

REINHARDT KIEHL

**Die de Rham Kohomologie algebraischer Mannigfaltigkeiten  
über einem bewerteten Körper**

*Publications mathématiques de l'I.H.É.S.*, tome 33 (1967), p. 5-20

[http://www.numdam.org/item?id=PMIHES\\_1967\\_\\_33\\_\\_5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1967__33__5_0)

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (<http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# DIE DE RHAM KOHOMOLOGIE ALGEBRAISCHER MANNIGFALTIGKEITEN ÜBER EINEM BEWERTETEN KÖRPER

## EINLEITUNG

Grothendieck hat in [8] bewiesen, daß die De Rham Kohomologie einer glatten algebraischen Mannigfaltigkeit über dem Körper der komplexen Zahlen, d.h. die Hyperkohomologie des Garbenkomplexes der äußeren Differentialformen, übereinstimmt mit der De Rham Kohomologie des assoziierten komplexanalytischen Raumes, die identisch ist mit der singulären Kohomologie dieses Raumes mit komplexen Koeffizienten.

Da die Arbeit von Monsky und Washnitzer [16] zeigt, daß die De Rham Kohomologie der rigidanalytischen Räume im Sinne von Tate [18] über einem nicht-archimedisch bewerteten Körper der Charakteristik Null eine Rolle spielt für die Kohomologietheorie der algebraischen Schemata über Körpern positiver Charakteristik, ist es von Interesse, die Grothendieckschen Ergebnisse auf den rigidanalytischen Fall zu übertragen. Dazu hat man die Kohomologie des Komplexes der Differentialformen einer affinoiden Algebra in der Umgebung eines Divisors mit nur transversalen Schnitten lokal im Sinne der Grothendiecktopologie zu untersuchen.

In § 1 zeigen wir, daß ein glatter abgeschlossener Unterraum eines affinoiden Raumes immer eine im Sinne der Grothendiecktopologie zulässige Überdeckung durch tubulare Umgebungen besitzt. In § 2 berechnen wir dann die De Rham Kohomologie in solchen tubularen Umgebungen. Daraus ergibt sich dann auch im nichtarchimedischen Fall der Grothendiecksche Satz.

### § 1. Tubulare Umgebungen glatter Unterräume.

Im folgenden sei  $k$  ein vollständiger, nicht trivial nichtarchimedisch bewerteter Körper mit der Bewertungsfunktion  $|\cdot| : k \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $V$  sein Bewertungsring,  $\mathfrak{m}$  das maximale Ideal dieses Bewertungsringes und  $\kappa = V/\mathfrak{m}$  Restklassenkörper von  $V$ .

Wir bezeichnen mit  $T_n = k\langle\langle X_1, \dots, X_n \rangle\rangle$  die freie affinoid Algebra in den Variablen  $X_1, \dots, X_n$  über  $k$ , d.h. den Ring der Potenzreihen

$$f(X) = \sum_{i_1 \geq 0, \dots, i_n \geq 0} a_{i_1 \dots i_n} X^{i_1} \dots X^{i_n} = \sum_i a_i X^i$$

deren Koeffizienten eine Nullfolge in  $k$  bilden.  $T_n$  ist normiert :  $|f(X)| = \sup_i |a_i|$ .

Die Faktorringe  $A = T_n/\mathfrak{a}$  dieser freien affinoiden Algebren heißen affinoiden Algebren.  $A$  wird mit der Faktornorm  $||$  versehen.

$$A_0 = \{a \in A, ||a|| \leq 1\}$$

ist eine vollständige  $V$ -Unteralgebra von  $A$ . Die Topologie von  $A$  hängt nicht von der speziellen Darstellung als Faktoring einer freien affinoiden Algebra ab. Sei  $x$  ein Element aus  $\text{Sp}(A)$ , der Menge aller maximalen Ideale, dem maximalen Spektrum von  $A$ . Wir schreiben  $f(x)$  für die Restklasse eines Elements  $f$  aus  $A$  in dem Restklassenkörper  $A/\mathfrak{m} = k(x)$ ; mit  $|f(x)|$  bezeichnen wir den Wert von  $f(x)$  bei der eindeutig bestimmten Fortsetzung der Bewertung  $||$  des Grundkörpers  $k$  auf den endlichen Erweiterungskörper  $k(x)$ . Für ein Element  $f$  aus  $A$  erklären wir die Spektralnorm

$$|f| = \sup_{x \in \text{Sp}(A)} |f(x)|.$$

Im Falle  $A = T_n$  stimmt diese Spektralnorm mit der Koeffizientennorm überein. Enthält  $A$  keine nilpotenten Elemente, so ist die Spektralnorm  $|$  wenigstens noch zur Faktornorm  $||$  äquivalent [4].

Wir schreiben :

$$\begin{aligned} \mathring{A} &= \{f \in A; |f| \leq 1\} \\ t(A) &= \{f \in A; |f| < 1\} \\ \widetilde{A} &= \mathring{A}/t(\mathring{A}). \end{aligned}$$

Die  $\kappa$ -Algebra  $\widetilde{A}$  ist endlich erzeugt über  $\kappa$  ([6], [17]).

Einzelheiten über diese Dinge findet man in [5], [6], [17], [18].

In [13] wird jeder affinoiden Algebra  $A$  ein  $G$ -geringter Raum  $X$  im Sinne von [12] zugeordnet, d.h. ein Tripel, bestehend aus der Menge  $\text{Sp}(A)$  versehen mit einer Topologie, einer Grothendiecktopologie auf einer Kategorie zulässiger offener Teilmengen von  $\text{Sp}(A)$  und einer Garbe  $\mathcal{O}_X$  von Ringen bzgl. dieser Grothendiecktopologie. Wir schreiben für diesen zu  $A$  assoziierten affinoiden Raum wieder  $\text{Sp}(A)$ . Jeder  $k$ -Homomorphismus  $h: A \rightarrow B$  induziert einen Morphismus  $G$ -geringter Räume  $\text{Sp}(h): \text{Sp}(B) \rightarrow \text{Sp}(A)$ , und man erhält so alle Morphismen.

Sind  $f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s$  Elemente aus  $A$ , so ist die spezielle offene Teilmenge

$$\begin{aligned} U &= U(f_1, \dots, f_r, g_1^{-1}, \dots, g_s^{-1}) \\ &= \{x \in \text{Sp}(A); |f_1(x)| \leq 1, \dots, |f_r(x)| \leq 1, |g_1(x)| \geq 1, \dots, |g_s(x)| \geq 1\} \end{aligned}$$

zulässig;  $U$  versehen mit der induzierten Struktur ist wieder ein affinoider Raum, ein spezieller affinoider Teilbereich :

$$U(f_1, \dots, f_r; g_1^{-1}, \dots, g_s^{-1}) = \text{Sp}(A \langle\langle f_1, \dots, f_r; g_1^{-1}, \dots, g_s^{-1} \rangle\rangle)$$

(siehe [18]).

Ein offener affinoider Unterraum  $\text{Sp}(B) \hookrightarrow \text{Sp}(A)$  des affinoiden Raumes  $\text{Sp}(A)$  heißt geschachtelter spezieller Teilbereich, wenn es eine Kette von Unterräumen

$$\text{Sp}(B) = \text{Sp}(A_n) \hookrightarrow \text{Sp}(A_{n-1}) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \text{Sp}(A_0) = \text{Sp}(A)$$

gibt, so daß  $\text{Sp}(A_{i+1})$  spezieller affinoider Teilbereich von  $\text{Sp}(A_i)$  ist; die unterliegende Menge heißt geschachtelte spezielle offene Teilmenge von  $\text{Sp}(A)$ . Wir wollen noch die wichtigsten zulässigen Überdeckungen eines affinoiden Raumes  $\text{Sp}(A)$  angeben.

Eine zulässige Überdeckung  $\mathcal{L}(f_1, \dots, f_r)$  von  $\text{Sp}(A)$  durch die speziellen offenen Teilmengen

$$U(f_1^{\pm 1}, \dots, f_r^{\pm 1})$$

heißt Laurentüberdeckung, definiert durch die Elemente  $f_1, \dots, f_r$ .

Bilden die Elemente  $f_1, \dots, f_r$  aus  $\hat{A}$  eine Teilung der Eins von  $A$ , d.h. gibt es Elemente  $g_1, \dots, g_r$  in  $\hat{A}$  mit

$$f_1 g_1 + \dots + f_r g_r = 1,$$

so heißt die zulässige Überdeckung von  $\text{Sp}(A)$  durch die speziellen offenen Teilmengen  $U(f_1^{-1}), \dots, U(f_r^{-1})$  formelle Überdeckung [13].

Trivial ist folgender Hilfssatz :

*Hilfssatz 1.1. — Eine Überdeckung von  $\text{Sp}(A)$  durch endlich viele geschachtelte spezielle offene Teilmengen ist zulässig, d.h. kann verfeinert werden durch eine spezielle Überdeckung im Sinne von Tate [18].*

Wir müssen uns jetzt mit einer anderen Art von zulässigen Überdeckungen, den Zariskiüberdeckungen beschäftigen.

Eine Teilmenge  $U$  des Spektrums  $\text{Sp}(A)$  einer affinoiden Algebra  $A$  heißt *Zariski-offene* Teilmenge, wenn sie Komplement der Nullstellenmenge  $V(\mathfrak{J})$  eines Ideals  $\mathfrak{J}$  von  $A$  ist. Für ein Element  $f$  aus  $A$  ist  $\delta(f) = \{x \in \text{Sp}(A); f(x) \neq 0\}$  Zariskioffen. Eine Teilmenge  $U$  von  $\text{Sp}(A)$  ist genau dann Zariskioffen, wenn sie sich darstellen läßt als

$$U = \delta(f_1) \cup \dots \cup \delta(f_r).$$

*Hilfssatz 1.2. — Seien  $f_1, \dots, f_r$  Elemente aus  $A$  mit*

$$(*) : \delta(f_1) \cup \dots \cup \delta(f_r) = \text{Sp}(A).$$

*Dann gibt es ein von Null verschiedenes Element  $a$  aus  $k$ , so daß bereits*

$$\text{Sp}(A) = U((f_1/a)^{-1}) \cup \dots \cup U((f_r/a)^{-1}) \text{ ist.}$$

Aus  $(*)$  folgt, daß es Elemente  $g_1, \dots, g_r$  in  $A$  gibt mit

$$(**) : f_1 g_1 + \dots + f_r g_r = 1.$$

Sei  $h_i = f_i g_i$  und  $a$  ein Element aus  $k$  mit  $0 < |a| < 1$ . Da wir 1.2 nur für die Einschränkungen der gegebenen Zariskiüberdeckung auf die einzelnen affinoiden Teilbereiche der Laurentüberdeckung  $\mathcal{L}(h_1/a, \dots, h_r/a)$  zeigen müssen, können wir annehmen, daß

$$\text{Sp}(A) = U((h_1/a)^{\pm 1}, \dots, (h_r/a)^{\pm 1}) \text{ ist.}$$

Wenn  $\text{Sp}(A)$  nicht leer ist, gibt es wegen  $(**)$  wenigstens einen Index, etwa  $i_0 = 1$ , so daß  $|h_1(x)| \geq |a|$  ist für alle  $x$  aus  $\text{Sp}(A)$ . Dann ist aber auch  $f_1$  auf ganz  $\text{Sp}(A)$  von Null verschieden. Nach dem Maximumsprinzip [4] ist dann  $|f_1(x)| \geq |b| > 0$  für ein geeignetes Element  $b$  aus  $k$  und alle  $x$  aus  $\text{Sp}(A)$ .

*Folgerung 1.3.* — Jede Zariskioffene Teilmenge  $U = \delta(f_1) \cup \dots \cup \delta(f_r)$  von  $\text{Sp}(A)$  ist ein zulässiger offener Unterraum von  $\text{Sp}(A)$ . Ist  $a$  ein Element aus  $k$  mit  $0 < |a| < 1$ , so bilden die affinoiden Teilbereiche  $U_{ij} = U((f_i/a^j)^{-1})$   $i = 1, \dots, r; j = 1, 2, \dots$  eine zulässige Überdeckung  $\mathfrak{U}$  von  $U$ .

*Beweis.* — Sei  $\varphi : A \rightarrow B$  ein Homomorphismus affinoider Algebren mit  $\text{Sp}(\varphi)(\text{Sp}(B)) \subseteq U$ . Wir müssen zeigen, daß das Urbild  $\text{Sp}(\varphi)^{-1}(\mathfrak{U})$  der Überdeckung  $\mathfrak{U}$  zu einer speziellen verfeinert werden kann. Nach Voraussetzung über  $\varphi$  ist  $\delta(\varphi(f_1)) \cup \dots \cup \delta(\varphi(f_r)) = \text{Sp}(B)$ . Aus Hilfssatz 1.2 folgt also, daß es einen Index  $j_0$  gibt, mit

$$\text{Sp}(B) = U((\varphi(f_1)/a^{j_0})^{-1}) \cup \dots \cup U((\varphi(f_r)/a^{j_0})^{-1}) = \text{Sp}(\varphi)^{-1}(U_{1j_0}) \cup \dots \cup \text{Sp}(\varphi)^{-1}(U_{rj_0})$$

*Folgerung 1.4.* — Eine Überdeckung  $\mathfrak{U}$  von  $\text{Sp}(A)$  durch Zariskioffene Teilmengen ist zulässig.

*Beweis.* — Da  $\text{Sp}(A)$  bei der Zariskitopologie quasikompakt ist, kann  $\mathfrak{U}$  zu einer Überdeckung durch endlich viele Zariskioffene Teilmengen und diese durch eine Überdeckung

$$(\delta(f_1), \dots, \delta(f_r))$$

verfeinert werden. Also folgt 1.4 aus 1.2.

Sei  $\mathfrak{J}$  ein Ideal der affinoiden Algebra  $A : \mathfrak{J} = Af_1 + \dots + Af_r$ . Wir wollen die affinoiden Umgebungen der Nullstellenmenge  $V(\mathfrak{J})$  von  $\mathfrak{J}$  in  $\text{Sp}(A)$  studieren. Wir nennen eine Teilmenge  $U$  von  $\text{Sp}(A)$  Schlauchumgebung von  $V(\mathfrak{J})$ , wenn sie von der Form

$$U = U((f_1/\varepsilon), \dots, (f_r/\varepsilon)) = \text{Sp}(A \langle\langle (f_1/\varepsilon), \dots, (f_r/\varepsilon) \rangle\rangle)$$

ist, mit einem von Null verschiedenen Element  $\varepsilon$  aus  $k$ .

*Hilfssatz 1.5.* — Sei  $\mathfrak{J} = Af_1 + \dots + Af_r$  ein Ideal der affinoiden Algebra  $A$ ,  $a$  ein Element aus  $A$ ,  $\bar{a}$  die Restklasse in  $B = A/\mathfrak{J}$ . Dann gibt es eine Schlauchumgebung  $U = \text{Sp}(C)$  von  $V(\mathfrak{J})$ , mit folgenden Eigenschaften :

- (1.5.1) Wenn  $\bar{a}$  Einheit ist, ist auch  $a|U$  (das Bild von  $a$  in  $C$ ) Einheit.
- (1.5.2) Wenn  $|\bar{a}| \neq 0$  ist gilt :  $|a|U| = |\bar{a}|$ .
- (1.5.3) Ist  $\bar{a} = 0$ , so ist eine Potenz von  $a$  in  $\mathfrak{J}$  enthalten :

$$a^s = a_1 f_1 + \dots + a_r f_r.$$

Insbesondere kann man zu jedem  $\varepsilon > 0$   $U$  so wählen, daß  $|a|U| \leq \varepsilon$  ist.

*Beweis 1.5.3.* —  $\bar{a}$  ist nilpotent, also eine Potenz  $a^s$  in  $\mathfrak{J}$  enthalten. In einer genügend kleinen Schlauchumgebung ist  $|a_1 f_1|U| \leq \varepsilon, \dots, |a_r f_r|U| \leq \varepsilon$ .

Für den Beweis von 1.5.1 und 1.5.2 können wir annehmen, daß  $r = 1, f_1 = f$  ist.

Sei  $\bar{a}$  Einheit. Dann gibt es ein Element  $b$  aus  $A$  mit der Restklasse  $\bar{b}$  in  $B$ , so daß  $\bar{a} \cdot \bar{b} = 1$  ist, also auch ein Element  $u$  in  $A$ , so daß  $a \cdot b = 1 + u \cdot f$  ist. In einer genügend kleinen Schlauchumgebung  $U$  ist  $|u \cdot f|U| < 1$ , damit  $1 + u \cdot f|U$  Einheit :

$$(1 + u \cdot f|U)^{-1} = 1 - u \cdot f|U + (u \cdot f|U)^2 \pm \dots$$

*Zu 1.5.2.* — Nach geeigneter endlicher Grundkörpererweiterung und teilen durch ein Element  $\rho$  aus  $k$  mit  $|\rho| = |\bar{a}|$  können wir annehmen, daß  $|\bar{a}| = 1$  ist.

Wir müssen zeigen, daß es eine Schlauchumgebung  $U$  gibt, in der  $|a| \leq 1$  ist. Zum Beweis können wir ferner annehmen, daß  $A$  Integritätsbereich und  $f \neq 0$  ist. Nach dem Noetherschen Normalisierungssatz [18] gibt es in  $A$  eine freie affinoide Unter algebra

$$T_n = k\langle\langle X_1, \dots, X_n \rangle\rangle,$$

über der  $A$  endlich ist, so daß

$$(A.f) \cap T_n = T_n \cdot X_n \text{ ist.}$$

Für die minimalen Primideale  $p_1, \dots, p_s$  über  $Af$  ist dann ebenfalls  $p_i \cap T_n = T_n \cdot X_n$ . Wir bezeichnen mit  $H_i(Y)$  das Hauptpolynom der Restklasse  $\bar{a}_i$  von  $a$  in  $A/p_i$  über  $T_n/T_n \cdot X_n = T_{n-1} = k\langle\langle X_1, \dots, X_{n-1} \rangle\rangle$ , mit  $H(Y)$  das Produkt dieser Polynome  $H_i(Y)$ . Da  $|\bar{a}| \leq 1$  ist, ist auch  $|\bar{a}_i| \leq 1$  für  $i = 1, \dots, s$ ; also haben die Polynome  $H_i$ , damit auch  $H$  potenzbeschränkte Koeffizienten. Für eine geeignete Potenz

$$H' = H^e \text{ gilt dann } H'(\bar{a}) = 0$$

$$H'(Y) = Y^r + c_1 Y^{r-1} + c_2 Y^{r-2} + \dots + c_r$$

mit  $r \geq 1$  und  $|c_i| \leq 1, i = 1, \dots, r$ .

Wegen  $T_{n-1} \hookrightarrow T_n$  ist  $H'(Y)$  auch Polynom über  $T_n$

$$H'(a) = u.f = b, \quad u \in A.$$

Ersetzt man  $\text{Sp}(A)$  durch eine geeignete Schlauchumgebung von  $V(f)$ , so kann man annehmen, daß

$$|H'(a)| = |b| = |u.f| \leq |u| \cdot |f| \leq 1 \text{ ist.}$$

Wäre  $|a| > 1$ , so gäbe es einen Punkt  $x \in \text{Sp}(A)$  mit  $|a(x)| > 1$ .

Aus  $a(x)^r + c_1(x)a(x)^{r-1} + \dots + c_r(x) = b(x)$  und  $|c_i(x)| \leq 1, |b(x)| \leq 1$  folgt:

$$1 \leq \sup \left( \frac{|c_1(x)|}{|a(x)|}, \dots, \frac{|c_r(x)|}{|a(x)|^r}, \frac{|b(x)|}{|a(x)|^r} \right) < 1.$$

Widerspruch!

Wir wollen einige wichtige Folgerungen aus diesem Hilfssatz ziehen.

**Satz 1.6.** — Gegeben sei ein Ideal  $\mathfrak{J} = Af_1 + \dots + Af_r$  der affinoiden Algebra  $A$ ;  $U_1, \dots, U_s$  seien geschachtelte spezielle, offene Teilmengen von  $\text{Sp}(A)$ , so daß  $V(\mathfrak{J})$  in  $U_1 \cup \dots \cup U_s$  enthalten ist. Dann gibt es eine ganze Schlauchumgebung von  $V(\mathfrak{J})$ , die in  $U_1 \cup \dots \cup U_s$  enthalten ist.

**Beweis.** — Man kann annehmen, daß die offenen Teilmengen  $U_i$  speziell sind. Genau wie den Hilfssatz 1.3, [13] von Tate (Beweis siehe [18]) beweist man: Es gibt eine Laurentüberdeckung  $(V_j = \text{Sp}(A_j))_{j=1, \dots, n}$  von  $\text{Sp}(A)$ , so daß für jeden Index  $j$ ,  $U_i \cap V_j$  von der Form  $U_i \cap V_j = U(g_i^{-1})$ ,  $i = 1, \dots, s$  mit potenzbeschränkten Elementen  $g_1, \dots, g_s$  aus  $A_j$  ist. Wir können annehmen, daß  $A = A_j$  ist für einen Index  $j$ .  $U_i = U(g_i^{-1}) \cdot |g_i| \leq 1$ . Da  $V(\mathfrak{J})$  in  $U_1 \cup \dots \cup U_s$  enthalten ist, gibt es

Elemente  $h_1, \dots, h_s$  in  $A$ , ein Element  $f$  in  $\mathfrak{J}$ , mit  $g_1 h_1 + \dots + g_s h_s = 1 + f$  und  $|h_i(x)| \leq 1$  für  $x$  aus  $V(\mathfrak{J})$  und  $i = 1, \dots, s$ .

Nach Hilfssatz 1.5 kann man  $\text{Sp}(A)$  durch eine geeignete Schlauchumgebung ersetzen, so daß  $|h_1| \leq 1, \dots, |h_s| \leq 1, |f| < 1$  wird. Dann bilden aber die offenen Mengen  $U(g_1^{-1}) = U_1, \dots, U(g_s^{-1}) = U_s$  eine formelle Überdeckung.

Da jeder geschachtelte spezielle Teilbereich von  $\text{Sp}(A/\mathfrak{J})$  Durchschnitt eines geschachtelten speziellen Teilbereiches von  $\text{Sp}(A)$  mit  $\text{Sp}(A/\mathfrak{J})$  ist, erhält man aus 1.6

*Folgerung 1.7.* — Gegeben sei eine Überdeckung von  $\text{Sp}(A/\mathfrak{J})$  durch geschachtelte spezielle offene Teilmengen  $U_1, \dots, U_s$  von  $\text{Sp}(A/\mathfrak{J})$ . Dann gibt es eine Schlauchumgebung  $U$  von  $V(\mathfrak{J})$  und eine Überdeckung von  $U$  durch geschachtelte spezielle offene Teilmengen  $V_1, \dots, V_s$  von  $U$ , so daß

$$V_1 \cap V(\mathfrak{J}) = U_1, \dots, V_s \cap V(\mathfrak{J}) = U_s \text{ ist.}$$

Gegeben sei ein Homomorphismus  $\varphi : A \rightarrow B$  affinoider Algebren und ein Ideal  $\mathfrak{J} = Af_1 + \dots + Af_r$  von  $A$ . Wichtig ist folgendes Endlichkeitskriterium :

*Satz 1.8.* — Unter den angegebenen Voraussetzungen sei  $B/\mathfrak{J}B$  endlich über  $A/\mathfrak{J}$ . Dann gibt es in  $k$  ein Element  $\varepsilon \neq 0$ , so daß  $B \langle\langle (\varepsilon/f_1)^{-1}, \dots, (\varepsilon/f_r)^{-1} \rangle\rangle$  endlich über  $A \langle\langle (\varepsilon/f_1)^{-1}, \dots, (\varepsilon/f_r)^{-1} \rangle\rangle$  ist. Mit anderen Worten : Über einer Schlauchumgebung von  $V(\mathfrak{J})$  ist der affinoide Raum  $\text{Sp}(B)$  endlich.

*Folgerung 1.9.* — Ist  $A/\mathfrak{J} \rightarrow B/\mathfrak{J}B$  surjektiv, so ist für passendes  $\varepsilon \neq 0$  aus  $k$  auch  $A \langle\langle (\varepsilon/f_1)^{-1}, \dots, (\varepsilon/f_r)^{-1} \rangle\rangle \rightarrow B \langle\langle (\varepsilon/f_1)^{-1}, \dots, (\varepsilon/f_r)^{-1} \rangle\rangle$  surjektiv.

*Beweis von 1.8.* — Wir können annehmen, daß  $r = 1, f_1 = f$  ist. Bei passender Auswahl der  $\dot{k} = V$ -Unteralgebren  $A_0$  von  $A$  bzw.  $B_0$  von  $B$  bildet  $\varphi A_0$  in  $B_0$  ab. Sei  $B = k \langle\langle X_1, \dots, X_n \rangle\rangle / \mathfrak{a}$  Faktor der freien affinoiden Algebra  $k \langle\langle X_1, \dots, X_n \rangle\rangle$ , so daß  $B_0 = V \langle\langle X_1, \dots, X_n \rangle\rangle / (\mathfrak{a} \cap V \langle\langle X_1, \dots, X_n \rangle\rangle)$  ist. Die Bilder von  $X_1, \dots, X_n$  in  $B$  bezeichnen wir mit  $x_1, \dots, x_n$ . Da  $B/\mathfrak{J}B$  endlich über  $A/\mathfrak{J}$  ist, ist auch  $B_0/\mathfrak{J}B \cap B_0$  endlich über  $A_0/\mathfrak{J} \cap A_0$  ([17], [18]). Es gibt also Polynome  $P_1(Y), \dots, P_n(Y)$  in  $A_0[Y]$  mit höchsten Koeffizienten Eins und Elemente  $u_1, \dots, u_n$  in  $B$  mit :  $P_1(x_1) = u_1 \cdot f, \dots, P_n(x_n) = u_n \cdot f$ . Sei  $\varepsilon$  ein von Null verschiedenes Element aus  $k$  mit  $|u_i \varepsilon| < 1$  für  $i = 1, \dots, n$ . Dann

sind die Restklassen von  $x_1, \dots, x_n$  in  $\widetilde{B \langle\langle f/\varepsilon \rangle\rangle}$  ganz über  $\widetilde{A \langle\langle f/\varepsilon \rangle\rangle}$ . Da  $\widetilde{A \langle\langle f/\varepsilon \rangle\rangle}$  ganz über  $A \langle\langle f/\varepsilon \rangle\rangle_0 = A_0 \langle\langle f/\varepsilon \rangle\rangle$  und  $\sqrt{\mathfrak{m} \cdot B_0 \langle\langle f/\varepsilon \rangle\rangle} = \mathfrak{t}(B \langle\langle f/\varepsilon \rangle\rangle) \cap B_0 \langle\langle f/\varepsilon \rangle\rangle$  ist, gilt : Auch die Restklassen  $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n$  von  $x_1, \dots, x_n$  im Restklassenring  $\dot{B} = B_0 \langle\langle f/\varepsilon \rangle\rangle / \mathfrak{m} B_0 \langle\langle f/\varepsilon \rangle\rangle$  sind ganz über  $\dot{A} = A_0 \langle\langle f/\varepsilon \rangle\rangle / \mathfrak{m} A_0 \langle\langle f/\varepsilon \rangle\rangle$ . Da  $\dot{B}$  durch  $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n$  und die Restklasse  $(\dot{f}/\varepsilon)$  von  $f/\varepsilon$  über  $\dot{A}$  erzeugt wird, aber  $(\dot{f}/\varepsilon)$  bereits in  $\dot{A}$  liegt ist  $\dot{B}$  über  $\dot{A}$  sogar endlich. Daraus folgt, daß auch  $B \langle\langle f/\varepsilon \rangle\rangle$  über  $A \langle\langle f/\varepsilon \rangle\rangle$  endlich ist ([17], [18]).

*Beweis von 1.9.* — Aus 1.8 und dem Lemma von Nakayama folgt, daß es endlich viele Zariskioffene Teilmengen  $\delta(h_1), \dots, \delta(h_r)$  gibt, so daß  $V(\mathfrak{J})$  in  $\delta(h_1) \cup \dots \cup \delta(h_r)$  enthalten ist und die induzierten Homomorphismen

$$A_{h_i} \rightarrow B_{h_i} \quad i = 1, \dots, r$$

surjektiv sind. Wegen 1.2 und 1.6 erhält man daraus 1.9.

*Bemerkung 1.10.* — Diese und ähnliche Sätze folgen auch aus den Eigenschaften des Ringes  $A_{\mathfrak{J}} = \varinjlim_{0 \neq \varepsilon \in k, \varepsilon \rightarrow 0} A \langle \langle f_1/\varepsilon, \dots, f_r/\varepsilon \rangle \rangle$  der « Keime holomorpher Funktionen in einer Umgebung von  $V(\mathfrak{J}) \rangle$ . Z.B. gilt:  $A_{\mathfrak{J}}$  ist Noethersch, das Paar  $(A_{\mathfrak{J}}, A_{\mathfrak{J}} \cdot \mathfrak{J})$  Henselsch; die  $\mathfrak{J}$ -adische Kompletierung von  $A$  ist treuflach über  $A_{\mathfrak{J}}$ . Satz 1.8 ist äquivalent zu einem Endlichkeitskriterium für Homomorphismen solcher Ringe.

Wir wollen jetzt einige Eigenschaften glatter affinoider Räume studieren.

Wir übernehmen aus [3] folgende Definition:

*Definition 1.11.* — Gegeben sei ein maximales Ideal  $x$  einer affinoiden Algebra  $A$ . Dann heißt  $x$  absolut regulär, wenn eine der folgenden äquivalenten Eigenschaften erfüllt ist:

(1.11.1) Für alle vollständig bewerteten Erweiterungskörper  $K$  von  $k$  und für alle maximalen Ideale  $y$  aus  $A \hat{\otimes}_k K$  über  $x$  ist  $(A \hat{\otimes}_k K)_y$  regulär.

(1.11.2) Für ein maximales Ideal  $y$  von  $A \hat{\otimes}_k k^{\frac{1}{p}}$  über  $x$  ist  $(A \hat{\otimes}_k k^{\frac{1}{p}})_y$  regulär. ( $p = \text{Char.}(k)$ ).

(1.11.3) Für den stetigen Differentialmodul  $M(A/k)$  ist der Rang

$$\rho(M(A/k)_x) \leq \dim A_x.$$

(1.11.4)  $M(A/k)_x$  ist frei vom Rang  $\dim A_x$ .

(1.11.5) Es gibt in  $A$  eine freie affinoidale Algebra  $T$ , so daß  $A$  über  $T$  endlich und  $A_x$  über  $T_{x \cap T}$  étal, d.h. flach und unverzweigt ist.

Den Beweis für diese Äquivalenzen findet man in [3].

Sind alle maximalen Ideale von  $A$  absolut regulär, so nennt man  $A$  absolut regulär und in Analogie zur algebraischen Geometrie  $\text{Sp}(A)$  einen glatten affinoiden Raum.

Für die Anwendungen ist es notwendig, (1.11.5) zu verschärfen.

*Satz 1.12.* — Sei  $\text{Sp}(A)$  glatt. Dann gibt es eine Überdeckung von  $\text{Sp}(A)$  durch endlich viele offene spezielle affinoidale Teilbereiche  $(\text{Sp}(A_i) \hookrightarrow \text{Sp}(A))$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , so, daß es zu jedem Punkt  $x$  eines Teilbereiches  $\text{Sp}(A_i)$  der Überdeckung eine freie affinoidale Unteralgebra  $T$  von  $A_i$  und in  $T$  ein Element  $t$  gibt, mit folgenden Eigenschaften:  $A_i$  ist endlich über  $T$ ,  $t$  nicht in  $x$  enthalten und  $A_{it}$  étal über  $T_t$ .

*Folgerung 1.13.* — Man kann  $t$  sogar so wählen, daß es ein Element  $d$  in  $A_i$  und ein unitäres Polynom  $P(Y)$  in  $T[Y]$  gibt mit:

$$P(d) = 0; \quad P'(d) \left( \text{wo } P'(Y) = \frac{dP(Y)}{dY} \right) \text{ ist Einheit in } T_t[d]; \quad A_{it} \text{ ist kanonisch isomorph zu } T_t[Y]/(T_t[Y] \cdot P(Y))$$

*Beweis der Folgerung.* — Sei  $\mathfrak{n} = T \cap x$ . Da der Restklassenkörper  $T/\mathfrak{n} = k(\mathfrak{n})$  unendlich, die  $k(\mathfrak{n})$ -Algebra  $A_i/\mathfrak{n}A_i$  nach Voraussetzung endlich separabel ist, gibt es in  $A_i$  ein Element  $d$ , dessen Restklasse in  $A_i/\mathfrak{n}A_i$  diese Algebra über  $k(\mathfrak{n})$  erzeugt. Das Minimalpolynom  $P(Y)$  von  $d$  über dem Quotientenkörper von  $T$  liegt dann bereits



in  $T[Y]$  und aus dem Lemma von Nakayama folgt, daß  $A_n$  kanonisch isomorph zu  $T_n[Y]/P(Y) \cdot T_n$  ist. Da  $A_i/nA_i$  separabel über  $k(n)$  ist, ist die Restklasse von  $P'(d)$  in  $A_i/nA_i$  also  $P'(d)$  in  $A_{in}$  Einheit (siehe [9]; I, Theorem 7.6).

Es gibt deshalb ein Element  $t$  aus  $T$ , das nicht in  $n$  enthalten ist, so daß  $P'(d)$  bereits Einheit in  $A_{it}$  und  $A_{it}$  kanonisch isomorph zu  $T_t[Y]/P(Y) \cdot T_t[Y]$  ist.

Da die Zariskitopologie quasikompakt ist, erhält man wegen Hilfssatz 1.2 :

*Folgerung 1.14.* — Sei  $\text{Sp}(A)$  glatt. Dann besitzt  $\text{Sp}(A)$  eine spezielle Überdeckung  $(\text{Sp}(A_i) \hookrightarrow \text{Sp}(A)), i = 1, \dots, s$ , mit Algebren  $A_i$  folgender Form :

$$\begin{aligned} T_{n_i} \langle \langle t_i^{-1} \rangle \rangle [Y] / (P_i(Y)) &\xrightarrow{\cong} A_i = T_{n_i} \langle \langle t_i^{-1} \rangle \rangle [d_i] \\ Y &\longrightarrow d_i. \end{aligned}$$

Dabei ist  $T_{n_i}$  freie affinoide Algebra,  $t_i \neq 0$  ein Element aus  $T_{n_i}$ ,  $P_i(Y)$  ein unitäres Polynom mit Koeffizienten in  $T_{n_i}$  und  $P'(d_i)$  Einheit in  $A_i$ .

*Beweis von Satz 1.12.* — a) Die Charakteristik  $p$  des Grundkörpers sei positiv. Der stetige Differentialmodul  $M(A/k)$  von  $A$  über  $k$  ist lokal frei (1.11.4); also überdecken endlich viele Zariskioffene Teilmengen  $\delta(f_1), \dots, \delta(f_r)$  den Raum  $\text{Sp}(A)$ , so daß  $M(A/k)_{f_i}$  freier  $A_{f_i}$ -Modul wird und sogar eine Basis aus totalen Differentialen  $d(a)$  besitzt. Wegen Hilfssatz 1.2 gibt es daher eine Überdeckung von  $\text{Sp}(A)$  durch endlich viele spezielle affinoide Teilbereiche  $(\text{Sp}(A_i)), i = 1, \dots, r$ , so daß  $M(A_i/k) = M(A/k) \otimes A_i$  freier  $A_i$ -Modul ist und sogar eine Basis von totalen Differentialen besitzt. Wir nehmen deshalb an, daß  $M(A/k)$  selbst frei ist und eine Basis aus totalen Differentialen besitzt :

$$M(A/k) = Ady_1 \oplus \dots \oplus Ady_n.$$

Dann hat  $\text{Sp}(A)$  in allen Punkten die Dimension  $n$ . Nach Multiplikation mit einem von Null verschiedenen Element aus  $k$  können wir annehmen, daß

$$|y_1| < 1, \dots, |y_n| < 1$$

ist. Nach dem Noetherschen Normalisierungssatz enthält  $A$  eine freie affinoide Algebra  $T' = k \langle \langle z_1, \dots, z_n \rangle \rangle$  in den Variablen  $z_1, \dots, z_n$ , so daß  $A$  über  $T'$  endlich ist.

Wir betrachten den Homomorphismus

$$\varphi : T = k \langle \langle X_1, \dots, X_n \rangle \rangle \rightarrow A$$

der freien affinoiden Algebra  $T$  in  $A$ , der  $X_i$  in  $z_i^p + y_i$  abbildet. Dann ist das Bild von  $\tilde{T}$  in  $\tilde{A}$  in  $\tilde{T}'$  enthalten und  $\tilde{T}'$  endlich über  $\tilde{T}$ . Da  $A$  über  $T'$  endlich ist, ist auch  $\tilde{A}$  endlich über  $\tilde{T}'$ ; also ist  $\tilde{A}$  endlich über  $\tilde{T}$  und nach bekannten Schlußweisen [6] deshalb auch  $A$  endlich über  $T$ . Aus Dimensionsgründen ist  $\varphi$  eine Injektion. Da die Differentiale

$$d(\varphi(X_1)) = d(y_1 + z_1^p) = dy_1, \dots, d(\varphi(X_n)) = dy_n$$

den  $A$ -Modul  $M(A/k)$  erzeugen verschwindet der Differentialmodul

$$M(A/T) = M(A/k) / Ad\varphi(T)$$

von  $A$  über  $T$ . Daher ist  $A$  unverzweigt über  $T$  und sogar etal über  $T$ , da  $T$  regulär ist ([9]; I, Prop. 3.1, Theorem 9.5).

*b)* Der Grundkörper  $k$  habe die Charakteristik Null. Wir können annehmen, daß  $A$  Integritätsbereich ist. (Sonst zerfällt  $A$  als regulärer Ring in ein direktes Produkt von Integritätsbereichen). Nach dem Noetherschen Normalisierungssatz gibt es eine Injektion  $\varphi: T \hookrightarrow A$  einer freien affinoiden Algebra  $T = T_n = k\langle\langle X_1, \dots, X_n \rangle\rangle$  in  $A$ , so daß  $A$  über  $T$  endlich ist.

Wir nennen einen Homomorphismus  $\psi: T \rightarrow A$  unwesentliche Abänderung von  $\varphi$ , wenn die induzierte Abbildung

$$\widetilde{\psi}: \widetilde{T} \rightarrow \widetilde{A}$$

mit der induzierten Abbildung  $\widetilde{\varphi}: \widetilde{T} \rightarrow \widetilde{A}$

übereinstimmt.

Insbesondere ist für eine unwesentliche Abänderung  $\psi$  von  $\varphi$  die Abbildung  $\widetilde{\psi}$  endlich; also ist jede unwesentliche Abänderung  $\psi$  selbst endlich und aus Dimensionsgründen wieder Injektion. Wir bezeichnen für ein maximales Ideal  $x$  aus  $\text{Sp}(T)$  mit  $F(\psi, x)$  die Menge der Punkte in der Faser  $\text{Sp}(\psi)^{-1}(x)$ , mit  $F_0(\psi, x)$  die Teilmenge der unverzweigten Punkte über  $x$ , mit  $r(\psi, x)$  die Anzahl der Punkte in  $F(\psi, x)$  und mit  $r_0(\psi, x)$  die Anzahl der Punkte in  $F_0(\psi, x)$ . Wir schreiben  $[\psi]$  für den Grad des Homomorphismus  $\psi$ ,  $[\widetilde{\psi}]$  für den Grad des Homomorphismus  $\widetilde{\psi}$ .

*Hilfssatz 1.5.* — Für alle unwesentlichen Abänderungen  $\psi$  von  $\varphi$  und alle Punkte  $x$  aus  $\text{Sp}(T)$  gilt :

$$r(\psi, x) \leq [\varphi].$$

*Beweis.* — Sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener, vollständiger Erweiterungskörper von  $k$ . Dann ist auch  $A \widehat{\otimes}_k K$  regulär und kein Element von  $T \widehat{\otimes}_k K = K\langle\langle X_1, \dots, X_n \rangle\rangle$  Nullteiler von  $A \widehat{\otimes}_k K$  bei  $\psi \widehat{\otimes} K$ .

Es gilt jedenfalls :

$$\begin{aligned} r(\psi, x) &\leq [\psi] = [\psi \widehat{\otimes} K] \\ [\varphi] &= [\varphi \widehat{\otimes} K]. \end{aligned}$$

Andererseits ist nach [6]

$$\begin{aligned} [\psi \widehat{\otimes} K] &= \widetilde{[\psi \widehat{\otimes} K]} \\ [\varphi \widehat{\otimes} K] &= \widetilde{[\varphi \widehat{\otimes} K]}. \end{aligned}$$

Da auch  $\psi \widehat{\otimes} K$  unwesentliche Abänderung von  $\varphi \widehat{\otimes} K$  ist gilt aber  $\widetilde{\psi \widehat{\otimes} K} = \widetilde{\varphi \widehat{\otimes} K}$ .

Wir kehren zum Beweis von 1.12 zurück. Sei  $a$  ein Punkt von  $\text{Sp}(A)$ . Wir können  $\varphi$  so wählen, daß  $\varphi^{-1}(a) = TX_1 + \dots + TX_n = b$  ist. Unter allen unwesentlichen Abänderungen  $\psi$  von  $\varphi$  mit  $\psi^{-1}(a) = b$  gibt es eine,  $\psi_1$ , für die  $r_0(\psi_1, b)$  maximal ist. Angenommen, es gibt einen Punkt  $a_1$  in  $F(\psi_1, b)$ , der nicht in  $F_0(\psi_1, b)$  liegt. Wir bezeichnen

mit  $\pi : a_1 \rightarrow M$  die Projektion des Ideals  $a_1$  auf den Vektorraum  $M = a_1/a_1^2$  über dem Restklassenkörper  $k(a_1) = A/a_1$ . Unter allen unwesentlichen Abänderungen  $\psi$  von  $\psi_1$  mit  $F_0(\psi_1, b) \subseteq F_0(\psi, b)$

$$a, a_1 \in F(\psi, b)$$

gibt es eine,  $\psi_2$ , für die die Dimension des von  $\pi\psi_2(X_1), \dots, \pi\psi_2(X_n)$  erzeugten Untervektorraumes maximal ist. Da die Dimension von  $M$  gleich  $n$  ist und nach Konstruktion die Elemente  $\pi\psi_2(X_1), \dots, \pi\psi_2(X_n)$  nicht den ganzen Raum  $M$  erzeugen können, ist, nach geeigneter Umnummerierung,  $\pi\psi_2(X_n)$  von  $\pi\psi_2(X_1), \dots, \pi\psi_2(X_{n-1})$  linear abhängig. Sei  $w$  ein Element von  $M$ , das nicht von  $\pi\psi_2(X_1), \dots, \pi\psi_2(X_n)$  linear abhängt. Seien  $a_2, \dots, a_r$  die Ideale aus  $F_0(\psi_2, b)$ ,  $y$  ein Element aus  $a_2^2 \cap \dots \cap a_r^2 \cap a_1 \cap a$  mit  $\pi(y) = w$  und  $t$  ein von Null verschiedenes Element aus  $k$  mit  $|t \cdot y| < 1$ .

Der Homomorphismus

$$\psi_3 : T \rightarrow A,$$

der  $X_1, \dots, X_{n-1}$  auf  $\psi_2(X_1), \dots, \psi_2(X_{n-1})$  und  $X_n$  auf  $\psi_2(X_n) + ty$  abbildet, ist eine unwesentliche Abänderung von  $\psi_2$ . Es gilt :

$$F_0(\psi_2, b) \subseteq F_0(\psi_3, b)$$

$$a, a_1 \subseteq F(\psi_3, b).$$

Der von den Elementen  $\pi\psi_3(X_1), \dots, \pi\psi_3(X_{n-1}), \pi\psi_3(X_n) = \pi\psi_2(X_n) + tw$  erzeugte Vektorraum ist echt größer als der von  $\pi\psi_2(X_1), \dots, \pi\psi_2(X_n)$  erzeugte. Das ist aber ein Widerspruch zur Maximaleigenschaft von  $\psi_2$ !

Also ist  $\psi_2$  doch in  $b$  unverzweigt. Da die Menge der Punkte aus  $\text{Sp}(T)$ , in denen  $\psi_2$  unverzweigt ist, Zariskioffen ist ([9], I), gibt es ein Element  $t$  in  $T$ , das nicht in  $b$  enthalten ist, so daß  $A_t$  über  $T_t$  unverzweigt, also sogar etal ist.

**Satz 1.16.** — Gegeben sei ein Homomorphismus  $\varphi : A \rightarrow B/\mathfrak{J}$  einer affinoiden Algebra  $A$  in den Faktoring  $B/\mathfrak{J}$  einer affinoiden Algebra  $B$ . Die Algebra  $A$  habe folgende Form

$$T \langle \langle t^{-1} \rangle \rangle [Y] / (P(Y)) \xrightarrow{\cong} A = T \langle \langle t^{-1} \rangle \rangle [d] \\ Y \longrightarrow d.$$

Dabei ist  $T = T_n = k \langle \langle X_1, \dots, X_n \rangle \rangle$  freie affinoidale Algebra,  $t$  ein Element aus  $T$ ,  $P(Y)$  ein unitäres Polynom in der Variablen  $Y$  mit Koeffizienten in  $T$  und  $P'(d)$  Einheit in  $A$ .

Dann gibt es eine Schlauchumgebung  $\text{Sp}(B') \hookrightarrow \text{Sp}(B)$  von  $V(\mathfrak{J})$  und einen Homomorphismus  $\psi : A \rightarrow B'$ , so daß folgendes Diagramm kommutativ wird :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & B' \\ & \searrow \varphi & \downarrow \\ & & B/\mathfrak{J} = B'/\mathfrak{J}B' \end{array}$$

Zum Beweis können wir annehmen, daß  $\mathfrak{J}$  durch ein Element  $f$  erzeugt wird.

Seien  $a_1, \dots, a_n$  bzw.  $t'$  und  $\beta$  Urbilder von  $\varphi(X_1), \dots, \varphi(X_n)$  bzw.  $\varphi(t)$  und  $\varphi(d)$

in  $B$ . Ersetzt man  $\text{Sp}(B)$  durch eine geeignete Schlauchumgebung, so kann man wegen Hilfssatz 1.5 annehmen, daß  $t'$  Einheit in  $B$  und

$$(*) \quad |a_1| \leq 1, \dots, |a_n| \leq 1, |t'^{-1}| \leq 1$$

ist. Wegen  $(*)$  gibt es dann einen Homomorphismus

$$\psi' : T \rightarrow B$$

mit  $\psi'(X_1) = a_1, \dots, \psi'(X_n) = a_n$ . Wir wählen  $t' = \psi'(t)$ ;  $\psi'$  läßt sich wegen  $(*)$  fortsetzen zu  $\psi : T \langle\langle t^{-1} \rangle\rangle \rightarrow B$ .  $B$  ist dann  $T \langle\langle t^{-1} \rangle\rangle$ -Algebra. Wegen 1.5 können wir weiter annehmen, daß  $P'(\beta)$  Einheit in  $B$  ist. Nach Konstruktion gibt es in  $B$  ein Element  $b$ , so daß  $P(\beta) = b \cdot f$  ist. Gesucht ist ein Element  $u$  in  $B$  — bzw. der Algebra  $B'$  einer geeigneten Schlauchumgebung von  $V(\mathfrak{J})$  — mit

$$(**) \quad P(\beta + ((u-b)/P'(\beta)) \cdot f) = 0$$

Es gibt ein Polynom  $Q(Z)$  in  $B[Z]$  mit :

$$\begin{aligned} P(\beta + ((Z-b)/P'(\beta)) \cdot f) &= P(\beta) + ((Z-b)/P'(\beta)) \cdot f \cdot P'(\beta) + f^2 \cdot Q(Z) \\ &= f \cdot Z + f^2 \cdot Q(Z). \end{aligned}$$

Die Gleichung  $(**)$  folgt aus der Gleichung

$$(***) \quad u = -f \cdot Q \cdot (u).$$

Wir ersetzen  $\text{Sp}(B)$  durch eine geeignete Schlauchumgebung von  $V(\mathfrak{J})$  und können annehmen :

$$|f \cdot d_i| \leq \frac{1}{2}, \quad d_0 + d_1 Z + \dots + d_r Z^r = Q(Z).$$

Die Abbildung

$$u \mapsto S(u) = -f \cdot Q(u)$$

des Einheitskreises  $E = \{u \in B; |u| \leq 1\}$  in sich ist kontrahierend :

$$|S(u_1) - S(u_2)| \leq \frac{1}{2} |u_1 - u_2|, \quad u_1, u_2 \in E.$$

Sie besitzt deshalb nach dem Banachschen Fixpunktsatz einen Fixpunkt  $u$ .

Die Abbildung  $T \langle\langle t^{-1} \rangle\rangle \rightarrow B$  läßt sich fortsetzen zu einem Homomorphismus

$$\psi : A = T \langle\langle t^{-1} \rangle\rangle [d] \rightarrow B$$

mit

$$\psi(d) = \beta + ((u-b)/P'(\beta)) \cdot f.$$

Aus den Sätzen 1.16, 1.14 und 1.7 erhält man unmittelbar :

**Satz 1.17.** — Gegeben sei ein Morphismus  $f$  eines glatten affinoiden Raumes  $\text{Sp}(A)$  in den abgeschlossenen affinoiden Unterraum  $\text{Sp}(B/\mathfrak{J})$  des affinoiden Raumes  $\text{Sp}(B/\mathfrak{J})$ .

$$\begin{array}{ccc} & \text{Sp}(B) & \\ & \uparrow j & \\ \text{Sp}(B/\mathfrak{J}) & \xrightarrow{f} & \text{Sp}(A) \end{array}$$

Dann gibt es eine Schlauchumgebung  $U$  von  $V(\mathfrak{J})$ , eine zulässige Überdeckung von  $U$  durch geschachtelte spezielle affinoidale Teilbereiche  $U_1, \dots, U_r$ , eine spezielle Überdeckung  $(V_i)_{i=1, \dots, r}$  von  $\mathrm{Sp}(A)$  und Morphismen  $f_i: U_i \rightarrow V_i$  für  $i=1, \dots, r$  mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} j^{-1}(U_i) &= f^{-1}(V_i) \\ f_i \circ j|_{j^{-1}(U_i)} &= f|_{j^{-1}(U_i)}. \end{aligned}$$

Sei  $\mathfrak{J}$  ein Ideal einer affinoiden Algebra  $A$ , so daß  $A$  in allen Punkten von  $V(\mathfrak{J})$  absolut regulär und  $\mathrm{Sp}(A/\mathfrak{J})$  glatt ist. Dann gibt es endlich viele Zariskioffene Teilmengen  $\delta(a_1), \dots, \delta(a_r)$  von  $\mathrm{Sp}(A)$ , mit folgenden Eigenschaften:

$$V(\mathfrak{J}) \subseteq \delta(a_1) \cup \dots \cup \delta(a_r),$$

$A_{a_i}$  ist absolut regulär und hat in allen maximalen Idealen die gleiche Dimension  $n_i$ ;  $(A/\mathfrak{J})_{a_i}$  hat in allen maximalen Idealen die gleiche Dimension  $n_i - t_i$ ;  $\mathfrak{J} \cdot A_{a_i}$  wird von  $t_i$  Elementen erzeugt; diese Elemente sind in einer geeigneten Schlauchumgebung von  $V(\mathfrak{J})$  potenzbeschränkt.

Aus den Sätzen 1.2, 1.3, 1.17, 1.9 folgt deshalb:

*Theorem 1.18.* — (Existenz tubularer Umgebungen).

Sei der Faktorring  $A/\mathfrak{J}$  der affinoiden Algebra  $A$  absolut regulär,  $A$  selbst in allen maximalen Idealen von  $V(\mathfrak{J})$  absolut regulär.

Dann gibt es eine Schlauchumgebung  $\mathrm{Sp}(B) \rightarrow \mathrm{Sp}(A)$  von  $V(\mathfrak{J})$ , eine zulässige Überdeckung  $(\mathrm{Sp}(B_i) \hookrightarrow \mathrm{Sp}(B))$ ,  $i=1, \dots, r$  durch geschachtelte spezielle affinoidale Teilbereiche  $\mathrm{Sp}(B_i)$  von  $\mathrm{Sp}(B)$  und Isomorphismen

$$f_i: (B_i/\mathfrak{J}B_i) \langle\langle X_1, \dots, X_{n_i} \rangle\rangle \xrightarrow{\cong} B_i$$

freier affinoider Algebren über  $B_i/\mathfrak{J}B_i$  in den Variablen  $X_1, \dots, X_{n_i}$ , so daß die Bildelemente  $f_i(X_1), \dots, f_i(X_{n_i})$  das Ideal  $\mathfrak{J} \cdot B_i$  erzeugen.

*Bemerkung.* — Angenommen, das Ideal werde durch die Elemente  $h_1, \dots, h_t$  erzeugt,  $A$  habe in allen Punkten die Dimension  $n$ ,  $A/\mathfrak{J}$  in allen Punkten die Dimension  $n - t$ . Dann kann man die Isomorphismen  $f_i$  sogar so wählen, daß für alle  $i$  das Element  $X_r$  durch  $f_i$  in das Bild von  $h_r/\varepsilon_i$  in  $B_i$  abgebildet wird für  $r=1, \dots, n_i=t$ ,  $\varepsilon_i \neq 0$ ,  $\varepsilon_i \in k$ ,  $i=1, 2, \dots, r$ .

## § 2. De Rham Kohomologie.

Wir wollen von jetzt an voraussetzen, daß die Charakteristik des Grundkörpers  $k$  Null ist.

Sei  $A$  eine affinoidale Algebra. Wir bezeichnen mit  $M(A)$  den — stetigen — Differentialmodul von  $A$  über  $k$ ;  $M(A)$  ist endlicher  $A$ -Modul, sogar lokal frei, wenn  $A$  regulär ist [3]. Man bildet mit Hilfe der kanonischen Derivation  $d: A \rightarrow M(A)$  den Komplex

$$\Omega_A^\bullet: 0 \rightarrow \Omega_A^0 \xrightarrow{d} \Omega_A^1 \xrightarrow{d} \dots$$

der äußeren Differentialformen von  $A$  über  $k$ ;  $\Omega_A^p$  ist die  $p$ -te äußere Potenz von  $M(A)$ .

Für einen Homomorphismus  $\varphi: A \rightarrow B$  affinoider Algebren hat man einen natürlichen Homomorphismus von Komplexen :

$$\Omega_A^\bullet \rightarrow \Omega_B^\bullet$$

und  $\Omega_B^p$  ist sogar kanonisch isomorph zu  $B \otimes_A \Omega_A^p$ , wenn  $\mathrm{Sp}(\varphi): \mathrm{Sp}(B) \hookrightarrow \mathrm{Sp}(A)$  offene Einbettung ist. Deshalb definiert der Funktor

$$\mathrm{Sp}(A) \rightsquigarrow \Omega_A^\bullet$$

auf der Kategorie der offenen affinoiden Unterräume  $\mathrm{Sp}(A)$  eines analytischen Raumes  $X$  (im Sinne von [12]) einen Komplex :

$$\Omega_X^\bullet: 0 \rightarrow \Omega_X^0 \rightarrow \Omega_X^1 \xrightarrow{d} \Omega_X^2 \rightarrow \dots$$

von kohärenten Garben  $\Omega_X^p$  ([12], [13]) auf  $X$ ; die Differentiation ist natürlich nur  $k$ -linear. Für jeden Morphismus  $X \rightarrow Y$  analytischer Räume hat man einen natürlichen Morphismus von Komplexen :

$$\Omega_X^\bullet \leftarrow \Omega_Y^\bullet$$

Sei  $\mathfrak{J}$  ein Ideal einer affinoiden Algebra  $A$ ,  $U$  das Komplement von  $V(\mathfrak{J})$  in  $\mathrm{Sp}(A)$ . Man konstruiert auf natürliche Weise einen Komplex

$$\Omega_A^\bullet(*\mathfrak{J}): 0 \rightarrow \Omega_A^0(*\mathfrak{J}) \xrightarrow{d} \Omega_A^1(*\mathfrak{J}) \xrightarrow{d} \dots,$$

den Komplex der Differentialformen mit « Polstellen in  $V(\mathfrak{J})$  » und einen  $k$ -Homomorphismus von Komplexen :

$$\Omega_A^\bullet(*\mathfrak{J}) \rightarrow \Gamma(U, \Omega_{\mathrm{Sp}(A)})$$

mit

$$\Omega_A^p(*\mathfrak{J}) = \varinjlim_n \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{J}^n, \Omega_A^p)$$

(siehe auch [8]).

Ist  $Y = V(\mathcal{J})$  ein abgeschlossener analytischer Unterraum des analytischen Raumes  $X$ , « Nullstellenmenge » der kohärenten Garbe von Idealen  $\mathcal{J}$  [13],  $U$  das Komplement von  $Y$  in  $X$ , so definiert man ebenso den Garbenkomplex

$$\Omega_X^\bullet(*Y): 0 \rightarrow \Omega_X^0(*Y) \rightarrow \Omega_X^1(*Y) \rightarrow \dots$$

auf  $X$  von Differentialformen mit « Polstellen in  $Y$  » und einen  $k$ -Homomorphismus von Komplexen :

$$\Omega_X^\bullet(*Y) \rightarrow \Omega_U^\bullet$$

Sei  $B = A \langle\langle Z_1, \dots, Z_n \rangle\rangle = A \hat{\otimes}_k T_n$  die freie affinoidale Algebra in den Variablen  $Z_1, \dots, Z_n$  über der affinoiden Algebra  $A$ ; wir setzen  $f = Z_1 \dots Z_n$ ,  $\mathfrak{J} = Bf$ ,  $U = \delta(f)$  und  $X = \mathrm{Sp}(B)$ ;  $X_0 = \{x \in X; |Z_1(x)| < 1, \dots, |Z_n(x)| < 1\}$ ,  $U_0 = U \cap X_0$ ,  $Y = V(\mathfrak{J})$ . Wir wollen den Ring  $R = \Gamma(U_0, \mathcal{O}_X)$  der holomorphen Funktionen auf  $U_0$  beschreiben.

Sei  $s = (s_1, \dots, s_n)$  ein  $n$ -Tupel von ganzen Zahlen. Wir schreiben

$$Z^s = Z_1^{s_1} \dots Z_n^{s_n}$$

$$t(s) = \frac{1}{2}(|s_1| - s_1 + \dots + |s_n| - s_n), \quad t^+(s) = |s| - t(s), \quad |s| = |s_1| + \dots + |s_n|.$$

Dann ist  $R$  der Ring aller Laurentreihen  $h = \sum_{s=(s_1, \dots, s_n)} a_s Z^s$  mit Koeffizienten  $a_s$  aus  $A$ , für die gilt :  $\lim_{|s| \rightarrow \infty} \|a_s\| / |\varepsilon|^{l(s)} \cdot (1 + |\varepsilon|)^{l^+(s)} = 0$  für alle von Null verschiedenen  $\varepsilon$  aus  $k$ . Die Topologie der gleichläufigen Konvergenz auf allen offenen affinoiden Unterräumen von  $U$  wird durch das System  $(\|\cdot\|_\varepsilon)_{\varepsilon \neq 0, \varepsilon \in k}$  von Normen  $\|\cdot\|_\varepsilon$  auf  $R$  beschrieben :

$$\|h\|_\varepsilon = \sup_s \|a_s\| / |\varepsilon|^{l(s)} \cdot (1 + |\varepsilon|)^{l^+(s)}.$$

Ebenso beschreibt man den Komplex  $K^* = \Gamma(U_0, \Omega_X^*) :$

$$K^p = \left\{ g = \sum_{s, 1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n} \omega_s^{i_1, \dots, i_q} \cdot Z^s \cdot dZ_{i_1} \dots dZ_{i_q}; \omega_s^{i_1, \dots, i_q} \in \Omega_A^{p-q}, \right. \\ \left. \lim_{|s| \rightarrow \infty} \|\omega_s^{i_1, \dots, i_q}\| / |\varepsilon|^{l(s)} \cdot (1 + |\varepsilon|)^{l^+(s)} = 0 \text{ für } \varepsilon \neq 0 \text{ aus } k \right\}.$$

Auch auf  $K^p$  ist eine Topologie durch ein System von Normen  $(\|\cdot\|_\varepsilon)_{\varepsilon \neq 0, \varepsilon \in k}$  erklärt.

Es bezeichne  $r$  die natürliche Abbildung :

$$\Omega_X^*(\cdot Y)(X_0) \rightarrow K^*.$$

Wir bezeichnen mit  $C^*$  folgenden Unterkomplex von  $K^*$  :  $C^p$  wird durch die Differentialformen

$$\omega \cdot (Z_{i_1} \dots Z_{i_q})^{-1} dZ_{i_1} \dots dZ_{i_q}, \quad \omega \in \Omega_A^{p-q}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n$$

erzeugt.

$$j : C^* \hookrightarrow K^*$$

bezeichnet die Einbettung.

Wir konstruieren stetige  $A$ -lineare Abbildungen vom Grad  $-1$ ,  $\partial_1, \dots, \partial_n : K^* \rightarrow K^*$  und einen Homomorphismus von Komplexen :

$$\text{Res} : K^* \rightarrow C^*.$$

Es genügt, diese Abbildungen auf den topologischen Erzeugenden

$$g = \omega \cdot Z^s \cdot dZ_{i_1} \dots dZ_{i_q}, \quad \omega \in \Omega_A^p, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n$$

vorzugeben :

$$\text{Res}(g) = \begin{cases} g & \text{für } Z^s = (Z_{i_1} \dots Z_{i_q})^{-1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\partial_v(g) = \begin{cases} -(-1)^{p+1} (\omega/s_v + 1) \cdot Z_v \cdot Z^s dZ_{i_1} \dots dZ_{i_{l-1}} dZ_{i_{l+1}} \dots dZ_{i_q} \\ \text{für } v = i_l, s_{i_1} = \dots = s_{i_{l-1}} = -1, s_{i_l} \neq -1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir setzen :  $\partial = \partial_1 + \dots + \partial_n$ . Man rechnet leicht nach, daß  $\partial$  das Bild  $r(C^*)$  von  $r$  in sich,  $j$  den Komplex  $C^*$  in  $r(C^*)$  abbildet und daß folgendes gilt :

$$\text{Res} \circ j = \text{id} \quad d \circ \partial + \partial \circ d = \text{id} - j \circ \text{Res}.$$

Daraus folgt, daß die beiden Homomorphismen  $H(\text{Res})$  und  $H(\text{Res} \circ r) = H(\text{Res}) \circ H(r)$  Isomorphismen sind; also ist auch  $H(r)$  ein Isomorphismus.

*Hilfssatz 2.1. — Unter den angegebenen Voraussetzungen induziert die natürliche Abbildung*

$$\Omega_X^*(Y)(X_0) \rightarrow \Omega_X^*(U_0)$$

*einen Isomorphismus in der Homologie.*

Sei  $\text{Sp}(A)$  ein glatter affinoider Raum. Ein Ideal  $\mathfrak{J}$  von  $A$  heißt Divisorenideal mit nur transversalen Schnitten, wenn es zu jedem maximalen Ideal  $x$  aus  $V(\mathfrak{J})$  ein reguläres Parametersystem  $z_1, \dots, z_n$  in  $A_x$  und eine natürliche Zahl  $s$  gibt mit  $\mathfrak{J} \cdot A_x = A_x \cdot z_1 \dots z_s$ . Aus Theorem 1.18 folgt, daß es zu einem solchen Ideal immer eine spezielle Überdeckung  $((\text{Sp}(A_i) \rightarrow \text{Sp}(A)))$ ,  $i=1, \dots, r$  gibt, so daß  $A_i$  isomorph zu einer freien affinoiden Algebra  $B_i \langle\langle Z_1^{(i)} \dots Z_{n_i}^{(i)} \rangle\rangle$  in den Variablen  $Z_v^{(i)}$  über einer affinoiden Algebra  $B_i$  und  $(\text{Sp}(A) - V(\mathfrak{J})) \cap \text{Sp}(A_i) = \delta(Z_1^{(i)} \dots Z_{n_i}^{(i)})$  ist. Da dasselbe auch für jeden offenen affinoiden Unterraum gilt, erhält man aus 2.1 (siehe auch [1])

*Hilfssatz 2.2. — Sei  $X = \text{Sp}(A)$  ein glatter affinoider Raum,  $\mathfrak{J}$  ein Divisorenideal mit nur transversalen Schnitten,  $Y = \text{Sp}(A/\mathfrak{J})$ ,  $U$  das Komplement von  $V(\mathfrak{J}) = Y$  in  $X$  und  $j: U \hookrightarrow X$  die Einbettung von  $U$  in  $X$ . Dann ist  $\mathcal{H}^*(\Omega_X^*(Y))$  kanonisch isomorph zu  $\mathcal{H}^*(j_*(\Omega_U^*))$ .*

Mit Hilfe von Hironakas Theorie der Auflösung von Singularitäten [11], die auch für affinoide Räume über einem Grundkörper der Charakteristik Null ihre Gültigkeit hat, mit Hilfe der Endlichkeitssätze aus [12] und der daraus folgenden Sätze vom GAGA-Typ [15] erhält man aus Hilfssatz 2.2 genau wie in [8] (Theorem 2)

*Theorem 2.3. — Sei  $X$  ein reduzierter analytischer Raum,  $\mathcal{J}$  eine kohärente Garbe von Idealen, die lokal durch eine Gleichung definiert ist,  $Y = V(\mathcal{J})$  der durch  $\mathcal{J}$  definierte analytische Unterraum; das Komplement  $U$  von  $Y$  in  $X$  sei glatt*

$$j: U \hookrightarrow X.$$

*Dann ist  $\mathcal{H}^*(\Omega_X^*(Y))$  kanonisch isomorph zu  $\mathcal{H}^*(j_*(\Omega_U^*))$ . Verschwindet zusätzlich  $H^p(X, \Omega_X^q(Y))$  für  $p > 0$  und jedes  $q$ , so ist auch  $H^p \Gamma(X, \Omega_X^q(Y))$  kanonisch isomorph zu  $H^p \Gamma(U, \Omega_U^q)$ . Diese letzte Bedingung ist insbesondere erfüllt in folgenden beiden Fällen*

- a)  $X$  ist affinoid;
- b)  $X$  ist vollständig, algebraisch und  $U$  affin.

Sei  $X$  eine algebraische Mannigfaltigkeit über dem Grundkörper  $k$ . Man kann  $X$  auf natürliche Weise einen analytischen Raum  $X_a$  über  $k$  zuordnen. Man hat einen natürlichen Morphismus

$$a(X): X_a \rightarrow X$$

lokal G-geringter Räume [15]. Auch auf  $X$  ist ein Komplex  $\Omega_X^*$  von Differentialformen erklärt, und es gibt einen Homomorphismus

$$(*) : \Omega_X^* \rightarrow \Omega_{X_a}^*$$

von Garbenkomplexen.

Ist  $\mathcal{G}^*$  ein positiver Komplex von Garben abelscher Gruppen auf  $X$  bzw.  $X_a$ , so bezeichnet man mit  $R\Gamma(\mathcal{G}^*)$  den abgeleiteten Schnittkomplex im Sinne der derivierten



Kategorien [10]. Wir nennen De Rham Kohomologie  $H^*(X)$  bzw.  $H^*(X_a)$  von  $X$  bzw.  $X_a$  die Kohomologie des Komplexes  $R\Gamma(\Omega_X^*)$  bzw.  $R\Gamma(\Omega_{X_a}^*)$ . Die Abbildung  $(*)$  induziert einen Homomorphismus

$$H^*(X) \rightarrow H^*(X_a)$$

der De Rham Kohomologie.

Wie bei Grothendieck erhält man aus Theorem 2.3

*Theorem 2.4. — Wenn  $X$  glatt ist, ist der Homomorphismus*

$$H^*(X) \rightarrow H^*(X_a)$$

*ein Isomorphismus.*

#### LITERATUR

- [1] M. ARTIN et A. GROTHENDIECK, *Séminaire de Géométrie Algébrique de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, 1963-64, fasc. 1.
- [2] M. F. ATIYAH and W. V. D. HODGE, Integrals of the second kind on an algebraic variety, *Annals of Mathematics*, vol. 62 (1955), p. 56-91.
- [3] R. BERGER, R. KIEHL, E. KUNZ, H. J. NASTOLD, Differentialrechnung in der analytischen Geometrie *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 38 (1967).
- [4] L. GERRITZEN, Die Norm der gleichmäßigen Konvergenz auf reduzierten affinoiden Algebren. Erscheint voraussichtlich in *Crelle, Journ. f.d.r.u.a. Math.*
- [5] H. GRAUERT und R. REMMERT, Nichtarchimedische Funktionentheorie. *Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen, Wissenschaftliche Abhandlung*, Bd. 33, Opladen : Westdeutscher Verlag, 1966.
- [6] —, Über die Methode der diskret bewerteten Ringe in der nichtarchimedischen Analysis, *Invent. Math.*, 2, 87-133 (1966).
- [7] J. DIEUDONNÉ, A. GROTHENDIECK, Éléments de Géométrie Algébrique, I, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 4 (1960).
- [8] A. GROTHENDIECK, On the De Rham cohomology of algebraic varieties, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 29 (1966).
- [9] —, *Séminaire de géométrie algébrique de l'Institut des Hautes Études Scientifiques* (1960).
- [10] R. HARTSHORNE, Residues and Duality, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 20 (1966).
- [11] H. HIRONAKA, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, *Annals of Math.*, vol. 79 (1964), p. 109-326.
- [12] R. KIEHL, Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, *Invent. Math.*, 2, 191-214 (1967).
- [13] —, Theorem A und Theorem B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, *Invent. Math.*, 2, 256-273 (1967).
- [14] —, Ausgezeichnete Ringe in der nichtarchimedischen analytischen Geometrie. Erscheint voraussichtlich in *Crelle, Journ. f.d.r.u.a. Math.*
- [15] —, Schemata über nichtarchimedisch analytischen Räumen, in Vorbereitung.
- [16] MONSKY, WASHNITZER, The construction of formal cohomology sheaves, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 52 (1964), 1511-1514.
- [17] H. J. NASTOLD, Zur nichtarchimedischen Funktionentheorie. Erscheint demnächst in *Math. Z.*
- [18] J. TATE, *Rigid analytic spaces*, Private notes of J. Tate, reproduced with(out) his permission by I.H.E.S.

*Reçu le 1<sup>er</sup> mars 1967.*