PHILOSOPHIA SCIENTIÆ

JACQUES DUBUCS

Beth, Kant et l'intuition mathématique

Philosophia Scientiæ, tome 3, n^o 4 (1998-1999), p. 93-134
<http://www.numdam.org/item?id=PHSC_1998-1999__3_4_93_0>

Beth, Kant et l'intuition mathématique

Jacques Dubucs
IHPST CNRS, Université Paris I

Abstract. Beth has tried to vindicate the kantian doctrine of mathematical intuition in the frame of the contemporary logic. The paper proposes a critical evaluation of this attempt. The theory of mathematical intuition that is exposed in the Critic of Pure Raison is twofold : on one hand, the intuition of the " first principles ", as it is analysed in the Aesthetics, on the other hand, the intuition which is involved in the proofs, as it is analysed in the Methodology.. Contrasting with most defenders of Kant, who try to show that the first kind of intuition remains, in some way, compatible with the non-euclidean geometries, Beth wants to defend the second kind of intuition, by suggesting that it is nothing else than the " instanciation " method, well-known in the predicate calculus. I show that this strategy of defending Kant is unsuccessful.

Résumé. Beth a tenté de réhabiliter la doctrine kantienne de l'intuition mathématique de manière compatible avec les données de la logique contemporaine. Le présent article propose une évaluation critique de cette tentative. La théorie de l'intuition mathématique développée dans la Critique de la Raison Pure possède un double versant : l'intuition des " premiers principes ", telle qu'elle est analysée dans l'Esthétique, et l'intuition à l'œuvre dans les preuves, telle qu'elle est analysée dans la Méthodologie. A l'inverse de la plupart des défenseurs de Kant, qui s'attachent à montrer que l'intuition du premier type

Philosophia Scientiae, 3 (4), 1998-1999 93-134

reste, en un sens, compatible avec les géométries non-euclidiennes, Beth veut défendre l'intuition du second type, en suggérant qu'elle ne désigne rien d'autre que la méthode d' " instanciation " bien connue en calcul des prédicats. Je montre que cette stratégie de défense de Kant est intenable.

Beth explique très clairement pourquoi si peu de philosophes, parmi ceux qui ont quelque expérience de la logique contemporaine, prennent la peine d'écrire à propos de l'intuition mathématique. C'est pour la bonne raison que l'essentiel de ce qui se dit à propos de l'intuition mathématique repose sur un bon nombre d'incompréhensions et de malentendus relatifs à la logique elle-même, et que la plupart des gens mieux avertis craignent de ne produire, sur un tel sujet, qu'un discours vide et confus, ou quelque chose qui ne s'en distingue pas facilement. Beth, à l'inverse, estime que ces craintes ne sont pas fondées, et il n'a cessé de nous encourager à courir le risque. Il considère par exemple que le propos traditionnel sur l'intuition mathématique (et en particulier la doctrine de Kant) n'est pas *totalement* vicié par ses contresens sur la logique (ou par sa référence à une logique obsolète), et que cette tradition mérite mieux que le sort qui lui est réservé par le « nouveau rationalisme » - expression qu'il emploie pour désigner les idées du Cercle de Vienne. Kant s'est trompé, dit-il, en affirmant que le raisonnement mathématique comportait une composante irréductiblement extra-logique, mais en revanche il n'a commis aucune erreur en diagnostiquant que ce raisonnement comportait une part «intuitive». En un mot, son tort n'est donc pas d'avoir attribué aux mathématiques un caractère synthétique *a priori*, mais d'avoir méconnu que la logique possédait déjà la même caractéristique: la place de l'intuition est bel et bien *dans* la logique, et non pas hors d'elle ou, *a fortiori*, contre elle.

Cette thèse extrêmement audacieuse de Beth soulève pour l'essentiel deux difficultés que je voudrais examiner ici. La première et la plus considérable, qui concerne l'analyse de la notion d'intuition mathématique, est un problème classique de commensurabilité. Comme bien souvent en philosophie, il est ici malaisé de séparer les désaccords « substantiels » des divergences sur l'emploi des concepts : l'intuition dont Beth affirme qu'elle est d'usage à la fois constant et légitime en mathématiques *et* en logique n'est pas tout à fait l'intuition dont les Viennois n'ont précisément cessé d'affirmer qu'elle devait et qu'elle pouvait être éliminée en mathématiques, et il faut se demander quel est, des deux *explicata* en présence, celui qui est adéquat, ou le moins inadéquat. La deuxième difficulté concerne le tableau de l'activité mathématique - il préférait lui-même parler de « pensée mathématique » - qui émerge de l'œuvre de Beth. J'essaierai de montrer que la dimension « synthétique » sur laquelle il a été le premier à insister en ces termes constitue - que l'on soit ou non tout à fait fondé à qualifier cette dimension d'« intuitive » - un aspect fondamental de la démarche mathématique, mais que les idées de Beth sur ce point demanderaient probablement à être formulées de manière plus radicale encore qu'il n'a jugé utile de le faire pour sa part.

1. Une théorie modeste de l'intuition mathématique.

La notion d'intuition mathématique est notoirement obscure. D'abord il est difficile de *dire* en quoi consiste en général le fait d'« avoir » une intuition, parce qu'il s'agit justement d'une expérience dont la caractéristique essentielle est d'être « directe », « immédiate », non discursive, et que la connaissance procurée par la meilleure description « objective » de l'expérience en question n'équivaut donc jamais à la connaissance procurée par le fait d'éprouver soi-même cette expérience en première personne. Ensuite il est difficile, s'agissant précisément de l'intuition mathématique, d'apprécier exactement la portée de l'*analogie* qui est proposée la plupart du temps entre cette intuition et l'intuition sensible ordinaire (perceptive), et selon laquelle, par le truchement d'une sorte d'« œil mental », une certaine relation est établie entre le sujet mathématicien et les objets mathématiques auxquels se réfèrent les énoncés qu'il étudie, relation comparable à celle qui relie l'œil physiologique aux objets matériels qui se trouvent dans le champ visuel de l'observateur.

Laissons pour l'instant de côté les questions épineuses soulevées par l'idée même de « regard mental », et admettons que nous pourrions donner de l'analogie entre l'intuition mathématique et l'intuition ordinaire une version « décente », par exemple une version qui ne nous obligerait jamais à admettre qu'il puisse y avoir un contact cognitif avec des objets qui seraient par ailleurs incapables de nous affecter causalement d'une manière ou d'une autre. Admettons donc que nous pourrions expurger l'idée d'intuition mathématique de toute la mythologie cartésienne d'un esprit qui regarderait *tout autre chose* que ce qui peut être donné à voir au regard ordinaire. Kant, par exemple, pensait qu'une telle purification était possible. Il était convaincu d'avoir trouvé une manière de concevoir l'intuition mathématique qui n'avait rien de commun avec l'idée d'une sorte de peinture mentale visible par l'œil de l'esprit, et qui dépeindrait des objets spécifiques, ou même les objets ordinaires, mais tels qu'ils sont « en eux-mêmes » :

> L'intuition pure elle-même ne peut recevoir son objet, et par conséquent sa valeur objective, que par l'intuition empirique dont elle est la forme pure. Tous les concepts et avec eux tous les principes, tout *a priori* qu'ils puissent être, se rapportent à des intuitions empiriques, c'est-à-dire aux données d'une expérience possible. (...) Que l'on prenne seulement, par exemple, les concepts des mathématiques, et d'abord

> dans leurs intuitions pures : l'espace a trois dimensions, entre deux points on ne peut tirer qu'une ligne droite, etc. Bien que tous ces principes, et la représentation de l'objet dont s'occupe cette science, soient engendrés (*erzeugt*) de manière parfaitement *a priori* dans l'esprit, ils ne signifieraient pourtant rien du tout, si nous ne pouvions montrer leur signification (*Bedeutung*) dans les phénomènes (objets empiriques) [Kant 1781, B298-299].

Suivons donc Beth (1935, 11) qui n'a jamais cessé de faire crédit à Kant sur ce point, et admettons que l'intuition mathématique doit être et peut être tout autre chose qu'une fenêtre mystérieuse ouvrant sur un *autre* monde. Il n'en demeure pas moins que l'analogie entre l'intuition empirique et l'intuition mathématique peut être envisagée de deux manières très distinctes, contre la confusion desquelles Beth a été sans doute le premier à nous prémunir avec netteté.

1.1. L'analogie entre l'intuition mathématique et l'intuition empirique.

Dans une première version, disons *littérale*, de l'analogie, l'intuition mathématique est affectée de limitations tout à fait comparables à celles que l'on peut constater à propos de l'intuition empirique : de même que le pouvoir de résolution de la perception visuelle est sévèrement borné, et que des erreurs d'identification et des illusions sont possibles et fréquentes à propos des objets contenus dans le champ visuel, de même l'intuition mathématique est faillible et peut manquer à parfaitement discerner ce à quoi elle s'applique. Gödel est à cet égard un excellent exemple d'une telle théorie *modeste* de l'intuition (à un autre égard, la théorie gödélienne de l'intuition mathématique est évidemment *immodeste*, puisqu'elle est censée, à l'inverse de celle de Kant, nous renseigner sur d'*autres* objets que ceux qui tombent sous l'intuition empirique, mais c'est là, encore une fois, une dimension orthogonale à celle qui nous occupe ici). Il écrit par exemple que les paradoxes ensemblistes « proviennent du fait que nous ne percevons pas les concepts de « concept » et de « classe » de manière suffisamment distincte » [Gödel 1944, 139-140], et qu'ils ne sont donc « pas du tout plus troublants pour les mathématiques que les illusions des sens ne le sont pour la physique » [Gödel 1964, 268].

À ces théories modestes de l'intuition mathématique, qui admettent que l'intuition en question est faillible comme l'est l'intuition sensible elle-même, on peut opposer une conception dans laquelle l'intuition mathématique remplit son office *incomparablement* mieux que ne le fait la perception, en ce sens qu'elle est parfaitement affranchie, dans son domaine, des incertitudes et des limitations qui caractérisent au plus haut degré l'intuition perceptive. Descartes est ici un exemple typique :

> [Par l'intuition] nous pouvons atteindre à la connaissance des choses sans aucune crainte d'erreur. (...) J'entends par intuition, non la croyance au témoignage fluctuant des sens ou les jugements trompeurs d'une l'imagination qui construit mal, mais la conception d'un esprit pur et attentif, si facile et si distinct qu'aucun doute ne reste sur ce que nous comprenons. [Descartes, 1628, A.T.X, 368]

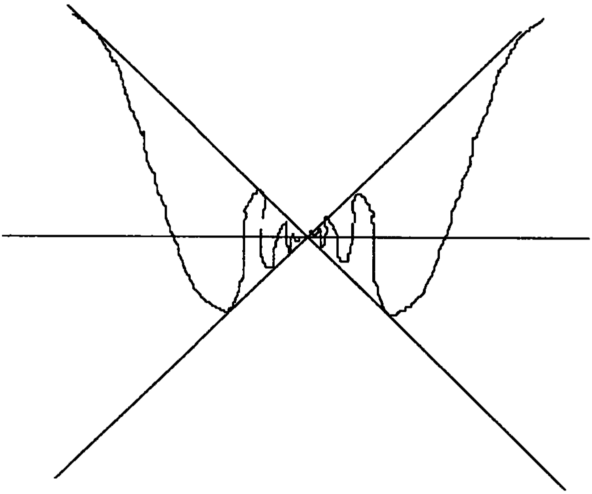
Ainsi, notre incapacité de percevoir de façon distincte un chiliogone, ou même d'en imaginer un de façon non confuse, n'a selon Descartes aucune espèce de contrepartie du côté de la pure intellection de cette figure :

> Je conçois bien à la vérité que c'est une figure composée de mille côtés, aussi facilement que je conçois qu'un triangle est une figure composée de trois côtés seulement [Descartes, 1641, VI, A.T.IX, 57]

Beth considère que cette conception cartésienne de l'intuition est une impasse, et que nous ne devrions jamais supposer que « l'intuition pure réussit de manière parfaite ce que l'intuition empirique (...) ne peut accomplir que de manière défectueuse et partielle » :

> [De façon générale, nous ne devrions pas] assigner à l'intuition pure de fonctions qui se distinguent elles-mêmes essentiellement (et pas seulement du point de vue quantitatif) de celles qui sont remplies par l'intuition empirique.
>
> Car en faisant cela, on altère le concept d'intuition pure (...). En effet, l'intuition pure était destinée à élucider la concrétude de notre imagination des objets mathématiques, en vertu de son analogie avec l'intuition empirique ; elle n'était distinguée de l'intuition empirique que pour éviter de menacer la certitude apodictique de son témoignage.
>
> L'analogie que visait Kant entre intuition pure et empirique est complètement perdue de vue, chaque fois que l'on attribue à l'intuition pure des fonctions qui sont incompatibles avec le caractère propre de l'intuition empirique.
>
> De ceci il découle clairement qu'il y a des raisons d'attribuer à l'intuition un rôle un peu plus modeste : de point de vue qui est le plus naturel, les processus infinis sont inaccessibles à l'intuition pure, exactement de la même manière qu'ils le sont à l'intuition empirique.» [Beth, 1965, 19]

Naturellement, l'ultime argument contre une conception altière de l'intuition mathématique comme faculté infaillible en son genre est encore donné par l'histoire des mathématiques elle-même: il n'est guère possible de reprendre, à propos des fonctions « pathologiques » découvertes à la fin du XIX° siècle, la thèse cartésienne selon laquelle l'intuition pure est exempte, quant à elle, des limitations rencontrées par la perception ou l'imagination à propos du chiliogone. Comme le remarque H. Hahn, l'intuition mathématique est désarmée devant une courbe périodique comme la suivante, dans laquelle la longueur d'onde et l'amplitude tendent vers 0 en un point donné, et qui, quoique continue, ne possède donc pas de tangente en ce point:



L'intuition mathématique est ici inefficace, à la fois parce qu'elle échoue à saisir le comportement de la courbe au voisinage du point critique, et parce qu'elle suggère, inévitablement et erronément, d'étendre ici la règle valant pour le cercle, l'ellipse ou la parabole, et selon laquelle la continuité entraîne la dérivabilité. Le principal défaut d'une conception de l'intuition mathématique comme faculté non seulement analogue à l'intuition empirique mais parfaite et infaillible en son genre, c'est qu'elle affirme l'existence d'une capacité humaine qui ne semble tout simplement pas active. Sauf à plaider avec Beth pour une intuition aux caractéristiques plus modestes, et dont la légitimité serait comparable à celle de l'intuition visuelle elle-même (les erreurs des sens n'interdisent nullement qu'on y ait recours en physique), la seule conclusion possible est celle que H. Hahn et les Viennois tirent pour leur propre compte :

> S'est fait jour l'exigence d'une expulsion totale de l'intuition hors des mathématiques, l'exigence d'une totale logicisation des mathématiques. (...) L'intuition pure n'est pas un moyen *a priori* de connaissance, mais

la force de l'habitude enracinée dans l'inertie psychique [Hahn, 1933, 106 et 114]

Mais l'idée même d'une intuition mathématique « modeste » est ambiguë, et certaines de ses versions en sont, nous allons le voir, carrément indéfendables.

1.2. Intuition mathématique et démonstration.

Le cas de la courbe continue, mais non dérivable, met le champion de l'intuition devant une situation beaucoup plus inconfortable encore que le cas du chiliogone. En effet, la difficulté de ce dernier exemple peut s'expliquer en des termes tout à fait voisins de ceux que nous emploierions pour désigner l'embarras causé par un problème d'ordre strictement visuel : un chiliogone qui serait assez grand pour que nous arrivions à le distinguer d'un cercle ne saurait être donné *toto simul* à la perception et, inversement, un polygone régulier visualisable dans son entièreté devrait être inspecté à la loupe pour s'assurer que ses côtés successifs forment non pas un angle plat, mais seulement les 998/1000 d'un angle plat. Il y a ici une claire analogie, pour l'intuition mathématique, de la différence entre un organe visuel qui remplirait sa fonction à la perfection, et un autre qui n'y parviendrait pas. En revanche, l'analogie en question disparaît dans le cas de la courbe ci-dessus. L'aptitude dont ferait preuve un œil assez aguerri pour s'assurer de la nature d'un chiliogone ne serait ici d'aucun secours. À quelque échelle que nous la regardions, cette courbe présente en effet la même allure au voisinage du point critique, si bien que l'erreur consistant à croire qu'elle est, puisque partout continue, dérivable en ce point, n'a rien de comparable avec l'incertitude qui peut naître d'un pouvoir de résolution optique insuffisant pour qu'il soit possible de se placer à la bonne échelle. C'est être naïf d'imaginer que, si l'on pouvait voir la courbe encore plus « près » du point critique, on saurait déterminer sa pente en ce point, comme si l' « œil de l'esprit » manquait simplement de l'acuité nécessaire pour appréhender les données géométriques pertinentes.

En conséquence, on ne saurait défendre une théorie raisonnable de l'intuition mathématique en avançant qu'elle est une faculté limitée *comme* l'est la vision elle-même et *au même sens*. C'est laisser entendre que si elle n'était pas bornée, ou si elle l'était moins, elle serait à même de résoudre un certain nombre de questions mathématiques qui ne sont, en fait, aucunement de son ressort. Le défenseur de cette version de la modestie est, en somme, à peu près dans la position de quelqu'un qui voudrait atténuer l'extravagance de dire qu'il converse avec les anges en ajoutant qu'il ne les comprend pas toujours. L'étude du comportement d'une courbe au voisinage de ses points singuliers ne relève pas de l'intuition géométrique : même si cette intuition était dotée d'une capacité de discrimination infiniment supérieure à celle qui la caractérise effectivement, elle ne parviendrait pas à trancher la question dans l'exemple ci-dessus, lequel requiert qu'on la laisse purement et simplement de côté, et que l'on recourre aux définitions « formelles » de la continuité et de la dérivabilité.

Les théories habituelles de l' « intuition modeste » reposent sur une conception extrêmement contestable du rapport entre l'intuition et le « formalisme ».

1°) Selon cette conception, le rapport en question est analogue à celui qui unit la vision « naturelle » à un procédé qui permettrait, par exemple, de savoir ce qu'il en est dans l'infrarouge. Là où s'arrête l'intuition, il y aurait encore quelque chose à voir pour celui qui serait équipé du dispositif considéré, ou tout au moins il demeurerait quelque chose qui serait entièrement déterminé dans les termes que nous utilisons pour décrire ce à quoi l'intuition a accès. De même, par exemple, que les notions de « gauche » et de « droite » gardent leur sens pour des objets plongés dans l'obscurité – l'obscurité n'affectant que notre capacité à savoir quel est le cas, et non pas la pertinence des deux notions pour décrire les configurations possibles des objets -, de même les notions par lesquelles nous appréhendons ce qui nous est intuitivement accessible conserveraient leur sens dans le domaine de ce qui ne l'est plus, la seule différence tenant à ce que, dans ce dernier domaine, nous demeurons incapables de savoir ce qu'il en est vraiment. En d'autres termes, les notions utilisées pour décrire le domaine intuitif garderaient leur sens ailleurs, c'est-à-dire qu'elles seraient à même d'y décrire sans ambiguïté des possibilités capables d'être ou non réalisées, la limitation de l'intuition se traduisant simplement par le fait que la détermination des possibilités effectivement réalisées excède nos capacités de discrimination.

Rapportée au cas considéré, cette conception revient en somme à soutenir que la notion intuitive de continuité d'une fonction, qui permet indiscutablement de classer un grand nombre de fonctions d'après leur courbe représentative (selon, par exemple, qu'il est ou non possible de tracer cette courbe sans lever la main), persiste à s'appliquer sans ambiguïté aux fonctions « pathologiques », et que notre incapacité de décider en ces termes certaines questions de continuité ou de dérivabilité témoigne simplement des limites de *notre* intuition géométrique. Dans cette perspective, le recours à la définition « analytique » de la continuité n'est qu'un pis-aller rendu nécessaire par notre impuissance à éprouver si la courbe peut être ou non tracée continûment au voisinage du point critique, mais il demeure que la fonction est ou non traçable ou non de cette façon en ce point, quoiqu'il nous soit impossible de savoir ce qu'il en est effectivement.

Naturellement, la situation véritable n'est pas du tout celle-là. Le critère intuitif (géométrique ou « graphique ») de continuité est *remplacé* par la définition analytique bien connue en termes d'epsilons et de deltas, laquelle donne les mêmes résultats dans le domaine accessible à l'intuition, mais permet d'opérer de *nouvelles* distinctions dans le domaine étendu. En résumé, la définition analytique donne *le sens auquel* la courbe en question est continue, et non pas un *procédé* – dont des créatures plus « performantes » que nous ne le sommes pourraient éventuellement se dispenser -permettant de savoir si elle est bel et bien continue à l'aune de l'ancien critère intuitif.

2°) Selon cette conception, les définitions formelles et les démonstrations rigoureuses constituent une sorte de prothèse cognitive, à nous seulement destinée, de ce que pourrait enseigner à d'autres créatures une intuition mathématique plus puissante. En conséquence, il serait aussi absurde d'y avoir recours lorsque, par bonheur, l'intuition *ne fait pas* défaut qu'il serait comique de s'aider de béquilles pour marcher lorsqu'on n'en a pas besoin.

Or l'intuition ne fait pas non plus complètement l'affaire dans les situations les plus simples, où l'on pourrait penser que l'on peut s'en contenter. Comme l'écrit par exemple Bolzano, qui avait été le premier [Bolzano, 1834,§ 75], bien avant Weierstrass, à remarquer l'existence de fonctions continues non dérivables, c'est dans l'analyse *tout entière* qu'il convient de répudier l'intuition géométrique et de lui substituer une approche « purement analytique » : en mathématiques, les données de la « perception mentale » ne suffisent *jamais*, car l'objectif ne s'y limite pas à savoir ce qui est effectivement le cas.

Ainsi, le théorème des valeurs intermédiaires, dont un cas particulier important énonce qu'une fonction continue vérifiant $f(a).f(b) < 0$ s'annule pour au moins une valeur de l'argument comprise entre *a* et *b*, est assurément une proposition dont tout le monde « voit » [Bolzano, 1817, 229] qu'elle est correcte, et qui est même « connue par le sens commun avec une certitude indubitable » [idem, 235]. Mais les ressorts intuitifs de cette conviction n'ont pas leur place en analyse, car ils ne sauraient tenir lieu d'une *preuve*:, seule capable d'établir ce sur quoi le théorème repose :

> Le genre de preuve le plus répandu dépend d'une vérité empruntée à la géométrie, à savoir que chaque courbe continue de courbure simple dont les ordonnées sont d'abord positives, puis négatives (ou inversement) doit nécessairement couper l'axe des x quelque part en un point qui est entre ces deux ordonnées. Il n'y a absolument rien à objecter contre la justesse, ni à vrai dire contre l'évidence de cette proposition géométrique. Cependant, (...) si l'on considère que les preuves

> scientifiques ne doivent pas être seulement des certifications (*Gewissmachungen*), mais des fondements (*Begründungen*), c'est-à-dire des présentations de la raison objective de la vérité examinée, alors il est évident que la preuve scientifique stricte, ou la raison objective, d'une vérité qui vaut également pour toutes les quantités, qu'elles soient ou non spatiales, ne peut pas résider dans une vérité qui ne vaut que pour les quantités spatiales. À cet égard, il peut sembler, au contraire, qu'une telle preuve géométrique est, dans la plupart des cas, réellement circulaire. Car si la vérité géométrique à laquelle nous nous référons est (comme nous l'avons déjà dit), extrêmement évidente, et donc qu'elle n'a pas besoin de preuve au sens de la certification, elle est néanmoins en attente d'un fondement [Bolzano, 1817, 228].

L'intuition du mouvement est à la rigueur capable de montrer *que* le théorème des valeurs intermédiaires est correct, mais en aucun cas elle ne permet de montrer *pourquoi* il l'est, c'est-à-dire de lui assigner la place qui lui revient dans l'enchaînement objectif des vérités de la science. Ce théorème attribue à certaines fonctions une propriété qui n'est pas *fondée* sur leur figuration géométrique par une courbe, encore moins sur le mouvement que cette courbe est susceptible de représenter ou sur celui, « nulle part interrompu et partout lié » (*nullibi interrumptam sed ubique cohaerentem* [Gauss, cité par Sébestik, 1992, 76n.] qui préside à son tracé. Il repose sur des propriétés « purement analytiques » des nombres réels, comme la propriété des bornes supérieures [Bolzano, 1817, § 12], dont l'application aux fonctions de variable réelle requiert que le concept de continuité soit lui-même défini de manière « analytique » et non pas géométrique ou cinématique. En d'autres mots, même là où l'intuition suffit pour s'assurer de la correction d'une proposition mathématique, il convient de la remplacer par une démonstration rigoureuse pour établir les *raisons* de cette correction.

Beth était à l'évidence tout à fait conscient de ce genre de difficultés, et c'est pourquoi son plaidoyer en faveur d'une intuition mathématique « modeste » est fort différent de celui qui vient d'être critiqué. À ses yeux, la conception traditionnelle de l'intuition entendue comme pourvoyeuse de vérités mathématiques ne peut être défendue dans aucune de ses versions, et notamment pas dans la version « raisonnable » qui consisterait à concéder que l'étendue de son empire est, en effet, limitée, et qu'elle doit être assez vite relayée par des preuves ou des réfutations en bonne et due forme : c'est *dans la démarche de preuve elle-même* que l'intuition mathématique doit intervenir, et sans du tout que cette intervention ne menace le caractère objectif de la démonstration. Cette conception très originale prend sa source dans une interprétation inédite de la philosophie des mathématiques de Kant, sur laquelle il convient de revenir.

2. La conception kantienne de l'intuition mathématique.

Parmi les lecteurs de la *Critique de la Raison Pure*, ceux qui ont quelque teinture de logique mathématique ont généralement tendance à se rallier au jugement sévère formulé par Beth : « les fondements sur lesquels la philosophie critique était bâtie » sont « instables » [1965, 104], et la théorie kantienne de la science est, en définitive, « obscure et souvent vague et incohérente » [1959, 41].

Pour l'essentiel, la *Critique* offre à ces lecteurs deux motifs d'insatisfaction. D'une part, les thèses qui y sont formulées semblent incompatibles avec les mathématiques « modernes » et, au premier chef, avec les géométries « non euclidiennes ». D'autre part, la conception de la démonstration mathématique qui s'y trouve développée fait à l' « intuition » et à l' « extra-logique » une place que personne ne serait guère disposé à lui accorder aujourd'hui.

2.1. L'intuition des principes.

Dans sa version la plus commune, l'analogie entre l'intuition mathématique et l'intuition empirique suppose que la première joue, à l'égard d'objets qui ne sauraient, par nature, provoquer aucun ébranlement sensoriel, le même rôle que la seconde à l'égard des objets qui tombent sous les sens. Or c'est une analogie que Kant récuse tout à fait. Selon lui, l'intuition mathématique ne saurait en aucune manière constituer un moyen de prendre connaissance d'objets incapables de tomber sous l'intuition sensible. En effet, il admet une certaine forme de ce que nous appellerions aujourd'hui une théorie « causale » de la connaissance, en vertu de laquelle la connaissance d'un objet doit ultimement s'expliquer par un mécanisme causal ayant pour source l'objet connu : pour être connu, l'objet doit être effectivement « présenté » à notre sensibilité (même si cette « présentation » ne constitue évidemment pas une condition suffisante de la connaissance). Sans une « affection » de ce genre, écrit Kant,

> on ne pourrait concevoir de cause à ce rapport de ma représentation à l'objet, ou bien il lui faudrait reposer sur l'inspiration [Kant, 1783, 44].

Un objet possédant les caractéristiques que la tradition platonicienne attribue aux objets mathématiques – l'éternité, l'absence de localisation, l'inertie causale – ne saurait donc être, d'aucune manière connu.

Les mathématiques constituent une connaissance *a priori*, c'est-à-dire indépendante de toute présentation effective d'un objet, et antérieure à toute présentation de ce genre. Mais Kant fait remarquer qu'on n'explique pas la possibilité d'une connaissance de ce genre en supposant que nous avons un accès « intuitif » à des objets transcendants, incapables d'être effectivement présentés à la perception. Car un tel accès, à supposer même que nous en soyons capables, constituerait bel et bien un type particulier de connaissance *a posteriori*, et non pas *a priori* :

> Cette possibilité accordée, une telle intuition ne saurait avoir lieu *a priori*, c'est-à-dire avant même que l'objet m'ait été présenté [loc. cit.]

L'explication que Kant avance pour son propre compte consiste d'abord à remarquer qu'il ne saurait y avoir de cause « pure », c'est-à-dire qui ne soit elle-même modifiée par ce qu'elle cause, et qu'en vertu de cette symétrie, ce qui est connu n'est donc jamais l'objet « lui-même », tel qu'il est « en soi », indépendamment du fait que nous le connaissons (et donc qu'il nous affecte), mais seulement la manière dont cet objet nous apparaît en produisant sur nous des effets qui dépendent en partie de ce que nous sommes, et dont nous sommes donc en partie la cause. La seconde partie de la solution kantienne réside dans l'affirmation selon laquelle cette contribution subjective aux phénomènes est à la fois immuable et accessible elle-même à la connaissance : nous sommes capables d'appréhender les lois fixes de notre propre constitution cognitive, lesquelles sont autant de caractéristiques nécessaires de l'expérience possible. C'est cette légalité subjective, qui demeurerait inchangée même si l'expérience sensible effective différait de ce qu'elle est en fait, qui est, selon Kant, l'objet exclusif de la connaissance *a priori* :

> Il n'y a pour mon intuition qu'une seule manière d'être antérieure à la réalité de l'objet et de se produire comme connaissance *a priori*, c'est *de ne contenir autre chose que la forme de la sensibilité qui dans mon sujet précède toutes les impressions réelles par lesquelles les objets m'affectent*. Car je peux *a priori* savoir que des objets des sens ne peuvent être perçus que suivant cette forme de la sensibilité. Il s'ensuit que des proposition qui ne concernent que cette forme de l'intuition sensible seront possibles et valables pour des objets de sens et, réciproquement, que des intuitions possibles *a priori* ne peuvent jamais concerner que des objets des sens [Kant, loc. cit.]

L'intuition pure ne peut donc concerner que la *forme* de l'expérience possible. C'est seulement parce que les objets de l'expérience doivent se conformer à la constitution de notre esprit que nous pouvons avoir une connaissance *a priori* de la nature de l'expérience. Ainsi, la spatialité n'est pas une propriété intrinsèque des objets qui nous affectent, mais la manière dont ces objets se présentent aux créatures qu'ils affectent lorsqu'elles sont, comme c'est notre cas, équipés du monde spatial de l'intuition sensible :

> Ce que nous avons donc voulu dire, c'est ceci : que toute notre intuition n'est rien d'autre que la représentation de phénomènes ; que les choses que nous intuitionnons ne sont pas en elles-mêmes telles que nous les intuitionnons, que leurs rapports ne sont pas non plus en eux-mêmes tels qu'ils nous apparaissent ; que, si nous faisons abstraction de notre sujet, ou même seulement de la constitution subjective des sens en général, alors toutes les propriétés, tous les rapports des objets dans l'espace et dans le temps, et l'espace et le temps eux-mêmes disparaissent, puisque tout cela, en tant que phénomène, ne peut exister en soi, mais seulement en nous. Quant à la nature des objets considérés en eux-mêmes et indépendamment de toute cette réceptivité de notre sensibilité, elle nous demeure entièrement inconnue. Nous ne connaissons rien d'eux que la manière dont nous les percevons, et cette manière, qui nous est propre, peut fort bien ne pas être nécessaire à tous les êtres, bien qu'elle le soit pour tous les hommes. Nous n'avons affaire qu'à elle. L'espace et le temps en sont les formes pures, la sensation en est la matière générale. Nous ne pouvons connaître ces formes qu'*a priori*, c'est-à-dire avant toute perception réelle, et c'est pourquoi on les appelle des intuitions pures [Kant, 1781, A42/B59-60, GF, 97]

L'intuition mathématique kantienne est donc une intuition « modeste », au sens où il ne s'agit pas d'une faculté absolument spécifique nous donnant accès à autre chose que ce qui tombe sous les sens, mais plutôt d'un usage particulier de la faculté familière qui est en jeu dans la réception des impressions sensibles, usage qui consiste, indépendamment de toute affection de la sensibilité par un objet particulier, à appréhender les conditions les plus générales sous lesquelles une telle affection est possible. Kant postule donc une manière de « pénétrabilité cognitive » des lois que les formes de notre sensibilité imposent à chaque expérience qui est pour nous possible, et c'est sur cette pénétrabilité que repose la possibilité de l'intuition pure. Par contraste avec l'intuition empirique, qui nous fait accéder au seul contenu actuel, contingent, de l'expérience effective, cette intuition pure est censée nous faire connaître ce qui est le cas dans toute expérience possible. Autant dire qu'elle nous montre simplement que certains traits de l'expérience actuelle ont un caractère de nécessité ou, comme le dit Kant, d' « apodicticité » : elle ne nous montre pas « autre chose », elle nous montre certaines des « mêmes choses » comme nécessaires. En conséquence, l'on pourrait s'attendre à ce que nous puissions avoir l'expérience effective de la correction de chaque proposition dont l'intuition pure affirme qu'elle est correcte dans toute expérience possible : puisque la différence entre les deux espèces d'intuitions tient à la modalité des jugements qu'elles autorisent, et point du tout aux types d'objets auxquels elles se réfèrent, ce qui est affirmé par l'intuition pure comme vrai dans tous les cas possibles devrait pouvoir être effectivement vérifié par l'intuition empirique dans chaque situation particulière.

Or tel ne semble pas être véritablement le cas, et c'est un aspect sous lequel la conception kantienne de l'intuition est, en un certain sens, bien moins modeste qu'il n'y paraît. En effet, dans les termes mêmes de Kant :

> [Le principe transcendantal de la science mathématique] permet d'appliquer les mathématiques pures dans toute leur précision aux objets de l'expérience (...). L'intuition empirique n'est possible que par l'intuition pure (de l'espace et du temps) : ce que la géométrie dit de celle-ci s'applique donc aussi à celle-là sans contestation possible ; et les faux-fuyants selon lesquels, par exemple, les règles de la construction dans l'espace (comme la divisibilité à l'infini des droites ou des angles) ne seraient pas appropriées aux objets des sens, doivent être repoussés. Car on refuserait par là toute valeur objective à l'espace et, avec lui, à toutes les mathématiques. [Kant, 1781, A165/B206 ; GF 288].

2.1.1. Le dilemme de Kant.

Puisque l'explication transcendantale des mathématiques exige que toutes les propriétés attribuées à l'espace par la géométrie possèdent leur exacte contrepartie dans l'expérience possible, la philosophie kantienne se trouve exposée à une manière de dilemme dont les termes sont les suivants. Ou bien certaines propriétés de l'espace sont laissées indéterminées, la géométrie n'ayant alors à dresser l'inventaire que des plus fondamentales et les plus « intuitives » d'entre elles ; mais ceci revient à admettre que les formes *a priori* de l'expérience possible sont elles-mêmes affectées d'une sorte d'inexplicable indétermination, ou encore qu'elles recèlent une certaine opacité, et qu'elles ne sont pas, quoique objectivement déterminées de façon maximale, « cognitivement pénétrables » dans leur entièreté. Ou bien, au contraire, l'espace est conçu comme une structure maximalement déterminée dont la démarche transcendantale est capable d'expliciter toutes les caractéristiques ; mais ceci revient attribuer à l'intuition empirique elle-même, *via* le « principe transcendantal », la possibilité de performances dont une évaluation tant soit peu « réaliste » la montre tout à fait incapable. Autrement dit, la nature du lien établi par la philosophie transcendantale entre l'intuition mathématique et l'intuition empirique requiert que les deux types d'intuition se voient attribuer des pouvoirs de résolution comparables, ce qui ne peut être obtenu que de deux manières dont chacune est, à certains égards, problématique : ou bien en limitant la capacité de la première à pénétrer la nature des contraintes que l'esprit exerce sur les phénomènes, ou bien en surévaluant très largement les capacités effectives de discrimination de la seconde, c'est-à-dire finalement en considérant comme possibles un certain nombre d'expériences que nous sommes, en fait, incapables d'avoir.

Pour des raisons dans le détail desquelles il est impossible d'entrer ici, mais qui tiennent pour l'essentiel au « dogme » de l'intelligibilité à l'esprit lui-même de ses propres caractéristiques [Dubucs, 1986, 300 sq], il ne fait aucune espèce de doute que Kant ait estimé que la seconde voie constituait un moindre mal, et qu'il ait en somme choisi de concevoir la possibilité de l' « expérience possible » comme une possibilité *de principe* bien plus que comme une possibilité *effective*. S'agissant d'un exemple crucial comme celui de la divisibilité de l'espace à l'infini, ce choix implique que les objets de l'expérience empirique eux-mêmes héritent de cette propriété, et qu'ils soient donc eux-mêmes *perçus* - au mépris, il faut le dire, de la simple vraisemblance - comme indéfiniment complexes. Sans doute cela ne signifie-t-il pas littéralement que la perception d'un objet déterminé ne puisse se produire sans qu'intervienne en même temps et avec la même netteté la perception de toute partie arbitrairement petite de cet objet. Mais, comme le remarque Ch. Parsons au terme d'un plaidoyer très argumenté pour immuniser cette conception contre l'objection immédiate relative à l'existence de seuils minimaux dans la discrimination sensorielle, cela implique néanmoins que le processus par lequel l'attention se focalise sur une partie stricte de l'objet perçu soit capable d'être poursuivi sans limite, et donc, de proche en proche, que *toute* partie d'un objet de l'expérience possible puisse encore être objet d'expérience. Cette clôture de l'expérience possible sous la relation de division n'est évidemment compatible qu'avec une notion hautement idéalisée de la « possibilité » de l'expérience. Ainsi que l'écrit Parsons,

> L'objectif de toute l'épistémologie de Kant est de prouver que notre connaissance synthétique est limitée aux objets de l' « expérience possible ». Mais quand nous essayons de donner à la notion d' « expérience possible » une signification intuitive concrète, nous devons constater que les limites de l'expérience possible sont plus étroites que ce qui, selon Kant, constitue le domaine de notre connaissance géométrique de l'espace. (...) Il apparaît donc que la « possibilité de l'expérience », pour Kant, doit s'étendre au-delà de ce qui est pratiquement possible pour la sorte d'êtres que nous avons des raisons de penser que nous sommes [Parsons, 1964, 95 et 105].

La question décisive n'est pas celle de savoir si nous pouvons ou non faire l'expérience d'objets de complexité non bornée – car la réponse est clairement affirmative -, mais celle de savoir si nous pouvons ou non en faire l'expérience *comme* d'objets indéfiniment complexes. Kant est tenu de répondre par l'affirmative à cette dernière question, car il professe que la divisibilité à l'infini n'est pas une caractéristique que nous attribuerions à l'espace au terme d'une analyse *conceptuelle*, mais l'une des contraintes que l'esprit impose aux choses, et qu'il serait absurde que de telles contraintes soient réellement exercées sans l'être détectablement par le sujet même qui les exerce. Cette réponse assez implausible est la rançon à peu près inévitable des trois principes conjointement défendus par Kant, à savoir d'une part le « principe transcendantal » lui-même, d'autre part le principe de « totale détermination » [1] , en conséquence duquel il ne saurait demeurer aucun « vague » et aucune indécision dans les formes *a priori* selon lesquelles nous organisons le divers de la sensation, et enfin le principe d' « immanence cognitive », en vertu duquel le sujet ne saurait manquer d'apercevoir, au terme de la « réflexion transcendantale » elle-même, la totalité de sa propre contribution aux phénomènes.

D'un point de vue kantien, il serait donc vain de chercher à classer les propriétés de l'espace selon leur intuitivité, c'est-à-dire à distinguer entre des caractéristiques à la fois « obligées » et « évidentes », comme celle d'après laquelle une droite qui « entre » dans un triangle doit en sortir (*axiome de Pasch*), et des caractéristiques « asymptotiques », ne possédant dans l'expérience possible « effective » que des contreparties à jamais hypothétiques, comme la divisibilité à l'infini ou l'existence de parallèles. Il découle des principes mentionnés plus haut que la bivalence s'applique sans restriction à la totalité des propositions géométriques : il ne saurait exister en ce domaine ni de propositions ni vraies ni fausses (principe de totale

[1] « Toute chose, quant à sa possibilité, est encore soumise au principe de totale détermination (*durchgängige Bestimmung*) d'après lequel, de tous les prédicats possibles des choses, pour autant qu'ils soient comparés à leurs contraires, il y en a au moins un qui doit lui convenir. (...) La proposition que tout ce qui existe est totalement déterminé signifie non seulement que de chaque paire de prédicats opposés donnés, mais aussi de prédicats opposés possibles, il y en a toujours un qui lui convient. » [Kant, 1781, A571-573/B599-601 ; GF 463-464].

Les phénomènes sont entièrement déterminés par la « matière » de la sensation et par les formes *a priori* dans lesquelles nous en organisons la diversité. Si le principe de totale détermination ne s'appliquait pas à ces formes *a priori*, il en résulterait un « vague » inexplicable dans les phénomènes.

détermination), ni, corrélativement, de propositions dont nous ne serions pas capables de déterminer la valeur de vérité (principe d'immanence). Comme l'écrit Kant, la géométrie fait partie de ces sciences

> dont la nature est telle que chaque question qui s'y élève doit pouvoir être absolument résolue par ce qu'on sait, car la réponse doit surgir des mêmes sources que celles dont surgit la question ; il n'y est nullement permis de s'abriter derrière une ignorance inévitable, et l'on y est en droit d'exiger une solution. [Kant, 1781, A476/B504, GF 406]

La géométrie est à cet égard dans une situation très différente de la physique, où

> il existe une infinité de conjectures à propos desquelles on ne peut jamais espérer de certitude, parce que les phénomènes naturels sont des objets qui nous sont donnés indépendamment de nos concepts, et dont par conséquent la clef n'est pas en nous et dans notre pensée pure, mais en-dehors de nous, en sorte que dans beaucoup de cas on peut fort bien ne pas la trouver, et par là devoir renoncer à toute solution certaine. [Kant, 1781, A480-481/B508-509, GF 408]

La conception « modeste » de l'intuition adoptée par Kant a donc pour paradoxale contrepartie une absence totale de limites dans les obligations épistémiques du mathématicien : le manque de discernement que l'on pardonnerait à une connaissance dirigée vers un royaume étranger au sujet lui-même et indépendant de lui, on ne l'admettra pas d'une intuition orientée vers les lois qui règlent sa propre constitution cognitive.

Conséquemment, une géométrie satisfaisant aux réquisits kantiens doit être un système de principes « complètement déterminé » (permettant de trancher toute question capable d'être énoncée dans le langage géométrique), et dont, de plus, chaque élément doit pouvoir être « transcendantalement déduit », c'est-à-dire plus ou moins immédiatement reconnu comme l'une des conditions de l'expérience possible. La difficulté présentée par l'identification d'un tel système ne tient pas à la première exigence, dont on sait qu'elle peut être satisfaite de diverses manières (Tarski (1951) et Szmielew (1958) ont montré, par exemple, que les géométries euclidienne et hyperbolique étaient « syntaxiquement complètes », c'est-à-dire capables de prouver ou de réfuter chaque énoncé de leur langage), mais à la seconde, qui implique justement que la première ne puisse être satisfaite que d'une seule façon. De deux géométries complètes « rivales », une seule est censée être correcte, et elle doit l'être détectablement. Puisque tout ce qui est vrai *a priori* relève de la constitution même du sujet, et que toute proposition relative à ce qui est ainsi constitué est régulièrement accessible à la connaissance, l'axiome des parallèles devrait suivre la même loi, et l'intuition devrait donc être capable de décider, de lui ou de sa négation, quel est celui qui correspond aux conditions *a priori* de l'expérience possible. Que Kant ait incliné pour la première solution, et qu'il ait considéré que la géométrie euclidienne était la bonne, est à cet égard de peu d'importance. Eut-il, inversement, tenu la géométrie hyperbolique comme le système décrivant correctement les conditions de l'expérience possible, que l'essentiel de sa théorie serait resté inchangé, à savoir, d'une part, que notre constitution cognitive est à ce point déterminée qu'elle confère une valeur de vérité définie à chaque proposition géométrique, et, d'autre part, que la démarche transcendantale doit nous rendre capables d'accéder à cette valeur sans aucune incertitude insurmontable.

Or il y a là une manière d'inférence de l'apriorité à la résolubilité que l'on serait tenté, pour autant qu'on l'accepte, de parcourir à l'envers, dans le sens du *modus tollens* plutôt que du *modus ponens*. Comment, en effet, pourrait-on montrer que l'axiome des parallèles est une condition de toute expérience possible, alors même qu'il est déjà très problématique d'établir s'il est ou non satisfait dans une expérience donnée ? La « vérification » de cet axiome soulève une difficulté tout à fait comparable à celle que mentionne Parsons à propos du principe de divisibilité à l'infini : on ne saurait le tenir pour susceptible d'une « déduction transcendantale » sans s'exposer aussitôt à conférer à l'intuition empirique elle-même un pouvoir de résolution déraisonnablement élevé. Moyennant une autre hypothèse dont la satisfaction est, elle aussi, difficile à évaluer, à savoir le caractère archimédien de l'espace [Dehn, 1900], l'axiome des parallèles équivaut en effet à la proposition selon laquelle le « défaut » angulaire des triangles est nul, ou encore à celle selon laquelle la courbure de l'espace est égale à zéro. Or, comme le remarque Riemann dans une analyse justement fameuse [Riemann, 1867, 294-295], les possibilités entre lesquelles l'intuition est supposée pouvoir trancher forment ici une « variété continue ». Contrairement au cas du nombre de dimensions de l'espace, où l'intuition « ordinairement conçue » peut – quoique ce soit, à en croire Riemann, toujours avec quelque incertitude – parvenir à une réponse catégorique, nous avons donc ici affaire à une situation où seul un pouvoir de résolution proprement *infini* pourrait nous mettre à même de décider la chose. À supposer même que le seuil en deçà duquel nous devenons incapables de discerner une différence entre 180° et la somme des angles d'un triangle donné soit généreusement fixé à une valeur ε extrêmement petite de cette différence, l'intuition empirique nous laisse, pour valeurs possibles du défaut angulaire des triangles, un intervalle $]-\varepsilon, +\varepsilon[$ qui contient donc, indifférenciées, les possibilités entre lesquelles il importait de trancher, à savoir la valeur 0 et les autres. En conséquence, la théorie kantienne de la géométrie ne saurait être défendue qu'à la condition d'allouer à l'intuition une capacité de discernement infinie, ce qui revient précisément à lui ôter la « modestie » caractéristique qui en constituait, aux yeux de Beth, le principal mérite.

2.1.2. L'espace des solutions.

À la difficulté que nous venons de mentionner, les solutions possibles sont les suivantes, par ordre de fidélité décroissante à Kant : renoncer à une conception « modeste » de l'analogie entre l'intuition empirique et l'intuition transcendantale, renoncer à l'intuition transcendantale, renoncer à l'intuition.

2.1.2.1. Néo-kantiens : une intuition transcendantale sans contrepartie empirique.

On peut, après tout, consentir à sacrifier l'idée même de « modestie » de l'intuition mathématique, plaider que cette intuition constitue une source de connaissance incommensurablement plus pénétrante que l'intuition perceptive, et nier de la sorte qu'il y ait quoi que ce soit de problématique dans le fait que la première nous assure du caractère euclidien de l'espace, alors que la seconde semble incapable de vérifier ce caractère dans l'expérience empirique avec une certitude indubitable. Helmholtz (1878) donne une excellente description de cette position de certains disciples de Kant, lorsqu'il écrit :

> Les sectateurs de Kant affirment qu'il existe (...) une *géométrie pure*, fondée sur la seule intuition transcendantale, et qu'il s'agit bel et bien de la géométrie qui a été scientifiquement développée jusqu'ici (...).
>
> Je me permets de souligner que cette intuition interne de la rectitude des droites et de la similitude des angles devrait avoir une précision absolue. Autrement, nous ne pourrions d'aucune manière avoir le droit de décider si deux droites, lorsqu'on les prolonge indéfiniment, ne se coupent qu'une fois, ou peut-être même deux (comme les grands cercles sur une sphère), ni d'affirmer que chaque droite qui coupe l'une de deux parallèles tout en étant dans le même plan qu'elle doit aussi couper l'autre. Il ne faut pas essayer de faire passer l'estimation visuelle, qui est tellement imparfaite, pour l'intuition transcendantale, qui demande une précision absolue (*man muss nicht das so unvollkommene Augenmass für die transcendentale Anschauung unterschieben wollen, welche letztere absolute Genauigkeit fordert*) [Ewald, 1996, 720-721].

La difficulté de cette solution, à vrai dire, ne provient pas seulement du caractère hautement hypothétique d'une intuition transcendantale ainsi conçue, mais aussi du fait qu'en séparant de cette façon l'intuition transcendantale et l'intuition empirique on s'expose, de manière évidemment contraire à l'esprit et aux objectifs mêmes de Kant, à faire de l'applicabilité de la géométrie aux phénomènes le résultat, tout au mieux, d'une heureuse coïncidence. En effet, ainsi que le remarque encore Helmholtz :

> Admettons que nous ayons une telle intuition transcendantale des structures spatiales et de leurs similitudes et congruences, et que nous puissions nous convaincre nous-mêmes, sur la base de raisons effectivement suffisantes, que nous possédons bien cette intuition. Alors, bien sûr, un système de géométrie pourrait en être dérivé, qui serait indépendant de toutes les propriétés des corps physiques – une géométrie pure, transcendantale. Cette géométrie aurait, elle aussi, ses axiomes. Mais il est clair, en accord même avec les principes de Kant, que les propositions de cette hypothétique géométrie pure ne s'accorderaient pas nécessairement avec celles de la géométrie physique. Car l'une parle de la similitude des grandeurs spatiales dans l'intuition intérieure, et l'autre de la similitude physique. Cette dernière dépend évidemment des propriétés des corps naturels, et pas seulement de la constitution de notre esprit.
>
> Il conviendrait donc de rechercher si les deux types de similitude mentionnés coïncident toujours. Ce n'est pas l'expérience qui pourrait en décider. Y a-t-il aucun sens à demander si deux compas déterminent ou non, selon l'intuition transcendantale, des longueurs égales ? J'ignore comment accorder aucun sens à cela ; et, pour autant que j'ai compris les disciples récents de Kant, je crois pouvoir dire qu'ils répondraient eux aussi par la négative. L'estimation visuelle, encore une fois, est quelque chose que nous devons nous garder ici de confondre avec l'intuition transcendantale.
>
> (...) Supposons enfin que la géométrie physique ait trouvé une série de propositions empiriques universelles qui soient identiques, dans leur formulation, aux axiomes de la géométrie pure. Il en découlerait tout au plus que l'hypothèse selon laquelle la similitude physique de la valeur des grandeurs spatiales coïncide avec leur similitude dans l'intuition pure spatiale est une hypothèse licite, ne conduisant pas à contradiction. Mais cette hypothèse ne serait pas la seule possible. L'espace physique et l'espace de l'intuition pourraient, aussi bien, être reliés l'un à l'autre comme l'est l'espace effectif à son image dans un miroir convexe.
>
> Que la géométrie physique ne doive pas nécessairement coïncider avec la géométrie transcendantale, c'est ce qui suit du fait que nous sommes effectivement capables de nous les représenter comme ne coïncidant pas. [Ewald, 1996, 721-722]

2.1.2.2. Helmholtz : le renoncement à l'intuition transcendantale.

La solution que Helmholtz adopte pour son propre compte consiste, d'une certaine manière, à renoncer aux privilèges épistémiques du transcendantal. Il entend conserver l'idée kantienne fondamentale selon laquelle l'espace constitue une forme *a priori* de l'expérience possible, mais il s'emploie à dépouiller cette affirmation des conséquences, jugées extravagantes, qui lui sont attachées dans la *Critique de la Raison Pure*. Le fait que l'espace soit la forme imposée aux phénomènes par notre propre constitution cognitive est désormais jugé sans incidence majeure sur les modalités et l'étendue de la connaissance que nous pouvons en prendre. La nature de l'espace nous est, certes, en principe accessible, mais elle ne l'est pas *spécialement*. Nous n'y accédons pas par des voies foncièrement différentes de celles qui nous procurent la connaissance des phénomènes eux-mêmes : le fait que nous soyons ici, si l'on ose dire, les auteurs de l'objet même d'analyse ne nous exempte nullement d'analyser. Nous devons le faire selon les mêmes méthodes que lorsque nous avons affaire à quelque phénomène empirique que ce soit, et nous ne devons pas nous attendre en ce domaine à des résultats d'une précision inconnue ailleurs. L'idée même d'une auto-transparence inanalysable, d'une infaillible intuition de soi-même et, de façon plus générale, tout le pathos de la « facilité transcendantale » sont pour Helmholtz un indice assez sûr d'une philosophie pré-scientifique : c'est seulement à la « conscience populaire » que

> une intuition apparaît comme quelque chose de simplement donné, qui surgit sans réflexion et sans recherche, et qui ne peut d'aucune manière être davantage décomposé en processus psychiques. Cette croyance populaire a été adoptée par certains chercheurs en optique physiologique, et aussi par les Kantiens de stricte observance, au moins pour ce qui regarde l'intuition spatiale. Ainsi qu'il est bien connu, Kant supposait déjà non seulement que la forme générale de l'intuition spatiale est transcendantalement donnée, mais qu'elle contient également d'avance, antérieurement à toute expérience possible, certaines déterminations plus précises, comme celles qui sont exprimées par les axiomes de la géométrie [Ewald, 1996, 700]

Helmholtz se propose de modifier radicalement la doctrine de Kant sur ce point, c'est-à-dire de conserver la thèse de « l'idéalité transcendantale » de l'espace en renonçant à la conséquence qui en découlait selon Kant, à savoir que les principes fondamentaux de la géométrie sont immédiatement reconnaissables comme vrais par l' « intuition transcendantale » :

> Les raisons qui autorisent à conclure que la forme de l'intuition de l'espace est transcendantale ne suffisent pas pour autant à prouver en

> même temps que les axiomes eux aussi sont d'origine transcendantale. (...) L'espace peut être transcendantal sans que les axiomes le soient. (...) L'hypothèse selon laquelle il existe une connaissance directe des axiomes par le biais de l'intuition transcendantale est
>
> (i) une hypothèse *indémontrée* ;
>
> (ii) Une hypothèse *non nécessaire*, puisqu'elle ne prétend pas expliquer, dans ce qui est en fait notre monde de représentations, quoi que ce soit qui ne pourrait aussi bien être expliqué sans son aide ;
>
> (iii) une hypothèse *tout à fait* inutilisable pour expliquer notre connaissance du monde réel, puisque les propositions auxquelles elle conduit ne devraient jamais être appliquées aux relations du monde réel qu'après que leur validité objective ait été expérimentalement testée et reconnue [Ewald, 1996, 701, 716 et 726]

Pour Helmholtz, Kant a irréprochablement identifié la nature de l'espace lorsqu'il a décidé d'en faire la forme dans laquelle s'unifie, pour nous, le divers de toute sensation. Mais « il n'a pas été assez critique dans sa critique » [Ewald, 1996, 727], lorsqu'il a soutenu que sa structure pouvait être exhaustivement et immédiatement appréhendée par une prétendue « intuition pure », car la transition de la sensation à la représentation perceptive proprement dite n'est pas un acte indivisible, mais au contraire le résultat d'un processus cognitif complexe qui est, quoique inconscient, accessible à une analyse scientifique. La philosophie critique doit donc être relayée par la psycho-physiologie de la perception, à qui seule il incombe d'évaluer la correction des axiomes qui décrivent cette structure :

> Kant lui-même, qui, pour nous qui venons après lui, a tiré la conclusion finale des premiers efforts de la théorie de la connaissance, regroupait encore en un seul acte, qu'il nommait *intuition*, toutes les étapes intermédiaires (*Zwischenglieder*) entre la sensation et la formation de la représentation de l'objet percu dans le temps et l'espace. Chez lui et ses successeurs, cette intuition joue un rôle, comme si elle n'était tout entière que l'effet d'un mécanisme naturel incapable d'être l'objet d'une investigation philosophique et psychologique, à l'exception de son résultat final qui est précisément une représentation, et qui est donc soumis à des conditions formelles de représentation identifiées par Kant. [Helmholtz, 1892, 338].
>
> Lorsque Kant affirmait que des relations spatiales contredisant les axiomes d'Euclide ne pourraient jamais être représentées en aucune façon, il était influencé par l'état des mathématiques et de la physiologie

> sensorielle de son temps, exactement comme il l'était dans toute sa conception de l'intuition en général comme processus psychique simple, incapable de plus ample analyse. [Ewald, 701].

Un transcendantaliste qui veut se défaire de la notion kantienne d'intuition pure devrait d'abord trouver la faille dans le raisonnement par lequel Kant montre qu'une intuition de ce genre est nécessairement à la source de notre connaissance de l'espace conçu comme forme *a priori* de l'expérience possible. Helmholtz était visiblement convaincu d'avoir résolu le problème. Kant, à vrai dire, n'offre pas d'argumentation très explicite pour établir que l'intuition pure est la faculté dont relève la connaissance de l'espace. Voyant comme sa contribution majeure d'avoir montré que ce dont il y a *connaissance a priori* concerne nécessairement ce qui *est a priori* en nous, il accorde peu de soin à établir l'implication converse. L'*apriorité* de la géométrie, dont il n'imagine visiblement pas que l'on puisse douter, lui paraît découler presque immédiatement de l' « idéalité transcendantale » de l'espace : s'il est *a priori* en nous comme l'une des conditions de l'expérience possible, l'espace ne peut être connu qu'*a priori*. L'argument, si l'on veut, est par l'absurde : rien de « transcendantal » ne saurait être l'objet d'une évidence empirique, car on ne saurait faire l'expérience de ce qui est précisément l'une des conditions de l'expérience. Strawson, qui y voit d'ailleurs l'une des « aberrations » auxquelles conduit inévitablement une stratégie d'explication comme celle de Kant, résume la chose de la façon suivante :

> La théorie de la synthèse, comme tout essai de psychologie transcendantale, est exposée à l'objection *ad hominem* selon laquelle nous ne pouvons aucunement prétendre à la connaissance empirique de sa vérité ; car ce serait prétendre avoir une connaissance empirique du fait qu'est réalisé ce qui est tenu pour la condition préalable de la connaissance empirique. (...) La croyance dans la réalisation du processus de synthèse conçu comme condition préalable de l'expérience (...) ne peut, par hypothèse, être soutenue par l'expérience. [Strawson, 1966, 32]

La remarque de Strawson a l'apparence du bon sens : il serait circulaire que nous puissions faire l'expérience d'un élément qui est l'une des conditions de l'expérience. Regardée de plus près, elle s'avère néanmoins décevante. Kant ne considère nullement l'espace comme une condition « logique » de l'expérience, c'est-à-dire comme l'une des conditions (éventuellement hors d'atteinte) *sans lesquelles* l'expérience n'aurait pas lieu, mais comme l'une de ses conditions « transcendantales », c'est-à-dire l'une des conditions *dans lesquelles* elle a lieu (sachant qu'elle a effectivement lieu). Le fait qu'il y a bel et bien expérience est tenu pour acquis, et les arguments transcendantaux établissent simplement, de certaines propriétés dont l'expérience nous montre qu'elles sont effectivement réalisées, qu'elles font partie des conditions générales dans lesquelles l'expérience elle-même se réalise. L'expérience, à elle seule, nous dit seulement ce qui est, et la démarche transcendantale nous enseigne, de certaines des propriétés vérifiées par l'expérience, qu'elles seraient également vérifiées par toute expérience possible. Contrairement à ce qu'avance Strawson, toute l'explication kantienne de l'applicabilité des mathématiques montre qu'il doit pouvoir y avoir vérification empirique de ce dont la démarche transcendantale nous montre la nécessité : seule la nécessité elle-même n'est pas empiriquement vérifiable. De ce que la satisfaction de A est une condition de toute expérience possible, ne découle nullement que je ne peux faire l'expérience de A, mais, bien au contraire, que je ne peux pas *ne pas* faire l'expérience de A. En revanche, de ce que je ne peux manquer de reconnaître A comme vrai, ne découle nullement que je puisse reconnaître que A ne peut manquer d'être vrai, ou qu'il est une condition de toute expérience possible. C'est à ce point, mais à ce point seulement, qu'intervient l'obligation de relayer l'enseignement de l'expérience par un argument transcendantal :

> S'il se trouve une proposition qui est pensée en même temps que sa nécessité (*der zugleich mit seiner Notwendigkeit gedacht wird*), alors c'est un jugement *a priori* [Kant 1781, B3, GF 58][2]

Il n'est donc nullement absurde de disjoindre, comme le fait Helmholtz, deux sens de l'*a priori* qui se trouvent intriqués dans le maquis des écrits de Kant : d'une part le sens dans lequel l'expression qualifie la modalité d'un jugement ou d'une proposition (comme lorsqu'il est dit que les jugements mathématiques sont *a priori*), d'autre part le sens dans lequel l'expression est utilisée pour caractériser la nature de l'espace, du temps, ou de certaines « facultés » qui se trouvent en nous avant même toute rencontre d'un objet dans l'expérience. Il serait évidemment absurde que nous acquérions par l'expérience une capacité cognitive de ce dernier type – par exemple, l'intuition *a priori* de l'espace -, puisqu'il faut déjà en être doté pour faire l'expérience de quoi que ce soit. En revanche, il n'y a pas d'obstacle à ce que certaines propositions qui décrivent les propriétés de telles capacités soient connues au travers de l'expérience, c'est-à-dire *a posteriori*. C'est ainsi que Helmholtz conçoit les axiomes de la géométrie :

---

[2] On notera que J. Barni et P. Archambault introduisent ici *le* contresens crucial sur toute cette question, lorsqu'ils traduisent : « S'il se trouve une proposition *qu'on ne puisse concevoir que* [souligné par moi, J.D.] comme nécessaire, c'est un jugement *a priori*. »

> Je me suis efforcé de montrer que les axiomes de la géométrie ne sont pas des propositions données *a priori*, mais plutôt des propositions qui doivent être confirmées ou réfutées par l'expérience. Je souligne ici, à nouveau, que ceci n'élimine pas la conception de l'espace par Kant comme forme transcendantale de l'intuition ; à mes yeux, ceci exclut seulement une forme particulière de cette conception qui est injustifiée, bien qu'il s'agisse d'une forme qui est devenue très appropriée pour les fins métaphysiques de ses successeurs [Ewald, 728].

Helmholtz persiste donc à défendre avec Kant l'idée que la géométrie est la science d'une structure qui est *a priori* au second des deux sens que nous avons distingués : les axiomes géométriques expriment les propriétés fondamentales de notre constitution cognitive , laquelle n'est pas acquise au contact de l'expérience. Cette constitution particulière (*unsere subjektive Beschaffenheit*) demeure une source de nécessité, puisque nous ne pouvons pas nous représenter les choses autrement que par son biais. Mais les propositions qui la décrivent ne sont plus *a priori* au premier sens, et c'est la psycho-physiologie de la perception qui doit, ultimement, montrer en quoi les axiomes de la géométrie sont corrects, en examinant la manière spécifique dont notre appareil sensoriel réagit à l'action des objets extérieurs sur nos terminaisons nerveuses, Par cette « physiologisation » de *l'a priori*, Helmholtz parvient à écarter toute intuition transcendantale *immodeste*, mais c'est en repoussant l'intuition transcendantale *tout court* : les principes de la géométrie ne sont plus des principes *a priori*. D'une certaine manière, cette « empirisation » de la géométrie est une conséquence lointaine de la décision de Kant de donner une explication commune de notre capacité de construire la science géométrique et de notre aptitude à avoir des expériences visuelles. Les paramètres de la vision humaine, qui apparaissent comme une nécessité inexorable pour le sujet qui perçoit, ont pour le physiologiste la contingence caractéristique des *faits*. Mais, une fois répudiée, en ce domaine, l'idée kantienne que les « faits » relatifs à notre constitution cognitive ont ceci de particulier qu'ils ne peuvent ni ne doivent être justifiés ou attestés par l'expérience empirique à la manière dont le sont les faits « extérieurs »[3] , il n'y a pas de raison de s'arrêter en chemin, et de ne pas étendre aux principes de la géométrie la thèse selon laquelle il ne saurait y avoir d'autre mode de justification qu'empirique ou expérimental.

Pour autant, l'empirisme de Helmholtz ne signifie pas que soit accordée à l'expérience la possibilité de trancher complètement entre géométries rivales. Helmholtz adopte la « démarche transcendantale » sous une forme assez proche

---

3 cf. la critique de la « *physiologie* de l'entendement humain (doctrine de l'illustre *Locke*) » (Kant, 1781, A ix, GF 30).

de ce que nous appellerions aujourd'hui « analyse fonctionnelle » dans les sciences cognitives, en cherchant à *inférer* les propriétés que doit posséder tel ou tel système sensoriel pour être capable d'effectuer les performances que nous le voyons réaliser. Généralement, cette analyse conduit à mettre à jour des contraintes qui peuvent être satisfaites de plusieurs façons, entre lesquelles l'expérience doit décider, sans toujours en être capable. Le seul aspect sous lequel, à cet égard, l'espace soit totalement déterminable, concerne sa structure de multiplicité continue dotée d'une courbure constante. Mais diverses caractérisations de cette courbure constante sont compatibles avec la série entière des impressions visuelles, et, plutôt que d'accorder à l'intuition empirique elle-même une capacité de discernement exorbitante qu'elle ne manifeste si évidemment pas, c'est le principe kantien de la totale détermination de notre structure cognitive que Helmholtz préfère mettre en cause dans de tels cas. Autrement dit, le remplacement de l'intuition transcendantale par l'intuition empirique n'a nullement pour effet l'identification de la géométrie euclidienne comme la seule géométrie « correcte ».

2.1.2.3. Conventionnalisme : le renoncement à l'intuition.

Sans être excessivement sévère, le lecteur de la *Critique de la raison pure* peut estimer que la « déduction transcendantale » de la géométrie euclidienne [4] a quelque chose d'*outré*, et que la prétention de Kant à donner une justification de la totalité de ses axiomes comme expressifs des conditions de possibilité de l'expérience n'est tout simplement pas fondée. La question de la sélection des axiomes géométriques « corrects » n'est entièrement résolue ni par le biais d'une intuition transcendantale ayant avec l'intuition empirique les rapports que conçoit Kant, ni par une intuition transcendantale totalement dénuée de contrepartie empirique, ni par l'intuition empirique elle-même.

En un certain sens, le conventionnalisme prend acte de ces échecs successifs, et il impose au point de vue « transcendantal » la mutilation minimale requise pour les surmonter. Retenant l'idée que nous prescrivons leur forme aux objets de l'expérience, ou plus exactement à leur description

[4] En dépit d'un contresens largement disséminé, l'Esthétique Transcendantale – et pas seulement l'Analytique Transcendantale – contient une « déduction transcendantale » :

> Nous avons suivi plus haut jusqu'à leurs sources, au moyen d'une déduction transcendantale, les concepts de l'espace et du temps [Kant, 1781, A 87 / B 119, GF 147].

mathématique, le conventionnalisme soutient que cette forme imposée ne nous est pas *à nous-mêmes* imposée. Nous devons bien, comme le pensait Kant, prescrire en premier lieu une structure géométrique à la nature, avant de songer à formuler des lois scientifiques à partir de l'expérience que nous en faisons. Mais cette empreinte que nous posons sur les choses n'est pas une forme qui se trouverait en nous-même totalement déterminée, et qu'il nous incomberait seulement de discerner dans notre propre constitution cognitive. Nous l'imposons aux choses en un sens littéral, c'est-à-dire non pas comme un élément qui serait déjà en nous comme une « nature » éventuellement opaque et qui ne nous laisserait aucun choix, mais comme un élément qui émane de nous avec la spontanéité et la transparence d'une décision [Dubucs, 1999]. Ceci, bien évidemment, assure sans aucune extravagance épistémologique l'accessibilité cognitive de l'*a priori*, puisqu'il est sans exemple que nous décidions de quelque chose sans en être immédiatement avertis. Mais c'est dire que la philosophie transcendantale ne survit ici qu'en renonçant à faire jouer à l'intuition toute espèce de rôle substantiel en mathématiques, ce qui est précisément l'abandon contre lequel Beth entend réagir :

> [Je] cherche à montrer qu'un appel à l'évidence intuitive pour fonder les mathématiques n'est ni rejetable (comme il est prouvé par les recherches des intuitionnistes et des métamathématiciens) ni évitable (comme il suit d'une analyse critique de la méthode syntactique de Carnap). Cet appel à l'intuition nécessite (à cause du caractère parfois trompeur de l'intuition) un fondement subjectif des mathématiques à côté du fondement objectif [Beth, 1937, 1]

2.2. L'intuition dans les preuves.

L'intuition mathématique apparaît dans la *Critique de la raison pure* à deux reprises et à deux titres. La première fois, dans *l'Esthétique Transcendantale*, lorsqu'elle est dite permettre l'appréhension des principes euclidiens[5] comme expressifs des conditions de possibilité de l'expérience ; la seconde fois, dans la *Méthodologie Transcendantale*, pour distinguer l'analyse conceptuelle, propre à la méthode des philosophes, de la construction des concepts dans l'intuition,

---

[5] cf. déjà dans la « dissertation de 1770 » :

> Il est aisé de saisir cette intuition pure dans les axiomes de la géométrie et dans n'importe quelle construction mentale de postulats ou même de problèmes. Il n'y a pas plus de trois dimensions dans l'espace ; entre deux points, il n'y a qu'une ligne droite ; par un point dans un plan, on peut mener un cercle avec une droite donnée, etc [Kant, 1770, 65].

propre aux démonstrations mathématiques et explicative de leur succès. Dans le premier cas, l'intuition est la source qui nous permet d'accéder à certaines vérités primitives qui ne peuvent être reconnues comme elles doivent l'être, c'est-à-dire dans leur apodicticité, qu'en réfléchissant à la structure de notre esprit. Dans le second cas, elle apparaît dans les démonstrations mathématiques pour rendre raison de leur caractère « synthétique », c'est-à-dire du fait (allégué par Kant) que les prémisses n'y impliquent la conclusion que par le truchement de certaines constructions.

Beth estime qu'il y a là une ambiguïté fondamentale de la *Critique*, et que nous devrions séparer, beaucoup plus complètement que ne le fait Kant, le rôle joué par l'intuition dans les raisonnements géométriques et le rôle qu'elle joue dans la connaissance que nous pouvons avoir des principes à partir desquels ces raisonnements opèrent. C'est un point sur lequel l'unanimité est à peu près réunie, tant chez les critiques de Kant que chez ses défenseurs. Chacun est persuadé que la *Critique*, charitablement interprétée selon les uns, convenablement comprise selon les autres, peut sortir indemne des objections que l'existence des géométries non-euclidiennes est souvent supposée constituer pour elle. En revanche, personne n'est enclin à admettre littéralement ce que Kant affirme au sujet du recours nécessaire à l'intuition dans les démonstrations, et l'on se déclare prêt, selon les cas, à refuser sa théorie ou à juger qu'elle est en attente d'une « interprétation ».

Un bon exemple de la première attitude est donné par Russell dans les *Principles of Mathematics* :

> [Kant soutient que] le raisonnement mathématique n'est pas strictement formel, mais utilise toujours des intuitions, c'est-à-dire la connaissance *a priori* de l'espace et du temps. Grâce au progrès de la logique symbolique, en particulier telle qu'elle est traitée par le Professeur Peano, cette partie de la philosophie kantienne est maintenant justiciable d'une réfutation finale et irrévocable. (...) Mais en admettant que les raisonnements de la géométrie soient purement formels, un kantien peut encore maintenir qu'une intuition *a priori* lui assure que la définition de l'espace euclidien tri-dimensionnel, seule parmi les définitions d'espaces possibles, est la définition d'un existant, ou en tout cas d'une entité ayant quelque relation à des existants dont les autres espaces sont dépourvus. Cette opinion est, à parler strictement, non pertinente pour la philosophie des mathématiques, puisque les mathématiques sont complètement indifférentes à la question de savoir si ces entités existent. Kant pensait que le raisonnement effectif des mathématiques était différent de celui de la logique ; la correction que je suggère enlève cette opinion, et maintient purement une nouvelle proposition primitive, à

> l'effet que l'espace euclidien est celui du monde actuel. Donc, bien que je ne croie pas en une intuition immédiate garantissant une telle proposition primitive, je n'entreprendrai pas de réfuter cette opinion. C'est assez, pour mon propos, d'avoir montré qu'aucune intuition de ce genre n'est pertinente pour une proposition strictement mathématique [Russell, 1903, 3 et 458].

Dans l'autre camp, Leonard Nelson, pour qui le rôle de l'intuition se limite à l'identification des « bons » axiomes – et qui avance des arguments sur lesquels je reviendrai pour maintenir en ce domaine le rôle que fait jouer Kant à l'intuition -, concède que

> une fois les axiomes présupposés, tous les théorèmes s'ensuivent, sans rien de plus, en vertu de la pure forme logique du raisonnement [Nelson, 1906, 386]

L'image qui émerge de ces propos unanimes est la suivante. En mathématiques, le moment du contact avec la « réalité » - quoi qu'on entende par là, et même si l'on décide qu'il n'y a rien de proprement *mathématique* à entendre par là – est exclusivement celui de la mise au point et de la formulation des axiomes. Les axiomes contiennent sous forme comprimée la totalité de ce qui peut être démontré à partir d'eux à propos du sujet dont on traite : les preuves qui en émanent n'ont à cet égard qu'un simple rôle de de « décompactage » et de déploiement, et elles n'ajoutent aucun contenu mathématique supplémentaire à celui des axiomes. Naturellement, le mathématicien qui rédige une preuve peut traverser divers épisodes mentaux lors de cette activité, et peut, à cette occasion, associer telle ou telle représentation privée « intuitive » à l'usage qu'il fait des signes. Mais le *résultat* de cette activité, la preuve rendue publique, ne doit pas dépendre de données implicites relatives à la signification des symboles. Si une preuve comporte une transition entre énoncés qui ne résulte pas de l'application d'une règle formelle explicitement admise, mais seulement d'une inférence qui est effectuée en vertu de la signification « attendue » des termes qui figurent dans les énoncés, elle doit être considérée comme lacunaire et fautive. L'inférence incriminée doit être décomposée en étapes élémentaires, de telle sorte que l'hypothèse tacitement introduite apparaisse explicitement, et elle doit alors être expressément reversée dans l'ensemble des axiomes. En somme, une fois les axiomes écrits, la « réalité » ne doit plus être consultée. L'intuition, qui est un guide éventuel dans la mise au point de la preuve, doit être, dans la preuve achevée, éliminée au profit de règles logiques aveugles. Telle est, en tout cas, la *Vulgate*.

Or, Kant, nonobstant ce qu'affirme Nelson, dit autre chose, et, plus étonnant, Beth affirme, contre tous, qu'il a raison sur ce point [6]

2.2.1. L'interprétation de Beth.

Contrairement à ce qu'avancent la majorité des défenseurs de Kant, ce dernier a bel et bien défendu l'idée que l'intuition mathématique n'était pas seulement requise pour déterminer les axiomes « corrects », mais qu'elle infiltrait aussi, de manière à la fois massive et légitime, les démonstrations elles-mêmes. Le texte de référence est le suivant :

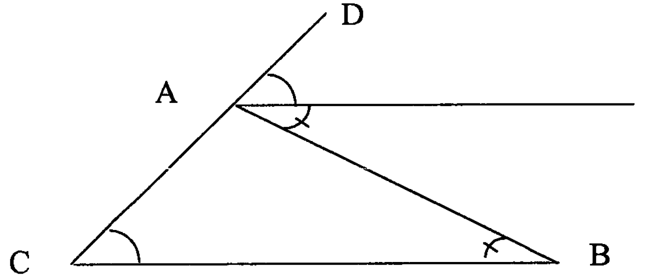
> Alors que la philosophie s'en tient simplement à des concepts généraux, les mathématiques ne peuvent rien faire avec les simples concepts, et elles se hâtent de recourir à l'intuition, où elles considèrent le concept *in concreto*, non pas cependant d'une manière empirique, mais dans une intuition qu'elles ont représentée *a priori*, c'est-à-dire construite, et dans laquelle ce qui résulte des conditions générales de la construction doit s'appliquer aussi d'une manière générale à l'objet du concept construit.
>
> Que l'on donne à un philosophe le concept d'un triangle, et qu'on le laisse chercher à sa manière le rapport de la somme de ses angles à l'angle droit. Il ne possède rien d'autre que le concept d'une figure qui est enclose dans trois lignes droites, et avec elle le concept d'un nombre égal d'angles. Il peut bien réfléchir (*nachdenken*) à ce concept aussi longtemps qu'il le voudra, il n'en titrera rien de neuf. Il peut analyser et clarifier le concept de ligne droite, ou celui d'angle, ou celui de nombre trois, mais non pas parvenir à d'autres propriétés, qui ne soient pas déjà contenues dans ces concepts. Que le géomètre s'empare de cette question. Il commence aussitôt par construire un triangle [ABC].

---

[6] S'agissant de l'autre question traditionnellement discutée, celle de savoir ce que les géométries non-euclidiennes laissent éventuellement intact dans la *Critique*, Beth considère visiblement qu'elle ne mérite pas autant d'attention, et il s'exprime à ce sujet dans des termes non dénués d'une certaine désinvolture :

> On a l'habitude de se représenter la théorie kantienne de l'espace comme si ses fondements avaient soudain été mis à bas par la découverte de la géométrie non-euclidienne. Ce n'est pas le cas. (...) On peut adhérer à la théorie kantienne de l'espace en dépit de la découverte de la géométrie non-euclidienne ; formellement, ce point de vue est irréfutable – exactement aussi irréfutable que celui de l'homme qui refusait de croire à la découverte de l'Amérique parce qu'il n'y avait pas été lui-même, mais exactement aussi arbitraire [Beth, 1965, 6].

> Comme il sait que la somme de deux angles droits vaut exactement autant que la somme de deux angles adjacents qui peuvent être tracés à partir d'un point sur une ligne droite, il prolonge un côté de son triangle [CA] et obtient ainsi deux angles adjacents [<CAB et <BAD], qui ensemble sont égaux à deux droits. Il partage alors l'angle externe [BAD] en traçant une ligne [AE] parallèle au côté opposé du triangle, et voit (*sieht*) qu'il en résulte un angle externe [<BAE] qui est égal à l'angle interne [<ABC], etc [l'angle externe <DAE est aussi égal à l'angle interne restant, soit <ACB]. Il arrive ainsi, par une chaîne d'inférences toujours guidée (*geleitet*) par l'intuition, à une solution parfaitement claire (*einleuchtend*) et en même temps générale de la question posée [Kant, 1781, A 715 / B 744 – A 717 / B 745 , GF 549-550].



2.2.1.1. La première difficulté soulevée par le recours à cette « construction dans l'intuition » est le problème classique de « Locke-Berkeley » [Beth, 1956-7 et 1957, 7 sq]. Le théorème à démontrer concerne tout triangle, mais sa correction ne semble établie que pour le triangle particulier qui a été construit : de quel droit affirmons nous que le résultat vaudrait également pour tout autre ? D'où tirons-nous la garantie que ne se produira pas, avec ce théorème, le genre de déception familière que Hume décrit à propos du « théorème » selon lequel trois angles d'un triangle sont égaux entre eux ?

> Une fois que l'esprit a produit une idée individuelle, sur laquelle nous raisonnons, la coutume conjointe, éveillée par le mot abstrait ou général, suggère promptement une autre idée individuelle, s'il se trouve que nous formions un raisonnement qui ne s'accorde pas avec celle-ci. Ainsi, si

> nous mentionnons le mot triangle et formons l'idée d'un triangle équilatéral particulier pour lui correspondre, et qu'ensuite nous affirmons que *les trois angles d'un triangle sont égaux entre eux*, les autres idées individuelles de triangles scalènes et de triangles isocèles, que nous négligions d'abord, s'assemblent aussitôt en nous et nous font voir la fausseté de cette proposition, en dépit de sa vérité à l'égard de l'idée que nous avions d'abord formée [Hume, 1739-1740, 87].

Pour que la validité du théorème soit générale, ne faudrait-il pas, plutôt qu'à un triangle particulier, se rapporter à ce « triangle général », dont Locke souligne le caractère irreprésentable ?

> L'idée générale d'un triangle, quoiqu'elle ne soit pas la plus abstraite, la plus étendue et la plus malaisée à former (...) exige quelque peine pour se la représenter ; car il ne doit être ni oblique, ni rectangle, ni équilatère, ni isocèle, ni scalène, mais tout cela à la fois, et nul de ces triangles en particulier [Locke, 1689, IV, VII, § 9].

Kant répond négativement : c'est bien à la figure singulière que l'on doit se rapporter, mais par une intuition non empirique :

> La construction d'un concept demande dont une intuition non empirique, qui, par conséquent, comme intuition, soit un objet singulier (*einzel*), mais qui n'en exprime pas moins, comme construction d'un concept (d'une représentation générale) une universalité qui s'applique à toutes les intuitions possibles qui tombent sous le même concept. (...) La figure particulière ici décrite est empirique, et pourtant elle sert à exprimer le concept sans dommage pour son universalité, parce que dans cette intuition empirique l'on ne songe qu'à l'acte de construction du concept, auquel beaucoup de déterminations, comme celles de la grandeur, des côtés et des angles sont tout à fait indifférentes, et qu'il est donc fait abstraction de ces différences qui ne changent pas le concept du triangle [Kant, 1781, A 713-714 / B741-742, GF 548].

En résumé, Kant pense résoudre le problème de Locke-Berkeley en affirmant que, dans un cas de ce genre, l'intuition se rapporte à un objet singulier (ce qui rend cet objet *représentable*), mais que cette référence à un objet singulier est exempte des « sophismes » auxquels elle donne lieu d'ordinaire, puisqu'il s'agit d'une intuition qui fait « abstraction » des différences qui tiennent à la singularité du triangle considéré (ce qui rend cet objet *générique*). Un lecteur peu charitable serait tenté d'affirmer que Kant, en introduisant une notion spécifique d'intuition géométrique capable d'effectuer à la fois ces deux opérations antinomiques (viser un singulier, ne voir en lui que le général) n'a pas fait beaucoup plus que *baptiser* le problème. Telle n'est pas l'opinion de

Beth, pour qui l'idée que le triangle construit dans l' « intuition pure » possède bien les propriétés du triangle « général » évoqué par Locke possède un contenu effectif que la logique est capable d'assigner. Beth soutient qu'il est possible de rendre justice à Kant sur ce point, et s'oppose donc tout à fait aux conclusions anti-kantiennes de Couturat, selon qui

> l'assertion répétée de Kant, que la mathématique considère toujours le général dans le particulier, et même dans le signulier est le concret, (...) n'est pas justifiée. Même dans la Géométrie synthétique, à laquelle elle paraît s'appliquer, si l'on trace une figure pour démontrer un théorème, on ne raisonne jamais sur les propriétés particulières de la figure, mais seulement sur ses propriétés générales, qui lui sont communes avec toutes les figures du même genre, visées par le théorème [Couturat, 1905, 287].

La solution de Beth consiste à faire remarquer qu'une telle démarche, consistant à se rapporter à un objet singulier pour en tirer une conclusion générale, est exactement celle qui est à l'œuvre dans la logique des prédicats sous le nom de « règle de généralisation » ou de « $\forall$-introduction ». Si nous désignons par «T » le prédicat « être un triangle », et par « Σ » la propriété de former un polygone possédant une somme d'angles internes de 180°, la preuve analysée par Kant consiste à obtenir le théorème

$$(*) \qquad \forall x \forall y \forall z\, [Txyz \supset \Sigma xyz\,]$$

par application de la règle de généralisation à partir de

$$(**) \qquad Tabc \supset \Sigma abc.$$

Les deux lectures de Kant auxquelles Beth cherche à s'opposer sont les suivantes :

(i) Nous nous rapportons intuitivement à un triangle empirique à propos duquel nous constatons *de visu* la correction du théorème dans ce cas particulier, et la « preuve » consiste ensuite à procéder à une généralisation éventuellement fautive.

Cette interprétation, qui réduit l'intuition *pure* à l'intuition empirique, tombe immédiatement sous l'objection de Locke-Berkeley.

(ii) Nous utilisons notre saisie intellectuelle du concept de triangle pour construire une peinture mentale d'un triangle « générique » et nous constatons la correction du théorème (*) en inspectant cette peinture mentale avec quelque chose comme un « œil de l'esprit ».

Cette interprétation, présumée supérieure à la précédente en ce qu'elle rendrait compte du caractère *a priori* de l'intuition mathématique, a le défaut de concevoir l'intuition comme un *substitut* à la preuve.

Ces deux interprétations diamétralement opposées encourent le même reproche : elles font de l'intuition kantienne l'intuition *de dicto* de la vérité d'une proposition (particulière ou universelle selon le cas). Beth se propose de leur substituer une interprétation dans laquelle l'intuition géométrique serait plutôt l'intuition *de re* d'un objet paradigmatique à propos duquel une preuve *bona fide* est conduite, et qui, à ce titre, pourrait être reproduite à l'identique à propos d'un autre objet. Ce que Beth entend préserver de Kant n'est pas la thèse selon laquelle nous disposerions en mathématiques d'une faculté d'intuition nous permettant de déterminer que quelque chose est le cas, mais une thèse plus modeste, selon laquelle nous utilisons *dans les preuves* une intuition d'objets (et non d'une structure propositionnelle). En somme, l'intuition kantienne serait un simple procédé d'*instanciation*, doté d'un statut *logique*, mais en lui-même dénué de *contenu mathématique* : le fait d'instancier le concept de triangle, loin de nous fournir, par contemplation, une connaissance de ses propriétés, est un moment dans la démonstration logiquement sans lacune que nous menons à son propos.

2.2.1.2. L'intérêt de l'interprétation de Beth tient pour l'essentiel à sa capacité à rendre compte de la dimension « épistémique » de la distinction kantienne entre « analytique » et « synthétique ». On sait que cette distinction est appréhendée par Kant sous deux formes distinctes :

(i) En termes « logiques » : un jugement est tenu pour analytique si sa négation n'est pas contradictoire

(ii) En termes « psychologisants » : un jugement qui attribue un prédicat à un sujet est tenu pour analytique si le prédicat est plus ou moins confusément pensé (*gedacht*) « avec » le sujet, et si la vérité de ce jugement est donc rendue manifeste par une simple analyse dissipant cette confusion.

Oublions la littéralité de cette seconde « définition » - qui fait visiblement appel à une structure sujet/prédicat trop étroite pour pouvoir prétendre couvrir toute la variété des formes de jugement -, et appliquons-la au cas considéré. Le théorème (*) peut être tenu pour synthétique au sens (ii), parce qu'une simple analyse (*Zergliederung*) du concept T de triangularité ne suffit visiblement pas pour aboutir au concept Σ : la propriété d'avoir sa somme d'angles internes égales à 180° ne peut être raisonnablement considérée comme « pensée » en même temps que la propriété de triangularité. La contemplation du concept de triangle est manifestement insuffisante pour en venir au théorème, et il ne paraît pas absurde de qualifier d' « intuition » ce qui manque, sur le plan épistémique, pour aboutir au théorème en question.

Beth est soucieux de rendre compte de cette dimension « synthétique » de la preuve mathématique. La tradition russellienne à laquelle il s'oppose estime qu'il s'agit là d'un point purement psychologique qui peut – et doit – être négligé. Cette tradition insiste sur le fait que les preuves doivent être « logiques », au sens où l'on ne saurait qualifier de preuve une suite d'inférences dans laquelle la conclusion finale n'est pas une conséquence logique des prémisses de départ. Beth, qui est évidemment d'accord sur ce point avec Russell, soutient néanmoins que cette exigence (une preuve doit être analytique au sens (i)) n'est pas incompatible avec la mise en évidence d'une composante synthétique (au sens (ii)). Il s'agit d'expliquer ce qui *nous* manque, lorsque nous avons les prémisses, pour *reconnaître* que la conclusion en découle, étant bien entendu que ce « manque » ne saurait être ce qui manque *aux prémisses* pour entraîner logiquement la conclusion. Que nous nous intéressions ou non à la question, chaque fois que le concept de triangle est réalisé, le concept Σ l'est aussi, et ce que nous devons ajouter au concept de triangle pour parvenir à *reconnaître qu'il en va bien ainsi* n'est donc pas quelque chose qui devrait lui être ajouté *pour qu'il en aille ainsi*. Beth estime que c'est cette adjonction au concept que Kant avait en vue dans la *Methodenlehre* lorsqu'il parlait d'intuition, et il entreprend de montrer que Kant était, sur ce point, parfaitement dans son bon droit.

En somme, l'interprétation brillante et hétérodoxe de Beth consiste à rendre justice à l'aspect de la doctrine kantienne de l'intuition mathématique qui est précisément le plus controversé. Beth montre que l'intuition entendue en ce sens est à la fois épistémiquement obligée et mathématiquement non substantielle. N'introduisant aucune hypothèse mathématique tacite, elle est parfaitement compatible avec la logicité de la preuve. C'est dire que la démarche logique elle-même est également, en ce sens-là, synthétique.

2.2.2. Beth : les limites de l'interprétation. Il n'est à peine nécessaire d'insister, après J. Hintikka, sur ce qu'une interprétation comme celle de Beth peut avoir d'instructif pour surmonter l'un des sophismes implicites dans une certaine conception de la logique et des mathématiques florissante dans les années 1920-1930 : 1°) Les propositions mathématiques ne disent rien sur le monde, et n'excluent donc aucune possibilité logique 2°) La possession d'une information équivaut à la mise à l'écart de certaines possibilités logiques 3°) Donc aucune information n'est donc requise pour reconnaître une proposition mathématique comme correcte. Le présupposé – ou le préjugé – sous-jacent, à savoir qu'il ne saurait y avoir d'ignorance que du contingent, ou, de manière équivalente, qu'il ne saurait y avoir d'information que factuelle, est trop visiblement absurde pour qu'il soit besoin de refaire ce procès-là. En revanche, je voudrais brièvement montrer que la conception de Beth – et, encore plus, celle de Hintikka, qui la radicalise – ne sauraient à aucun titre être tenus pour une interprétation correcte de la doctrine kantienne de l'intuition, et suggérer pour finir que c'est probablement à la lecture impitoyable de Russell que nous devrions nous en remettre sur ce point.

2.2.2.1. Beth, on l'a dit, cherche une caractérisation de l'intuition mathématique qui satisfasse le rôle fonctionnel que lui attribue Kant – être ce qui manque au possesseur d'un concept pour être en mesure de reconnaître la correction d'un théorème dans lequel ce concept est en jeu -, tout en évitant que cette caractérisation n'hypothèque la logicité des preuves. La solution à laquelle il parvient en définissant l'intuition par l'*instanciation* « pure et simple » du concept n'est certainement pas la seule possible. D'autres solutions, qui élargissent la première, sont envisageables. Hintikka ne s'y est pas trompé, qui propose de voir également une intuition dans le procédé logique familier par lequel nous introduisons des objets (des « constantes d'individus ») *au-delà* de ce qui serait strictement nécessaire pour instancier les variables contenues dans la formule à traiter. L'exemple kantien lui-même fournit une claire illustration de cette démarche, puisque le théorème sur les angles intérieurs des triangles y est obtenu non seulement par la construction, purement « instanciative », d'un triangle particulier ABC, mais également par la construction d'un objet auxiliaire, qui n'instancie à proprement parler aucun des concepts mentionnés dans l'énoncé, à savoir la droite issue de A et parallèle à BC. Le tracé de cette droite joue visiblement le rôle « fonctionnel » d'une intuition. Comme le remarquait déjà Aristote, seule cette construction *actualise* l'évidence potentielle du théorème :

> C'est encore l'acte qui fait apparaître les propositions géométriques, car c'est par une division que nous les découvrons. Si les figures étaient données à l'état de division, les propositions s'apercevraient tout de suite ; mais, en fait, elles ne sont présentes qu'en puissance. Pourquoi la somme des trois angles d'un triangle est-elle égale à deux angles droits ? Parce que les angles formés autour d'un seul point sont égaux à deux droits. Si donc on avait tiré la ligne parallèle au côté du triangle, la seule vue de cette figure aurait rendu la proposition immédiatement évidente [Métaphysique, Θ,9, 1051a 20-26].

Dans un cas de ce genre, l'interprétation de Beth-Hintikka nous conduit donc, assez étrangement, à qualifier d' « intuition » non pas du tout ce qu'Aristote appelle ici la « vue de la figure » (car il s'agirait là d'une intuition au moins partiellement *de dicto*, ce que l'interprétation en question récuse), mais le geste même de construction de la droite auxiliaire lui-même. Il est clair que des prodiges de virtuosité exégétique sont nécessaires pour rendre plausible l'idée que c'est là un sens que Kant aurait pu avoir en vue.

Pour résumer les choses sur ce point, il ne fait aucun doute que Beth et Hintikka parviennent de manière convaincante à indiquer un sens dans lequel les mathématiques et la logique quantifiée elle-même peuvent être considérées comme « épistémiquement synthétiques » : la « méthode des arbres », en logique contemporaine, fournit probablement une excellente explication de ce que l'on peut avoir à l'esprit lorsque l'on parle de la difficulté des preuves mathématiques. Mais on ne voit pas que cette idée doive *par surcroît* être présentée comme une explication fidèle de ce que Kant entendait par « intuition », comme s'il était nécessaire qu'une idée philosophique intéressante ait toujours été, en vertu d'une sorte de disposition hégélienne, anticipée d'une manière ou d'une autre par un philosophe de la « grande tradition ».

2.2.2.2. A vrai dire, une interprétation du genre de celle que Beth propose pour la doctrine kantienne de l'intuition est *radicalement* erronée, car elle se méprend tout à fait sur le *problème* que Kant essaie de résoudre dans la *Methodenlehre*: le problème en question n'est pas du tout, quoiqu'il y *ressemble*, le problème familier de « Locke-Berkeley ».

Le « problème de Locke-Berkeley » est une énigme « pré-critique ». C'est la question de savoir comment il est possible de discriminer rigoureusement entre *deux* types de propriétés d'un triangle empirique : ses propriétés « conceptuelles », entendons par là celles qu'il partage avec toute autre « exemplification » du concept de triangle (avoir trois angles, trois côtés, etc) et ses propriétés « accidentelles », celles qui font qu'il est tel triangle et pas tel autre. Il est demandé comment le géomètre peut procéder, alors même qu'il recourt à une figure empirique, pour être assuré que le théorème qu'il démontre vaudrait également *pour toute autre exemplification du concept de triangle.* Il s'agit donc de déterminer un procédé garantissant que les propriétés dont on démontre la satisfaction découlent *exclusivement* de la propriété « conceptuelle » de triangularité. En proposant de recourir à la méthode logique d'instanciation, Beth résout cette énigme, et il la résout impeccablement. Mais il est, ce faisant,*à côté* du problème de Kant, qui n'est pas celui là.

Le « problème de Kant » s'inscrit dans le système total de la philosophie transcendantale. C'est la question de discriminer non pas entre *deux*, mais *trois* types de propriétés d'un triangle empirique : ses propriétés empiriques (caractérisées de la même façon que précédemment), ses propriétés conceptuelles (celles qui sont nécessairement impliquées dans le concept de triangle, c'est-à-dire celles dont il serait *contradictoire* qu'un triangle soit dépourvu), *et*, entre les deux, ses propriétés « intuitionnelles », c'est-à-dire les propriétés que possède nécessairement toute réalisation du concept de triangle dont nous pourrions faire l'expérience. Dans la *Critique*, Kant insiste *ad nauseam* sur l'importance de cette dernière distinction entre les propriétés intuitionnelles et les propriétés conceptuelles : il ne serait pas, dit-il, *logiquement contradictoire* qu'un triangle fût dépourvu des propriétés qui lui sont « imposées » par la configuration particulière de notre constitution cognitive. La non-contradiction en question découle immédiatement de la *contingence* radicale de cette constitution cognitive : cette constitution eût-elle été différente que les propriétés intuitionnelles du triangle eussent été différentes, ses propriétés conceptuelles restant, quant à elles, inchangées. Or, Kant soutient que la géométrie a pour objectif de décrire systématiquement ces propriétés intuitionnelles, plus riches que les propriétés conceptuelles. C'est précisément en quoi, écrit-il, ses jugements ne sont pas « analytiques » : ils ne le sont ni dans l'acception « épistémique » du terme, ni dans son acception « logique ».

En mettant au point une explication de l'intuition mathématique qui confère aux preuves mathématiques une « synthéticité » épistémique laissant intacte leur analyticité logique, Beth répond fort adroitement au défi qui avait été posé par l'Académie Hollandaise, de montrer comment le recours à une « intuition » mathématique reste « compatible » avec la conception purement logique de la preuve. Mais une telle explication est radicalement anti-kantienne : Kant voyait les deux aspects, épistémique et logique, de l'analyticité comme à peine séparables : l'impossibilité épistémique d' « accéder » aux théorèmes géométriques par la simple analyse des concepts est une conséquence immédiate du fait que ces théorèmes *ne sont pas* des vérités conceptuelles. La construction des concepts dans l'intuition pure est donc *irréductible* à l'emploi de la technique logique d'instanciation : c'est seulement en construisant ces concepts de cette manière que le géomètre peut parvenir à réunir , aux propriétés « conceptuelles » des objets, leurs propriétés « intuitionnelles ». Contrairement à ce que Beth et Hintikka s'efforcent si laborieusement d'établir, les deux versants de la *Critique* sont inséparables. L'intuition pure qui est supposée nous donner, par « réflexion transcendantale », accès aux principes euclidiens qui régissent l'expérience possible, est *aussi* celle « dans laquelle » nous construisons nos concepts lors d'une preuve géométrique.

Un fait, tout de même, aurait dû alerter Beth sur ce point : le théorème de géométrie analysé par Kant dans la *Méthodologie*, et dont Beth reconstitue si méticuleusement la preuve « purement logique », est un théorème *spécifique* de la géométrie euclidienne, et il donc exclu que la démarche qui conduit de « X est un triangle » à « X a la propriété Σ » soit « purement logique ». Cette ablepsie, à laquelle je ne vois aucune explication, constitue peut-être « l'énigme de Beth ».

Références

Beth, Evert W.

1935 Rede en Aanschouwing in de Wiskunde, Groningen : Noordhoff, 1935.

1937 *L'évidence intuitive dans les mathématiques modernes*, Manuscrit d'une conférence donnée au Congrès Descartes à Paris en août 1937, item n° 628 dans l'inventaire des travaux de Beth (P.J.M. Velthuys-Bechthold ed.), Harlem, 1995.

1956-7 *Allgemeines Dreieck*, « Kant-Studien », vol. 48, 1956-1957, p. 361-380.

1957 *La crise de la raison et la logique*, Paris-Louvain, Gauthier-Villars & Nauwelaerts, 1957.

1959 *Foundations of Mathematics*, Amsterdam, North-Holland Publ., 1959.

1965 Mathematical Thought. An Introduction to the Philosophy of Mathematics, Dordrecht : D. Reidel Publ., 1965.

Bolzano, Bernard

1817 Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege, Prague : Gottlieb Hasse, 1817 (cité d'après la trad. anglaise de St. Russ dans William B. Ewald (ed.), 1996, p. 225-248).

1834 *Funktionenlehre*, Prague : Königliche Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften, 1930.

Couturat, Louis

1905 *Les principes des mathématiques* ; réimpr. Hildesheim : Georg Olms Verlag, 1965.

Dehn, Max

1900 *Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck*, « Mathematische Annalen », vol. LIII, p. 405-439.

Descartes, René

1628 *Regulaie ad directionem ingenii*, Paris : Librairie philosophique J. Vrin, 1965.

1641 *Méditations métaphysiques*, dans Œuvres philosophiques, vol. II, Paris : Garnier, 1967.

Dubucs, Jacques

1986 *Réalisme et antimécanisme chez K. Gödel*, « Dialectica », vol. XL-4, p. 297-308.

1999 *Carnap, Gödel et la nécessité mathématique*, dans François Lepage et François Rivenc (eds.), Carnap, Paris et Montréal, Bellarmin-Vrin, à paraître.

Ewald, William B. (ed.)

1996 From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics, Oxford : Clarendon Press, 1996.

Gödel, Kurt

1944 *Russell's Mathematical Logic*, dans Collected Works, vol. II, Oxford U.P., 1990.

1964 *What is Cantor's Continuum Problem*, dans Collected Works, vol. II, Oxford U.P., 1990.

Hahn, Hans

1933 *Die Krise der Anschauung*, dans Empirismus, Logik, Mathematik, Frankfurt am Main : Suhrkamp, 1988.

Helmholtz, Hermann Ludwig Ferdinand von

1878 *Die Thatsachen in der Wahrnehmung*, Berlin, 1878 ; trad. anglaise Malcolm F. Lowe, dans Ewald, 1996, 689-727.

1892 *Goethes Vorahnungen kommender naturwissenschaftlicher Ideen*, repris dans *Vortrage und Reden*, vol. II, Braunschweig, 5° édit., 1903.

Hume, David

1739 *A Treatise of Human Nature* ; trad. française A. Leroy, Paris : Aubier-Montaigne, 1973.

Kant, Immanuel

1770 *De mundi sensibilis atque intelligibilis forma et principiis* (A. Philonenko ed.), Paris : Librairie Vrin, 3° édit., 1967.

1781 *Kritik der reinen Vernunft*, Hamburg : Felix Meiner Verlag, 1990 ; trad. française J. Barni et P. Archambault, Paris : Garnier-Flammarion, 1976 .

1783 *Prolégomènes à toute métaphysique future qui pourra se présenter comme science* (trad. française J. Gibelin), Paris : Librairie Vrin, 9° édit., 1974.

1784 Locke, John

1689 *An Essay Concerning Human Understanding* (trad. française P. Coste), Paris, Librairie Vrin, 1972.

Nelson, Leonard

1906 Bemerkungen über die Nicht-Euklidische Geometrie und den Ursprung der mathematischen Gewissheit, « Abhandlungen der Fries'schen Schule », vol. 1, 1906, p. 373-392.

Parsons, Charles

1964 *Infinity and Kant's Conception of the « Possibility of Experience »*, repris dans Mathematics in Philosophy, Ithaca, New-York : Cornell University Press, 1983, p. 95-109.

Riemann, Bernhard

1867 *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen*, trad. française J. Houël, dans *Œuvres mathématiques*, Paris : Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, 1968, p. 280-304.

Russell, Bertrand

1903 *The Principles of Mathematics*, Londres : George Allen & Unwin, 9° édition, 1972.

Sébestik, Jan

1992 Logique et mathématique chez Bernard Bolzano, Paris : Vrin, 1992.

Strawson, Peter F.

1966 Bounds of Sense. An Essay on Kant's Critique of Pure Reason, Londres : Methuen, 3° impr., 1973.

Szmielew, Wanda

1958 Some Metamathematical Problems Concerning Elementary Hyperbolic Geometry, dans L. Henkin, P. Suppes & A. Tarski, The Axiomatic Method, with Special Reference to Geometry and Physics. Proceedings of an International Symposium held at the University of California, Berkeley, December 26, 1957 – January 4, 1958, Amsterdam : North-Holland Publ., 1959.

Tarski, Alfred

1951 *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*, Berkeley : University of California Press, 2° édit., 1951.