PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

JACQUES DIXMIER

Opérateurs de rang fini dans les représentations unitaires

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 6 (1960), p. 13-25
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1960__6__13_0>

OPÉRATEURS DE RANG FINI DANS LES REPRÉSENTATIONS UNITAIRES

par Jacques DIXMIER

Introduction

Soient G un groupe de Lie semi-simple connexe, K un sous-groupe compact maximal de G, et π une représentation unitaire continue topologiquement irréductible de G dans un espace hilbertien H. On sait ([5] et [6]) que si χ est un caractère de K identifié à une mesure bornée sur G, l'opérateur $\pi(\chi)$ est de rang fini. De ce fait, on peut déduire [5] des propriétés intéressantes des idéaux de $L^1(G)$ associés à π (noyau de π dans $L^1(G)$, annulateurs dans $L^1(G)$ des éléments de H).

Étant donné un groupe localement compact G, nous envisagerons la propriété suivante :

(P) L'ensemble des $f \in L^1(G)$, telles que $\pi(f)$ soit de rang fini pour toute représentation unitaire continue topologiquement irréductible π de G, est partout dense dans $L^1(G)$.

Le théorème rappelé plus haut entraîne aussitôt qu'un groupe de Lie semi-simple connexe possède la propriété (P). Le premier but de ce mémoire est de montrer qu'un groupe de Lie nilpotent connexe G la possède aussi. On sait déjà [2] que, si $f \in L^1(G)$, et si π est une représentation unitaire continue topologiquement irréductible de G, l'opérateur $\pi(f)$ est compact. Pour passer de là à la propriété (P), nous établissons l'existence d'un « calcul symbolique » dans $L^1(G)$: si $f \in L^1(G)$ et si φ est une fonction analytique dans un voisinage du spectre de f vérifiant $\varphi(0) = 0$, on sait bien d'après la théorie générale des algèbres de Banach, qu'on peut définir un élément $\varphi\{f\} \in L^1(G)$; moyennant quelques conditions sur f, nous montrons ici qu'on peut encore définir $\varphi\{f\}$ lorsque φ satisfait à des conditions convenables de différentiabilité. On utilise pour cela une intégrale vectorielle de Fourier déjà considérée par G. E. Silov dans [13], et utilisée récemment par P. Malliavin [12] dans le cas où G est abélien discret ; le point essentiel est de majorer la croissance à l'infini de la fonction de variable réelle $\lambda \to ||e^{*i\lambda f}||$ (cf. ci-dessous pour les notations).

Le second but de ce mémoire est de développer quelques conséquences de la propriété (P). On verra par exemple que, si G possède la propriété (P), deux représentations unitaires continues topologiquement irréductibles de G, qui ont même noyau dans $L^1(G)$, sont unitairement équivalentes.

Notations

Si G est un groupe localement compact, on choisit une fois pour toutes une mesure de Haar invariante à gauche sur G, et $L^p(G)$ est l'espace de Banach des fonctions complexes de puissance p-ième intégrable sur G pour cette mesure ; on désigne par $\| \ \|_p$ la norme dans cet espace. On désigne par $\widetilde{L}^1(G)$ l'algèbre de Banach déduite de $L^1(G)$ par adjonction d'un élément unité. On note $*$ le produit de convolution. Si $f \in L^1(G)$, on pose $f^{*n} = f*f* \ldots *f$ (n facteurs), $e^{*f} = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} f^{*n} \in \widetilde{L}^1(G)$, et $\widetilde{f}(s) = \overline{f(s^{-1})}\,\Delta(s^{-1})$ (où Δ est le module de G) ; on sait que $f \to \widetilde{f}$ est une involution isométrique de $L^1(G)$. On note $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbf{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Si φ est une fonction complexe intégrable de variable réelle, on pose

$$(\mathscr{F}\varphi)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} \varphi(x)\,dx.$$

§ 1. Les puissances d'une partie compacte dans un groupe de Lie nilpotent.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente sur $\mathbf{R}$, et G le groupe de Lie simplement connexe correspondant. Rappelons que la formule de Hausdorff $xy = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \ldots$ dans $\mathfrak{g}$ ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls, que la loi de composition $(x, y) \to xy$ définit sur $\mathfrak{g}$ une structure de groupe, et que l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ sur G est un isomorphisme pour cette structure de groupe.

Lemme 1. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente sur $\mathbf{R}$ de dimension n, et $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n)$ une suite décroissante d'idéaux de $\mathfrak{g}$ de dimensions $n, n-1, \ldots, 0$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathfrak{g}$ telle que $(e_{i+1}, e_{i+2}, \ldots, e_n)$ soit une base de $\mathfrak{g}_i$. Si x, y sont deux éléments de $\mathfrak{g}$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$, les coordonnées $(z_1, \ldots, z_n)$ du produit de Hausdorff $z = xy$ sont fournies par des égalités de la forme*

$$z_i = x_i + y_i + P_i(x_1, y_1, \ldots, x_{i-1}, y_{i-1}) \tag{1}$$

où les P_i sont des polynômes indépendants de x et y.

Le lemme est évident pour $n=1$. Supposons-le établi pour les algèbres de Lie nilpotentes de dimension $n-1$. Appliquant cette hypothèse de récurrence à $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{n-1}$, on voit qu'on a des formules du type (1) pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$. D'autre part, $\mathfrak{g}_n$ est dans le centre de $\mathfrak{g}$ puisque $\mathfrak{g}$ est nilpotente. Donc, dans la formule de Hausdorff $xy = x + y + \Phi(x, y)$, $\Phi(x, y)$ ne dépend que des classes de x et y modulo $\mathfrak{g}_n$. Ainsi, $z_n - x_n - y_n$ est la n-ième coordonnée de $\Phi(x_1 e_1 + \ldots + x_{n-1} e_{n-1}, y_1 e_1 + \ldots + y_{n-1} e_{n-1})$, c'est-à-dire un polynôme en $x_1, y_1, \ldots, x_{n-1}, y_{n-1}$. D'où le lemme.

Dans le lemme 2, nous conservons les notations du lemme 1. En outre, si $x \in \mathfrak{g}$, nous noterons systématiquement $x_1, \ldots, x_n$ ses coordonnées, et nous poserons

$$\|x\| = \sup(|x_1|, \ldots, |x_n|).$$

LEMME 2. — *Soit* H *une partie compacte de* $\mathfrak{g}$. *Considérons les ensembles* $H, H^2, \ldots, H^m, \ldots$ *(où* H^m *se définit relativement au produit de Hausdorff de* $\mathfrak{g}$*). Il existe un entier* N, *dépendant de* $\mathfrak{g}$, *mais pas de* H, *tel que* $\sup_{x\in H^m}||x|| = O(m^N)$ *quand* $m \to +\infty$.

Le lemme est évident pour $n = \dim \mathfrak{g} = 1$. Supposons-le établi pour les algèbres de Lie nilpotentes de dimension $n-1$. Appliquant cette hypothèse de récurrence à $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{n-1}$, on voit qu'il existe des constantes $A>0$, $\alpha>0$, telles que

$$\sup_{x\in H^m}(\sup(|x_1|, \ldots, |x_{n-1}|)) \leqslant A(1+m^\alpha). \tag{2}$$

En outre, la constante α est indépendante de H. D'autre part, il existe des constantes $B>0$, $\beta>0$, indépendantes de H, telles que

$$|P_n(x_1, y_1, \ldots, x_{n-1}, y_{n-1})| \leqslant B(1+\sup(|x_1|, |y_1|, \ldots, |x_{n-1}|, |y_{n-1}|))^\beta. \tag{3}$$

Posons $f(m) = \sup_{x\in H^m}||x||$. Si $x \in H^m$, on a $x = x'x''$ avec $x' \in H^{m-1}$, $x'' \in H$. Alors

$$\sup(|x'_1|, \ldots, |x'_{n-1}|) \leqslant A(1+(m-1)^\alpha)$$

d'après (2). Compte tenu de (3), on a (en posant $\sup_{x\in H}||x|| = a$)

$$\begin{aligned} |x_n| &= |x'_n + x''_n + P_n(x'_1, x''_1, \ldots, x'_{n-1}, x''_{n-1})| \\ &\leqslant |x'_n| + a + B[1+a+A(1+(m-1)^\alpha)]^\beta \\ &\leqslant f(m-1) + a + B[1+a+A(1+(m-1)^\alpha)]^\beta. \end{aligned} \tag{4}$$

Rapprochant ceci de (2), on voit que

$$f(m) \leqslant f(m-1) + P(m),$$

où P est un polynôme dont le degré est indépendant de H. Donc

$$f(m) \leqslant f(1) + P(2) + P(3) + \ldots + P(m),$$

et le second membre de cette inégalité est, comme il est bien connu, un polynôme en m (dont le degré est indépendant de H). D'où le lemme.

LEMME 3. — *Soient* G *un groupe de Lie nilpotent connexe,* μ *la mesure de Haar de* G. *Il existe un entier* N, *ne dépendant que de* G, *tel que, pour toute partie compacte* H *de* G, *on ait* $\mu(H^m) = O(m^N)$ *quand* $m \to +\infty$.

Supposons d'abord G simplement connexe. Identifions alors G à son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ muni du produit de Hausdorff. On a

$$\mu(H^m) = \int\int \ldots \int_{H^m} P(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

où P est un polynôme ([2], lemme 1d). L'existence de l'entier N du lemme 3 résulte alors aussitôt du lemme 2.

Passons au cas général. Soit G′ le groupe de recouvrement universel de G. Soit φ l'application canonique de G′ sur G. Il existe une partie compacte H′ de G′ telle que

$\varphi(H') = H$. Alors, $\varphi(H'^m) = H^m$ pour tout m. Soit μ' la mesure de Haar de G'. Pour une normalisation convenable de μ et μ', on a

$$\mu'(H'^m) = \int_G p(g)\, d\mu(g)$$

où p est une fonction à valeurs entières sur G, majorant 1 sur H^m. Donc $\mu(H^m) \leqslant \mu'(H'^m)$, et il suffit d'appliquer la première partie de la démonstration.

§ 2. Calcul symbolique dans l'algèbre L^1 d'un groupe de Lie nilpotent.

Pour tout $t \in \mathbf{C}$, posons $u(t) = e^{it} - 1$. La fonction u est entière et s'annule à l'origine. Donc, si A est une algèbre de Banach et si $x \in A$, l'élément $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n\,!}$ existe dans A. Nous appliquerons ceci :

1° Au cas où A est une algèbre uniformément fermée d'opérateurs dans un espace hilbertien ;

2° Au cas où A est l'algèbre L^1 d'un groupe localement compact.

Lemme 4. — *Soient* H *un espace hilbertien,* T *un opérateur hermitien continu dans* H. *On a* $u(T)u(T)^* \leqslant T^2$.

Soit $T = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda$ la décomposition spectrale de T. On a

$$u(T)u(T)^* = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(\lambda)|^2 dE_\lambda.$$

Or $|u(\lambda)|^2 = |e^{i\lambda} - 1|^2 \leqslant \lambda^2$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$. Donc

$$u(T)u(T)^* \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 dE_\lambda = T^2.$$

Lemme 5. — *Soient* G *un groupe localement compact unimodulaire, et* f *un élément de* $L^1(G) \cap L^2(G)$ *tel que* $\tilde{f} = f$. *Alors,* $u(f) \in L^1(G) \cap L^2(G)$ *et* $\|u(f)\|_2 \leqslant \|f\|_2$.

On sait que $L^1(G) \cap L^2(G)$ est muni de manière naturelle d'une structure d'algèbre hilbertienne. Soit $\mathfrak{A} \subset L^2(G)$ l'algèbre hilbertienne achevée déduite de $L^1(G) \cap L^2(G)$. (Pour cette notion, et pour les propriétés utilisées des algèbres hilbertiennes, cf. par exemple [3], chapitre I, §§ 5 et 6). Soit A l'algèbre de von Neumann associée à gauche à $\mathfrak{A}$. Soit $x \to L_x$ l'application canonique de $\mathfrak{A}$ dans A. Soit φ la trace naturelle sur A^+ définie par $\mathfrak{A}$. Rappelons que les opérateurs de A « de carré traçable » pour φ forment un idéal bilatère de A, que ce sont exactement les opérateurs de la forme L_x avec $x \in \mathfrak{A}$, et que $\varphi(L_x L_x^*) = \|x\|^2$ pour $x \in \mathfrak{A}$. Pour $g \in L^1(G)$, nous noterons aussi L_g l'opérateur de convolution à gauche par g dans $L^2(G)$ (notation cohérente avec la précédente si $g \in L^1(G) \cap L^2(G)$). Comme $\|L_g\| \leqslant \|g\|_1$ pour $g \in L^1(G)$, on a $L_{u(f)} = u(L_f) \in A$. Comme $f = \tilde{f}$, l'opérateur L_f est hermitien. D'après le lemme 4, $L_{u(f)} L_{u(f)}^* \leqslant L_f^2$. Or L_f^2 est traçable pour φ, donc ([3], chapitre I, § 1, proposition 10) $L_{u(f)} L_{u(f)}^*$ est traçable pour φ, autrement dit $L_{u(f)}$ est de carré traçable pour φ. Par suite, il existe un $a \in \mathfrak{A}$ tel que $L_{u(f)} = L_a$. Pour tout $x \in L^1(G) \cap L^2(G)$, on a

$$u(f) * x = L_{u(f)} x = L_a x = a * x.$$

Prenons la fonction x positive, d'intégrale 1, nulle en dehors d'un voisinage de plus en plus petit de l'élément neutre. Alors $u(f) * x$ tend vers $u(f)$ dans $L^1(G)$, et $a * x$ tend vers a dans $L^2(G)$. Donc $u(f) = a \in L^2(G)$. En outre

$$||u(f)||_2^2 = \varphi(L_{u(f)} L_{u(f)}^*) \leqslant \varphi(L_f^2) = ||f||_2^2.$$

Lemme 6. — *Soient* G *un groupe localement compact unimodulaire, e son élément neutre, μ sa mesure de Haar,* A *une partie mesurable de* G *telle que $e \in A$, et f une fonction de* $L^1(G) \cap L^2(G)$ *nulle hors de* A, *telle que $\widetilde{f} = f$. On suppose qu'il existe un entier* N *tel que* $\mu(A^n) = O(n^N)$ *quand* $n \to +\infty$. *Alors, dans* $\widetilde{L}^1(G)$,

$$||e^{*i\lambda f}||_1 = O(|\lambda|^{N+1})$$

quand $|\lambda| \to +\infty$.

En multipliant f par un scalaire convenable, on peut supposer $||f||_1 \leqslant 1$. Soit n un entier > 0. On a

$$||u(nf)||_1 = \int_{A^{n^2-1}} |(u(nf))(x)|\, dx + \int_{G - A^{n^2-1}} |(u(nf))(x)|\, dx.$$

Compte tenu du lemme 5,

$$\int_{A^{n^2-1}} |(u(nf))(x)|\, dx \leqslant \left(\int_{A^{n^2-1}} |(u(nf))(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int_{A^{n^2-1}} 1.dx\right)^{1/2}$$
$$\leqslant ||u(nf)||_2 (\mu(A^{n^2-1}))^{1/2} \leqslant ||nf||_2 (\mu(A^{n^2-1}))^{1/2} = O(n^{N+1}).$$

D'autre part

$$\int_{G - A^{n^2-1}} |(u(nf))(x)|\, dx = \int_{G - A^{n^2-1}} \left| \sum_{p=1}^{\infty} (p!)^{-1} i^p n^p f^{*p}(x) \right| dx.$$

Or f^{*p} est nulle hors de A^p. Comme $e \in A$, on a $A \subset A^2 \subset \ldots$ Donc $f, f^{*2}, \ldots, f^{*(n^2-1)}$ sont nulles sur $G - A^{n^2-1}$. Donc :

$$\int_{G - A^{n^2-1}} |(u(nf))(x)|\, dx \leqslant \left\| \sum_{p=n^2}^{\infty} (p!)^{-1} i^p n^p f^{*p} \right\|_1$$
$$\leqslant \sum_{p=n^2}^{\infty} (p!)^{-1} n^p \leqslant \frac{n^{n^2}}{(n^2)!} e^n = O\left(n^{n^2} e^n (n^2)^{-n^2} e^{n^2} n^{-1}\right)$$
$$= O\left(n^{-n^2-1} e^{n^2+n}\right)$$

donc tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Ainsi, $||u(nf)||_1 = O(n^{N+1})$ quand $n \to +\infty$. Désignons par $[\lambda]$ la partie entière d'un nombre réel λ ; on a

$$||e^{*i\lambda f}||_1 \leqslant ||e^{*i[\lambda]f}||_1\, ||e^{*i(\lambda - [\lambda])f}||_1$$
$$\leqslant (1 + ||u([\lambda]f)||_1) e^{||f||_1} = O(|[\lambda]|^{N+1}) = O(|\lambda|^{N+1})$$

quand $|\lambda| \to +\infty$.

Remarque 1. — Quand G est un groupe abélien discret, le lemme 6 a été établi dans [11], page 67, lignes 15-18, grâce à un calcul explicite utilisant les fonctions de Bessel.

Remarque 2. — On ne peut, dans le lemme 6, prendre pour f une fonction quelconque de $L^1(G)$ telle que $f=\widetilde{f}$ (cf. [9], lemme 5).

Lemme 7. — *Soient* G *un groupe de Lie nilpotent connexe,* N *un entier possédant la propriété du lemme 3, et f une fonction de* $L^1(G)\cap L^2(G)$ *à support compact, telle que* $\widetilde{f}=f$. *Soit* $t\rightarrow\varphi(t)$ $(-\infty<t<+\infty)$ *une fonction complexe admettant des dérivées d'ordre* $\leqslant N+3$, *continues et intégrables sur* $\mathbf{R}$.

i. *L'intégrale* $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{*i\lambda f}(\mathscr{F}\varphi)(\lambda)d\lambda$ *converge absolument dans* $\widetilde{L}^1(G)$ *vers un élément* $\varphi\{f\}$. *Si* $\varphi(0)=0$, *on a* $\varphi\{f\}\in L^1(G)$.

ii. *Soit* π *une représentation unitaire continue de* G. *On a*

$$\pi(\varphi\{f\})=\varphi(\pi(f))$$

où $\varphi(\pi(f))$ *est défini par le calcul opérationnel usuel sur l'opérateur hermitien* $\pi(f)$.

iii. *Si* $\varphi(t)=t^p$ *pour* $|t|\leqslant||f||_1$, *on a* $\varphi\{f\}=f^{*p}$.

Les hypothèses faites sur φ entraînent l'existence d'une constante A telle que

$$|(\mathscr{F}\varphi)(\lambda)|\leqslant A(1+|\lambda|^{N+3})^{-1}$$

quel que soit $\lambda\in\mathbf{R}$. Alors, compte tenu du lemme 6,

$$||e^{*i\lambda f}||_1|(\mathscr{F}\varphi)(\lambda)|\leqslant A'(1+|\lambda|^{N+1})(1+|\lambda|^{N+3})^{-1}$$

donc l'intégrale définissant $\varphi\{f\}$ est bien absolument convergente dans $\widetilde{L}^1(G)$. Si $\varphi(0)=0$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty}(\mathscr{F}\varphi)(\lambda)=0$, d'où

$$\varphi\{f\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}u(f)(\lambda)(\mathscr{F}\varphi)(\lambda)d\lambda\in L^1(G).$$

Ceci prouve (i).

Comme π est une représentation continue de $\widetilde{L}^1(G)$, on a

$$\pi(\varphi\{f\})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\pi(e^{*i\lambda f})(\mathscr{F}\varphi)(\lambda)d\lambda$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda\pi(f)}(\mathscr{F}\varphi)(\lambda)d\lambda.$$

Or, cette intégrale opératorielle est égale à $\varphi(\pi(f))$; en effet, si χ est un caractère de la C^*-algèbre commutative engendrée par 1 et $\pi(f)$, le nombre $\chi(\pi(f))$ est réel et on a

$$\chi\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda\pi(f)}(\mathscr{F}\varphi)(\lambda)d\lambda\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\chi(e^{i\lambda\pi(f)})(\mathscr{F}\varphi)(\lambda)d\lambda$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda\chi(\pi(f))}(\mathscr{F}\varphi)(\lambda)d\lambda=\varphi(\chi(\pi(f)))=\chi(\varphi(\pi(f))).$$

Ceci prouve (ii).

Enfin, supposons $\varphi(t)=t^p$ pour $|t|\leqslant||f||_1$. Soit π la représentation régulière de G dans $L^2(G)$. On a $||\pi(f)||\leqslant||f||_1$, donc $\varphi(\pi(f))=\pi(f)^p$. D'après (ii), ceci s'écrit $\pi(\varphi\{f\})=\pi(f^{*p})$, d'où $\varphi\{f\}=f^{*p}$ puisque π est fidèle sur $L^1(G)$.

§ 3. Opérateurs de rang fini dans les représentations des groupes de Lie nilpotents.

LEMME 8. — *Soit* $t\to\varphi_0(t)$ $(-\infty<t<+\infty)$ *une fonction complexe admettant des dérivées d'ordre* $\leqslant r$ *continues et intégrables sur* $\mathbf{R}$, *telle que* $\varphi_0(t)=t^{r+1}$ *dans un voisinage de* o. *Pour tout* $\varepsilon>0$, *il existe une fonction complexe* $t\to\varphi(t)$ $(-\infty<t<+\infty)$ *possédant les propriétés suivantes :*

1° $\varphi(t)=\varphi_0(t)$ *pour* $|t|\geqslant 1$;
2° $\varphi(t)=0$ *dans un voisinage de* o ;
3° φ *admet des dérivées d'ordre* $\leqslant r$ *continues et intégrables sur* $\mathbf{R}$;
4° $|\varphi^{(\alpha)}(t)-\varphi_0^{(\alpha)}(t)|\leqslant\varepsilon$ *quels que soient* t *et* $\alpha=0, 1, \ldots, r$.

Soit a un nombre tel que $0<a<1$ et tel que $\varphi_0(t)=t^{r+1}$ pour $|t|\leqslant a$. Il existe une fonction ψ définie sur $[-a, a]$, nulle dans un voisinage de o, admettant des dérivées d'ordre $\leqslant r$ continues, et telle que $|\psi^{(\alpha)}(t)-(t^{r+1})^{(\alpha)}|\leqslant\varepsilon$ pour $|t|\leqslant a$ et $0\leqslant\alpha\leqslant r$. (Ceci est évident pour $r=0$, et on passe de r à $r+1$ en remplaçant ψ par la fonction $t\to(r+1)\int_0^t\psi(t)dt$). On définit alors φ de la manière suivante :

1° $\varphi(t)=\psi(t)$ pour $|t|\leqslant a$;
2° $\varphi(t)=\varphi_0(t)$ pour $|t|\geqslant 1$;
3° On « raccorde » convenablement dans les intervalles $[-1, -a]$ et $[a, 1]$.

Soit maintenant G un groupe localement compact. Soit I l'ensemble des $f\in L^1(G)$ telles que $\pi(f)$ soit de rang fini pour toute représentation unitaire continue topologiquement irréductible π de G. Il est clair que I est un idéal bilatère de $L^1(G)$ stable pour l'involution $f\to\tilde{f}$.

THÉORÈME 1. — *Tout groupe de Lie nilpotent connexe* G *possède la propriété suivante :*

(P) *L'idéal bilatère* I *est partout dense dans* $L^1(G)$.

a. Soit N un entier possédant la propriété du lemme 3. Soit E l'ensemble des fonctions f de $L^1(G)\cap L^2(G)$ à support compact, telles que $\tilde{f}=f$. Soit E′ l'ensemble des fonctions complexes $t\to\varphi(t)$ $(-\infty<t<+\infty)$, nulles dans un voisinage de o, admettant des dérivées d'ordre $\leqslant N+3$ continues et intégrables sur $\mathbf{R}$. Soient $f\in E$ et $\varphi\in E'$. On a $\varphi\{f\}\in L^1(G)$ (lemme 7 (i)). On va voir que $\varphi\{f\}\in I$. Soit π une représentation unitaire continue topologiquement irréductible de G. L'opérateur $\pi(f)$ est hermitien et compact ([2], corollaire 3 du théorème 1). Puisque φ s'annule dans un voisinage de o, $\varphi(\pi(f))$ est de rang fini. Or $\varphi(\pi(f))=\pi(\varphi\{f\})$ (lemme 7 (ii)).

b. Soit V un voisinage de l'élément neutre e de G. Nous allons montrer qu'il existe une fonction positive non négligeable de $L^1(G)$, à support contenu dans V, et adhérente à I.

Il existe un voisinage compact W de e tel que $W^{N+4} \subset V$. Soit f une fonction positive non négligeable de $L^1(G) \cap L^2(G)$ à support contenu dans W, telle que $f = \widetilde{f}$. Soit $t \to \varphi_0(t)$ $(-\infty < t < +\infty)$ une fonction complexe admettant des dérivées d'ordre $\leqslant N+3$ continues et intégrables sur $\mathbf{R}$, telles que $\varphi_0(t) = t^{N+4}$ pour $|t| \leqslant ||f||_1$. On a $\varphi_0\{f\} = f^{*(N+4)}$ (lemme 7 (iii)), donc $\varphi_0\{f\}$ est une fonction positive non négligeable de $L^1(G)$ à support contenu dans V. Reste à prouver, ce qui établira notre assertion, que $\varphi_0\{f\} \in \overline{I}$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le lemme 8, il existe une $\varphi \in E'$ telle que $\varphi(t) = \varphi_0(t)$ pour $|t| \geqslant 1$ et telle que $|\varphi^{(\alpha)}(t) - \varphi_0^{(\alpha)}(t)| \leqslant \varepsilon$ pour tout t et pour $\alpha = 0, 1, \ldots, N+3$. Alors

$$2\pi ||\varphi_0\{f\} - \varphi\{f\}||_1 = ||\int_{-\infty}^{+\infty} e^{*i\lambda f}(\mathscr{F}\varphi_0 - \mathscr{F}\varphi)(\lambda)d\lambda||_1$$
$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} ||e^{*i\lambda f}||_1 |(\mathscr{F}\varphi_0 - \mathscr{F}\varphi)(\lambda)| d\lambda.$$

Or $||e^{*i\lambda f}||_1 \leqslant A(1 + |\lambda|^{N+1})$, où A est une constante indépendante de ε. D'autre part,

$$(1+\lambda^2)(1+|\lambda|^{N+1})|(\mathscr{F}\varphi_0 - \mathscr{F}\varphi)(\lambda)|$$
$$\leqslant |\mathscr{F}(\varphi_0 - \varphi)(\lambda)| + |\mathscr{F}(\varphi_0'' - \varphi'')(\lambda)| + |\mathscr{F}(\varphi_0^{(N+1)} - \varphi^{(N+1)})(\lambda)|$$
$$+ |\mathscr{F}(\varphi_0^{(N+3)} - \varphi^{(N+3)})(\lambda)| \leqslant 2\,\varepsilon,$$

quel que soit λ ; donc

$$2\pi ||\varphi_0\{f\} - \varphi\{f\}||_1 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} 2\,A\varepsilon(1+\lambda^2)^{-1}d\lambda = 2\,A\varepsilon\pi.$$

Or $\varphi\{f\} \in I$ d'après la partie (*a*) de la démonstration. Donc $\varphi_0\{f\} \in \overline{I}$.

c. Soient $g \in L^1(G)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe un voisinage V de e dans G tel que, si h est une fonction positive de $L^1(G)$ d'intégrale 1 à support contenu dans V, on ait $||g - g * h||_1 \leqslant \varepsilon$. D'après la partie (*b*) de la démonstration, on peut choisir $h \in \overline{I}$. Alors $g * h \in \overline{I}$. Ceci prouve que $\overline{I}$ est partout dense dans $L^1(G)$, d'où $\overline{I} = L^1(G)$.

§ 4. Irréductibilité topologique et irréductibilité algébrique.

Les théorèmes 2, 3 et 4 ci-dessous seront établis pour les groupes localement compacts satisfaisant à la propriété (P). Cette classe de groupes contient les groupes de Lie nilpotents connexes d'après le théorème 1. Elle contient aussi les groupes de Lie semi-simples connexes (cf. [6], lemme 33, et [5], théorème 2 et démonstration du théorème 7), ainsi que les « groupes de mouvements » (cf. [5], théorème 5 et démonstration du théorème 7), c'est-à-dire les groupes de la forme K.N, où K et N sont des sous-groupes (non nécessairement distingués) respectivement compacts et abéliens.

Pour les groupes semi-simples et les groupes de mouvements, les résultats (i), (ii), (iii) ci-dessous se trouvent essentiellement dans [5], pages 512-515 ; toutefois, la définition utilisée dans [5] du sous-espace H' fait intervenir un sous-groupe compact de G.

THÉORÈME 2. — *Soient* G *un groupe localement compact possédant la propriété* (P), π *une représentation unitaire continue topologiquement irréductible de* G *dans un espace hilbertien* H, *et* J *l'ensemble des* $f \in L^1(G)$ *telles que* $\pi(f)$ *soit de rang fini. Soit* H' *l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de la forme* $\pi(f)\xi$, *où* $\xi \in H$ *et* $f \in J$.

i. H' *est partout dense dans* H ;

ii. H' *est stable pour les opérateurs* $\pi(s)$ $(s \in G)$, *et aussi pour les opérateurs* $\pi(f)$ $(f \in L^1(G))$. *Pour* $f \in L^1(G)$, *notons* $\pi'(f)$ *la restriction de* $\pi(f)$ *à* H' ;

iii. H' *est le plus petit sous-espace vectoriel non nul de* H *stable pour les opérateurs* $\pi(f)$ $(f \in J)$. *En particulier, la représentation* π' *de* $L^1(G)$ *dans* H' *est algébriquement irréductible.*

iv. *L'ensemble des opérateurs* $\pi(f)$, *où* $f \in J$, *est exactement l'ensemble des opérateurs linéaires continus* T *de rang fini dans* H *tels que* $T(H) \subset H'$ *et* $T^*(H) \subset H'$.

Puisque G possède la propriété (P), J est partout dense dans $L^1(G)$, d'où aussitôt (i).

Si $f \in J$ et si μ est une mesure bornée sur G, l'opérateur $\pi(\mu * f) = \pi(\mu)\pi(f)$ est de rang fini, donc $\mu * f \in J$. En particulier, si $\xi \in H$, $f \in J$ et $f' \in L^1(G)$, on a $\pi(f')(\pi(f)\xi) = \pi(f' * f)\xi \in H'$, donc $\pi(f')(H') \subset H'$. De même, si $\xi \in H$, $f \in J$ et $s \in G$, on a $\pi(s)(\pi(f)\xi) = \pi(\varepsilon_s * f)\xi \in H'$ (en notant ε_s la mesure de Dirac au point s), donc $\pi(s)(H') \subset H'$. Ceci prouve (ii).

Soit H'' un sous-espace vectoriel non nul de H stable pour les opérateurs $\pi(f)$ $(f \in J)$. Soit ξ un élément non nul de H''. On va montrer, ce qui prouvera (iii), que $\pi(J)\xi \supset H'$. Soit $g \in J$. Il suffit de prouver que $\pi(J)\xi \supset \pi(g)(H)$. Or les vecteurs $\pi(f)\xi$ $(f \in J)$ forment un sous-espace vectoriel partout dense de H puisque J est partout dense dans $L^1(G)$ et que π est topologiquement irréductible. Donc les vecteurs $\pi(g * f)\xi = \pi(g)\pi(f)\xi$ $(f \in J)$ forment un sous-espace vectoriel de $\pi(g)(H)$, partout dense dans $\pi(g)(H)$, donc égal à $\pi(g)(H)$ puisque $\dim \pi(g)(H) < +\infty$. D'où notre assertion.

Prouvons (iv). Il est clair que, si $k \in J$, on a $\widetilde{k} \in J$, donc $\pi(k)(H)$ et $\pi(k)^*(H)$ sont des sous-espaces de dimension finie de H'. Il s'agit d'établir une réciproque de cette propriété.

Soit K l'ensemble des opérateurs linéaires (continus ou non) dans H' permutables aux $\pi'(f)$, où f parcourt J. Montrons d'abord que $K = \mathbf{C}$. (Le raisonnement qui suit, plus simple que mon raisonnement initial, est dû à J. Dieudonné). D'après (iii) et le lemme de Schur, K est un corps, extension de $\mathbf{C}$. Soit $f \in J$ telle que $\pi'(f) \neq 0$. Soit $H_1 = \pi'(f)(H')$, qui est un sous-espace vectoriel non nul de dimension finie de H'. Tout $v \in K$ laisse stable H_1. Soit v' la restriction de v à H_1. L'application $v \rightarrow v'$ est un homomorphisme de K dans l'algèbre des opérateurs linéaires de H_1, qui transforme 1 en 1. Comme K est un corps, cet homomorphisme est injectif. Donc K est de rang fini sur $\mathbf{C}$ et par suite $K = \mathbf{C}$.

Alors, d'après le théorème de densité ([7], page 31), si $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sont des éléments linéairement indépendants de H' et $\eta_1, \ldots, \eta_n$ des éléments quelconques de H', il existe une $f \in J$ telle que $\pi'(f)\xi_1 = \eta_1, \ldots, \pi'(f)\xi_n = \eta_n$. Soit ξ un élément non nul de H'. Il existe une $f \in J$ telle que $\pi'(f)\xi = \xi$. Soit $(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_p)$ une base de $\pi(f)(H) \subset H'$. Il existe une $f' \in \mathrm{J}$ telle que $\pi'(f')\xi = \xi$, $\pi'(f')\xi_1 = \ldots = \pi'(f')\xi_p = 0$. Alors $\pi(f' * f)(\mathrm{H}) = \mathbf{C}\xi$. Soit $g = f' * f \in \mathrm{J}$. L'opérateur $\pi(g * \widetilde{g}) = \pi(g)\pi(g)^*$ est hermitien $\geqslant 0$, et son image est $\mathbf{C}\xi$. En multipliant g par un scalaire convenable, on a donc construit un $h \in \mathrm{J}$ tel que $\pi(h)$ soit le projecteur orthogonal sur $\mathbf{C}\xi$. Soit alors T un opérateur linéaire continu de rang fini dans H tel que $\mathrm{T}(\mathrm{H}) \subset \mathrm{H}'$ et $\mathrm{T}^*(\mathrm{H}) \subset \mathrm{H}'$. Alors $\frac{1}{2}(\mathrm{T} + \mathrm{T}^*)$ et $\frac{1}{2i}(\mathrm{T} - \mathrm{T}^*)$ sont des opérateurs hermitiens de rang fini dont les images sont contenues dans H'. Donc T est combinaison linéaire finie de projecteurs orthogonaux sur des droites de H'. D'après ce qui précède, $\mathrm{T} = \pi(k)$ avec une $k \in \mathrm{J}$. Le théorème est démontré.

Remarque 3. — Nous allons montrer que $\mathrm{H}' \neq \mathrm{H}$ en général. Soit Γ_3 le groupe de Lie nilpotent de dimension 3 étudié dans [1], paragraphe 4. Ses points sont définis par 3 coordonnées réelles (ρ_1, ρ_2, ρ_3) et la loi de composition est

$$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)(\rho_1, \rho_2, \rho_3) = (\sigma_1 + \rho_1, \sigma_2 + \rho_2, \sigma_3 + \rho_3 - \sigma_1\rho_2).$$

Ce groupe admet une représentation unitaire continue topologiquement irréductible π dans $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2(\mathbf{R})$, définie de la manière suivante : si $\gamma \in \Gamma_3$ admet les coordonnées ρ_1, ρ_2, ρ_3, et si $\xi \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R})$, on a :

$$(\pi(\gamma)\xi)(\theta) = e^{i(\rho_3 - \rho_2\theta)}\xi(\theta + \rho_1).$$

Soit H' le sous-espace introduit dans le théorème 2. Soit $\xi_0 \in \mathrm{H}'$, avec $\|\xi_0\| = 1$. Il existe une $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^1(\Gamma_3)$ telle que $\pi(\mathrm{F})$ soit le projecteur sur la droite $\mathbf{C}\xi_0$ (théorème 2 (iv)). Pour $\xi, \eta \in \mathrm{H}$, on a

$$(5) \qquad \begin{aligned}(\pi(\mathrm{F})\xi \mid \eta) &= ((\xi \mid \xi_0)\xi_0 \mid \eta) = (\xi \mid \xi_0)(\xi_0 \mid \eta) \\ &= \iint \overline{\xi_0(\rho_1)}\xi_0(\theta)\xi(\rho_1)\overline{\eta(\theta)}\,d\rho_1 d\theta,\end{aligned}$$

et d'autre part

$$(6) \qquad \begin{aligned}(\pi(\mathrm{F})\xi \mid \eta) &= \int_{\Gamma_3} (\pi(\gamma)\xi \mid \eta)\mathrm{F}(\gamma)\,d\gamma \\ &= \iiint \mathrm{F}(\rho_1, \rho_2, \rho_3)\,d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 \int e^{i(\rho_3 - \rho_2\theta)}\xi(\theta + \rho_1)\overline{\eta(\theta)}\,d\theta \\ &= \iiiint \mathrm{F}(\rho_1 - \theta, \rho_2, \rho_3)e^{i(\rho_3 - \rho_2\theta)}\xi(\rho_1)\overline{\eta(\theta)}\,d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 d\theta \\ &= \iint \left[\iint \mathrm{F}(\rho_1 - \theta, \rho_2, \rho_3)e^{i(\rho_3 - \rho_2\theta)}\,d\rho_2 d\rho_3\right]\xi(\rho_1)\overline{\eta(\theta)}\,d\rho_1 d\theta.\end{aligned}$$

Comparant (5) et (6), on voit que, pour presque toutes les valeurs de ρ_1 et θ, on a

$$\overline{\xi_0(\rho_1)}\xi_0(\theta) = \iint \mathrm{F}(\rho_1 - \theta, \rho_2, \rho_3)e^{i(\rho_3 - \rho_2\theta)}\,d\rho_2 d\rho_3$$

donc aussi

$$\overline{\xi_0(\rho_1 + \theta)}\xi_0(\theta) = \mathrm{G}(\rho_1, \theta, -1)$$

et désignant par G la transformée de Fourier de F par rapport aux deux dernières variables. Pour presque tout ρ_1, la fonction $\theta \rightarrow \mathrm{G}(\rho_1, \theta, -1)$ est continue. Donc, pour presque tout ρ_1, la fonction $\theta \rightarrow \overline{\xi_0(\rho_1 + \theta)}\xi_0(\theta)$ est presque partout égale à une fonction continue. Or, il est immédiat qu'il existe des éléments de H qui ne possèdent pas cette propriété.

REMARQUE 4. — Utilisons les notations du théorème 2. Si ξ est un élément non nul de H', l'annulateur de ξ dans $L^1(G)$ est un idéal à gauche maximal régulier puisque la représentation π' de $L^1(G)$ dans H' est algébriquement irréductible. Mais, puisque $H' \neq H$ en général d'après la remarque 3, l'annulateur dans $L^1(G)$ d'un élément quelconque de H *n'est pas en général un idéal à gauche maximal régulier*. Ce phénomène avait été prévu par R. Godement ([5], page 513, lignes 9-10).

Rappelons par contre que, si on étend π à la C^*-algèbre de G (cf. [4]), la représentation ainsi obtenue de cette C^*-algèbre dans H est algébriquement irréductible ([8], théorème 1).

REMARQUE 5. — Reprenons l'exemple de la remarque 3. Soit $D \subset H$ l'ensemble des vecteurs indéfiniment différentiables pour π. On peut montrer que $D \subset H'$, $D \neq H'$. Comme D est stable pour les opérateurs $\pi(s)$ $(s \in G)$, on voit que H' n'est pas algébriquement irréductible pour les opérateurs $\pi(s)$ $(s \in G)$.

J'ignore si l'inclusion $D \subset H'$ est un fait général.

REMARQUE 6. — En modifiant très légèrement la démonstration du théorème 2, on voit qu'on peut supprimer l'hypothèse que G possède la propriété (P), et supposer seulement qu'il existe des $f \in L^1(G)$ telles que $\pi(f)$ soit de rang fini et non nul.

§ 5. Noyaux des représentations irréductibles.

Le théorème 3 (sauf en ce qui concerne le socle de $L^1(G)/N$) est établi dans [5] pour les groupes semi-simples et les groupes de mouvements.

THÉORÈME 3. — *On conserve les hypothèses et les notations du théorème 2. Soit en outre* $N \subset L^1(G)$ *le noyau de* π *considérée comme représentation de* $L^1(G)$.

i. N *est un idéal primitif de* $L^1(G)$, *et* J/N *est le socle de* $L^1(G)/N$ *et le plus petit idéal bilatère non nul de* $L^1(G)/N$.

ii. N *est maximal parmi les idéaux bilatères fermés de* $L^1(G)$ *distincts de* $L^1(G)$.

Utilisons les notations du théorème 2. Alors N est aussi le noyau de π' (théorème 2 (i)). Comme π' est algébriquement irréductible (théorème 2 (iii)), N est primitif. L'algèbre $L^1(G)/N$ est isomorphe à l'algèbre A des opérateurs $\pi(f)$ $(f \in L^1(G))$. Dans cet isomorphisme, J/N correspond à l'ensemble des opérateurs de rang fini de A, ensemble qui est algébriquement dense dans l'ensemble de tous les opérateurs linéaires de H' (théorème 2 (iv)). D'après [7], page 75 (« structure theorem »), J/N est le socle de $L^1(G)/N$ et le plus petit idéal bilatère non nul de $L^1(G)/N$. D'où (i). Par suite, tout idéal bilatère de $L^1(G)$ contenant N et distinct de N contient J. Comme $\overline{J} = L^1(G)$ d'après la propriété (P), on obtient aussitôt (ii).

Remarque 7. — Soit I l'ensemble des $f \in L^1(G)$ telles que $\rho(f)$ soit de rang fini pour *toute* représentation unitaire continue topologiquement irréductible ρ de G. Alors, avec les notations précédentes, on a $J = I + N$. En effet, il est clair que $I + N \subset J$. D'autre part, $(I+N)/N$ est un idéal bilatère de $L^1(G)/N$, non nul puisque $\overline{I} = L^1(G)$, donc égal à J/N d'après le théorème 3 (i).

Remarque 8. — Soit G le groupe des transformations affines $x \to ax + b$ $(a \neq 0)$ de **R**. On sait que la représentation régulière π de G dans $L^2(G)$ est somme de représentations topologiquement irréductibles deux à deux équivalentes. Le noyau N de π dans $L^1(G)$ est $\{0\}$. Mais G possède des représentations unitaires continues de dimension 1, donc N n'est pas maximal parmi les idéaux bilatères fermés de $L^1(G)$. Ainsi, G ne possède pas la propriété (P).

Théorème 4. — *Soient* G *un groupe localement compact possédant la propriété* (P), π *et* π_1 *deux représentations unitaires continues topologiquement irréductibles de* G *dans des espaces hilbertiens, telles que les noyaux de* π *et* π_1 *dans* $L^1(G)$ *soient égaux. Alors* π *et* π_1 *sont unitairement équivalentes.*

Soient H et H_1 les espaces de π et π_1, et $N \subset L^1(G)$ leur noyau commun. Introduisons les notations H', π' du théorème 2, et les notations analogues H'_1, π'_1 relatives à π_1. Nous diviserons la démonstration en plusieurs parties.

a. π' et π'_1 définissent deux représentations algébriquement irréductibles fidèles de $L^1(G)/N$. Le socle de $L^1(G)/N$ est non nul. Donc ([7], page 45, proposition 2) ces deux représentations sont algébriquement équivalentes.

b. D'après le théorème 2 (iv), il existe un élément hermitien f_0 de $L^1(G)$ tel que $\pi(f_0)$ soit un projecteur orthogonal sur un sous-espace $\mathbf{C}\xi$ de dimension 1 de H'. D'après (*a*), l'opérateur $\pi'_1(f_0)$ est idempotent et de rang 1 ; donc $\pi_1(f_0)$, qui est hermitien, est un projecteur orthogonal sur un sous-espace $\mathbf{C}\xi_1$ de dimension 1 de H'_1. Les vecteurs ξ et ξ_1 admettent le même annulateur $\mathfrak{m}$ dans $L^1(G)$.

c. Pour $f \in L^1(G)$, posons $\varphi(f) = (\pi(f)\xi \mid \xi)$, $\varphi_1(f) = (\pi_1(f)\xi_1 \mid \xi_1)$. Alors φ et φ_1 sont des formes positives élémentaires sur $L^1(G)$. Pour prouver le théorème 4, il suffit de prouver que φ et φ_1 sont proportionnelles.

Transposant à notre situation un raisonnement de R. V. Kadison sur les C^*-algèbres ([8], page 275, lignes 20-27), nous allons montrer que le noyau Q de φ est $\mathfrak{m} + \widetilde{\mathfrak{m}}$ (où $\widetilde{\mathfrak{m}}$ est l'image de $\mathfrak{m}$ par l'involution $\sim$ dans $L^1(G)$). D'abord, il est clair que $\mathfrak{m} \subset Q$, donc $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \widetilde{Q} = Q$, donc $\mathfrak{m} + \widetilde{\mathfrak{m}} \subset Q$. Maintenant, soit $h \in Q$. On a $(\pi(h)\xi \mid \xi) = 0$, donc $\pi(f_0 * h)\xi = \pi(f_0)\pi(h)\xi = 0$, donc $f_0 * h \in \mathfrak{m}$. D'autre part,

$$\pi(\widetilde{h} - \widetilde{h} * f_0)\xi = \pi(\widetilde{h})\xi - \pi(\widetilde{h})\xi = 0$$

puisque $\pi(f_0)\xi = \xi$, donc $\widetilde{h} - \widetilde{h} * f_0 \in \mathfrak{m}$. Alors, tenant compte du fait que $\widetilde{f}_0 = f_0$, on a $\widetilde{h} = (\widetilde{h} - \widetilde{h} * f_0) + (f_0 * h)^{\sim} \in \mathfrak{m} + \widetilde{\mathfrak{m}}$. Donc $Q = \widetilde{Q} \subset \mathfrak{m} + \widetilde{\mathfrak{m}}$.

On a donc prouvé que $Q = \mathfrak{m} + \widetilde{\mathfrak{m}}$. Le même raisonnement, appliqué à φ_1, montre que le noyau de φ_1 est $\mathfrak{m} + \widetilde{\mathfrak{m}}$. Donc φ et φ_1 sont proportionnelles.

Remarque 9. — Soit A la C*-algèbre de G (cf. [4]). Si on étend à A les représentations unitaires irréductibles de G, les analogues des théorèmes 3 et 4 sont vrais. Cela résulte du fait évident qu'un groupe qui possède la propriété (P) est un CCR-groupe (cf. [10]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Dixmier, Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, III, *Canadian J. Math.*, t. 10, 1958, pp. 321-348.

[2] J. Dixmier, Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, V, *Bull. Soc. math. France*, t. 87, 1959, pp. 65-79.

[3] J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, Paris, Gauthier-Villars, 1957.

[4] J. M. G. Fell, The dual spaces of C*-algebras, *Trans. Amer. math. Soc.* (à paraître).

[5] R. Godement, A theory of spherical functions, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 73, 1952, pp. 496-556.

[6] Harish-Chandra, Representations of a semi-simple Lie group on a Banach space, I, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 75, 1953, pp. 185-243.

[7] N. Jacobson, Structure of rings. — Providence, American mathematical Society, 1956 (*Amer. math. Soc. Colloquium Publ.*, 37).

[8] R. V. Kadison, Irreducible operator algebras, *Proc. nat. Acad. Sc.*, U.S.A., t. 43, 1957, pp. 273-276.

[9] J.-P. Kahane, Sur un théorème de Wiener-Lévy, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 246, 1958, pp. 1949-1951.

[10] I. Kaplansky, The structure of certain operator algebras, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 70, 1951, pp. 219-255.

[11] P. Malliavin, Impossibilité de la synthèse spectrale sur les groupes abéliens non compacts, *Publ. math. Inst. Hautes Études scient.*, t. II, 1959, pp. 61-68.

[12] P. Malliavin, Calcul symbolique et sous-algèbres de $L_1(G)$, *Bull. Soc. Math. France*, t. 87 (1959), pp. 187-190.

[13] G. E. Šilov, *Sur les anneaux normés réguliers*, Travaux de l'Inst. math. de Stekloff, 1947.

Reçu le 23 février 1960.