } i \geqslant 1.$$

Corollaire **(1.7)**. — *Soit i un entier $\geqslant 0$. Supposons que $H^{i+1}_{\mathfrak{J}}(M)$ soit un A-module artinien. Alors :*

(i) *Les espaces vectoriels $H^i(P-X, \mathscr{F}(v))$ sont de dimension finie sur k pour tout $v \in \mathbf{Z}$.*

(ii) *Pour v suffisamment grand, on a $H^i(P-X, \mathscr{F}(v)) = 0$ si $i \geqslant 1$.*

Le corollaire se déduit facilement du lemme. En effet, $H^{i+1}_{\mathfrak{J}}(M)$ a une structure de A-module gradué. Une suite décroissante stricte de sous-k-modules de $H^i(P-X, \mathscr{F}(v))$ engendre une suite décroissante stricte de sous-A-modules de $H^{i+1}_{\mathfrak{J}}(M)$. Il n'y en a donc pas, et $H^i(P-X, \mathscr{F}(v))$ est un k-module artinien, c'est-à-dire de type fini. Si $i \geqslant 1$, le A-module $\sum_{v \in \mathbf{Z}} H^i(P-X, \mathscr{F}(v))$ est artinien. La suite de sous-A-modules

$$K(\ell) = \sum_{v \geqslant \ell} H^i(P-X, \mathscr{F}(v))$$

est donc stationnaire pour ℓ assez grand, ce qui implique bien $H^i(P-X, \mathscr{F}(v)) = 0$ pour v assez grand.

Comme le calcul de la cohomologie locale commute à la localisation, on a $(H^i_{\mathfrak{J}}(M))_{\mathfrak{m}} = H^i_{\mathfrak{a}}(M_{\mathfrak{m}})$, donc si $H^i_{\mathfrak{J}}(M)$ est à support dans $V(\mathfrak{m})$, on a $H^i_{\mathfrak{J}}(M) = H^i_{\mathfrak{a}}(M_{\mathfrak{m}})$. C'est cette remarque que nous utiliserons pour voir que dans les « bons cas », la finitude de groupes de cohomologie locale sur un anneau local régulier entraîne la finitude des groupes de cohomologie de faisceaux cohérents sur une variété quasi-projective. Précisons tout de suite quels sont les « bons cas » qui nous intéresseront plus loin.

Proposition **(1.8)**. — *Soit X un sous-schéma fermé de l'espace projectif $P = \mathbf{P}^n_k =$ Proj A où $A = k[T_0, \ldots, T_n]$, défini par un idéal gradué $\mathfrak{J}$. Soient X_j $(j = 1, \ldots, \ell)$ les composantes irréductibles de X, et soit $d = \inf_j \dim X_j$. Soit $\mathfrak{m} = (T_0, \ldots, T_n)$ l'idéal maximal de l'origine dans A. Alors :*

1) $H^{n+1}_{\mathfrak{J}}(A)$ *est à support dans $V(\mathfrak{m})$, et on a donc $H^{n+1}_{\mathfrak{J}}(M) = H^{n+1}_{\mathfrak{J}A_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}})$ pour tout A-module M.*

2) *Si X est localement une intersection complète, $H^s_{\mathfrak{J}}(A)$ est à support dans $V(\mathfrak{m})$ pour $s \geqslant n+1-d$, et on a donc $H^s_{\mathfrak{J}}(M) = H^s_{\mathfrak{J}A_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}})$ pour $s \geqslant n+1-d$, et pour tout A-module M.*

3) *Si k est de caractéristique $p > 0$, et si X vérifie la condition S_i, avec $i \leqslant d$, alors $H^s_{\mathfrak{J}}(A)$ est à support dans $V(\mathfrak{m})$ pour $s \geqslant n+1-i$, et on a donc $H^s_{\mathfrak{J}}(M) = H^s_{\mathfrak{J}A_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}})$ pour $s \geqslant n+1-i$, et pour tout A-module M.*

Dans les trois cas, on montrera que pour les entiers s considérés, les modules $H^s_{\mathfrak{J}}(A)$ sont limites inductives de modules à support dans $V(\mathfrak{m})$.

Remarquons tout de suite qu'une fois qu'on sait que $H^s_{\mathfrak{J}}(A)$ est à support dans $V(\mathfrak{m})$ pour $s \geqslant s_0$, on en déduit facilement que $H^s_{\mathfrak{J}}(M)$ est à support dans $V(\mathfrak{m})$ pour $s \geqslant s_0$ et pour tout A-module M. Pour les modules de type fini, cela se voit par récurrence descendante, en utilisant une présentation finie, compte tenu du fait que la cohomologie s'annule en degrés $> n+1$. Comme tout A-module est limite inductive de A-modules de type fini, le cas général en découle immédiatement.

Il nous suffira donc de démontrer les résultats relatifs aux groupes de cohomologie locale de A.

1^er^ cas : On a $H^{n+1}_{\mathfrak{J}}(A) = \varinjlim_{\ell} \operatorname{Ext}^{n+1}_A(A/\mathfrak{J}^{\ell}, A)$. Mais d'après (1.4), pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur $n+1$ (donc maximal), si $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ on a $\operatorname{prof}(A/\mathfrak{J}^{\ell})_{\mathfrak{p}} \geqslant 1$. Il reste donc qu'en tout idéal premier $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$, on a $\operatorname{dp}_{A_{\mathfrak{p}}}(A/\mathfrak{J}^{\ell})_{\mathfrak{p}} < n+1$, et $\operatorname{Ext}^{n+1}_A(A/\mathfrak{J}^{\ell}, A)$ a son support réduit à $\{\mathfrak{m}\}$ pour tout ℓ.

2^e^ cas : $H^s_{\mathfrak{J}}(A) = \varinjlim_{\ell} \operatorname{Ext}^s_A(A/\mathfrak{J}^{\ell}, A)$. Il nous suffit donc de montrer que pour $s \geqslant n+1-d$, le module $\operatorname{Ext}^s_A(A/\mathfrak{J}^{\ell}, A)$ est à support dans $V(\mathfrak{m})$. Pour cela, montrons que pour $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$, on a $\operatorname{dp}_{A_{\mathfrak{p}}}(A/\mathfrak{J}^{\ell})_{\mathfrak{p}} < n+1-d$. Mais d'après (1.3), $(A/\mathfrak{J})_{\mathfrak{p}}$ est une intersection complète dans $A_{\mathfrak{p}}$, donc $(A/\mathfrak{J}^{\ell})_{\mathfrak{p}}$ est de Cohen-Macaulay, et sa dimension projective sur $A_{\mathfrak{p}}$ est égale à sa codimension dans $A_{\mathfrak{p}}$. Mais l'entier d a été choisi de telle façon que pour tout $\mathfrak{p}$, on a :

$$\operatorname{codimension}_{A_{\mathfrak{p}}}(A/\mathfrak{J})_{\mathfrak{p}} \leqslant n-d < n+1-d,$$

ce qui démontre le 2^e^ cas.

3^e^ cas : Pour tout entier ℓ, notons $\mathfrak{J}_{\ell}$ l'idéal de A engendré par les puissances p^{ℓ}-ièmes des éléments de l'idéal $\mathfrak{J}$. On sait d'après (1.1.7), que comme le morphisme de Frobenius est plat sur A, on a pour tout entier ℓ, et tout idéal premier $\mathfrak{p}$:

$$(*) \qquad \operatorname{dp}_{A_{\mathfrak{p}}}((A/\mathfrak{J})_{\mathfrak{p}}) = \operatorname{dp}_{A_{\mathfrak{p}}}((A_{\mathfrak{p}}\mathfrak{J}_{\ell})_{\mathfrak{p}}).$$

On voit facilement que les systèmes d'idéaux $(\mathfrak{J}_{\ell})$ et $(\mathfrak{J}^{\ell})$ définissent la même topologie dans A, donc pour tout $s \in \mathbf{Z}$, $H^s_{\mathfrak{J}}(A) = \varinjlim_{\ell} \operatorname{Ext}^s_A(A/\mathfrak{J}_{\ell}, A)$. Finalement, pour montrer que $H^s_{\mathfrak{J}}(A)$ est à support réduit à $\mathfrak{m}$ pour $s \geqslant n+1-i$, il suffit de montrer que pour $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$, on a $\operatorname{dp}_{A_{\mathfrak{p}}}((A/\mathfrak{J}_{\ell})_{\mathfrak{p}}) \leqslant n-i$ pour tout ℓ. D'après $(*)$, il suffira de prouver :

$$\operatorname{dp}_{A_{\mathfrak{p}}}((A/\mathfrak{J})_{\mathfrak{p}}) \leqslant n-i \quad \text{pour tout } \mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}.$$

Si $\mathfrak{p}$ est maximal, on sait (1.4) que $\operatorname{prof}(A/\mathfrak{J})_{\mathfrak{p}} \geqslant i+1$, donc :

$$\operatorname{dp}_{A_{\mathfrak{p}}}((A/\mathfrak{J})_{\mathfrak{p}}) \leqslant \dim A_{\mathfrak{p}} - (i+1) = n+1-(i+1) = n-i.$$

Si $\mathfrak{p}$ n'est pas maximal, on sait que :

$$\operatorname{prof}(A/\mathfrak{J})_{\mathfrak{p}} \geqslant \inf(i, \dim(A/\mathfrak{J})_{\mathfrak{p}}),$$

donc,

$$\mathrm{dp}_{A_{\mathfrak{p}}}((A/\mathfrak{J})_{\mathfrak{p}}) \leqslant \sup(\dim A_{\mathfrak{p}} - i, \dim A_{\mathfrak{p}} - \dim(A/\mathfrak{J})_{\mathfrak{p}}).$$

Mais comme $\dim A_{\mathfrak{p}} \leqslant n$, on a $\dim A_{\mathfrak{p}} - i \leqslant n - i$.

De même, $\dim A_{\mathfrak{p}} - \dim(A/\mathfrak{J})_{\mathfrak{p}} = \mathrm{codim}_{A_{\mathfrak{p}}}(A/\mathfrak{J})_{\mathfrak{p}}$; mais $\mathrm{codim}_{A_{\mathfrak{p}}}(A/\mathfrak{J})_{\mathfrak{p}}$ est égal à la codimension dans A d'une des composantes irréductibles de $A/\mathfrak{J}$, donc, d'après le choix de d, est inférieure ou égale à $n-d$ et *a fortiori* à $n-i$.

Remarquons que nous avons encore utilisé l'itération du morphisme de Frobenius pour étudier certains groupes de cohomologie locale, et plus précisément pour calculer leur support.

Nous verrons au § 4 de ce chapitre, qu'en l'utilisant avec plus de délicatesse on peut démontrer la finitude des modules de cohomologie étudiés dans le 3e cas de cette dernière proposition.

2. Relations entre cohomologie locale et cohomologie des schémas formels

Tout comme au paragraphe précédent, on peut interpréter les groupes de cohomologie locale en des termes plus géométriques, ici grâce aux schémas formels. L'ingrédient est le théorème de dualité locale. Pour pouvoir l'utiliser on se restreint à la considération des anneaux de Gorenstein. En vérité, dans la pratique seuls les anneaux réguliers se rencontrent, ce qui fait que la restriction n'est pas trop importante.

Soient R un anneau local de Gorenstein et $\mathfrak{J}$ un idéal de R, posons :

$$\mathrm{proff}_{\mathfrak{J}}(R) = \textit{profondeur formelle de } \operatorname{Spec} R \textit{ le long de } V(\mathfrak{J}) = \inf_i (H^i_{\{\mathfrak{m}\}}(\hat{X}, \mathcal{O}_{\hat{X}}) \neq 0),$$

où $\hat{X}$ est le complété formel de $X = \operatorname{Spec} R$ le long de $V(\mathfrak{J})$. La proposition (2.2) ci-dessous implique alors :

$$\mathrm{proff}_{\mathfrak{J}}(R) \geqslant s \Leftrightarrow H^i_{\mathfrak{J}}(R) = 0 \quad \forall\, i > \dim R - s.$$

Dans la proposition (2.3), on met en évidence les conditions qui serviront aux paragraphes 4 et 5.

Rappelons d'abord le résultat suivant qui est un corollaire de ([12], chap. 0_{III}, prop. (13.3.1)).

Proposition **(2.1)**. — *Soit* X *un schéma noethérien, et soit* Y *une partie fermée de* X, *définie par un faisceau cohérent d'idéaux* $\mathcal{J}$ *de* $\mathcal{O}_X$. *Soit* $\mathcal{F}$ *un faisceau cohérent sur* X *et soit* $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}/\mathcal{J}^{n+1}\mathcal{F}$. *Soit* U *un ouvert de* X *et soit* $\hat{U}$ *son complété formel le long de* $Y \cap U$. *Alors les homomorphismes canoniques*

$$h_i : H^i(\hat{U}, \varprojlim \mathcal{F}_n) \to \varprojlim H^i(U, \mathcal{F}_n)$$

sont surjectifs pour $i > 0$.

De plus, si le système projectif $(H^{i-1}(U, \mathcal{F}_n))_n$ *vérifie la condition de Mittag-Leffler, alors* h_i *est un isomorphisme.*

Proposition **(2.2).** — *Soit* R *un anneau local complet de Gorenstein de dimension* d. *Soit* $\mathfrak{m}$ *l'idéal maximal de* R *et soit* E *une enveloppe injective du corps résiduel* k *de* R (i.e. *un module dualisant de* R). *Soit* $\mathfrak{J}$ *un idéal de* R.

Posons $U = \operatorname{Spec} R - \{\mathfrak{m}\}$ *et* $Y = V(\mathfrak{J}) \cap U$. *Alors, si* $\hat{U}$ *est le complété formel de* U *le long de* Y, *il y a une suite exacte* :

$$0 \to \operatorname{Hom}_R(H^d_{\mathfrak{J}}(R), E) \to R \to \Gamma(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}}) \to \operatorname{Hom}_R(H^{d-1}_{\mathfrak{J}}(R), E) \to 0,$$

et des isomorphismes :

$$H^i(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}}) \simeq \operatorname{Hom}_R(H^{d-(i+1)}_{\mathfrak{J}}(R), E).$$

En effet, considérons le système projectif de suites exactes :

$$(*) \qquad 0 \to H^0_{\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{J}^n) \to R/\mathfrak{J}^n \to \Gamma(U, R/\mathfrak{J}^n) \to H^1_{\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{J}^n) \to 0.$$

Comme le système projectif $(R/\mathfrak{J}^n)$ vérifie (M.L), on obtient, en passant à la limite, une suite exacte :

$$(1) \qquad 0 \to \varprojlim_n H^0_{\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{J}^n) \to R \to \Gamma(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}}) \to \varprojlim_n H^1_{\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{J}^n) \to 0.$$

De même, les isomorphismes :

$$(**) \qquad H^i(U, R/\mathfrak{J}^n) \xrightarrow{\sim} H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{J}^n), \qquad \text{pour} \quad i \geq 1,$$

donnent, en passant à la limite, des isomorphismes :

$$(1') \qquad \varprojlim_n H^i(U, R/\mathfrak{J}^n) \simeq \varprojlim_n H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{J}^n) \qquad \text{pour} \quad i \geq 1.$$

Comme $H^s_{\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{A})$ est artinien pour tout idéal $\mathfrak{A}$ de R et pour tout entier $s \geq 0$, $(*)$ et $(**)$ montrent que les systèmes projectifs $(H^i(U, R/\mathfrak{J}^n))_n$ vérifient tous (M.L).

Donc, par (2.1), on a :

$$(2) \qquad H^i(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}}) = \varprojlim_n H^i(U, R/\mathfrak{J}^n) \qquad \text{pour} \quad i \geqslant 0.$$

Le théorème de dualité locale donne des isomorphismes fonctoriels :

$$H^s_{\mathfrak{m}}(\cdot) = \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Ext}^{d-s}_R(\cdot, R), E).$$

Donc

$$\begin{aligned} \varprojlim_n H^s_{\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{J}^n) &\simeq \varprojlim_n \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Ext}^{d-s}_R(R/\mathfrak{J}^n, R), E) \\ &\simeq \operatorname{Hom}_R(\varinjlim_n \operatorname{Ext}^{d-s}_R(R/\mathfrak{J}^n, R), E) \\ (3) \qquad &\simeq \operatorname{Hom}_R(H^{d-s}_{\mathfrak{J}}(R), E). \end{aligned}$$

En combinant (1), (2), (3) on trouve la suite exacte, et en combinant (1'), (2), (3) on trouve les isomorphismes.

Corollaire **(2.3).** — *Soit* R *un anneau local complet de Gorenstein de dimension* d. *Soit* U *l'ouvert complémentaire du point fermé dans* Spec R. *Soit* $\mathfrak{J}$ *un idéal de* R. *Soit* r *un entier tel que* $0 \leq r \leq d$. *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

1) $H^s_{\mathfrak{J}}(M)$ *est un* R-*module artinien, pour tout* R-*module de type fini* M, *et tout entier* $s \geq d - r$.

2) $H^s_{\mathfrak{J}}(R)$ *est un* R*-module artinien pour* $s \geq d-r$.

3) *Si* $\hat{U}$ *est le complété formel de* U *le long de* $V(\mathfrak{J}) \cap U$, *alors* $H^i(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}})$ *est un* R*-module de type fini pour* $i \leq r-1$.

Nous avons déjà démontré $1) \Leftrightarrow 2)$ par récurrence descendante. L'équivalence $2) \Leftrightarrow 3)$ est une conséquence immédiate de la proposition.

3. Le théorème local de Lichtenbaum-Hartshorne

Il s'agit du théorème suivant sur la cohomologie d'un anneau local, démontré par R. Hartshorne dans ([14], (3.1)).

Théorème (**3.1**). — *Soit* A *un anneau local noethérien de dimension* n. *Soit* $\mathfrak{J}$ *un idéal de* A *ayant la propriété suivante* :

Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ *du complété* $\hat{A}$ *de* A, *tel que* $\dim \hat{A}/\mathfrak{p} = \dim A$, *on a* :

$$\dim \hat{A}/(\mathfrak{J}\hat{A} + \mathfrak{p}) \geqslant 1.$$

Alors le foncteur de cohomologie locale $H^n_{\mathfrak{J}}(\cdot)$ *est nul.*

Nous donnerons une démonstration directe de ce théorème, inspirée de celle de R. Hartshorne, mais plus courte.

On peut évidemment supposer que A est complet, donc quotient d'un anneau local régulier complet $\overline{R}$. On sait (1.4.8) que $\mathrm{grade}_{\overline{R}} A + \dim A = \dim \overline{R}$, c'est-à-dire qu'il existe une suite $\overline{R}$-régulière α de longueur $\dim \overline{R} - n$ dans l'annulateur de A. Autrement dit, A est quotient de l'intersection complète $R = \overline{R}/\alpha$, qui a même dimension que A. Finalement, il existe un anneau local complet de Gorenstein R, et un idéal $\mathfrak{A}$ de R, tel que $A = R/\mathfrak{A}$ et $\dim R = \dim A = n$.

Lemme (**3.2**). — *Soient* $\mathfrak{p}_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ *les idéaux premiers minimaux de* R. *Soit* U *le complémentaire du point fermé dans* Spec R. *Alors, il existe des idéaux premiers* $\mathfrak{q}_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ *tels que* :

1) *Pour tout* i, $\{\mathfrak{q}_i\}$ *est un point fermé de* U.

2) *Pour tout* i, *on a* $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{q}_i$, *et* $V(\mathfrak{q}_i A) \hookrightarrow V(\mathfrak{J})$.

En effet, comme $\dim R/\mathfrak{A} = \dim R$, on peut supposer qu'il existe un entier t, avec $1 \leqslant t \leqslant s$, tel que $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{p}_i$ pour $i \leqslant t$ et que $\mathfrak{A} \not\subset \mathfrak{p}_i$ pour $i > t$. Soit alors $\mathfrak{J}'$ l'idéal de R, image réciproque de $\mathfrak{J}$.

Si $i \leqslant t$, on considère le localement fermé $U \cap V(\mathfrak{p}_i + \mathfrak{J}')$ qui est non vide d'après l'hypothèse, et on prend pour $\{\mathfrak{q}_i\}$ un point fermé de ce localement fermé.

Si $i > t$, on prend pour $\{\mathfrak{q}_i\}$ un point fermé de $V(\mathfrak{p}_i) \cap U$ qui n'est pas contenu dans $V(\mathfrak{A})$. Un tel point existe car $V(\mathfrak{p}_i) \cap U$ est un schéma de Jacobson.

On constate que pour $i \leqslant t$, on a $\mathfrak{J}' \subset \mathfrak{q}_i$, donc $V(\mathfrak{q}_i A) \hookrightarrow V(\mathfrak{J}'A) = V(\mathfrak{J}A)$, et pour $i > t$, par construction $V(\mathfrak{q}_i A)$ est réduit au point fermé de Spec A.

Le lemme étant démontré, soit $\mathfrak{b}=\bigcap_{i=1}^{s}\mathfrak{q}_i$; notre intention est de montrer que le foncteur $H^n_{\mathfrak{b}}(\cdot)$, défini dans la catégorie des R-modules, est nul, et d'en déduire que le foncteur $H^n_{\mathfrak{J}}(\cdot)$, défini dans la catégorie des A-modules, est aussi nul.

Pour tout entier ℓ, posons $\mathfrak{b}_\ell=\bigcap_{i=1}^{s}\mathfrak{q}_i^{(\ell)}$, et montrons que le système d'idéaux $(\mathfrak{b}_\ell)$ définit la même topologie que les puissances de $\mathfrak{b}$, dans R. On a évidemment $\mathfrak{b}_\ell\supset\mathfrak{b}^\ell$ pour tout ℓ. D'un autre côté, une décomposition primaire de $\mathfrak{b}^\ell$ permet de constater qu'on a $\mathfrak{b}^\ell=\mathfrak{b}_\ell\cap\mathfrak{m}_\ell$ où $\mathfrak{m}_\ell$ est, pour tout ℓ, un idéal primaire pour l'idéal maximal de R. Remarquons que si $S=\bigcap_{i=1}^{s}(R-\mathfrak{q}_i)$, d'après le choix des $\mathfrak{q}_i$, on sait que $S\cap\mathfrak{p}_i=\emptyset$ pour $i=1,\ldots,s$, donc que S ne contient pas de diviseur de 0. Autrement dit R est contenu dans $S^{-1}R$. Comme $\bigcap_{\ell\geqslant 0}\mathfrak{b}_\ell S^{-1}R=0$, on en déduit $\bigcap_{\ell\geqslant 0}\mathfrak{b}_\ell=0$. Comme l'anneau R est complet, le théorème de Chevalley dit que la topologie définie par l'idéal maximal de R est minimale parmi les topologies séparées. Ceci implique que pour tout idéal $\mathfrak{m}$, primaire pour l'idéal maximal de R, il existe un entier t_0 tel que $\mathfrak{b}_t\hookrightarrow\mathfrak{m}$ pour $t\geqslant t_0$. Donc, il existe un entier $t_0(\ell)$ tel que $\mathfrak{b}_t\hookrightarrow\mathfrak{m}_\ell$ pour $t\geqslant t_0(\ell)$. On déduit $\mathfrak{b}_\ell\cap\mathfrak{b}_t\hookrightarrow\mathfrak{b}_\ell\cap\mathfrak{m}_\ell=\mathfrak{b}^\ell$ pour $t\geqslant t_0(\ell)$, c'est-à-dire $\mathfrak{b}^\ell\supset\mathfrak{b}_t$ pour $t\geqslant\sup(\ell,t_0(\ell))$, ce qui montre bien que les systèmes d'idéaux $(\mathfrak{b}_\ell)_\ell$ et $(\mathfrak{b}^\ell)_\ell$ définissent la même topologie dans R. Ceci implique que pour tout entier j, on a :

$$H^j_{\mathfrak{b}}(R)=\varinjlim_{\ell}\operatorname{Ext}^j_R(R/\mathfrak{b}_\ell,R).$$

Rappelons le résultat suivant démontré dans [22] et qui est d'ailleurs un corollaire de (1.4.15).

Proposition **(3.3)**. — *Soit* R *un anneau local de Gorenstein. Pour tout* R*-module de type fini* M, *on a l'égalité*

$$\operatorname{prof} M+\sup\{i\in\mathbf{Z},\ \text{tel que } \operatorname{Ext}^i_R(M,R)\neq 0\}=\dim R.$$

Dans le cas qui nous intéresse, remarquons que les idéaux $\mathfrak{b}_\ell$ ont été choisis de telle façon que $\operatorname{prof}(R/\mathfrak{b}_\ell)=1$, pour tout ℓ. D'après la proposition, ceci implique :

$$\operatorname{Ext}^n_R(R/\mathfrak{b}_\ell,R)=0,\qquad\text{pour tout } \ell,\qquad\text{donc}\qquad H^n_{\mathfrak{b}}(R)=0,$$

et comme le foncteur $H^n_{\mathfrak{b}}(\cdot)$ est exact à droite, $H^n_{\mathfrak{b}}(\cdot)=0$. On en déduit que le foncteur $H^n_{\mathfrak{b}A}(\cdot)$, défini sur la catégorie des A-modules, est nul. Mais comme $V(\mathfrak{b}A)\hookrightarrow V(\mathfrak{J})$, on a une suite exacte de foncteurs :

$$H^n_{\mathfrak{b}A}(\cdot)\to H^n_{\mathfrak{J}}(\cdot)\to H^n_{V(\mathfrak{J})-V(\mathfrak{b}A)}(\operatorname{Spec} R-V(\mathfrak{b}A),\tilde{\cdot}).$$

Comme $\dim(\operatorname{Spec} R-V(\mathfrak{b}A))<n$, le dernier foncteur de cohomologie de cette suite exacte à trois termes est nul, donc $H^n_{\mathfrak{b}A}(\cdot)=0$ implique $H^n_{\mathfrak{J}}(\cdot)=0$.

Corollaire (3.4). — *Soit* X *un schéma quasi-projectif algébrique sur un corps* k. *Si* $\dim X = n$, *les conditions suivantes sont équivalentes* :

(a) $H^n(X, \mathscr{F}) = 0$ *pour tout faisceau quasi-cohérent* $\mathscr{F}$ *sur* X.

(b) *Aucune composante irréductible de dimension* n *de* X *n'est projective.*

C'est une conséquence immédiate du théorème précédent, appliqué en tous les points fermés de l'anneau gradué de la fermeture projective de X.

Remarque. — Ce corollaire, le théorème de Lichtenbaum, qui est moins fort que le théorème local de Hartshorne, est vrai plus généralement. S. Kleiman a donné une démonstration pour laquelle l'hypothèse X quasi-projectif est inutile [17].

4. Théorème de finitude en caractéristique $p > 0$

Nous donnons dans ce paragraphe le théorème principal de ce chapitre, qui résout la conjecture de A. Grothendieck citée dans l'introduction, pour les schémas projectifs sur un corps de caractéristique non nulle. La méthode consiste à utiliser l'itération du morphisme de Frobenius. Nous commencerons ce paragraphe par un théorème d'annulation pour la cohomologie locale à support dans un fermé défini par un anneau de Cohen-Macaulay. Il est à noter que ce théorème ne s'étend pas en caractéristique o.

Proposition (4.1). — *Soit* R *un anneau local régulier de caractéristique* $p > 0$. *Soit* $\mathfrak{J}$ *un idéal de* R *tel que* $R/\mathfrak{J}$ *soit un anneau de Cohen-Macaulay; alors* :

$$H^i_{\mathfrak{J}}(M) = 0 \qquad \textit{pour tout } i > \dim R - \dim R/\mathfrak{J}$$

et tout R-*module* M.

On a déjà remarqué au chapitre I (1.1.7) que le morphisme de Frobenius est plat sur R. Soit $\mathfrak{J}_\ell$ l'idéal de R engendré par les puissances p^ℓ-ièmes des éléments de $\mathfrak{J}$. Alors $R/\mathfrak{J}_\ell$ est de Cohen-Macaulay pour tout entier ℓ; de plus la topologie sur R définie par les $\mathfrak{J}_\ell$ est la même que la topologie $\mathfrak{J}$-adique; donc pour tout entier i, on a :

$$H^i_{\mathfrak{J}}(R) \simeq \varinjlim_{\ell} \operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{J}_\ell, R).$$

Soient $n = \dim R$ et $d = \dim R/\mathfrak{J} = \dim R/\mathfrak{J}_\ell$. On sait que pour tout ℓ

$$\operatorname{dp}(R/\mathfrak{J}_\ell) = n - d,$$

donc $\operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{J}_\ell, R) = 0$ pour $i > n-d$, et pour tout ℓ. Donc $H^i_{\mathfrak{J}}(R) = 0$ pour $i > n-d$.

On montre alors, par récurrence descendante, et par passage à la limite inductive, que ceci implique :

$$H^i_{\mathfrak{J}}(M) = 0 \quad \text{pour } i > n-d, \quad \text{et pour tout R-module M.}$$

Remarque. — On démontre de la même façon que si R est un anneau local régulier de caractéristique non nulle, et si $\mathfrak{J}$ est idéal de R, alors $\operatorname{prof} R/\mathfrak{J} \geqslant s$ implique $H^i_{\mathfrak{J}}(\cdot) = 0$ pour $i > \dim R - s$, autrement dit $\operatorname{prof} R/\mathfrak{J} \geqslant s$ implique $\operatorname{proff}_{\mathfrak{J}} R \geqslant s$.

Corollaire (**4.2**). — *Soit k un corps de caractéristique $p>0$. Soit X une variété projective de dimension d, plongée dans l'espace projectif $P=\mathbf{P}_k^n$. Supposons que l'anneau local du sommet du cône de X soit un anneau de Cohen-Macaulay. Alors, posant $U=P-X$, on a :*

$$H^i(U, \mathscr{F})=0 \quad \textit{pour } i\geqslant n-d$$

et pour tout faisceau quasi-cohérent $\mathscr{F}$ sur U.

En effet, en vertu de (1.5) si $\mathfrak{J}$ est un idéal gradué de $k[X_0, \ldots, X_n]=A$ définissant X, l'anneau $k[X_0, \ldots, X_n]/\mathfrak{J}$ est un anneau de Cohen-Macaulay. Donc, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, on a $\mathrm{dp}(A_\mathfrak{m}/\mathfrak{J}A_\mathfrak{m})=n-d$.

Par (4.1), on en déduit que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, on a $H^i_{\mathfrak{J}A_\mathfrak{m}}(\cdot)=0$ pour $i>n-d$. Donc, finalement $H^i_\mathfrak{J}(\cdot)=0$ pour $i>n-d$, et on conclut grâce à (1.7).

(**4.3**) *Contre-exemple à la proposition (4.2) en caractéristique 0 (Hartshorne).*

On peut construire une variété projective X de dimension 3, plongée dans $\mathbf{P}^8_\mathbf{C}$, telle que l'anneau local du sommet du cône au-dessus de X soit de Cohen-Macaulay (et même de Gorenstein), et telle qu'il existe un faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur $\mathbf{P}-X$, pour lequel $H^6(\mathbf{P}-X, \mathscr{F})\neq 0$.

On considère pour ceci la variété projective X, obtenue en faisant éclater un point dans $\mathbf{P}^3_\mathbf{C}$. Soit E le diviseur exceptionnel sur X, et soit f le morphisme $X\to\mathbf{P}^3_\mathbf{C}$. On pose

$$\mathscr{L}=f^*(\mathscr{O}_{\mathbf{P}^3}(2))\otimes\mathscr{O}_X(-E).$$

Alors :

a) $\mathscr{L}$ est très ample sur X, et $\dim H^0(X, \mathscr{L})=9$.

b) $H^i(X, \mathscr{L}^{\otimes\nu})=0$ pour $i=1,2$.

c) $\omega_X\simeq\mathscr{L}^{\otimes(-2)}$, où ω_X est le faisceau qui entre dans le théorème de dualité projective.

d) $H^2(X, \mathbf{C})\simeq\mathbf{C}^2$, car les classes de Chern des faisceaux $f^*(\mathscr{O}_{\mathbf{P}^3}(1))$ et $\mathscr{O}_X(E)$ sont linéairement indépendantes dans $H^2(X, \mathbf{Z})\to H^2(X, \mathbf{C})$.

On voit donc que l'anneau du cône de X (plongé dans $\mathbf{P}^8$) est de Cohen-Macaulay. On constate qu'on a ainsi un contre-exemple grâce au théorème suivant, dû à Barth, et dont on trouve une démonstration dans Hartshorne [19].

Théorème (**4.4**) (Barth). — *Soit X une variété projective (algébrique) de dimension s contenue dans une variété non singulière Y, propre sur* $\mathbf{C}$, *de dimension n. Supposons que*

$$H^i(Y-X, \mathscr{F})=0$$

pour tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur $Y-X$ et tout entier $i\geqslant q$, q donné. Alors l'homomorphisme $H^i(Y, \mathbf{C})\to H^i(X, \mathbf{C})$ est un isomorphisme pour $i<n-q$.

Ici $Y=\mathbf{P}^8(\mathbf{C})$ et $H^2(\mathbf{P}^8, \mathbf{C})\to H^2(X, \mathbf{C})$ n'est pas un isomorphisme grâce à *d)*.

Corollaire (**4.5**). — *Soient A un anneau de polynômes sur* $\mathbf{C}$, *et $\mathfrak{J}$ un idéal de A. Alors, il n'existe pas en général de morphisme entier $A\xrightarrow{f}A$ tel que les idéaux $f^n(\mathfrak{J})A$ définissent la topologie $\mathfrak{J}$-adique.*

En effet, un tel morphisme serait plat, d'après le lemme d'acyclicité. En posant $\mathfrak{J}_n = f^n(\mathfrak{J})\mathrm{A}$, on aurait pour tout n, $\mathrm{dp}\, \mathrm{A}/\mathfrak{J}_n = \mathrm{dp}\, \mathrm{A}/\mathfrak{J}$. On en déduirait $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{J}}(\cdot) = 0$ pour $i > \mathrm{dp}\, \mathrm{A}/\mathfrak{J}$, ce qui est faux en vertu du contre-exemple que nous venons de voir.

Nous avons besoin maintenant de quelques lemmes techniques supplémentaires sur le foncteur de Frobenius.

Les anneaux considérés sont noethériens et de caractéristique $p>0$. On notera, comme au chapitre I, f l'homomorphisme de Frobenius et F le foncteur de Frobenius.

Pour simplifier les notations nous posons la définition suivante :

Définition (**4.6**). — *Soit* A *un anneau de caractéristique* $p>0$. *Alors pour tout* A-*module* M *et pour tout homomorphisme* φ *de* A-*modules, on posera* :

$$\mathrm{M}_{(i)} = \mathrm{F}^i(\mathrm{M}) \qquad et \qquad \varphi_{(i)} = \mathrm{F}^i(\varphi).$$

Proposition (**4.7**). — *Soient* A *un anneau noethérien et* M *un* A-*module de type fini. Considérons une présentation finie de* M :

$$(*) \qquad \mathrm{A}^{r_1} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{A}^{r_0} \rightarrow \mathrm{M} \rightarrow 0.$$

Alors :

$$(*)_n \qquad \mathrm{A}^{r_1} \xrightarrow{\varphi_{(n)}} \mathrm{A}^{r_0} \rightarrow \mathrm{M}_{(n)} \rightarrow 0,$$

est une présentation finie de $\mathrm{M}_{(n)}$. *De plus, si* A *est local, de corps résiduel* k *et si* $r_0 = \mathrm{rang}_k(k \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M})$ *alors* $r_0 = \mathrm{rang}_k(k \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_{(n)})$.

Il suffit évidemment de prouver la proposition pour $n=1$. On applique le foncteur $\mathrm{F}(\cdot) = \cdot \otimes {}^f\mathrm{A}$ à $(*)$ et on obtient la première partie de l'énoncé. Soient α_{ij} les coefficients de la matrice $\varphi_{\bullet}$. Alors $\varphi_{(1)}$ est représenté par la matrice (α_{ij}^p). Si A est local, dire que $(*)$ est une présentation minimale de M, c'est dire que les $\alpha_{i,j}$ sont dans l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de H. Alors, $(*)_1$ est une présentation minimale de $\mathrm{M}_{(1)}$ et on obtient bien le résultat cherché.

Proposition (**4.8**). — *Soit* A *un anneau régulier. Pour tout* A-*module de type fini* M, *on a des isomorphismes* :

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}_{(n)}, \mathrm{A}) \simeq \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{A}_{(n)}) \qquad pour\ tout\ i.$$

En effet, nous avons déjà vu au chapitre I, § 1, que ${}^f\mathrm{A}$ est plat sur A donc :

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}_{(1)}, \mathrm{A}) \simeq \mathrm{Ext}^i_{{}^f\mathrm{A}^{\bullet}}(\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} {}^f\mathrm{A}^{\bullet}, {}^f\mathrm{A}^{\bullet}) \simeq \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{A}) \otimes_{\mathrm{A}} {}^f\mathrm{A}^{\bullet}.$$

Nous avons maintenant le matériel nécessaire pour prouver le théorème de finitude en caractéristique $p>0$.

Théorème **(4.9)**. — *Soit* R *un anneau local régulier de caractéristique* $p>0$. *Soit* $\mathfrak{J}$ *un idéal de* R *et soit i un entier tels que :*

1) *Pour toute composante irréductible* Y *de* Spec $R/\mathfrak{J}$, *on a* $i<\dim Y$.

2) *Si* U *est l'ouvert complémentaire du point fermé dans* Spec R, *alors* $R/\mathfrak{J}$ *restreint à* U *vérifie* S_i *(condition de Serre).*

Alors, si n est la dimension de R, *pour tout* R-*module de type fini* M *et pour tout entier* $s\geq n-i$, *les groupes de cohomologie locale* $H^s_{\mathfrak{J}}(M)$ *sont des* R-*modules artiniens.*

Lemme **(4.10)**. — *Il suffit de prouver que* $H^s_{\mathfrak{J}}(R)$ *est artinien pour* $s\geq n-i$.

Raisonnons par récurrence descendante, ce que l'on peut faire car $H^s_{\mathfrak{J}}(\cdot)=0$ pour $s>n$. Supposons que $H^s_{\mathfrak{J}}(R)$ est artinien pour $s\geq n-i$, et que pour tout R-module de type fini M, $H^s_{\mathfrak{J}}(M)$ est artinien pour $s>r\geq n-i$. Soit N un R-module de type fini. Il existe une suite exacte :

$$0\to K\to R^e\to N\to 0.$$

On en déduit une suite exacte :

$$H^r_{\mathfrak{J}}(R^e)\to H^r_{\mathfrak{J}}(N)\to H^{r+1}_{\mathfrak{J}}(K).$$

Les deux modules extérieurs de cette suite exacte à trois termes étant artiniens, il en est de même du module central, et le lemme est démontré.

Comme R est régulier, pour tout entier ℓ, $\mathfrak{J}_{(\ell)}$ est un idéal de R. Le système d'idéaux $\mathfrak{J}_{(\ell)}$ définissant la topologie $\mathfrak{J}$-adique dans R, on a pour tout entier s,

$$H^s_{\mathfrak{J}}(R)=\varinjlim_{\ell}\operatorname{Ext}^s_R(R/\mathfrak{J}_{(\ell)}, R).$$

Lemme **(4.11)**. — *Pour* $s\geq n-i$, *les modules* $\operatorname{Ext}^s_R(R/\mathfrak{J}_{(\ell)}, R)$ *sont de longueur finie pour tout* $\ell\geq 0$.

Comme R est régulier, $R/\mathfrak{J}_{(\ell)}=(R/\mathfrak{J})_{(\ell)}$. D'après (4.8), il y a un isomorphisme

$$\operatorname{Ext}^s_R((R/\mathfrak{J})_{(\ell)}, R)\simeq(\operatorname{Ext}^s_R(R/\mathfrak{J}, R))_{(\ell)}.$$

Comme (1.4.5), $(\operatorname{Ext}^s_r(R/\mathfrak{J}, R))_{(\ell)}$ a même support que $\operatorname{Ext}^s_R(R/\mathfrak{J}, R)$, il suffit finalement de montrer que $\operatorname{Ext}^s_R(R/\mathfrak{J}, R)$ est de longueur finie pour $s\geq n-i$.
Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier non maximal de R. On veut prouver que

$$\operatorname{Ext}^s_{R_\mathfrak{q}}(R_\mathfrak{q}/\mathfrak{J}R_\mathfrak{q}, R_\mathfrak{q})=0 \quad \text{pour } s\geq n-i.$$

On peut évidemment supposer $\mathfrak{J}\subset\mathfrak{q}$, sinon il n'y a pas de problème. On sait qu'on a $\operatorname{prof}(R_\mathfrak{q}/\mathfrak{J}R_\mathfrak{q})\geq\inf(i, \dim R_\mathfrak{q}/\mathfrak{J}R_\mathfrak{q})$.

Soit $c=\inf_i(\dim Y_i)$, pour Y_i composante irréductible de $R/\mathfrak{J}$. Alors la codimension de $R_\mathfrak{q}/\mathfrak{J}R_\mathfrak{q}$ dans $R_\mathfrak{q}$ est $\leq n-c$, donc $\dim R_\mathfrak{q}/\mathfrak{J}R_\mathfrak{q}\geq\dim R_\mathfrak{q}-(n-c)$. On en déduit :

$$\operatorname{prof}(R_\mathfrak{q}/\mathfrak{J}R_\mathfrak{q})\geq\inf(i, \dim R_\mathfrak{q}-(n-c)),$$

donc :

$$\operatorname{dp}_{R_\mathfrak{q}}(R_\mathfrak{q}/\mathfrak{J}R_\mathfrak{q})\leq\sup(\dim R_\mathfrak{q}-i, n-c),$$

et comme $n-i>\dim R-i$ et $n-i>n-c$, $\operatorname{Ext}^s_{R_\mathfrak{q}}(R_\mathfrak{q}/\mathfrak{J}R_\mathfrak{q}, R_\mathfrak{q})=0$ pour $s\geq n-i$.

Lemme **(4.12)**. — *Soit* E *un module dualisant pour* R (i.e. *une enveloppe injective du corps résiduel k de* R) *; alors les conditions suivantes sont équivalentes* :

1) $H^s_{\mathfrak{J}}(R)$ *est artinien.*

2) $\mathrm{Hom}_R(H^s_{\mathfrak{J}}(R), E)$ *est un module de type fini sur le complété* $\hat{R}$ *de* R *pour l'idéal maximal.*

3) $\varprojlim_{\ell} \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext}^s_R(R/\mathfrak{J}_{(\ell)}, R), E)$ *est un* $\hat{R}$*-module de type fini.*

1)$\Leftrightarrow$2) est une dualité classique ([10], exposé IV). L'équivalence 2)$\Leftrightarrow$3) est une conséquence immédiate de l'isomorphisme de foncteurs : $\varprojlim \mathrm{Hom}(\cdot, E) \simeq \mathrm{Hom}(\varinjlim \cdot, E)$.

Lemme **(4.13)**. — *Dans la catégorie des* R*-modules de longueur finie, on a un isomorphisme de foncteurs* :

$$\mathrm{Hom}_R(\cdot, E) \simeq \mathrm{Ext}^n_R(\cdot, R).$$

En effet, ces deux foncteurs sont exacts et coïncident sur le corps résiduel k de R. Cet isomorphisme est de plus canonique ([10], exposé III).

Combinant les deux lemmes précédents, on constate que pour prouver le théorème, il suffit de prouver que pour $s \geq n-i$:

$$\varprojlim_{\ell} \mathrm{Ext}^n_R(\mathrm{Ext}^s_R(R/\mathfrak{J}_{(\ell)}, R), R)$$

est un $\hat{R}$-module de type fini.

C'est une conséquence immédiate du lemme et de la proposition qui suivent :

Lemme **(4.14)**. — *Soit k le corps résiduel de* R*; alors le rang résiduel*

$$\mathrm{rang}_k(k \otimes_R \mathrm{Ext}^n_R(\mathrm{Ext}^s_R(R/\mathfrak{J}_{(\ell)}, R), R))$$

est indépendant de ℓ.

D'après (4.8), il y a un isomorphisme :

$$\mathrm{Ext}^n_R(\mathrm{Ext}^s_R(R/\mathfrak{J}_{(\ell)}, R), R) \simeq (\mathrm{Ext}^n_R(\mathrm{Ext}^s_R(R/\mathfrak{J}, R), R))_{(\ell)}.$$

Mais, d'après (4.7), pour tout R-module de type fini M, et pour tout entier ℓ, on a $\mathrm{rang}_k(k \otimes_R M) = \mathrm{rang}_k(k \otimes_R M_{(\ell)})$.

Proposition **(4.15)**. — *Soit* A *un anneau local de corps résiduel k. Soit* (M_ℓ) *un système projectif de* R*-modules de longueur finie, à rangs résiduels bornés* (i.e. *tels que* $\mathrm{rang}_k(k \otimes_R M) \leq C$). *Alors* $\varprojlim_{\ell} M_\ell$ *est un module de type fini sur le complété* $\hat{A}$ *de* A *pour l'idéal maximal.*

Pour tout ℓ, posons $P_\ell = \bigcap_{\ell' \geq \ell} \mathrm{Im}(M_{\ell'} \to M_\ell)$. Comme les modules M_ℓ sont de longueurs finies, le système projectif vérifie la condition de Mittag-Leffler, c'est-à-dire qu'on a $P_\ell = \mathrm{Im}(M_{\ell'} \to M_\ell)$ pour ℓ' assez grand. On en déduit $\mathrm{rang}_k(k \otimes_A P_\ell) \leq C$ pour tout ℓ. On sait que les modules P_ℓ forment un système projectif surjectif tel que $\varprojlim P_\ell = \varprojlim M_\ell$. On peut donc remplacer le système M_ℓ par le système P_ℓ, autrement dit, on peut supposer que le système projectif M_ℓ est surjectif. Alors la suite $(\mathrm{rang}_k(k \otimes_A M_\ell))$ est croissante et bornée. Donc en « oubliant » un nombre fini de M_ℓ, on peut supposer que $\mathrm{rang}_k(k\otimes M_\ell)$ est constant égal à η. C'est-à-dire qu'on peut supposer que les homomorphismes surjectifs :

$$(*) \qquad M_{\ell'} \to M_\ell \qquad (\ell' \geq \ell)$$

définissent des isomorphismes

$$k\otimes_A M_{\ell'} \xrightarrow{\sim} k\otimes_A M_\ell .$$

Considérons une surjection

$$A^\eta \to M_\ell \to 0.$$

On peut alors relever l'application $(*)$ en un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A^\eta \arrow[r] \arrow[dr] & M_\ell \arrow[r] & 0 \\
& M_{\ell'} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

En tensorisant par k, on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
k^\eta \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr] & k\otimes_A M_\ell \arrow[r] & 0 \\
& k\otimes_A M_{\ell'} \arrow[u, "\wr"'] &
\end{tikzcd}$$

qui montre que $k^\eta \to k\otimes_A M_{\ell'}$ est un isomorphisme, donc que $A^\eta \to M_{\ell'}$ est une surjection. On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& 0 & \\
A^\eta \arrow[r] & M_\ell \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
A^\eta \arrow[r] \arrow[u, equal] & M_{\ell'} \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

Il existe une suite croissante d'entiers $c(\ell)$ tels que si $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de A, on ait $\mathfrak{m}^{c(\ell)}M_\ell = 0$. On peut donc factoriser le diagramme précédent en un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& 0 & 0 & \\
A^\eta \arrow[r] & A^\eta/\mathfrak{m}^{c(\ell)}A^\eta \arrow[r] \arrow[u] & M_\ell \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
A^\eta \arrow[r] \arrow[u, equal] & A^\eta/\mathfrak{m}^{c(\ell')}A^\eta \arrow[r] \arrow[u] & M_{\ell'} \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

Soit $K_\ell = \mathrm{Ker}((A^\eta/\mathfrak{m}^{c}(\ell)\ A^\eta) \to M_\ell)$.

On obtient un système projectif de suites exactes :

$$0 \to K_\ell \to A^n/\mathfrak{m}^{c(\ell)}A^n \to M_\ell \to 0.$$

Tous les modules décrits ici étant de longueurs finies, le système projectif (K_ℓ) vérifie la condition de Mittag-Leffler.

On obtient donc une suite exacte :

$$0 \to \varprojlim K_\ell \to \varprojlim A^n/\mathfrak{m}^{c(\ell)}A^n \to \varprojlim M_\ell \to 0.$$

On a donc une surjection de $\hat{A}$-modules $\hat{A}^n \to \varprojlim M_\ell \to 0$ et la proposition est démontrée.

En corollaire du théorème local de finitude en caractéristique $p>0$, on obtient un théorème global de finitude en caractéristique p, plus fort que le résultat général conjecturé par Grothendieck. Ce théorème, ou un résultat assez similaire, a sans doute déjà été démontré par R. Hartshorne, par des méthodes géométriques.

Théorème **(4.16)**. — *Soit* X *un sous-schéma fermé de l'espace projectif* $P = \mathbf{P}_k^n$ *sur un corps* k *de caractéristique* p. *Soient* X_j *les composantes irréductibles de* X, *et soit* $d = \inf_j \dim X_j$. *Supposons que* X *est* S_i *avec* $i \leq d$ (i.e. *pour tout* $x \in X$, $\operatorname{prof} \mathcal{O}_{X,x} \geq \inf(i, \dim \mathcal{O}_{X,x})$).

Alors $H^s(P-X, \mathcal{F})$ *est un* k-*espace vectoriel de type fini, pour tout faisceau cohérent* $\mathcal{F}$ *sur* $P-X$, *et pour tout entier* $s \geq n-i$.

De plus, pour les mêmes valeurs de s, $H^s(P-X, \mathcal{F}(r)) = 0$ *pour* r *assez grand.*

Ce théorème se déduit du théorème (4.9) grâce aux propositions (1.7) et (1.8).

5. Sur l'avant-dernier groupe de cohomologie locale

Théorème **(5.1)**. — *Soit* R *un anneau local régulier complet de dimension* d, *à corps résiduel séparablement clos. Soit* U *l'ouvert complémentaire du point fermé dans* Spec R, *et soit* $\mathfrak{I}$ *un idéal de* R, *tel que* $V(\mathfrak{I}) \cap U$ *soit connexe de dimension* ≥ 1.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $H^s_{\mathfrak{I}}(M)$ *est un* R-*module artinien pour* $s \geq d-1$ *et pour tout* R-*module de type fini* M.
2) $H^s_{\mathfrak{I}}(R)$ *est un* R-*module artinien pour* $s \geq d-1$.
3) $H^s_{\mathfrak{I}}(M) = 0$ *pour* $s \geq d-1$ *et pour tout* R-*module* M.
4) $H^s_{\mathfrak{I}}(R) = 0$ *pour* $s \geq d-1$.
5) $H^0(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}})$ *est fini sur* R, *où* $\hat{U}$ *est le complété de* U *le long de* $V(\mathfrak{I}) \cap U$.
6) *L'homomorphisme canonique* $R \to H^0(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}})$ *est un isomorphisme.*

Les conditions 1), 2) et 5) sont équivalentes par (2.3). L'équivalence des conditions 3), 4) et 6) est une conséquence de la suite exacte de (2.2), compte tenu du théorème local de Lichtenbaum qui entraîne ici $H^d_{\mathfrak{I}}(\cdot) = 0$. Comme on a évidemment 6) $\Rightarrow$ 5), il reste à démontrer 5) $\Rightarrow$ 6).

On sait qu'on a :

$$(*) \qquad H^0(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}}) = \varprojlim_{x \in \hat{U} \cap V(\mathfrak{J})} \mathcal{O}_{\hat{U},x}.$$

Rappelons que si $x \in U \cap V(\mathfrak{J})$, et si $\mathfrak{q}_x$ est l'idéal premier de R correspondant à x, alors $\mathcal{O}_{\hat{U},x}$ est un anneau local, dont le complété est $\widehat{R_{\mathfrak{q}_x}}$, complété de l'anneau local $R_{\mathfrak{q}_x}$ pour l'idéal $\mathfrak{q}_x R_{\mathfrak{q}_x}$. On en déduit que toutes les flèches apparaissant dans la limite projective $(*)$ sont injectives.

Lemme (5.2). — *Pour tout* $x \in U \cap V(\mathfrak{J})$, *l'homomorphisme* $H^0(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}}) \to \mathcal{O}_{\hat{U},x}$ *est injectif.*

Il suffit évidemment de montrer que si α est un élément non nul de $H^0(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}})$, son image dans $\mathcal{O}_{\hat{U},x}$ est non nulle pour tout $x \in U \cap V(\mathfrak{J})$.

Comme $\alpha \neq 0$, il existe $x \in U \cap V(\mathfrak{J})$ tel que l'image de α dans $\mathcal{O}_{\hat{U},x}$ soit non nulle. Soit $y \in U \cap V(\mathfrak{J})$, et soient $\mathfrak{q}_x$ et $\mathfrak{q}_y$ les idéaux premiers de R correspondant à x et y. Comme $U \cap V(\mathfrak{J})$ est connexe, il existe $z_1, \ldots, z_s \in U \cap V(\mathfrak{J})$ ayant pour idéaux premiers correspondants $\mathfrak{q}_{z_1}, \ldots, \mathfrak{q}_{z_s}$ tels que si on considère la suite d'idéaux premiers $\mathfrak{q}_x, \mathfrak{q}_{z_1}, \ldots, \mathfrak{q}_{z_s}, \mathfrak{q}_y$, il y ait toujours une relation d'inclusion entre deux idéaux successifs. On en déduit que si l'image de α dans $\mathcal{O}_{\hat{U},x}$ est non nulle, alors l'image de α dans $\mathcal{O}_{\hat{U},y}$ est non nulle. Le lemme est démontré.

Lemme (5.3). — $H^0(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}})$ *est un anneau intégralement clos fini sur* R.

Comme pour $x \in U \cap V(\mathfrak{J})$, le complété de $\mathcal{O}_{\hat{U},x}$ est un anneau régulier, $\mathcal{O}_{\hat{U},x}$ est intégralement clos. Soit α un élément du corps des fractions de $H^0(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}})$ entier sur $H^0(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}})$. Par (4.2), c'est un élément du corps des fractions de $\mathcal{O}_{\hat{U},x}$, donc $\alpha \in \mathcal{O}_{\hat{U},x}$ et ceci pour tout $x \in U \cap V(\mathfrak{J})$. On en déduit que $\alpha \in H^0(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}})$. Le fait que $H^0(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}})$ est fini sur R n'est rien d'autre que l'hypothèse.

Lemme (5.4). — Spec $H^0(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}})$ *est un revêtement étale de* Spec R.

Comme R est un anneau régulier, d'après le théorème de pureté, il suffit de prouver que tout idéal premier de hauteur 1 de l'anneau $A = H^0(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}})$ est étale au-dessus de R. Pour tout $x \in U \cap V(\mathfrak{J})$, soit $\mathfrak{q}_x$ l'idéal premier de R correspondant. Posons

$$\mathfrak{p}_x = A \cap \mathfrak{q}_x \mathcal{O}_{\hat{U},x} = A \cap \mathfrak{q}_x \widehat{R_{\mathfrak{q}_x}}.$$

Les injections $R_{\mathfrak{q}_x} \hookrightarrow A_{\mathfrak{p}_x} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\hat{U},x} \hookrightarrow \widehat{R_{\mathfrak{q}_x}}$ montrent que $\mathfrak{p}_x$ est étale au-dessus de R. Comme $A = \varprojlim_{x \in \hat{U} \cap V(\mathfrak{J})} \mathcal{O}_{\hat{U},x}$, on a $A = \bigcap_{x \in V(\mathfrak{J}) \cap U} A_{\mathfrak{p}_x}$.

On en déduit que tout idéal premier de hauteur 1 de A est contenu dans un $\mathfrak{p}_x$. Comme l'ensemble des points où le morphisme Spec A $\to$ Spec R est étale, est ouvert, on en déduit que tout idéal premier de hauteur 1 de A est étale au-dessus de R, et le lemme est démontré.

Mais, comme R est complet à corps résiduel séparablement clos, le seul revêtement étale connexe de R est R lui-même, donc l'homomorphisme $R \to H^0(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}})$ est bien un isomorphisme et le théorème est démontré.

Corollaire (5.5). — *Soit* R *un anneau local complet régulier de caractéristique* $p>0$, *de dimension* d, *à corps résiduel séparablement clos. Soit* U *l'ouvert complémentaire du point fermé de* Spec R, *et soit* $\mathfrak{J}$ *un idéal de* R *tel que* $V(\mathfrak{J}) \cap U$ *soit connexe de* dimension ≥ 1. *Alors* :

1) *Les foncteurs* $H^{d-1}_{\mathfrak{J}}(\cdot)$ *et* $H^d_{\mathfrak{J}}(\cdot)$ *sont nuls.*

2) *Si* $\hat{U}$ *est le complété formel de* U *le long de* $V(\mathfrak{J}) \cap U$, *l'homomorphisme canonique* $R \to \Gamma(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}})$ *est un isomorphisme.*

Par le théorème local de Lichtenbaum $H^d_{\mathfrak{J}}(\cdot)=0$.

Comme pour toute composante irréductible Y de Spec $R/\mathfrak{J}$, on a $1<\dim Y$, en remplaçant $\mathfrak{J}$ par l'intersection des idéaux premiers le contenant, on peut appliquer le théorème local de finitude en caractéristique p (4.9), donc $H^{d-1}_{\mathfrak{J}}(R)$ est un R-module artinien. Mais par le théorème (5.1), ceci implique $H^{d-1}_{\mathfrak{J}}(\cdot)=0$, ainsi que la propriété 2) qui n'est autre que la propriété 6) de (5.1).

Donnons enfin le corollaire global de ce résultat local.

Corollaire (5.6). — *Soit* k *un corps séparablement clos de caractéristique* p. *Soit* X *un sous-schéma fermé connexe de dimension* ≥ 1 *de l'espace projectif* $P=\mathbf{P}^n_k$. *Alors pour tout faisceau quasi-cohérent* $\mathscr{F}$ *sur* P—X, *on a* :

$$H^{n-1}(P-X, \mathscr{F})=0.$$

On sait déjà par le théorème de Lichtenbaum que $H^n(P-X, \mathscr{F})=0$. Tout faisceau quasi-cohérent étant limite inductive de faisceaux cohérents il suffit de montrer que $H^{n-1}(P-X, \mathscr{F})=0$ pour tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur P—X. Mais ce résultat se déduit du résultat local précédent exactement comme le théorème global de finitude se déduit du théorème local de finitude.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Artin, Algebraic approximation of structures over complete local rings, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **36**, 1969.

[2] M. Auslander, Modules over unramified regular local rings, *Ill. J. of Math.*, **5** (1961), 631-645.

[3] M. Auslander, Modules over unramified regular local rings, *Proc. Intern. Congress of math.*, 1962, 230-233.

[4] M. Auslander, On the purity of branch locus, *Amer. J. of Math.*, **84** (1962), 116-125.

[5] M. Auslander et D. Buchsbaum, Homological codimension and multiplicity, *Ann. of Math.*, **68** (1958), 626-657.

[6] H. Bass, On the ubiquity of Gorenstein rings, *Math. Zeitschr.*, **82** (1963), 8-28.

[7] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Hermann, Paris, 1961-65.

[8] H. Cartan et S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton University Press, 1956.

[9] Gabriel, Objets injectifs dans les catégories abéliennes, *Séminaire Dubreil-Pisot, Algèbre et théorie des nombres*, 12e année, 1958-1959, n° 17, 32 p.

[10] A. Grothendieck, *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux* (SGA 2), North Holland, Amsterdam, 1968.

[11] A. Grothendieck, Local cohomology, *Lectures notes on mathematics*, n° 41, Springer Verlag, 1967.

[12] A. Grothendieck, Éléments de géométrie algébrique, *Publ. Math. I.H.E.S.*, nos 4, 8, 11, 17, 20, 24, 32.

[13] R. Hartshorne, Residues and duality, *Lectures notes on mathematics*, no 20, Springer Verlag, 1966.

[14] R. Hartshorne, Cohomological dimension of algebraic varieties, *Ann. of Math.*, **88** (1968), 403-450.

[15] R. Hartshorne, Ample subvarieties of algebraic varieties, *Lectures notes in mathematics*, no 156, Springer Verlag, 1970.

[16] Horrocks, Vector bundles on the punctured spectrum of a local ring, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), **14** (1964), 689-713.

[17] S. Kleimann, On the vanishing of $H^n(X, \mathscr{F})$ for an n-dimensional variety, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **18** (1967), 940-944.

[18] E. Kunz, Characterisations of regular local rings of characteristic p, *Amer. J. of Math.*, **41** (1969), 772-784.

[19] S. Lichtenbaum, On the vanishing of Tor in regular local rings, *Ill. J. of Math.*, **10** (1966), 220-226.

[20] Macaulay, *Algebraic theory of modular systems*, Cambridge tracts, no 19, 1916.

[21] D. Rees, The grade of an ideal or module, *Proc. Camb. phil. soc.*, **53** (1957), 28-42.

[22] P. Samuel, *Séminaire d'algèbre commutative*, Anneaux de Gorenstein et torsion en algèbre commutative. Secrétariat mathématique, 11, rue Pierre Curie, Paris (5e), 1967.

[23] J.-P. Serre, Algèbre locale et multiplicité, *Lectures notes in mathematics*, no 11, Springer Verlag, 1965.

[24] D. A. Buschbaum, Complexes associated with the minors of a matrix, *Symposia Matematica*, vol. IV, 1970, Bologna.

Manuscrit reçu le 1er juin 1971.