GEORGES SARAFOPOULOS

Application de la théorie des déformations de Kodaira et Spencer à la mesure de Polyakov

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1993, fascicule 4
« Application de la théorie des déformations de Kodaira et Spencer à la mesure de Polyakov », , p. 1-66
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1993___4_A1_0>

THESE

présentée pour l'obtention du

Diplôme de DOCTORAT

Spécialité Mathématiques Pures

par

SARAFOPOULOS Georges

APPLICATION DE LA THEORIE DES DEFORMATIONS DE KODAIRA ET SPENCER A LA MESURE DE POLYAKOV

SOMMAIRE

RESUME

Pour calculer les amplitudes de probabilité de la corde bosonique libre dans la formulation de Polyakov, à l'ordre p - genre de la surface de Riemann "source" - de la théorie des cordes perturbative, Belavin et Knizhnik ont proposé une formule dite "formule de factorisation holomorphe" dans laquelle la "densité de Polyakov" se présente sous la forme $\|S\|^2$ où S est une section holomorphe d'un fibré au-dessus de l'espace de modules de Riemann.

Cette formule qui a fait l'objet de nombreuses descriptions dans la littérature a suscité des arguments faux. (Dans la littérature on trouve souvent la notion de famille analytique au-dessus de l'espace de modules de Riemann, alors que cet espace n'est pas une variété analytique). En raison de ces équivoques, cette formule n'a jamais été démontrée correctement.

Ce travail consiste en une démonstration rigoureuse de la formule de Belavin-Knizhnik. Pour pouvoir la démontrer on introduit dans la théorie des cordes "à la Polyakov" un nouvel outil : la théorie des déformations de structures complexes développée par Kodaira-Spencer.

Pour rester dans le cadre de la géométrie analytique, on utilise l'espace de Teichmüller d'une surface compacte orientée sans bord de genre $p > 1$ (chapitre II) et pour pouvoir définir une famille analytique au-dessus de cet espace, on utilise la théorie des déformations des structures complexes de Kodaira-Spencer (chapitre III). A cette famille on applique la théorie du fibré déterminant à la façon de Bismut-Gillet-Soulé et on démontre alors la formule de Belavin-Knizhnik sur l'espace de Teichmüller. On montre aussi que, si le genre de la surface source est supérieur ou égal à 3, ce résultat est valable sur l'espace de modules de Riemann (chapitre IV).

ABSTRACT

This work involves in an original demonstration of Belavin-Knizhnik formula for the partition function of a free bosonic string according to Polyakov's formulation, in order $p > 1$ - genus of the "source" Riemann surface - of string theory.

To characterize Polyakov's measure, I use elements of Kodaira-Spencer deformation theory applied to the determinant line bundle over a family of complex curves.

INTRODUCTION

"En physique théorique, il nous arrive souvent de flotter, parce que nous ne savons pas qu'elle est la nature des principes que nous sommes en train d'appliquer. Et comme nous ne savons pas vraiment ce que sont ces principes, la beauté des mathématiques est très souvent notre guide le plus sûr. De fait, il n'est pas rare en physique que les belles mathématiques restent , alors même que les principes qui ont présidés à leur élaboration sont devenus caduques. La théorie de l'électron de Dirac en est un exemple : elle se présente comme une tentative pour unifier la relativité et la mécanique quantique en effectuant une généralisation relativiste de l'équation de Shrödinger.

Ce point de vue est, je crois, complètement abandonné. De nos jours, on considère qu'il n'est pas possible d'unifier la relativité restreinte et la mécanique quantique ailleurs que dans le cadre d'une théorie quantique des champs.

Les principes qui ont guidé Dirac sont donc abandonnés; mais son équation, si belle, fait partie du bagage de tant de physiciens. Elle reste et restera à jamais. Evidemment, je ne peux pas savoir si Dirac aurait considéré que les mathématiques de la théorie des cordes sont suffisament belles pour que cette dernière ait un quelconque espoir de figurer parmi les lois ultimes de la physique. Nous ne le saurons jamais. Mais je ne pense pas, en tous cas, qu'il aurait désaprouvé ce que nous sommes en train de faire."

Steven WEINBERG.

D'après une conférence à la mémoire de P.Dirac

INTRODUCTION

Situons d'abord ce travail dans un contexte général. La recherche d'une théorie unifiée de toutes les interactions fondamentales de la nature représente une des préoccupations majeures des physiciens théoriciens depuis le début de ce siècle. Ces recherches ont été démarées par Weyl, Kaluza, Klein et Einstein après l'apparition de la Relativité Générale en 1915. A l'heure actuelle le candidat le plus promettant pour une théorie unifiée est donnée par la théorie des cordes qui a été développée par les physiciens au cours de la dernière dizaine d'années et qui a donné lieu à des interactions nombreuses et fructueuses avec les mathématiques.

En 1981 Polyakov a présenté une reformulation de la théorie des cordes qui fournit une nouvelle compréhension des dimensions critiques (26 pour le modèle bosonique et 10 pour le modèle possédant des degrés de liberté fermoniques). Un des résultats les plus importants et profonds de la théorie des cordes "à la Polyakov" est connu sous le nom de "théorème de Belavin-Knizhnik" : pour calculer les amplitudes de probabilité Z_p de la corde bosonique libre à l'ordre p (p>1), genre de la surface de Riemann "source", Belavin et Knizhnik ont proposé la formule suivante :

$$Z_p = \int_{R_p(M)} \|S\|^2 d\mu$$

où R_p (M) est l'espace de modules de Riemann de la surface "source" M.

s est une section d'un fibré au-dessus de l'espace R_p (M).

Cette formule a été beaucoup discutée. Différents groupes d'auteurs se sont consacrés à sa dérivation rigoureuse, mais malheureusement les démonstrations existantes dans la littérature contiennent des erreurs plus ou moins difficiles à remédier (application des techniques de la géométrie des variétés analytiques sur l'espace de modules de Riemann, alors que cet espace n'est pas une variété analytique mais une variété quasi-projective). En raison de ces équivoques, cette formule n'a jamais été démontrée correctement.

Ce travail comporte quatre parties et consiste en une démonstration rigoureuse de la formule de Belavin-Knizhnik.

Pour pouvoir la démontrer on introduit dans la théorie des cordes un nouvel outil : la théorie des déformations de structures complexes développées par Kodaira et Spencer. Le premier chapitre représente un aperçu de la théorie des cordes. Les deux chapitres suivants sont consacrés au rassemblement et développement des outils et résultats mathématiques nécessaires à la démonstration de la formule de Belavin-Knizhnik qui est présentée dans le chapitre final.

Pour rester dans le cadre de la géométrie analytique, on utilise l'espace de Teichmüller d'une surface M compacte orientée sans bord de genre p (p>1), c'est-à-dire l'ensemble des structures complexes sur M modulo le groupe $\mathfrak{D}_0$ des difféomorphismes qui conservent l'orientation de M et qu'ils sont homotopes à l'identité. L'espace de Teichmüller admet plusieurs réalisations et un choix judicieux de celles-ci est fortement indiqué pour la construction des différentes structures sur cet espace (chapitre II).

Pour pouvoir définir une famille analytique de surfaces de Riemann au-dessus de l'espace de Teichmüller on utilise le théorème d'existence des déformations de Kodaira-Spencer que nous adapterons aux surfaces de Riemann (Chapitre III).

Le théorème d'existence de Kodaira-Spencer nous fournit la structure locale de la famille universelle de Teichmüller (la famille tautologique au-dessus de cet espace), à cette famille on applique la théorie du fibré déterminannt à la façon de Bismut-Gillet-Soulé et on démontre alors la formule de Belavin-Knizhnik sur l'espace de Teichmüller. On montre aussi que, si le genre de la surface "source" est supérieur ou égal à trois ce résultat est valable sur l'espace de modules de Riemann (Chapitre IV).

CHAPITRE I

LA THEORIE DES CORDES

La plupart des physiciens contemporains en sont venus à considérer que le modèle standard, constitué par la théorie quantique des champs appliquée aux intéractions faibles, électromagnétiques et fortes, n'est en réalité qu'une approximation à basse énergie d'une théorie des champs fondamentale complètement différente. L'un des indices qui nous permet de subodorer que la nature ne nous livrera sa véritable simplicité qu'à des énergies bien supérieures à celles du domaine que nous sommes en mesure d'explorer est le suivant :

Si partant des données actuelles on extrapole les constantes de couplage des interactions électro-faibles et fortes vers les hautes énergies, on s'aperçoit qu'elles se rejoignent, et qu'à partir d'une énergie qui se situe à environ quinze ordres de grandeur au-dessus de l'énergie de masse du proton (10^{15} GEV), elles deviennent toutes égales. Cela laisse à penser que si nous pouvions atteindre expérimentalement des énergies de cet ordre nous aboutirions à une vision réellement unifiée et simple des choses.
Malheureusement, à l'heure actuelle, aucune expérience ne peut produire de telles énergies.
Ainsi nous sommes amenés à découvrir une théorie fondamentale ultime dont un abîme de quinze ordres de grandeur nous sépare.

Etant donné que l'on ne dispose que d'une approximation à basse énergie de cette théorie, il est étonnant que le modèle standard convienne si bien. La raison en est simple : c'est parce que tous les termes par lesquels il pourrait être modifié sont, par nature , extrêmement petits.

Les expérimentateurs ont beaucoup travaillé à mettre en évidence l'effet de ces termes minuscules. La désintégration du proton, la masse du neutrino, sont autant d'effets qu'on peut espérer "voir" un jour mais qui pour le moment restent indétectables. Rien ne nous est parvenu depuis le haut de l'échelle des énergies où se cache la vérité.

Depuis quelques années le monde des théoriciens est en ébullition. Les constituants ultimes de la nature, tout en haut de l'échelle, vers 10^{15} - 10^{19} Gev, pourraient bien n'être ni des champs ni des particules, mais des cordes. Dans ce travail une seule espèce de cordes est traitée, celles qui se présentent comme une espèce de petite boucle dans l'espace-temps (corde bosonique). Cette boucle est soumise à une tension et vibre suivant une infinité de modes. Chaque mode est identifié à une espèce donnée de particule. Ainsi le mode le plus lent correspond à la particule la moins massive; le mode suivant est associé à la particule se situant immédiatement au-dessus dans l'échelle des masses, et ainsi de suite.

L'intéraction entre deux particules élémentaires est interprétée comme la fusion des deux boucles correspondantes qui ensuite se séparent. Un événement de ce type peut être décrit grâce à une surface de l'espace temps; en effet, une corde lors de son déplacement balaie dans l'espace-temps une surface. Les réactions des particules entre elles peuvent être considérées comme autant de pages de l'histoire d'une surface qui subit divers avatars au cours desquels elle absorbe les boucles qui figurent dans l'état initial et émet celles que l'on retrouve dans l'état final. Ainsi on décrit, par exemple, le processus de diffusion, au cours duquel deux particules entrant en collision donnent naissance à trois autres, par une surface où pénétrent deux longs tubes (les particules initiales) et d'où émergent trois autres longs tubes (les particules finales); entre les deux, la topologie de la surface peut être passablement compliquée (Fig.1)

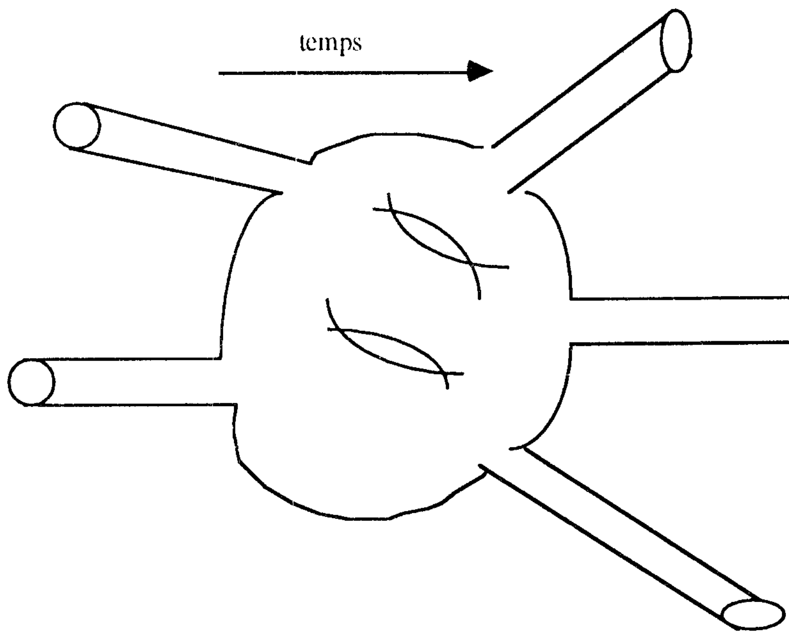

Fig. 1 : Diagramme correspondant à l'un des termes de la diffusion de deux particules en trois particules.

Pour décrire cette surface, on a besoin d'un système de coordonnées (ξ_1 , ξ_2). Il faut alors se donner les moyens de dire où, à chaque instant, se trouve un point donné de la corde.
Pour cela il suffit de se fixer une règle permettant d'associer à chaque point de la surface $\xi = (\xi_1 ; \xi_2)$, un point $x_\mu = x_\mu(\xi_1 ; \xi_2)$ de l'espace temps. Il faut aussi se donner une métrique intrinsèque sur la surface (Notons g la métrique).

D'après les règles de la mécanique quantique, telles qu'elles ont été formulées par Feynman, l'amplitude de probabilité (c'est-à-dire la quantité dont le carré donne la densité de probabilité du processus de collision étudié) s'obtient en effectuant une somme portant sur les "histoires"de toutes les surfaces susceptibles de produire la collision étudiée. Mais chacune de ces "histoires " est elle-même caractérisée par les deux fonctions $x_\mu = x_\mu(\xi)$ et $g = g_{ab}(\xi)$. Autrement dit, le calcul de l'amplitude de probabilité consiste à évaluer pour chaque "histoire" l'action S(x,g), puis à sommer les divers $e^{-S(x,g)}$ correspondant à toutes les surfaces possibles. D'après POLYAKOV [27], x étant un plongement de la surface dans un espace euclidien de dimension D, la quantité S(x,g) est une certaine combinaison des fonctions $x_\mu = x_\mu(\xi)$ et g (ξ) , soit :

$$S(x,g) = \frac{1}{2} \int_{\text{surface}} \sum_{\mu=1}^{D} g^{ab}(\xi) \frac{\partial x_\mu}{\partial \xi_a} \frac{\partial x_\mu}{\partial \xi_b} \sqrt{\mathrm{d\,et}\,(g)}\; d^2\xi.$$

(A vrai dire l'action comporte également un autre terme qui ne sert qu'à définir l'échelle relative des différents ordres du développement perturbatif [10]).

Si la théorie des cordes a connu un tel retentissement c'est en partie parce que les physiciens se sont aperçu qu'ils avaient, pour la première fois de quoi élaborer une théorie de la gravitation débarassée des quantités infinies (pas besoin de renormaliser) qui avaient entâché les précédentes tentatives faites dans ce sens.

Initialement les physiciens ont cherché vers la fin des années soixante à trouver directement, sans connaître le mécanisme local, des interactions fortes, la forme mathématique d'une matrice appelée matrice S, qui détermine la probabilité pour que deux particules incidentes de moments donnés p_1 et p_2 donnent après interaction forte deux particules sortantes de moments p_3 et p_4 . Il s'agit de trouver une fonction de 4 variables p_1 , p_2 , p_3 et p_4 . L'invariance relativiste permet de la réduire à une fonction de deux variables. En posant une hypothèse simplificatrice on parvient alors à la résoudre, et à spécifier sous forme d'intégrale une solution pour des processus invoquant même plus de 4 particules. C'est ce qu'on appelle le modèle de Veneziano.

Ensuite les physiciens théoriciens ont démontré que ce modèle décrivait en fait l'interaction non pas de particules ponctuelles mais de petites cordes.

Très vite ils se sont aperçu que des surfaces faisant intervenir de très longs tubes (comme ceux de la figure 2) permettaient de rendre compte del'échange entre particules finales et initiales d'un quantum de rayonnement correspondant à une particulede masse nulle et de spin 2 (Par particule de masse nulle il faut entendre une particule qui se déplace à la vitesse de la lumière; quant à la valeur 2 du spin, elle correspond à un système d'unités dans lequel le spin de l'électron vaut 1/2).

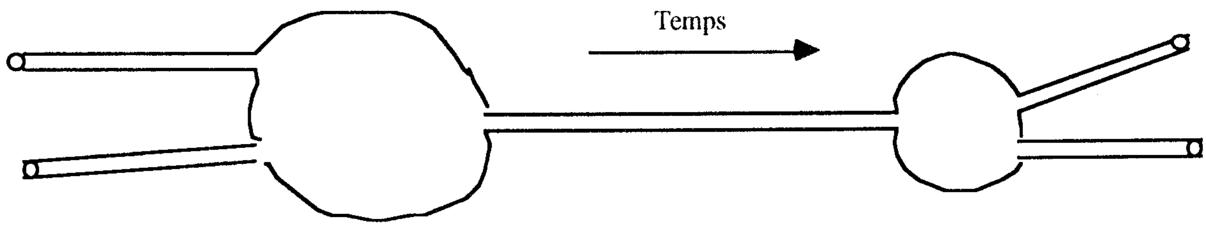

figure 2 : Interaction de deux cordes faisant intervenir l'émission puis l'absorption d'une particule de spin 2 et de masse nulle.

A l'époque l'existence de cette particule avait plongé les physiciens dans l'embarras. Le quantum de rayonnement gravitationnel, le graviton, a les mêmes caractéristiques masse nulle et spin 2; mais comme à la fin des années soixante et au début des années soixante-dix, les théories des cordes étaient censées s'appliquer aux interactions fortes, et non à la gravitation, les problèmes posés par l'existence de cette particule eurent pour effet une certaine désaffection vis-à-vis de la théorie des cordes.

A vrai dire, dès 1974, Scherk et Schwarz avaient eu l'idée que les théories des cordes pourraient bien constituer des théories de la gravitation, mais personne ne les avait prises au sérieux. Ce n'est guère que depuis quelques années, à la suite des travaux de Green, Gross, Polyakov, Schwarz, Witten et leurs collaborateurs, que les physiciens ont commencé à établir un lien entre la théorie des cordes et la fameuse théorie ultime des lois de la nature dans le domaine de 10^{15} - 10^{19} GeV.

Mais pourquoi les cordes et pas autre chose ? Car, après tout, lorsque on parle de la théorie des cordes il faut donner la forme de l'action qui y intervient. Cette action est l'intégrale d'un lagrangien et l'intégrand dans la forme n'est autre que le lagrangien (ou la densité d'énergie) déjà utilisé en électrodynamique quantique. D'où cela vient-il ? D'où tenons-nous qu'il s'agit bien là de la vraie théorie du monde ?

En fait, cette théorie repose sur une explication parfaitement rationnelle en termes de symétries. L'action de la théorie est invariante par le groupe des difféomorphismes de la surface (à cause de la métrique), invariante par transformation de Weyl (invariance par changement de l'échelle locale des longueurs : $g_{ab}(\xi) \mapsto f(\xi)g_{ab}(\xi)$).

Enfin l'action est invariante par transformation de Lorentz.

Il se trouve qu'une partie des mathématiques développées à partir des travaux de

Riemann, traite précisément des propriétés des surfaces invariantes par changement de coordonnées et transformation de Weyl. (Théorie des modules de Riemann).
Cette théorie unifie-t-elle la gravitation avec les forces électronucléaires ?
Pour cela :

a)Tous les objets du modèle standard, aussi bien les particules sources (les quarks et les leptons) que les messagers (comme les gluons,les photons,les $W^{\pm}$ et Z°), ou les Higgs devraient rentrer dans ce cadre.

b) Elle devrait décrire la gravité sans aucun infini

.

Remplir ces conditions tiendrait du miracle, mais ce miracle semble bien être en train de se produire, tout au moins dans un espace-temps à dix dimensions où une théorie unique des super cordes semble s'être fait jour, à la suite des travaux de Green et Schwarz. L'espace temps qui émerge de cette théorie des cordes unique, a dix dimensions. Il faudrait une "compactification " à la Kaluza-Klein, de six dimensions d'espace pour retomber dans un espace-temps réaliste.

Et il restera encore à descendre de la masse de Planck soit 10^{20} fois la masse du proton, jusqu'aux masses des particules W et Z, soit environ 10^{2} fois la masse du proton. Malheureusement, l'unicité qui rendait les théories des cordes si attachantes à dix dimensions ne semble pas survivre au retour à quatre dimensions : un million ou plus de théories semblent aussi viables les unes que les autres [Abdus Salam : La grande unification Ed.Seuil 1991]
C'est un des obstacles théoriques que les cordes doivent maintenant affronter sans parler du problème expérimental que pose la construction d'un accélérateur (long de10 années-lumière) capable d'atteindre l'énergie de Planck. Les cordes pourraient-elles fournir la Théorie de Tout qui engloberait toutes les particules sources connues, plus les messagers connus et les Higgs plus toutes leurs interactions mutuelles ? S'il en était ainsi , ces cordes seraient-elles enfin l'aboutissement des efforts visant à unifier les forces fondamentales de la nature? Seul le temps répondra à ces questions.

CHAPITRE II

Pour montrer la formule de Belavin-Knizhnik et pour rester dans le cadre de la géomètrie analytique on utilisera l'espace de Teichmüller d'une surface M, compacte orientée sans bord de genre p (p>1), c'est-à-dire l'ensemble des structures complexes sur M modulo le groupe $\mathfrak{D}_0$ des difféomorphismes qui conservent l'orientation de M et qu'ils sont homotopes à l'identité.

Le but de ce chapitre est de rappeler, en utilisant l'approche de Fischer et Tromba plutôt que celle de Bers, la construction des différentes structures sur cet espace (différentielle, complexe et métrique).

L'espace des structures complexes sur M, qui en dimension deux est égal à l'espace des structures presque complexes, est isomorphe à l'espace des métriques de courbure scalaire - 1 et cet isomorphisme est $\mathfrak{D}_0$-équivariant. Ainsi l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}_p(M)$ se présente sous les formes suivantes :

$$\mathcal{T}_p(M) \approx \mathfrak{A}/\mathfrak{D}_0 \approx \mathcal{M}_{-1}/\mathfrak{D}_0 \qquad (\S\ 2.3)$$

où $\mathfrak{A}$ désigne l'espace des sections de classe C^∞ du fibré des structures presque-complexes conservant l'orientation de M.

$\mathcal{M}_{-1}$ désigne l'espace des métriques de classe C^∞ dont la courbure scalaire est égale à -1.

$\mathfrak{D}_0$ désigne le groupe des difféomorphismes de M de classe C^∞ et conservant l'orientation, homotopes à l'identité.

Le modèle $\mathcal{M}_{-1}/\ \mathfrak{D}_0$ permet de construire la structure de variété différentielle de dimension 3p-3 dont la connaissance remonte à Bers-Ahlfors et de définir la métrique de Weil-Petersson sur l'espace de Teichmüller. Le modèle $\mathfrak{A}/\mathfrak{D}_0$ est utilisé pour définir la structure complexe sur cet espace (§§2.3; 2.4; 2.5).

CHAPITRE II

L'ESPACE DE TEICHMULLER D'UNE SURFACE COMPACTE ORIENTEE SANS BORD DE GENRE P > 1.

(D'après E.Fischer et A.J.Tromba).

2.1 NOTATIONS.

- M désigne une surface compacte orientée, sans bord, de genre p > 1.
- $\mathcal{D}^{S+1}$ désigne le groupe des difféomorphismes de M conservant l'orientation et de classe de Sobolev H^{S+1} $(S > 1)$.
- $\mathcal{D}$ désigne l'espace $\mathcal{D}^S$ pour $S = \infty$
- $H^S(M,\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions de classe H^S sur M et à valeurs réelles.
- $\mathcal{P}^S \subset H^S(M,\mathbb{R})$ est le sous-ensemble des fonctions positives
- $\mathcal{P}^S$ est un ouvert si $S > 1$.
- $S_2{}^S$ désigne l'ensemble des sections de classe H^S du fibré $T^*M \otimes_{Sym} T^*M$.
- $\mathcal{M}^S \subset S_2{}^S$ désigne l'ouvert des métriques Riemanniennes $(S > 1)$
- $H^S(T^1{}_1(M))$ désigne les sections de classe H^S du fibré $T^1{}_1(M)$.
- $\mathcal{A}^S \subset H^S(T^1{}_1(M))$ désigne l'espace des sections de classe H^S du fibré des structures presque complexes conservant l'orientation de M.
- $\mathcal{M}^S{}_{-1}$ désigne l'espace des métriques de classe H^S dont la courbure scalaire est égale à -1.
- Si $S = \infty$, on écrit :
  $\mathcal{P}$; S_2; $\mathcal{M}$; $\mathcal{A}$; $\mathcal{M}_{-1}$.

2.2 L'ESPACE DES MODULES DE RIEMANN ET L'ESPACE DE TEICHMÜLLER DE M.

Définitions : Soit $\mathcal{C}$ l'espace des structures complexes sur M. $\mathcal{D}$ opère naturellement sur $\mathcal{C}$ et l'espace quotient $\mathcal{C} / \mathcal{D} = R(M)$ est, par définition, l'espace de modules de Riemann. Pour étudier l'espace de modules R(M) Teichmüller a introduit l'espace $\mathcal{C} / \mathcal{D}_0 = \mathcal{T}(M)$ où $\mathcal{D}_0$ est le sous-groupe normal de $\mathcal{D}$ des difféomorphismes homotopes à l'identité.

On dit que $\mathcal{T}(M)$ est l'espace de Teichmüller de M.

On a : $R(M) = \mathcal{T}(M) / \Gamma$ où Γ est le groupe discret $\mathcal{D} / \mathcal{D}_0$.

2.3 LA STRUCTURE DE VARIÉTÉ DE CLASSE C^∞ ET DE DIMENSION FINIE DE $\mathcal{T}(M)$.

L'approche de Teichmüller étant très technique (applications quasi-conformes), on préfère utiliser celle de Fisher-Tromba. Pour étudier la structure de l'espace $\mathcal{T}(M)$ Fisher et Tromba introduisent plusieurs modèles sur cet espace.

$$\mathcal{T}(M) = \mathcal{C}/\mathcal{D}_0 \simeq \frac{\mathcal{M}/\mathcal{P}}{\mathcal{D}_0} \simeq \frac{\mathcal{M}_{-1}}{\mathcal{D}_0}$$

Dans leur travail le théorème suivant est fondamental.

Théorème :

(Abraham-Marsden : Foundations of mechanics. New-York : Benjamin 1978).

Soient : • G un groupe de Hilbert-Lie de classe $\mathcal{C}^\infty$.

• H une variété de Hilbert de classe $\mathcal{C}^\infty$.

• $A : H \times G \rightarrow H$ une $\mathcal{C}^\infty$-action de G sur H

Si A est libre et propre, alors

(1) $G.x = \{A(x,g) | g \in G\}$, $x \in H$, est une sous variété fermée de H, difféomorphe à G.

(2) l'espace des orbites H / G admet une structure unique de variété de Hilbert de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que la projection canonique $\pi : H \rightarrow H/_G$ soit une submersion

(3) pour $[x] \in H / G$, l'espace tangent $T_{[x]}(H/G)$ est isomorphe au complémentaire orthogonal de $T_x(G.x)$.

Pour pouvoir utiliser le théorème précédent Fischer et Tromba introduisent les espaces : $\mathcal{M}^S$; $\mathcal{P}^S$, ...

L'espace $\mathcal{M}^S / \mathcal{P}^S$.

$\mathcal{P}^S$ opère librement et proprement sur $\mathcal{M}^S$ par multiplication, donc $\mathcal{M}^S / \mathcal{P}^S$ est une variété de Hilbert de classe $\mathcal{C}^\infty$. D'autre part, il existe sur $\mathcal{M}^S$ une métrique naturelle, définie par :

$$<h,k>_g = \frac{1}{2} \int_M tr(HK) d\mu_g$$

où : $$k,h \in T_g \mathcal{M}^S = S_2^S$$

$$H = g^{-1}h,\ K = g^{-1}k$$

$d\mu_g$ est l'élément de volume déterminé par g et l'orientation de M.

On peut aisément montrer que :

$$S_2^S = (S_2^S)^c(g) \oplus (S_2^S)^T(g)$$

où : $(S_2^S)^c(g) = \{h \in S_2^S \mid h = \sigma g \ ,\quad \sigma \in H^S(M,\mathbb{R})\}$

et $(S_2^S)^T(g) = \{h \in S_2^S \mid tr_g h = 0\}$

et comme $T_g(\mathcal{P}^S.g_0) = (S_2^S)^c(g)$

alors $T_{[g]}(\mathcal{M}^S|\mathcal{P}^S) = (S_2^S)^T(g)$.

Par passage à la limite projective on obtient une structure de variété I.L.H. au sens d'Omori sur $\mathcal{M}/\mathcal{P}$. (Omori : On the group of diffeomorphism on a compact manifold. Proc.Sym.Pure Math. AMS 15, 167-183-1970).

L'espace $\mathfrak{A}^S$.

Définition : Une structure presque complexe J de classe H^S sur M est une H^S-section du fibré $T_1^1(M)$ telle que :

$$J^2 = -\ Id.$$

$$\forall x \in M\ ,\ J(x) \in End\,(T_xM)$$

$$\text{et } J(x) \circ J(x) = -\ Id(x)$$

Sur chaque T_xM on peut choisir une base de la forme $(X_x, J(x)X_x)$ et par conséquent J détermine une orientation de M.
On dit que c'est l'orientation naturelle induite par J

Définition : $\mathfrak{A}^S = \{J \in H^S(T^1{}_1(M)) \mid J^2 = -\ Id$

et l'orientation naturelle induite par J est celle de M$\}$

L'étude de l'espace $\mathfrak{A}^S$ repose sur le théorème suivant :

Théorème.

(PALAIS : Foundations of global non-linear analysis. New-York Benjamin 1968).

Soit $\pi : V \to M$ un fibré de dimension finie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur M.

L'espace $H^S(\pi)$ des sections de classe $H^S (S > 1)$ de ce fibré admet une structure de variété de Hilbert de classe $\mathcal{C}^\infty$ et l'espace tangent $T_\varphi H^S(\pi)$ est donné par :

$$T_\varphi H^S(\pi) = \{\eta \in H^S(M,TV) \mid \eta(m) \in \widetilde{V}_{\varphi(m)}\}$$

où $\widetilde{V}_{\varphi(m)} = \operatorname{Ker} T_{\varphi(m)}\pi$ est le sous-espace vertical de $T_{\varphi(m)} V$.

On peut montrer que $\mathfrak{A}^S$ est l'espace des sections de classe H^S d'un fibré de dimension finie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur M et que :

$$T_J\mathfrak{A}^S = \{\dot{J} \in H^S(T^1{}_1(M)) \mid \dot{J} \circ J = - J \circ \dot{J}\}$$

(Kobayashi -Nomizu : Foundations of differential geometry New-York : Interscience 1963).

Le difféomorphisme $\widetilde{\Phi}$.

Soit $\Phi : \mathcal{M}^S \to \mathfrak{A}^S$

$g \mapsto - g^{-1} . \mu_g$

$- g^{-1} . \mu_g$ est le tenseur de type (1,1) obtenu par contraction en utilisant la métrique g autrement dit :

$$g(X, \Phi(g)Y) = - \mu_g(X,Y)$$

En coordonnées locales :

$$\Phi(g)^i_j = - g^{ik}\mu_{kj} = - \mu^i_j$$

En utilisant un système de coordonnées conformes sur lequel

$$g_{ij} = \lambda\delta_{ij} \quad \text{et} \quad \mu_g = - \lambda J_0$$

$$\text{où} \qquad J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on obtient : $- g^{-1} \mu_g = J_0$

Donc :

(1) $\Phi(g) = J \in \mathfrak{A}^S$

(2) g est hermitienne relativement à J :

$$g(JX\ , JY) = g(X, Y)$$

(3) Si $\Phi(g_1) = \Phi(g_2)$

$$g_1^{-1}\,\mu_{g_1} = g_2^{-1}\,\mu_{g_2}$$

Or, $\mu_{g_2} = p\mu_{g_1}$, $p \in \mathfrak{P}^S$

Donc il existe une fonction unique p telle que

$$g_2 = pg_1$$

(4) $$\Phi(pg) = (pg)^{-1}\,\mu_{pg}$$

$$= p^{-1}\,g^{-1}\,p\mu_g$$

$$= \Phi(g)$$

(5) Φ est surjective .

En effet : si $J \in \mathfrak{A}^S$, $g^1 \in \mathcal{M}^S$ on définit $g \in \mathcal{M}^S$ par :

$$g(X,Y) = g^1\,(X,Y) + g^1\,(JX,JY)$$

On a :

$$\mu_g(X,JX) = \left\{\det\begin{pmatrix} g(X,X) & g(X,JX) \\ g(JX,X) & g(JX,JX) \end{pmatrix}\right\}^{1/2}$$

Or, $g(X,JX) = g(JX,X) = 0$

et $g(JX, JX) = g(X,X)$

En utilisant le fait que (X,JX) est une base on montre que :

$$\mu_g(X,Y) = -\,g\,(X,JY)$$

et donc : $J = -\,g^{-1}.\,\mu_g$.

On a donc une bijection

$$\tilde{\Phi} : \mathcal{M}^S/\mathfrak{P}^S \rightarrow \mathfrak{A}^S$$

(6) On a :

$$D\Phi(g) : S_2^S \rightarrow T_J\mathfrak{A}^S$$

$$D\Phi(g).h = (H - \frac{1}{2}\, tr_g\, h))J \qquad [11]$$

$$\text{où} \quad H_j{}^i = g^{ik} h_{kj}$$

Par conséquent :

$$\operatorname{Ker} D\Phi(g). = (S_2^S)^C(g)$$
$$= \left\{h \in S_2^S \mid h = \sigma g\,,\ \sigma \in H^S(M,\mathbb{R})\right\}$$

D'où :

$$S_2^S = \operatorname{Ker} D\Phi(g) \oplus (S_2^S)^T(g)$$

Considérons l'application :

$$D\Phi(g)^T = D\Phi(g)|_{(S_2^S)^T(g)}$$

On a : $D\Phi(g)^T.\, h = HJ.$

Etudions l'application : $h \mapsto H$

où $h \in (S_2^S)^T$ et $H = g^{-1} h$

H est évidemment un tenseur de trace nulle et symétrique par rapport à g.

En travaillant dans un système de coordonnées conformes on peut montrer aisément que :

(a) Soient : $J = \Phi(g)$ et $H \in H^S(T_1^1(M))$.

Si $trH = 0$ et si H est symétrique par rapport à g' avec $\Phi(g') = J$, alors $HJ = -JH$.

(b) Si $H \in H^S(T_1^1(M))$. est tel que :

$HJ = -JH$, alors $trH = 0$ et H et symétrique par rapport à toute métrique g telle que $\Phi(g) = J$.

Donc l'application :

$$(S_2^S)^T(g) \rightarrow T_J \mathfrak{A}^S$$

$$h \mapsto H$$

est un isomorphisme.

Par conséquent, la restriction de $D\Phi(g)$ à $(S_2^S)^T(g)$

$$D\Phi(g)|_{(S_2^S)^T(g)} : (S_2^S)^T(g) \rightarrow T_J \mathfrak{A}^S$$

$$h \mapsto HJ$$

est un isomorphisme

Or, $(S_2^S)^T(g) = T_{[g]}(\mathcal{M}^S/\mathcal{P}^S)$

Donc : $\tilde{\Phi}$ est un difféomorphisme.

En passant à la limite projective on obtient un I.L.H.-difféomorphisme (au sens d'Omori).

$$\mathcal{M} / \mathcal{P} \cong \mathfrak{A}$$

L'espace $\mathcal{M}_{-1}^S$ (S > 2).

Pour $g \in \mathcal{M}^S$, soit $R(g) \in H^{S-2}(M;\mathbb{R})$ la courbure scalaire de g.

Par définition :

$$\mathcal{M}_{-1}^S = \{g \in \mathcal{M}^S / R(g) = -1\}$$

Il est bien connu que :

Si le genre de M est strictement supérieur à 1 et si S > 2, alors pour tout $g \in \mathcal{M}^S$ il existe une fonction unique $p(g) \in \mathcal{P}^S$ telle que : $R(p(g)g) = -1$ et l'application

$$g \mapsto p(g)g$$

est de classe C^∞.

On définit une application

$$\wedge : \mathcal{M}^S \to \mathcal{M}_{-1}^S$$

$$g \mapsto p(g)g.$$

Par définition $\wedge$ est constante sur les orbites de l'action de $\mathcal{P}^S$ sur $\mathcal{M}^S$, donc elle passe au quotient :

$$\tilde{\wedge} : \mathcal{M}^S/\mathcal{P}^S \to \mathcal{M}_{-1}^S$$

On a :

$$S_2^S = (S_2^S)^c(g) \oplus (S_2^S)^T(g)$$

$$= (S_2^S)^c(g) \oplus T_{[g]}(\mathcal{M}^S/\mathcal{P}^S)$$

et $\operatorname{Ker} D\wedge(g) \subset (S_2^S)^C(g)$ [11]

Donc, si $h \in \operatorname{Ker} D\wedge(g) \cap (S_2^S)^T(g)$

alors $h = 0$.

D'autre part :

$$\mathrm{Im}\, D \tilde{\wedge} (g) = \mathrm{Ker}\, DR(g) \quad [11]$$

Il en résulte que $\tilde{\wedge}$ est une immersion injective qui est un homéomorphisme sur son image, l'application réciproque étant la restriction sur $\mathcal{M}^S_{-1}$ de la projection canonique de $\mathcal{M}^S$ sur $\mathcal{M}^S / \mathcal{P}^S$

$$\pi / _{\mathcal{M}^S_{-1}} = \pi_{-1} : \mathcal{M}^S_{-1} \to \mathcal{M}^S / \mathcal{P}^s$$

On en déduit que :

- $\mathcal{M}^S_{-1}$ est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{M}^S$
- π_{-1} est un difféomorphisme
- $T_g\, \mathcal{M}^S_{-1} = \mathrm{Ker}\, DR(g)$.

Les espaces $\dfrac{\mathcal{M}^S / \mathcal{P}^S}{\mathcal{D}_0^{S+1}}$, $\dfrac{\mathcal{A}^S}{\mathcal{D}_0^{S+1}}$; $\dfrac{\mathcal{M}^S_{-1}}{\mathcal{D}_0^{S+1}}$

$\mathcal{D}^{S+1}$ opère sur $\mathcal{M}^S / \mathcal{P}^S$ et $\mathcal{A}^S$ par image réciproque :

Si $\quad f \in \mathcal{D}^{S+1}$, $[g] \in \mathcal{M}^S / \mathcal{P}^S$

$f.[g] = f^*[g] = [f^*g]$.

Si $J \in \mathcal{A}^S$, $f.J = f^*J$.

où $(f^*J)(x)(X) = df(x)^{-1} J(f(x))df(x)X$ et $(f^*g)(x)(X_x, Y_x) = g(f(x))(df(x)X_x, df(x)Y_x)$.

Le difféomorphisme $\tilde{\Phi} : \mathcal{M}^S / \mathcal{P}^S \to \mathcal{A}^S$

$$[g] \mapsto -g^{-1}\mu_g$$

est telle que :

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(f^*[g]) &= -(f^*g)^{-1}\mu_{f^*g} \\ &= -(f^*g)^{-1} f^*\mu_g \\ &= f^*(-g^{-1}\mu_g) \\ &= f^*(\tilde{\Phi}(g)) \end{aligned}$$

donc $\tilde{\Phi}$ est $\mathfrak{D}$-équivariant et par passage au quotient on obtient un difféomorphisme :

$$\frac{\mathcal{M}^S / \mathcal{P}^S}{\mathfrak{D}_0^{S+1}} \simeq \mathfrak{A}^S / \mathfrak{D}_0^{S+1} .$$

Par passage à la limite projective on a un difféomorphisme au sens d'Omori.

$$\frac{\mathcal{M}/\mathcal{P}}{\mathfrak{D}_0} \simeq \mathfrak{A} / \mathfrak{D}_0$$

Montrons que le difféomorphisme

$$\pi_{-1} : \mathcal{M}^S_{-1} \to \mathcal{M}^S / \mathcal{P}^S$$

et $\mathfrak{D}$-équivariant :

On a : $\quad R(f^*g) = f^*(R(g))$

$$= R(g) \circ f \quad , f \in \mathfrak{D}^{S+1}$$

Donc $\mathfrak{D}^{S+1}$ opère sur $\mathcal{M}^S_{-1}$ par image réciproque.

D'autre part :

$$\pi_{-1}(f^*g) = [f^*g]$$

$$= f^*[g]$$

$$= f^*(\pi_{-1}(g))$$

Par conséquent on obtient un difféomorphisme :

$$\frac{\mathcal{M}^S_{-1}}{\mathfrak{D}_0^{S+1}} \simeq \frac{\mathcal{M}^S/\mathcal{P}^S}{\mathfrak{D}_0^{S+1}} . \ (S > 2)$$

Par passage à la limite projective :

$$\frac{\mathcal{M}_{-1}}{\mathfrak{D}_0} \simeq \frac{\mathcal{M}/\mathcal{P}}{\mathfrak{D}_0}$$

(au sens d'Omori)

et puisque en dimension deux :

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A}$$

on a :

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}_0} \simeq \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{D}_0} \simeq \frac{\mathcal{M}_{-1}}{\mathfrak{D}_0} \simeq \frac{\mathcal{M}/\mathcal{P}}{\mathfrak{D}_0}$$

La structure de variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de dimension finie sur l'espace de Teichmüller de $M(\mathcal{T}(M) = \mathcal{M}_{-1} / \mathcal{D}_0)$.

Soient : $g \in \mathcal{M}_{-1}$

f_t, $t \in (-\varepsilon ; \varepsilon)$ une famille à un paramètre de difféomorphismes de M.

Posons : $\left.\frac{df_t}{dt}\right|_{t=0} = X\cdot$

Par définition de la dérivée de Lie,

$$\frac{d}{dt}\left\{f_t^* g\right\}_{t=0} = L_X g$$

Soit $\mathcal{O}_g^S$ l'orbite de g suivant l'action de $\mathcal{D}_0^{S+1}$.

L'espace tangent $T_g \mathcal{O}_g^S$ est donné par :

$$T_g \mathcal{O}_g^S = \{h \in S_2^S \mid h = L_X g\}$$

D'autre part, si δ_g désigne la divergence relativement à g, on a une somme directe orthogonale:

$$S_2^S = \operatorname{Ker} \delta_g \oplus T_g \mathcal{O}_g^S \quad , \quad g \in \mathcal{M}^{S+1}$$

(Berger, Ebin : Somme decompositions of the space of symmetric tensors on a Riemannian manifold. J.Diff. Geometry, 3, 379-392 (1969)).

Supposons que $g \in \mathcal{M}_{-1}^{S+2}$.

On sait que :

$$T_g \mathcal{M}_{-1}^S = \operatorname{Ker} DR(g)$$

avec $DR(g) = \Delta(\operatorname{tr}_g h) + \delta_g \delta_g h + \frac{1}{2} \operatorname{tr}_g h$.

où $\Delta : H^S \to H^{S-2}$ désigne l'opérateur de Laplace-de Rham.

En coordonnées locales :

$$\text{Si} \quad \rho \in H^S \ , \ \Delta\rho = \frac{-1}{\sqrt{\det g_{ij}}} \frac{\partial}{\partial x_i} g^{ij}\left(\sqrt{\det g_{ij}} \frac{\partial}{\partial x_j} \rho\right)$$

Pour $h \in T_g \mathcal{M}_{-1}^S$ on a :

$$h = h^\circ + L_X g \ , \ \delta_g h^\circ = 0.$$

Puisque $L_X g \in T_g \mathcal{M}^S_{-1}$ on a :

$$\Delta(\mathrm{tr}_g h^\circ) + \frac{1}{2}\ \mathrm{tr}_g h^\circ = 0$$

En multipliant par $\mathrm{tr}_g\ h^\circ$ et en intégrant par parties, on obtient :

$$\mathrm{tr}_g\ h^\circ = 0.$$

Donc : $T_g\mathcal{M}^S_{-1} = (S_2^S)^{TT}(g) \oplus T_g \mathcal{O}^S_g$

(somme directe orthogonale)

où $(S_2^S)^{TT}(g) = \{h \in S_2^S \mid \delta_g h = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}_g h = 0\}$.

Remarques :

1°/ Sur $(S_2{}^S)^T(g)$, $\delta_g h = 0$, est un système elliptique et donc son noyau qui est $(S_2{}^S)^{TT}(g)$ est un espace de dimension finie.

2°/ Si $g \in \mathcal{M}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et si $\delta_g h = 0$, alors h est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Donc : si $g \in \mathcal{M}$, $(S_2{}^S)^{TT}(g) = (S_2)^{TT}(g)$.

La dimension de l'espace $(S_2)^{TT}(g).(g \in \mathcal{M})$.

Dans un système de coordonnées conformes :

$$g_{ij} = \lambda\delta_{ij} \quad \text{et} \quad \text{si} \quad h \in (S_2)^{TT}(g)$$

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} u & -v \\ -v & -u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$$

En utilisant l'expression locale de $\delta_g h$:

$$(\delta_g h)_i = -\frac{1}{\sqrt{\det g}}\ \frac{\partial}{\partial x^j}\left(h_i^j\sqrt{\det g}\right) - \frac{1}{2}\, h^{jK}\frac{\partial g_{jK}}{\partial x^i}$$

où $\quad h_i^j = g^{jK}\, h_{iK}\ ;\ h^{jK} = g^{cj}g^{Kb}h_{cb}$

on obtient

$$-(\delta_g h)_i = -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x^j}(h_{ij}) = 0$$

En posant $x^1 = x$ et $x^2 = y$ on a :

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial u}{\partial y} & = - & \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & = & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{array}\right.$$

(Equations de Cauchy-Riemann)

Donc, dans un système de coordonnées conformes (coordonnées complexes) :

$$h_{ij}\, dx^i \otimes dx^j = udx^2 - udy^2 - 2vdx\, dy$$

$$= \mathrm{Re}\{(u + iv)(dx + idy)^2\}$$

$$= \mathrm{Re}(\xi dz^2).$$(partie réelle d'une différentielle quadratique holomorphe.)

D'après le théorème de Riemann-Roch, l'espace des différentielles quadratiques holomorphes est de dimension (réelle) 6p-6.[Voir chapitre IV].

Donc $\dim_{\mathbb{R}} (S_2)^{TT} (g) = 6p - 6 \quad (p > 1)$.

La construction d'une sous-variété transverse de $\mathcal{M}_{-1}$.

Considérons le sous-espace affine de S_2 définie par :

$$A_g = \{ g + h \mid h \in S_2^{TT}(g)\},\ g \in \mathcal{M}.$$

Posons $\wedge' = \wedge \mid A_g$.

On a : $D\wedge' (g) = D\wedge (g) \mid S_2^{TT}(g)$

Or, $S_2^{TT}(g) \subset \mathrm{Ker}\, DR(g)$ et la restriction de $D \wedge (g)$ à $\mathrm{Ker}\, DR(g)$ est l'identité alors $D \wedge'(g)$ est l'inclusion naturelle de $S_2^{TT}(g)$ dans $T_g \mathcal{M}_{-1}^{S}$.

Donc, il existe un voisinage V de g dans A_g tel que :

$$\wedge' (V) = S_g$$

soit une sous-variété de $\mathcal{M}_{-1}^{S} (\forall S ,\ S > 2)$ et on a

$$T_g \mathcal{M}_{-1}^{S} = T_g S_g \oplus T_g \mathcal{O}_g^{S}$$

La structure de $\mathcal{T}(M)$ repose sur le théorème suivant :

Théorème [11] :

Soit $g \in \mathcal{M}_{-1}$.

Il existe une sous-variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ S_g de $\mathcal{M}_{-1}$ telle que :

(1) Si $f \in \mathfrak{D}_0$ et $f^*S_g \cap S_g \neq \emptyset$,

alors $f = Id$.

(2) Il existe un voisinage V de l'identité dans $\mathfrak{D}_0$ tel que l'application :

$$(f,\tilde{g}) \mapsto f^*\tilde{g}$$

soit un difféomorphisme de $V \times S_g$ sur un voisinage de g dans $\mathcal{M}_{-1}$.

Comme conséquence on a le théorème suivant :

Théorème [11]

(1) L'espace de Teichmüller de M admet une structure de variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de dimension $(6p - 6)$ avec :

$$T_{[g]}\mathcal{T}(M) \cong S_2^{TT}(g)$$

(2) Le triplet $(\pi, \mathcal{M}_{-1} ; \mathcal{M}_{-1} / \mathfrak{D}_0)$ est un I.L.H-fibré principal (au sens d'Omori) de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Remarques :

1) Ce fibré est trivial [11]

2) Puisque $\mathcal{M}_{-1} \cong \mathcal{T}(M) \times \mathfrak{D}_0$ et $\mathcal{M}_{-1}$ est un espace contractible, alors $\mathcal{T}(M)$ est contractible.

1.4 : LA STRUCTURE COMPLEXE SUR $\mathcal{C}$(M) [12]

Supposons que $(\pi,P,P/G)$ est un fibré principal de Hilbert ou un fibré principal au sens d'Omori (fibré I.H.L.) et soit $J \in \mathcal{C}^\infty(T^1{}_1(P))$ une structure presque complexe sur P.

Définitions : **1°/** Pour $a \in G$, R_a désigne la translation définie par :

$$\forall\, p \in P,\ R_a(p) = p.a.$$

On dit que la structure presque complexe J est G-invariante si

$$R^*{}_a J = J$$

où $R^*{}_a J$ est définie par :

$$(R^*{}_a J)(p)(Z_p) = dR_a(p)^{-1} J(pa) dR_a(p)(Z_p)$$

pour tout $Z_p \in T_p P$.

2°/ Pour $p \in P$, V_p désigne le sous-espace vertical

$$V_p = \operatorname{Ker} d\pi(p).$$

On dit que J conserve les sous-espaces verticaux, si

$$\forall \quad p \in P,\ J(p)(V_p) \subset V_p\ .$$

3°/ Si le fibré $(\pi, P, P/G)$ est muni d'une structure presque complexe J telle que :

a) J est G-invariante

b) J conserve les sous-espaces verticaux.

On dit que le triplet $(\pi,P,P/G)$ est un fibré principal presque complexe.

La définition de la structure complexe sur $\mathcal{C}$(M) repose sur le théorème suivant :

Théorème : Soit $(\pi,P,P/G)$ un fibré principal presque complexe de groupe structural G et de structure presque complexe J.

J induit une structure presque complexe $J_{P/G}$ sur P/G.

En effet :

Posons $J_{P/G}(x).X_x = (d\pi)(p)\, J(p)\, \tilde{x}_P$

où $p \in \pi^{-1}(x)$ et $\tilde{x}_P \in T_pP$ est tel que $(d\pi)(p)\, \tilde{x}_P = X_x$.

En utilisant le fait que J conserve les sous-espaces verticaux on peut montrer que $J_{P/G}$ ne dépend pas du choix de $\widetilde{x}_P$ pour $p \in P$ fixé.

La G-invariance de J implique que $J_{P/G}$ ne dépend pas du choix de $p \in \pi^{-1}(x)$.

Montrons que $J^2_{P/G} = -\,\mathrm{Id}$.

$$\begin{aligned} J_{P/G}(x) \circ J_{P/G}(x).X_x &= J_{P/G}(x)\big((d\pi)(p)J(p)\,\widetilde{x}_P\big) \\ &= (d\pi)(p)\,\big(J(p)(J(p)\,\widetilde{x}_P)\big) \\ &= -\,d\pi(p)\,\widetilde{x}_P \\ &= -\,X_x \end{aligned}$$

Donc $\forall\ X_x \in T_x(P/G)$, $J^2_{P/G} = -\,\mathrm{Id}$.

En utilisant la définition du tenseur de Nijenhuis on montre que si J est intégrable alors $J_{P/G}$ est intégrable.

La structure complexe sur $(\pi,\ \mathfrak{A},\ \mathfrak{A}/\mathfrak{D}_0)$.

Définissons sur $\mathfrak{A}$ une structure presque complexe Φ par :

$$\Phi_J(\dot{J}) = J \circ \dot{J}$$

D'après Fischer-Tromba [12]

- Φ est $\mathfrak{D}_0$-invariante

- Φ conserve les sous-espaces verticaux

- Φ est intégrable.

Or, $\mathfrak{T}(M)$ est un espace de dimension finie.

Donc $\Phi_{\mathfrak{T}(M)}$ induit une structure complexe sur $\mathfrak{T}(M)$.

Remarque :

Pour $J \in \mathfrak{A}$, le sous-espace vertical V_J est donné par :

$$V_J = \{\dot{J} \in T_J\,\mathfrak{A} \mid \dot{J} = L_X J\}$$

1.5 LA MÉTRIQUE DE WEIL-PETERSSON [13].

Supposons que $(\pi, P, P/_G)$ est un fibré principal de Hilbert ou limite projective des fibrés principaux de Hilbert (au sens d'Omori).

Définition : On dit que $(\pi, P, P/_G)$ est un fibré riemannien s'il existe une structure riemannienne G-invariante et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur P.

La structure riemannienne sur $P/_G$.

Notons g la structure Riemannienne sur P et supposons que $\dim (P/_G) < \infty$.

Soient : • $V_p (p \in P)$ le sous-espace vertical associé à p.

• $H_p = V^{\perp}_p$ son sous-espace orthogonal relativement à g(p) (sous-espace horizontal).

Définition : On définit une structure riemannienne $g_{P/G}$ sur $P/_G$ par :

$$g_{P/G}(x)(X_x, Y_x) = g(p)(\tilde{x}_P, \tilde{Y}_P)$$

où $p \in \pi^{-1}(x)$ et $\tilde{x}_P$, $\tilde{Y}_P$ sont les vecteurs horizontaux tels que :

$$d\pi(p)\tilde{x}_P = X_x \quad \text{et} \quad d\pi(p)\tilde{Y}_P = Y_x$$

La métrique de Weil-Petersson sur $\mathcal{T}(M)$.

Rappelons la structure Riemannienne de $\mathcal{M}_{-1}$.

Pour $h \in S_2$, $k \in S_2$ $(S_2 = T_g \mathcal{M}_{-1})$

$$< h,k >_g = \frac{1}{2} \int_M tr(HK) d\mu_g$$

où $H = g^{-1} h$, $K = g^{-1} k$.

En coordonnées locales :

$$< h,k >_g = \frac{1}{2} \int_M h.k d\mu_g$$

h.k est la contraction de h et k en utilisant la métrique g.

$$h.k = g^{ij} g^{ab} h_{ia} k_{jb}$$

et $\quad d\mu_g = \sqrt{\det g_{ij}}\, dx\, dy$.

De la $\mathfrak{D}_0$-invariance de cette structure résulte que $<\ ,\ >_g$ définit une structure riemannienne sur l'espace de Teichmüller, c'est la structure de Weil-Petersson.

Explicitons-là :

Soient : $\quad \bullet\ X_{[g]}\ ,\ Y_{[g]} \in T_{[g]}\left(M_{-1} / \mathfrak{D}_0\right)$

• φ, ψ les uniques vecteurs horizontaux tels que :

$$d\pi(g)\, \varphi = X_{[g]} \text{ et } d\pi(g)\, \psi = Y_{[g]}$$

où $\pi : \mathcal{M}_{-1} \to \mathcal{M}_{-1}/\mathfrak{D}_0$ est la projection canonique

$$(\varphi, \psi \in S_2^{TT}(g)).$$

On a :

$$<X_{[g]}, Y_{[g]}> \ = \ <\varphi, \psi>_g .$$

Il est bien connu que :

$$M = D / \Gamma$$

où $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

et Γ est le groupe des isométries de D par rapport à la métrique de Poincaré

$$dS^2 = \frac{dx\, dy}{(1 - |z|^2)^2} .$$

Soit $\tilde{D}$ un domaine fondamental pour l'action de Γ sur D.

On a :

$$<\varphi, \psi> = \frac{1}{2} \int_{\tilde{D}} \varphi\psi \frac{dx\, dy}{(1 - |z|^2)^2}$$

Sur $\tilde{D}$:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & -\varphi_2 \\ -\varphi_2 & -\varphi_1 \end{pmatrix} \ , \ \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\psi_2 \\ -\psi_2 & -\psi_1 \end{pmatrix}$$

Posons : $\varphi_* = (\varphi_1 + i\,\varphi_2)\,(dx + idy)^2$

$$\psi_* = (\psi_1 + i\,\psi_2)\,(dx + idy)^2$$

φ_* et ψ_* sont deux différentielles quadratiques holomorphes sur $M = D / \Gamma$.

Or, $\varphi\,.\psi = (1 - |z|^2)^4\,(\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\,\psi_2)$

$$= (1 - |z|^2)^4\,\mathrm{Re}(\varphi_*\,\overline{\psi}_*)\,.$$

D'où, sur $\tilde{D}$: $<X_{[g]}\,,\,Y_{[g]}>_{[g]} \;=\; \mathrm{Re}\int_{\tilde{D}} \varphi_*\,\overline{\psi}_*(1 - |z|^2)^2 dx\,dy.$

On retrouve ainsi la définition classique de la métrique de Weil-Petersson.(Ahlfors L.: Some remarks on Teichmüller's space of Riemann surfaces Annals of Maths. Vol.74 n°1 (1961)).

CHAPITRE III

Pour montrer la formule de Belavin- Knizhnik on introduit dans la théorie des cordes "à la Polyakov" un nouvel outil : la théorie des déformations de structures complexes développée par Kodaira et Spencer à la fin des années 50.

Dans ce chapitre on rappelle briévement les résultats principaux de cette théorie . La notion d'une famille holomorphe de variétés complexes compactes de dimension n est l'une des notions fondamentales de la théorie des déformations "à la Kodaira-Spencer". On peut voir une telle famille comme un ensemble des structures complexes $\{M_t | t \in B\}$ sur la même variété différentielle M (§ 3.1).

Si $\{M_t | t \in B\}$ est une famille holomorphe Kodaira-Spencer ont construit un élément du premier groupe de cohomogie de M à valeurs dans le faisceau des germes de sections holomorphes du fibré tangent $T(M_t)$ qui, est en quelque sorte, la dérivée de la structure M_t (déformation infinitésimale, § 3.2).

En fonction de la déformation infinitésimale ils ont construit un élément du second groupe de cohomologie $H^2(M,T(M))$ qui doit être l'élément nul de ce groupe (condition nécessaire d 'existence d'une famille holomorphe. Obstruction à la déformation , § 3.3.1). Ils ont montré que la structure M_t est représentée par une (0,1)-forme à valeurs vectorielles $\varphi(t)$ et d'après l'isomorphisme de Dolbeault la déformation infinitésimale correspond à l'opposé de la dérivée de cette forme (§ 3.3.2.III). De plus la forme $\varphi(t)$ définie une structure complexe sur M qui coïncide avec la structure M_t (théorème de Newlander-Nirenberg, §3.3.2 IV,V).

Le résultat principal de la théorie des déformations de Kodaira-Spencer est le théorème d'existence des déformations dont la démonstration repose sur la construction d'une famille de (0,1)-formes $\{\varphi(t) | t \in B)$ qui déterminent une famille de structures complexes contenant toutes les "petites" déformations de M_t(quelque soit t appartenant à B)(§ 3.3.2.VI).

Ce théorème , que nous adapterons aux surfaces de Riemann, nous fournit la structure locale de la famille universelle de Teichmüller (la famille tautologique au-dessus de cet espace) et sera utilisée dans le chapitre 4.

CHAPITRE III

DEFORMATIONS DES STRUCTURES COMPLEXES [17,18]

3.1 Famille analytique de variétés complexes, compactes de dimension n.

3.2 Déformation infinitésimale

3.3 Existence des déformations.

3.1 : FAMILLE ANALYTIQUE DE VARIETES COMPLEXES COMPACTES DE DIMENSION n.

Soit ω un point du demi-plan de Poincaré ($\omega \in \mathbb{C}$ et Im $\omega > 0$). Considérons le groupe des translations $G_\omega = \{g_{m,n} \mid (m,n) \in \mathbb{Z}^2\}$

$$g_{m,n} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$Z \mapsto Z + m\omega + n$$

G_ω opère sur $\mathbb{C}$ proprement et sans point fixe. L'espace $C_\omega = \mathbb{C} / G_\omega$ est, par définition, le tore complexe de dimension 1.

Dans cette définition la structure complexe dépend du paramètre ω et il est bien connu que les courbes C_ω et $C_{\omega'}$, ω' étant un autre point du demi plan de Poincaré, sont biholomorphes si et seulement si $\omega' = \dfrac{a\omega + b}{c\omega + d}$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4$ et $ad - bc = 1$.

Notons B le demi-plan de Poincaré et considérons la famille $\{C_\omega / \omega \in B\}$.

Le groupe $G = \{g_{m,n} \mid (m,n) \in \mathbb{Z}^2\}$

$$g_{m,n} : \mathbb{C} \times B \to \mathbb{C} \times B$$

$$(Z,\omega) \mapsto (Z + m\omega + n, \omega)$$

opère sur $\mathbb{C} \times B$ et cette action est propre et sans point fixe, donc $\mathcal{M} = \mathbb{C} \times B / G$ est une variété complexe.

La projection canonique de $\mathbb{C} \times B$ sur B induit une application holomorphe π de $\mathcal{M}$ sur B et

$\pi^{-1}(\omega) = \mathbb{C} \times \{\omega\} / G = \mathbb{C} / G_\omega = C_\omega$.

En utilisant (Z,ω) comme coordonnées locales sur $\mathcal{M}$ on déduit que le rang de π est 1.
Ceci nous conduit à la définition suivante :

Soit B un domaine de $\mathbb{C}^m$ et soit $\{M_t \mid t \in B\}$ une famille de variétés complexes, compactes de dimension n

Définition : On dit que $\{M_t \mid t \in B\}$ est une famille analytique (ou M_t dépend holomorphiquement de t) s'il existe une variété complexe $\mathcal{M}$ et une application holomorphe $\pi : \mathcal{M} \to B$ telle que :

a) $\pi^{-1}(t)$ est une sous-variété complexe compacte de $\mathcal{M}$.

b) $\pi^{-1}(t) = M_t$

c) π est de rang maximum.

Conséquences.

A / De la définition résulte qu'il existe sur $\mathcal{M}$ un système de coordonnées locales (U_j , Z_j), $j = 1,\ldots,m+n$ tel que :

1°/ Le recouvrement (U_j) est localement fini

2°/ Pour $P \in \mathcal{M}$

$$Z_j(P) = (Z_j^1(P),\ldots,Z_j^n(P), t_1,\ldots,t_m) \quad \text{où} \quad (t_1,\ldots,t_m) = \pi(P)$$

3°/ $\{P \mapsto (Z_j^1(P),\ldots,Z_j^n(P)) \mid U_j \cap M_t \neq \phi\}$

est un système de coordonnées complexes sur M_t.

4°/ Dans ce système π est donnée par :

$$(Z_j^1,\ldots,Z_j^n, t_1,\ldots,t_m) \mapsto (t_1,\ldots,t_m)$$

5°/ Sur $U_j \cap U_K \neq \phi$ on a :

$$f_{jK} : (Z_K^1,\ldots,Z_K^n, t_1,\ldots,t_m) \mapsto (Z_j^1,\ldots,Z_j^n, t_1,\ldots,t_m)$$

$$Z_j^\alpha = f_{jK}^\alpha (Z_K^1,\ldots,Z_K^n, t_1,\ldots,t_m) \quad , \alpha = 1, 2,\ldots,n$$

B/ D'après les théorèmes généraux des variétés complexes, il existe sur $\mathcal{M}$ un système de coordonnées locales (U_j, Z_j) tel que :

1°/ Le recouvrement (U_j) est localement fini

2°/ $Z_j(U_j) = U_j \times \Delta_j$

où $(U_j)_j$ est une famille de polydisques de $\mathbb{C}^n$ et $(\Delta_j)_j$ une famille de polydisques

de $\mathbb{C}^m$.

En identifiant P et $Z_j(P)$ on peut supposer que

$$\mathcal{M} = \bigcup_j (U_j \times \Delta_j)$$

$(Z_j, t) \in U_j \times \Delta_j$ et $(Z_K, t) \in U_K \times \Delta_K$

(où $t = (t_1, \ldots, t_m)$)

représentent le même point de $\mathcal{M}$ si et seulement si $Z_j = f_{jK}(Z_K, t)$.

On a : $M_t = \bigcup_j (U_j \times \{t\}) = \bigcup_j U_j$

Puisque $\{U_j \mid j = 1,2,\ldots\}$ est un recouvrement localement fini, pour tout $t_0 \in B$ il existe un

nombre fini d'ouverts $U_1, U_2, \ldots, U_l$ tel que $U_j \cap M_{t_0} \neq \phi$ $(j = 1,2,\ldots,l)$

$$M_{t_0} \subset \bigcup_{j=1}^{l} U_j \times \Delta_j$$

et si $\Delta = \bigcap_{j=1}^{l} \Delta_j$, alors $\mathcal{M}_\Delta = \pi^{-1}(\Delta) = \bigcup_{j=1}^{l} U_j \times \Delta$.

Remarques.

Notons $(\mathcal{M}, B, \pi)$ la famille analytique des variétés complexes, compactes de dimension n

$\{M_t \mid t \in B\}$.

1°/ Soit M et N deux variétés complexes compactes de dimension n.

On dit que N est une déformation de M s'il existe une famille analytique $(\mathcal{M},B,\pi)$ telle que :

$M = \pi^{-1}(t_0)$ et $N = \pi^{-1}(t_1)$ pour $(t_0, t_1) \in B\times B$.

2°/ Soit $(\mathcal{M}, B, \pi)$ une famille analytique et soit $t_0 \in B$.

Pour tout $t \in B$ les variétés $M_t = \pi^{-1}(t)$ et $M_{t_0} = \pi^{-1}(t_0)$ sont difféomorphes [17;35]. Autrement dit :

On peut voir une famille analytique $(\mathcal{M},B,\pi)$ comme une famille de structures complexes définies sur la même variété différentielle.

3.2 LA DEFORMATION INFINITESIMALE.

Supposons que B est un domaine de $\mathbb{C}$ contenant 0.

Pour un disque suffisament petit Δ de $\mathbb{C}$ on a :

$$\mathcal{M}_\Delta = \pi^{-1}(\Delta) = \bigcup_j U_j\times \Delta$$

Soit $p \in M_t = \bigcup_{j=1}^{l} U_j$.

Supposons que $p \in U_i \cap U_j \cap U_K$.

On a : $Z_i^\alpha = f_{ij}^\alpha (Z_j^1, \dots, Z_j^n, t)$

$$= f_{iK}^\alpha (Z_K^1, \dots, Z_K^n, t);\ Z_j^\alpha = f_{jK}^\alpha (Z_K^1, \dots, Z_K^n, t).$$

Donc sur $U_j \cap U_i \cap U_K \neq \phi$:

$$f_{iK}^\alpha (Z_K^1,\dots, Z_K^n,t) = f_{ij}^\alpha (f_{JK}^1(Z_K,t),\dots, f_{JK}^n(Z_K,t),t)$$

$$\alpha = 1, 2, \dots,n.$$

En dérivant par rapport à t et en posant

$$\theta_{jK}(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f_{jK}^{\alpha}(Z_K,t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial Z_j^{\alpha}}$$
$$Z_K = f_{Kj}(Z_j,t)$$

on obtient :

$$\theta_{iK}(t) = \theta_{ij}(t) + \theta_{jK}(t) \qquad (1)$$

Pour $i = K$, $f_{KK}{}^{\alpha} = Z_K{}^{\alpha}$, donc $\theta_{KK}(t) = 0$.

Par conséquent :

$$\theta_{Kj}(t) = - \theta_{jK}(t) \qquad (2)$$

D'après (1) et (2) :

$\theta_{jK}(t)$, qui est une section holomorphe au-dessus de $U_j \cap U_K$ du fibré tangent $T(M_t)$, est un 1-cocycle par rapport au recouvrement $\{U_j\}_j$ de M_t.

Définition. Soit Θ_t le faisceau des germes des sections holomorphes du fibré $T(M_t)$.

Par définition $\theta(t) \in H^1(M_t,\Theta_t)$ est la classe de cohomologie du 1-cocycle $\{\theta_{jK}(t)\}$.

On peut facilement montrer que cette définition ne dépend pas du système de coordonnées locales choisi.

Définitions : 1°/ Deux familles analytiques $(\mathcal{M},B,\pi)$ et $(\mathcal{N},B,\pi')$ sont équivalentes s'il existe une application biholomorphe $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ telle que : $\pi = \pi' \circ \Phi$.

2°/ Une famille analytique $(\mathcal{M},B,\pi)$ est dite triviale si elle est équivalente à $(M\times B,\ B,\ P\tau_2)$ où $P\tau_2$ est la projection canonique et $M = \pi^{-1}(t)$ pour $t \in B$.

3°/ Une famille analytique $(\mathcal{M},B,\pi)$ et dite localement triviale si pour tout $t \in B$ il existe un sous-domaine I de B tel que $(\pi^{-1}(I), I, \pi)$ soit triviale.

Les théorèmes suivants montrent que $\theta(t)$ est "la dérivée par rapport à t" de la structure M_t[17].

Théorème 1 : Si la famille analytique ($\mathcal{M}$,B,π) est localement triviale alors pour tout

$t \in B \ \theta(t) = 0$.

Théorème 2. Si pour tout $t \in B$ la dimension de l'espace $H^1(M_t,\Theta_t)$ ne dépend pas de t et si

$\theta(t) = 0$, alors la famille ($\mathcal{M}$,B,π) est localement triviale .

Définition : On dit que $\theta(t)$ est la déformation infinitésimale de la structure M_t.

On écrit : $\dfrac{dM_t}{dt} = \theta(t)$.

• **Le cas m > 1.**

Supposons que $B \subset \mathbb{C}^m$ avec $m > 1$. Soit $\sum_{\lambda=1}^{m} C_\lambda \dfrac{\partial}{\partial t_\lambda} = \dfrac{\partial}{\partial t} \in T_t(B)$ un vecteur tangent en $t \in B$.

Posons :

$$\theta_{jK}(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f^{\alpha}_{jK}(Z_K,t_1,\ldots,t_m)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial Z^{\alpha}_{j}}$$

$$Z_K = f_{Kj}(Z_j, t_1, \ldots, t_m)$$

$\{\theta_{jK}(t)\}$ est un cocycle et soit $\dfrac{\partial M_t}{\partial t} = \theta(t)$ sa classe de cohomologie.

On définit ainsi une application $\mathbb{C}$-linéaire :

$$\rho_t : T_t(B) \to H^1(M_t, \Theta_t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mapsto \frac{\partial M_t}{\partial t}$$

On a :

1°/ Si la famille est localement triviale, alors $\rho_t = 0$ pour tout $t \in B$.

2°/ Si pour tout $t \in B$ la dimension de l'espace $H^1(M_t,\Theta_t)$ ne dépend pas de t et si $\rho_t = 0$, alors la famille est localement triviale [17].

Exemple.

Tore complexe de dimension n :

Soient $\bullet\ \omega_j = (\omega_j^{\,1}, \ldots, \omega_j^{\,n}) \in \mathbb{C}^n, \qquad j = 1,\ldots,2n$

2n vecteurs de $\mathbb{C}^n$ linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$.

$$\bullet\ G = \left\{ \sum_{j=1}^{2n} m_j\omega_j \,\middle|\, m_j \in \mathbb{Z} \right\} \quad ,$$

$\mathbb{T}^n = \mathbb{C}^n / G$ est, par définition, le tore complexe de dimension n et on dit que

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \cdots\cdots & \omega_1^n \\ \omega_2^1 & \cdots\cdots & \omega_2^n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \omega_{2n}^1 & \cdots\cdots & \omega_{2n}^n \end{pmatrix}$$

est la matrice des périodes de $\mathbb{T}^n$.

Supposons que

$$\Omega = \begin{pmatrix} t_1^1 & \cdots\cdots & t_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_n^1 & \cdots\cdots & t_n^n \\ 1 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Posons

$$t = \left(t_\alpha^\beta\right)_{\alpha,\beta = 1,\ldots,n}$$

et

$$\omega_j(t) = (\omega_j^{\,1}(t), \ldots, \omega_j^{\,n}(t))$$

où

$$\omega_j^\beta(t) = \begin{cases} t_j^\beta \ , & \text{si} \quad j = 1,\ldots,n \\ \delta_{j-n}^\beta \ , & \text{si } j = n+1,\ldots,2n \end{cases}$$

Les vecteurs $\omega_j(t)$ sont linéairement indépendants sur **R** si et seulement si $\det(\operatorname{Im} t) \neq 0$.

Soient : • $B = \{t \mid \det(\operatorname{Im} t) > 0\}$

(B est la généralisation du demi-plan de Poincaré)

• $G_t = \left\{ \sum_{j=1}^{2n} m_j \omega_j(t) \mid m_j \in \mathbb{Z} \right\}$

• $M_t = \mathbb{C}^n / G_t$.

La famille $\{M_t \mid t \in B\}$ est une famille analytique , c'est la famille

$$(\mathbb{C}^n \times B / G \ , B \ , \pi)$$

où G est le groupe des automorphismes de $\mathbb{C}^n \times B$ de la forme :

$$(Z,t) \mapsto (z + \sum_{j=1}^{2n} m_j \omega_j(t), t)$$

et π l'application induite par la projection canonique de $\mathbb{C}^n \times B$ sur B.

D'après la structure quotient sur $\mathbb{C}^n \times B / G$, si $\{U_j\}$ est un recouvrement de cette variété, on a

sur $U_j \cap U_K \neq \phi$

$$Z_i \mapsto Z_K + \sum_{j=1}^{2n} m_{iK}^j \omega_j(t) \ , \ m_{iK}^j \in \mathbb{Z}$$

$$Z_i^\beta = Z_K^\beta + m_{iK}^{n+\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} m_{iK}^\alpha t_\alpha^\beta \qquad \beta = 1,\ldots,n$$

Posons

$$f_{iK}^\beta(Z_K,t) = Z_K^\beta + m_{iK}^{n+\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} m_{iK}^\alpha t_\alpha^\beta$$

On définit le 1-cocycle $\{\theta_{iK}(t)\}$ par

$$\theta_{iK}(t) = \sum_{\gamma=1}^{n} \frac{\partial f_{iK}^{\gamma}(Z_K, t)}{\partial t_{\alpha}^{\beta}} \frac{\partial}{\partial Z_i^{\gamma}}$$

$$= m_{iK}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial Z_i^{\beta}}$$

La déformation infinitésimale $\dfrac{\partial M_t}{\partial t_{\alpha}^{\beta}}$ est la classe de cohomologie $\theta_{\alpha}{}^{\beta}(t) \in H^1(M_t, \Theta_t)$ de ce cocycle et si $\dfrac{\partial}{\partial t} = \sum_{\alpha,\beta} C_{\alpha}^{\beta} t_{\alpha}^{\beta}$ alors $\theta(t) = \sum_{\alpha,\beta} C_{\alpha}^{\beta} \dfrac{\partial M_t}{\partial t_{\alpha}^{\beta}}$, $C_{\alpha}^{\beta} \in \mathbb{C}$.

3.3 : EXISTENCE DES DEFORMATIONS.

Soient :
- M une variété complexe, compacte de dimension n.
- B un domaine de $\mathbb{C}^m$ tel que $0 \in B$.

On sait que :

Si $(\mathcal{M}, B, \pi)$ est une famille analytique telle que $\pi^{-1}(0) = M_0 = M$, alors

$$\left(\frac{\partial M_t}{\partial t}\right)_{t=0} \in H^1(M_0, \Theta_0)$$

Problème :

Soit $\theta \in H^1(M, \Theta)$

Existe-t-il une famille analytique $(\mathcal{M}, B, \pi)$ telle que :

$$\pi^{-1}(0) = M \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial M_t}{\partial t}\right)_{t=0} = \theta \ ?$$

2.3.1 Obstruction à la déformation.

Soit $(\mathcal{M}, B, \pi)$ une famille analytique. Supposons que $B \subset \mathbb{C}$ et $0 \in B$.

Soit $(\mathcal{U}_j, Z_j)$ un système de coordonnées locales sur $\mathcal{M}$.

Posons $\theta^{\alpha}_{jK}(Z_j,t) = \left(\dfrac{\partial f^{\alpha}_{jK}(Z_K,t)}{\partial t}\right)$

$Z_K = f_{Kj}(Z_j\ ,t).$

On a :

$$\theta_{jK}(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \theta^{\alpha}_{jK}(Z_j,t) \left(\frac{\partial}{\partial Z^{\alpha}_j}\right)$$

sur $\mathcal{U}_K \cap \mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_i \neq \phi$:

$$f^{\alpha}{}_{iK}(Z_K,t) = f^{\alpha}{}_{ij}\,(f_{jK}\,(Z_K\,,\,t)\,,t\,).$$

En dérivant cette relation par rapport à t on obtient :

(1) $$\theta^{\alpha}_{iK}(Z_i,t) = \theta^{\alpha}_{ij}(Z_i,t) + \sum_{\beta=1}^{n} \left(\frac{\partial Z^{\alpha}_i}{\partial Z^{\beta}_j}\right) \theta^{\beta}_{jK}(Z_j,t).$$

Soit $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)_j$ l'opérateur de dérivation par rapport à t sur $\mathcal{U}_j$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_j = \sum_{\beta} \frac{\partial Z^{\beta}_i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial Z^{\beta}_i} + \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_i$$

Dans (1) on compose par $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)_j$ et on obtient :

$$\theta_{ij}(t)\theta_{iK}{}^{\alpha}(Z_i,t) + \dot{\theta}_{iK}{}^{\alpha}(Z_i,t) = \theta_{ij}(t)\theta_{ij}{}^{\alpha}(Z_i,t) + \dot{\theta}_{ij}{}^{\alpha}(Z_i,t) + \theta_{jK}(t) + \theta_{ij}{}^{\alpha}(Z_i,t) +$$

$$+ \sum_{\beta} \frac{\partial Z^{\alpha}_i}{\partial Z^{\beta}_j} \dot{\theta}^{\beta}_{jK}(Z_j,t)$$

où $\dot{\theta}^{\alpha}_{iK}(Z_i,t) = \dfrac{\partial \theta^{\alpha}_{iK}(Z_i,t)}{\partial t}$.

D'après (1) :

(2) $$\dot\theta^{\alpha}_{ij}(Z_i,t) - \dot\theta^{\alpha}_{iK}(Z_i,t) + \sum_{\beta} \frac{\partial Z^{\alpha}_i}{\partial Z^{\beta}_j} \dot\theta^{\beta}_{jK}(Z_j,t) =$$

$$= \theta_{ij}(t) \sum_{\beta} \frac{\partial Z^{\alpha}_j}{\partial Z^{\beta}_j} \theta^{\beta}_{jK}(Z_j,t) - \theta_{jK}(t)\, \theta^{\alpha}_{ij}(Z_i,t) .$$

DEFINITION 1 : Soit V et U 2 sections holomorphes au-dessus de $U_j \subset M$ du fibré tangent T(M)

$$V = \sum_{\alpha=1}^{m} v^{\alpha}_j \frac{\partial}{\partial Z^{\alpha}_j} \; ; \; U = \sum_{\alpha=1}^{n} u^{\alpha}_j \frac{\partial}{\partial Z^{\alpha}_j}$$

On définit la section [V,U] par :

$$[V,U] = \sum_{\alpha=1}^{n} (V.u^{\alpha}_j - U.v^{\alpha}_j) \frac{\partial}{\partial Z^{\alpha}_j}.$$

Il en résulte que :

(3) : $$\dot\theta_{ij}(t) - \dot\theta_{iK}(t) + \dot\theta_{jK}(t) = [\theta_{ij}(t) , \theta_{jK}(t)]$$

où $$\dot\theta_{ij}(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \dot\theta^{\alpha}_{ij}(Z_i,t) \frac{\partial}{\partial Z^{\alpha}_i}.$$

Pour t = 0 on a :

$$\dot\theta_{ij}(0) - \dot\theta_{iK}(0) + \dot\theta_{jK}(0) = [\theta_{ij}(0) , \theta_{jK}(0)].$$

DEFINITION 2 : Soit $\{\theta_{jK}\} \in Z^1(\mathfrak{U}, \Theta)$ un 1-cocycle relativement à un recouvrement $\mathfrak{U}$ de M . On définit le 2-cocycle $\{\mu_{ijK}\}$ en posant :

$$\mu_{ijK} = [\theta_{ij}, \theta_{jK}].$$

DEFINITION 3 : Soit $\{\theta_{jK}\}$ et $\{\eta_{jK}\}$ deux 1-cocycles relativement à un recouvrement $\mathcal{U}$.

On pose :

$$\xi_{ijK} = \frac{1}{2}([\theta_{ij}, \eta_{jK}] + [\eta_{ij}, \theta_{jK}])$$

Puisque :

$$2\xi_{ijK} = [\theta_{ij} + \eta_{ij}, \theta_{jK} + \eta_{jK}] - [\theta_{ij}, \theta_{jK}] - [\eta_{ij}, \eta_{jK}]$$

$\{\xi_{ijK}\}$ est un 2-cocycle et sa classe de cohomologie est uniquement déterminée

par les classes θ et η.

On pose :

$$[\theta, \eta] = \xi \in H^2(M, \Theta).$$

D'après (3) en posant i = K on a :

$$\overset{\circ}{\theta}_{Kj}(o) + \overset{\circ}{\theta}_{jK}(0) = 0$$

donc $\{\overset{\bullet}{\theta}_{jK}(0)\}$ est une 1-cochaîne telle que $\delta\{\overset{\bullet}{\theta}_{jK}(0)\} = \{\xi_{ijK}\}$ où δ est

l'opérateur cobord et $\xi_{ijK} = [\theta_{ij}(0), \theta_{jK}(0)]$.

On en déduit que : $[\theta(0), \theta(0)] = 0$, autrement dit :

Si $[\theta,\theta] \neq 0$, $\theta \in H^1(M,\Theta)$ il n'existe pas une déformation M_t de M telle que $\left(\frac{\partial M_t}{\partial t}\right)_{t=0} = \theta$. On dit que $[\theta, \theta] \in H^2(M,\Theta)$ est l'obstruction à la déformation de M.

3.3.2 Existence des déformations.

Soit $(\mathcal{M},B,\pi)$ une famille analytique $B \subset \mathbb{C}^m$, $0 \in B$, $\pi^{-1}(0) = M$.

On montrera que :

* La structure complexe M_t est représentée par une (0,1)-forme sur M à valeurs dans le fibré tangent T(M), vérifiant une condition de l'intégrabilité.
* La déformation infinitésimale est représentée par la dérivée par rapport à t de cette forme.
* Notons $\varphi(t)$ la (0,1)-forme qui représente M_t.

  $\varphi(t)$ définit une structure complexe, notée M_φ, sur M telle que

$$M_\varphi = M_t .$$

$3.3.2_I$: La (0,1)-forme $\varphi(t)$:

Soit Δ un polydisque suffisamment petit de $\mathbb{C}^m$.

On a : $\mathcal{M}_\Delta = \pi^{-1}(\Delta) = \bigcup\limits_j U_j \times \Delta.$

Soit $(\xi_j^1, \dots, \xi_j^n, t_1, \dots, t_m) = (\xi_j^\alpha, t)$ un point de $\pi^{-1}(\Delta)$

On peut voir $(\mathcal{M},B,\pi)$ comme une famille de structures complexes définies sur la même variété différentielle $M = \pi^{-1}(0)$.

Plus précisément il existe un difféomorphisme

$$\psi: M \times \Delta \to \pi^{-1}(\Delta)$$

telle que : $\psi(Z,0) = Z$ où Z est un point de M.

Posons $\psi(Z,t) = (\xi_j, t)$ pour $\psi(Z,t) \in U_j \times \Delta$.

On a : $\xi_j = \xi_j(Z,t)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On peut donc considérer que $\mathcal{M}_\Delta$ est une variété complexe dont la structure est définie sur $M \times \Delta$ par le système :

$$(Z,t) \mapsto (\xi_j(Z,t), t)$$

et que M_t est la structure complexe définie sur M par :

$$Z \mapsto (\xi_j\,(Z,t))$$

Or, M est une variété complexe donc, si $(Z^1, \ldots, Z^n)$ sont les coordonnées complexes d'un point Z de M, on a :

$$\det\left(\frac{\partial \xi_j(Z,0)}{\partial Z^\lambda}\right) \neq 0$$

d'où $\quad \det\left(\frac{\partial \xi_j(Z,t)}{\partial Z^\lambda}\right) \neq 0 \quad$, pour t suffisamment petit.

Considérons le système :

$$(1) \qquad \bar{\partial}\xi_j^\alpha(Z,t) = \sum_{\lambda=1}^{n} \varphi_j^\lambda(Z,t)\, \partial_\lambda \xi_j^\alpha(Z,t)$$

$$\alpha = 1, \ldots, n$$

où $\partial_\lambda = \dfrac{\partial}{\partial Z^\lambda}$; $\bar{\partial}_\lambda = \dfrac{\partial}{\partial \bar{Z}^\lambda}$

et $\quad \bar{\partial}\xi_j^\alpha(Z,t) = \sum_{\nu} \bar{\partial}_\nu \xi_j^\alpha(Z,t)\, d\bar{Z}^\nu.$

Soit $\varphi_j^\lambda(Z,t) = \sum_{\nu} \varphi_{j\bar{\nu}}^\lambda(Z,t)\, d\bar{Z}^\nu \qquad \lambda = 1,\ldots,n$

la solution du système.

Pour chaque λ , $\varphi_j^{\lambda}(Z,t)$ est une (0,1)-forme de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{U}_j = \psi^{-1}(U_j \times \Delta)$ et on peut

montrer aisément que sur $\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_K \neq \phi$

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \varphi_j^\lambda(Z,t)\, \partial_\lambda = \sum_{\lambda=1}^{n} \varphi_K^\lambda(Z,t)\, \partial_\lambda$$

Pour $(Z,t) \in \mathcal{U}_j$ on définit

$$\varphi(t) = \varphi(Z,t) = \sum_{\lambda=1}^{n} \varphi_j^{\lambda}(Z,t)\, \partial_\lambda$$

Pour chaque $t \in \Delta$, $\varphi(t)$ est une (0,1)-forme de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur M à valeurs dans le fibré tangent T(M).

D'après (1) :

$$(\bar{\partial} - \varphi(t))\, \xi_j^{\alpha}(Z,t) = 0 \quad , \quad \alpha = 1,\dots,n$$

Puisque les fonctions $\xi_j^{\alpha}(Z,0)$ sont holomorphes par rapport à $Z^1,\dots,Z^n$, $\bar{\partial}\, \xi_j^{\alpha}(Z,0) = 0$.

D'où

$$\varphi(o)=0.$$

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie localement sur M

$(\bar{\partial} - \varphi(t))\, f(\xi_j^1(Z,t), \dots, \xi_j^n(Z,t)) =$

$$\sum_{\alpha} (\bar{\partial} - \varphi(t))\, \xi_j^{\alpha}(Z,t) \frac{\partial f}{\partial \xi_j^{\alpha}} + \sum_{\alpha} \overline{(\bar{\partial} - \varphi(t))\xi_j^{\alpha}(Z,t)}\, \frac{\partial f}{\partial \bar{\xi}_J^{\alpha}}.$$

Or, $(\bar{\partial} - \varphi(t))\, \xi_j^{\alpha}(Z,t) = 0$.

Donc $\displaystyle (\bar{\partial} - \varphi(t))\, f = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{v=1}^{n} \left(\overline{\partial_v \xi_j^{\alpha}} - \sum_{\mu=1}^{n} \varphi_{\bar{v}}^{\mu} \partial_\mu\, \bar{\xi}_j^{\alpha} \right) d\bar{Z}^v \frac{\partial f}{\partial \bar{\xi}_J^{\alpha}}$

où $\displaystyle \varphi(t) = \sum_{\lambda=1}^{n} \varphi^{\lambda}(Z,t)\ \ \partial_\lambda$

$$\varphi^{\lambda}(Z,t) = \sum_{v=1}^{n} \varphi_{\bar{v}}^{\lambda}(Z,t) \quad d\bar{Z}^v$$

On sait que :

$$\bar{\partial}_\mu\ \ \xi_j^{\alpha} = \sum_{\lambda} \varphi_{\bar{\mu}}^{\lambda} \partial_\lambda \xi_j^{\alpha}$$

D'où :

$$(\bar{\partial} - \varphi(t))f = \sum_{\alpha} \sum_{v} \sum_{\lambda} \left(\delta_v^{\lambda} - \sum_{\mu} \varphi_{\bar{v}}^{\mu} \overline{\varphi_{\bar{\mu}}^{\lambda}} \right) \overline{\partial_\lambda \xi_j^{\alpha}}\, d\bar{Z}^v \frac{\partial f}{d\bar{\xi}_j^{\alpha}}$$

On a $\qquad \varphi_{\bar{v}}^{\lambda}(Z,0) = 0.$

Donc, pour t suffisamment petit,

$$\det\left(\delta_{v}^{\lambda} - \sum_{\mu=1}^{n} \varphi_{\bar{v}}^{\mu}(Z,t)\, \overline{\varphi_{\bar{\mu}}^{\lambda}(Z,t)}\right)_{\lambda,v} \neq 0$$

D'autre part : $\det(\partial_\lambda \xi_j^{\alpha}) \neq 0.$

Il en résulte que :

$$(\bar{\partial} - \varphi(t))f = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{d\bar{\xi}_j^{\alpha}} = 0 \quad , \quad \alpha = 1,\ldots,n$$

autrement dit :

<u>la fonction</u> f <u>est holomorphe par rapport à la structure</u> M_t <u>si et seulement si</u>

$$(\bar{\partial} - \varphi(t))f = 0$$

<u>On dit que la structure complexe</u> M_t <u>est représentée par la forme</u> $\varphi(t)$

3.3.2 II La condition d'intégrabilité.

On a $\bar{\partial}\xi_j^{\alpha} = \sum_{\lambda=1}^{n} \varphi^{\lambda}\partial_{\lambda}\xi_j^{\alpha}$

où $\varphi^{\lambda} = \varphi^{\lambda}(Z,t)$

et $\qquad \xi^{\alpha}_{\ j} = \xi^{\alpha}_{\ j}(Z,t).$

D'où

$$0 = \overline{\partial\partial}\ \xi_j^{\alpha} = \bar{\partial} \sum_{\lambda=1}^{n} \varphi^{\lambda}\partial_{\lambda}\xi_j^{\alpha}$$

$$= \sum_{\lambda} \bar{\partial}\varphi^{\lambda}\partial_{\lambda}\xi_j^{\alpha} - \sum_{\lambda} \varphi^{\lambda}\wedge\bar{\partial}\partial_{\lambda}\xi_j^{\alpha}$$

D'où

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \bar{\partial}\varphi^{\lambda}\partial_{\lambda}\xi_j^{\alpha} = \sum_{\mu} \varphi^{\mu}\wedge\bar{\partial}\partial_{\mu}\xi_j^{\alpha}.$$

Or,

$$\bar{\partial}_{\nu}\xi_j^{\alpha} = \sum_{\lambda} \varphi_{\bar{\nu}}^{\lambda}\partial_{\lambda}\xi_j^{\alpha}$$

Donc $\bar{\partial}\partial_{\mu}\xi_j^{\alpha} = \sum_{\nu=1}^{n} \bar{\partial}_{\nu}\partial_{\mu}\xi_j^{\alpha}d\bar{Z}^{\nu}$

$$= \sum_{\nu} \partial_{\mu}\bar{\partial}_{\nu}\xi_j^{\alpha}d\bar{Z}^{\nu}$$

$$= \sum_{\nu} \left(\partial_{\mu}\sum_{\lambda} \varphi_{\bar{\nu}}^{\lambda}\partial_{\lambda}\xi_j^{\alpha}\right)d\bar{Z}^{\nu}$$

$$= \sum_{\lambda}\sum_{\nu} \partial_{\mu}\varphi_{\bar{\nu}}^{\lambda}d\bar{Z}^{\nu}\partial_{\lambda}\xi_j^{\alpha} + \sum_{\lambda} \varphi^{\lambda}\partial_{\mu}\partial_{\lambda}\xi_j^{\alpha}$$

En posant :

$$\partial_{\mu}\, \varphi^{\lambda}(Z,t) = \sum_{\nu} \partial_{\mu}\varphi_{\bar{\nu}}^{\lambda}(Z,t)d\bar{Z}^{\nu}$$

on obtient :

$$\sum_{\mu} \varphi^{\mu}\wedge \bar{\partial}\, \partial_{\mu}\xi_j^{\alpha} = \sum_{\lambda}\left(\sum_{\mu} \varphi^{\mu}\wedge\partial_{\mu}\varphi^{\lambda}\right)\partial_{\lambda}\, \xi_j^{\alpha} +$$

$$+\sum_{\lambda}\sum_{\mu} \varphi^{\mu}\wedge \varphi^{\lambda}\partial_{\mu}\partial_{\lambda}\xi_j^{\alpha}$$

Puisque $\varphi^{\mu}\wedge\varphi^{\lambda} = -\varphi^{\lambda}\wedge\varphi^{\mu}$, le dernier terme de cette égalité est nul.

Donc

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \bar{\partial}\varphi^{\lambda}\partial_{\lambda}\xi_j^{\alpha} = \sum_{\lambda=1}^{n}\left(\sum_{\mu=1}^{n} \varphi^{\mu}\wedge\partial_{\mu}\varphi^{\lambda}\right)\partial_{\lambda}\, \xi_j^{\alpha}$$

Comme $\det(\partial_{\lambda}\, \xi_j^{\alpha}) \neq 0$

alors $\bar{\partial}\varphi^{\lambda}(t) = \sum_{\mu=1}^{n} \varphi^{\mu}(t) \wedge \partial_{\mu}\varphi^{\lambda}(t)$ (1)

DEFINITION : Soient φ et ψ deux (0-1)formes à valeurs dans le fibré tangent T(M). On définit une (0-2)forme à valeurs dans T(M), notée $[\varphi , \psi]$, par :

$$[\varphi,\psi] = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} (\varphi^{\mu} \wedge \partial_{\mu}\psi^{\lambda} + \psi^{\mu}\wedge\partial_{\mu}\varphi^{\lambda})\partial_{\lambda}$$

De cette définition et de (1) on déduit :

$$\bar{\partial}\varphi(t) = \frac{1}{2} [\varphi(t), \varphi(t)] \qquad \text{(condition d'intégrabilité)}$$

où $\bar{\partial}\varphi(t) = \sum_{\lambda} \bar{\partial}\varphi^{\lambda}\partial_{\lambda}$.

3.3.2 III La déformation infinitésimale et l'isomorphisme de Dolbeault.

Soient
- $L^{0,1}$ (T) l'espace des (0,1)-formes de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ et à valeurs dans T(M) = T.
- $\mathcal{L}^{0,1}$ (T)le sous-espace des (0,1)-formes fermées pour l'opérateur $\bar{\partial}$.

D'après l'isomorphisme de Dolbeault $H^1(M,\Theta)$ est isomorphe à $H^{0,1}_{\bar{\partial}}(T) = \dfrac{\mathcal{L}^{0,1}(T)}{\bar{\partial}\, L^{0,0}}$ [35].

Soit $\delta^* : H^1 (M,\Theta) \to H^{0,1}_{\bar{\partial}}(T)$ cet isomorphisme.

δ^*est défini de la façon suivante :

Soit $[\theta_{jK}]\in H^1 (M,\Theta)$

Si, sur $U_K \cap U_j$ $\theta_{jK} = \xi_K - \xi_j$ où $\{ \xi_K\}$ est une 0-cochaîne

alors $\delta^*[\theta_{jK}] = [\bar{\partial}\xi_j] = [\eta]$.

Proposition : Si θ_{jK} définit la déformation infinitésimale, alors

$$\eta = - \sum_{\alpha=1}^{n} \bar{\partial}\left(\left.\frac{\partial\xi_j^{\alpha}(Z,t)}{\partial t}\right|_{t=0}\right) \frac{\partial}{\partial\xi_j^{\alpha}} .$$

En effet :

Soit $\dot{\xi}_j^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial t}\,\xi_j^\alpha(Z,t)\right)_{t=0}$

Sur $U_K \cap U_j$ on a :

$$\xi_j^\alpha = f_{jK}^\alpha(\xi_K(Z,t),t))$$

D'où : $$\dot{\xi}_j^\alpha = \sum_\beta \frac{\partial f_{jK}^\alpha}{\partial \xi_K^\beta}\,\dot{\xi}_K^\beta + \left(\frac{\partial f_{jK}^\alpha}{\partial t}\right)_{t=0}$$

Donc

$$\theta_{jK} = \sum_\alpha \frac{\partial f_{jK}^\alpha}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_j^\alpha}\right)$$

$$= \sum_\alpha \dot{\xi}_j^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j^\alpha}\right) - \sum \dot{\xi}_K^\beta \frac{\partial \xi_j^\alpha}{\partial \xi_K^\beta}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_j^\alpha}\right)$$

$$= \sum \dot{\xi}_j^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j^\alpha}\right) - \sum \dot{\xi}_K^\beta \frac{\partial}{\partial \xi_K^\beta}$$

Posons $\omega_K = - \sum_\beta \dot{\xi}_K^\beta \frac{\partial}{\partial \xi_K^\beta}$

On a : $\theta_{jK} = \omega_K - \omega_j$

D'où $$\eta = \bar{\partial}\omega_j = - \sum_\alpha \bar{\partial}\dot{\xi}_j^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j^\alpha}\right).$$

Proposition : $\eta = - \dot{\varphi}$.

En effet : $\bar{\partial}\xi_j^\alpha(Z,t) = \sum_{\lambda=1}^{n} \varphi^\lambda(Z,t)\,\partial_\lambda \xi_j^\alpha\,(Z,t)$

D'où :

$$\bar{\partial}\overset{\circ}{\xi}{}_j^{\alpha} = \sum_{\lambda=1}^{n} \dot{\varphi}^{\lambda}\, \partial_{\lambda}\xi_j^{\alpha} \quad (\varphi^{\lambda}(Z,0) = 0)$$

Donc

$$\eta = -\sum_{\alpha}\left(\sum_{\lambda} \dot{\varphi}^{\lambda} \frac{\partial \xi_j^{\alpha}}{\partial Z^{\lambda}}\right)\frac{\partial}{\partial \xi_j^{\alpha}}$$

$$= -\sum_{\lambda} \dot{\varphi}^{\lambda} \frac{\partial}{\partial Z^{\lambda}}$$

$$= -\dot{\varphi}\,.$$

Donc $\delta^{*}\left(\frac{\partial M_t}{\partial t}\right)_{t=0}$ est représentée par la (0,1)-forme fermée $-\left(\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t}\right)_{t=0}$.

Exemple :

On considère la famille de tores complexes de dimension n définie précédemment.

On a montré que :

$$\theta_{iK}(t) = m_{iK}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial Z_i^{\beta}}\,.$$

D'autre part :

$$\sum_{\alpha=1}^{n} m_{iK}^{\alpha}\left(t_{\alpha}^{\beta} - \bar{t}_{\alpha}^{\beta}\right) = \bar{Z}_K^{\beta} - Z_K^{\beta} - \bar{Z}_i^{\beta} + Z_i^{\beta}\,.$$

Or, $\det\left(t_{\alpha}^{\beta} - \bar{t}_{\alpha}^{\beta}\right) \neq 0$.

Soit $\left(U_{\alpha}^{\beta}\right)_{\alpha,\beta}$ la matrice inverse de $\left(t_{\alpha}^{\beta} - \bar{t}_{\alpha}^{\beta}\right)_{\alpha,\beta}$

On a :

$$m_{iK}^{\alpha} = \sum_{\gamma=1}^{n}\left(\bar{Z}_K^{\gamma} - Z_K^{\gamma}\right) U_{\gamma}^{\alpha} - \sum_{\gamma=1}^{n}\left(\bar{Z}_i^{\gamma} - Z_i^{\gamma}\right) U_{\gamma}^{\alpha}$$

En posant :

$$\psi_K = \sum_{\gamma=1}^{n} \left(\overline{Z}_K^\gamma - Z_K^\gamma\right) U_\gamma^\alpha \frac{\partial}{\partial Z^\beta}$$

on obtient :

$\theta_{iK}(t) = \psi_K - \psi_i$

Or, $\overline{\partial} Z_K^\gamma = d\overline{Z}^\gamma$ et $\overline{\partial} Z_K^\gamma = 0$.

Donc

$$\varphi(t) = \overline{\partial}\psi_K = \sum_{\gamma=1}^{n} U_\gamma^\alpha \, d\overline{Z}^\gamma \frac{\partial}{\partial Z^\beta} .$$

3.3.2 IV : Le théorème de Newlander-Nirenberg.

Soit (U,Z) une carte de M (t fixé).

Posons $L_\nu = \overline{\partial}_\nu - \sum_{\lambda=1}^{n} \varphi_{\bar\nu}^{\lambda} \partial_\lambda$, $\nu = 1, \ldots, n$.

L'équation $\left(\overline{\partial} - \sum_{\lambda=1}^{n} \varphi^\lambda \partial_\lambda\right) f = 0$ équivaut à : $L_\nu f = 0$, $\nu = 1,\ldots, n$..

De $\det\left(\delta_\nu^\lambda - \sum_\mu \varphi_{\bar\nu}^{\mu} \overline{\varphi_{\bar\mu}^{\lambda}}\right) \neq 0$ (1)

résulte que les opérateurs $L_1, \ldots, L_n$, $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_n$ sont linéairement indépendants.

D'autre part : $\overline{\partial}\varphi(t) = \frac{1}{2} [\varphi(t), \varphi(t)]$ (2)

équivaut à : $L_\tau L_\nu - L_\nu L_\tau = 0$ (3)

$\tau, \nu = 1,\ldots, n$.

Donc (3) est une condition nécessaire pour que le système $L_\nu f = 0$, $\nu = 1,\ldots,n$ ait n solutions de classe $\mathcal{C}^\infty$, $f = \xi_j^\alpha(Z)$, $\alpha = 1,\ldots, n$ telles que $\det(\partial_\lambda \xi_j^\alpha) \neq 0$.

La réciproque résulte du théorème de Newlander-Nirenberg :

THEOREME : Soit $\varphi = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{v=1}^{n} \varphi_{\bar{v}}^{\lambda}\, d\bar{Z}^{v} \partial_{\lambda}$ une (0,1)-forme à valeurs dans le fibré tangent

définie et de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur un domaine U de $\mathbb{C}^{n}$.

Posons $L_v = \bar{\partial}_v - \sum_{\lambda} \varphi_{\bar{v}}^{\lambda} \partial_{\lambda}$.

Si **(a)** $L_1 , \ldots , L_n , \bar{L}_1, \ldots , \bar{L}_n$ sont linéairement indépendants.

(b) $L_{\tau} L_{v} - L_{v} L_{\tau} = 0 \quad , v , \tau = 1,\ldots,n$

alors pour tout $Z \in U$ il existe n fonctions $\xi_j^{\alpha}(Z)$, $\alpha = 1,\ldots,n$, définies et de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur un voisinage de Z telles que :

(c) $L_v \xi_j^{\alpha} = 0 \quad , \quad v = 1,\ldots, n$

(d) $\det \dfrac{\partial(\xi^{1},\ldots,\xi^{n}, \bar{\xi}^{1},\ldots,\bar{\xi}^{n})}{\partial(Z^{1},\ldots,Z^{n} , \bar{Z}^{1},\ldots,\bar{Z}^{n})} \neq 0.$

(Newlander-Nirenberg : Complex analytic coordinates in almost-complex manifolds. Annals of Math.65 (1957), 391-404).

Remarques.

1°/ $$\det \frac{\partial(\xi^1,\ldots,\xi^n,\bar\xi^1,\ldots,\bar\xi^n)}{\partial(Z^1,\ldots,Z^n,\bar Z^1,\ldots,\bar Z^n)} = \det\left(\delta_\nu^\lambda - \sum_\mu \varphi_{\bar\nu}^\mu \overline{\varphi_{\bar\mu}^\lambda}\right)\left|\det\frac{\partial(\xi^1,\ldots,\xi^n)}{\partial(Z^1,\ldots,Z^n)}\right|^2$$

donc (d) implique $\det(\partial_\lambda \xi^\alpha) \neq 0$.

2°/ Si (1) est vérifié, alors (3) est une condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité du système $L_\nu f = 0 \quad \nu = 1,\ldots,n$.

3.3.2.V : La structure complexe M_φ.

Soient

- $\varphi = \sum_\lambda \varphi^\lambda \partial_\lambda$ une (0,1)-forme à valeurs dans le fibré tangent T(M).
- $\det\left(\delta_\nu^\lambda - \sum_\mu \varphi_{\bar\nu}^\mu \overline{\varphi_{\bar\mu}^\lambda}\right) \neq 0$
- $\bar\partial\varphi = \frac{1}{2}[\varphi,\varphi]$
- $\{U_j\}_{j=1}^{\lambda}$ un recouvrement suffisamment fin de M.

Sur chaque U_j, d'après le théorème de Newlander-Nirenberg, il existe n fonctions $\xi_j^\alpha = \xi_j^\alpha(Z)$

$\alpha = 1,\ldots,n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que les conditions (c) et (d) soient vérifiées.

Puisque $\det \frac{\partial(\xi^1,\ldots,\xi^n,\bar\xi^1,\ldots,\bar\xi^n)}{\partial(Z^1,\ldots,Z^n,\bar Z^1,\ldots,\bar Z^n)} \neq 0$ les fonctions $\xi_j : Z \mapsto (\xi_j^1(Z)\ ,\ \ldots\ ,\xi_j^n\ (Z))$

définissent une structure différentielle sur M. Or, une fonction f définie sur $U \subset M$ est holomorphe par rapport à $(\xi_j^1(Z)\ ,\ \ldots\ ,\xi_j^\nu(Z))$ si $(\bar\partial - \varphi(t))f = 0$.

Donc sur $U_j \cap U_K \neq 0$, les fonctions $\xi_j^\alpha(Z)$ sont holomorphes par rapport à

$(\xi_K^1(Z)\ ,\ \ldots\ ,\xi_K^\nu(Z))$.

D'où $\{U_j, \xi_j\}$ est une structure complexe, notée M_φ , sur M.

3.3.2.VI Existence des déformations [18].

Soient • M une variété complexe, compacte de dimension n telle que $H^2(M,\Theta) = 0$

• $\beta_\lambda \in \mathcal{L}^{0,1}_{\bar\partial}(T)$ $\lambda = 1,\ldots,m$

m-formes de type (0,1) fermées pour l'opérateur $\bar\partial$ et à valeurs dans le fibré tangent de M, telles que la famille $\{\beta_1,\ldots,\beta_m\}$ représente une base de $H^1(M,\Theta)$.

La démonstration du théorème de l'existence repose sur la construction d'une famille $\{\varphi(t) \mid t \in \Delta\}$ telle que :

• Δ est un polydisque suffisamment petit de $\mathbb{C}^m$ tel que $o \in \Delta$.

• pour tout $t \in \Delta$. $\varphi(t)$ est une (0,1)-forme de classe C^∞ sur M, à valeurs dans T(M).

• pour tout $t \in \Delta$.

$$\bar\partial\varphi(t) = \frac{1}{2}[\varphi(t), \varphi(t)]$$

• $\varphi(o) = 0$

• $\left(\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_\lambda}\right)_{t=0} = \beta_\lambda \qquad \lambda = 1,\ldots,m$

Puisque Δ est suffisamment petit on peut supposer que :

$$\det\left(\delta^\lambda_\nu - \sum_\mu \varphi^\mu_\nu\, \overline{\varphi}^\lambda_\mu\right) \neq 0.$$

Donc chaque $\varphi(t)$ détermine une structure complexe $M_{\varphi(t)}$ sur M.

Montrons que $\{M_{\varphi(t)} \mid t \in \Delta\}$ est une famille analytique.

On considère $\varphi = \varphi(t)$ comme (0,1)-forme sur $M \times \Delta$

$$\varphi = \varphi(t) = \sum_{\lambda=1}^{n}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\varphi^\lambda_\nu\, d\bar Z^\nu + \sum_{\mu=1}^{m}\varphi^\lambda_{\overline{n+\mu}}\, d\bar t_\mu\right)\frac{\partial}{\partial Z^\lambda} +$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{m} \varphi^{n+\mu} \frac{\partial}{\partial t_\mu}$$

où $\varphi^{n+\mu} = \varphi^{\lambda}_{\overline{n+\mu}} = 0 \quad , \ \mu = 1,\ldots,m.$

Par construction $\varphi^{\lambda}_{\bar{v}} = \varphi^{\lambda}_{\bar{v}}(Z,t)$ sont holomorphes par rapport à $t_1, \ldots, t_m$ donc $\frac{\partial \varphi^{\lambda}_{\bar{v}}}{\partial \bar{t}_\mu} = 0.$

$$\bar{\partial}\varphi = \sum_{\lambda,v} \left(\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial \varphi^{\lambda}_{\bar{v}}}{\partial \bar{Z}^{\beta}} d\bar{Z}^{\beta} + \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial \varphi^{\lambda}_{\bar{v}}}{\partial \bar{t}_\mu} \right) \wedge d\bar{Z}^{v} \frac{\partial}{\partial Z^{\lambda}}$$

Notons par $\bar{\partial}\varphi(t)$ la $\bar{\partial}$-dérivée en considérant $\varphi(t)$ comme une forme sur M.

On a : $\bar{\partial}\varphi(t) = \bar{\partial}\varphi$

De même $[\varphi,\varphi] = [\varphi(t),\varphi(t)]$.

Donc la forme φ (définie sur $M \times \Delta$) vérifie $\bar{\partial}\varphi = \frac{1}{2}[\varphi,\varphi]$.

Posons $L_v = \frac{\partial}{\partial \bar{Z}_v} - \sum_{\lambda=1}^{n} \varphi^{\lambda}_{\bar{v}}(Z,t) \frac{\partial}{\partial Z^{\lambda}}$

$(\bar{\partial} - \varphi)f = 0$ équivaut à :

$$\begin{cases} L_v f = 0 & v = 1,\ldots,n \\ \frac{\partial}{\partial \bar{t}_\mu} f = 0 & \mu = 1,\ldots,m \end{cases}$$

$$L_1,\ldots,L_n , \bar{L}_1,\ldots,\bar{L}_n , \frac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_m}, \frac{\partial}{\partial \bar{t}_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \bar{t}_m}$$

sont linéairement indépendants.

Donc φ détermine une structure complexe sur $M \times \Delta$.

Si $\{U_j\}_{j=1}^{\lambda}$ est un recouvrement localement fini et suffisamment fin de M, sur chaque $U_j \times \Delta$ on a m+n solutions $f = \xi_j^{\beta}(Z,t)$, $\beta = 1, \ldots, n+m$ et $\{U_j \times \Delta ; \xi_j\}$ est une structure complexe sur $M \times \Delta$.

$$\xi_j : (Z,t) \mapsto (\xi_j^1 (Z,t),\ldots, \xi_j^{n+m}(Z,t)).$$

Puisque $f = t_\mu$, $\mu = 1,\ldots,m$ sont solutions du système on peut supposer que

$$\xi_j^{n+\mu} (Z,t) = t_\mu \quad , \ \mu = 1,\ldots,m$$

et on a :

$$\xi_j : (Z,t) \mapsto (\xi_j^1 (Z,t),\ldots, \xi_j^n(Z,t),\ t_1,\ \ldots,\ t_m).$$

Soit π la projection canonique de $M \times \Delta$ sur Δ

$$\pi : M \times \Delta \to \Delta$$

$$(\xi_j^1 (Z,t),\ldots, \xi_j^n(Z,t)t_1 \ , \ldots, t_m) \mapsto (t_1 \ , \ldots, t_m)$$

Pour tout $t \in \Delta$, $\pi^{-1}(t)$ est la structure complexe sur M définie par :

$$(U_j \,; Z \mapsto (\xi_j^1 (Z,t),\ldots, \xi_j^n(Z,t)).$$

Or, $\xi_j^\beta (Z,t)$, $b = 1 ,\ldots, n$ sont solutions de $(\bar{\partial} - \varphi(t))f = 0$.

Donc $\pi^{-1}(t) = M_{\varphi(t)}$.

On en déduit que $\{M_{\varphi(t)} \mid t \in \Delta\}$ est la famille analytique $\{ M\times\Delta,\ \Delta,\ \pi\}$.

D'où :

THEOREME : Soit M une variété complexe, compacte de dimension n telle que $H^2(M,\Theta) = 0$.

Il existe une famille analytique $(\mathcal{M},B,\pi)$ où B est un domaine de $\mathbb{C}^m$

($m = \dim H^1 (M,\Theta)$, $O \in B$) telle que :

(i) $\pi^{-1}(0) = M$

(ii) L'application

$$\rho_0 : T_0(B) \to H^1 (M,\Theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mapsto \left(\frac{\partial M_t}{\partial t}\right)_{t=0}$$

est un isomorphisme.

Remarque :

Soit $(M \times \Delta, \Delta, \pi)$ la famille définie précédemment.

Pour $t = 0$, $\left(\frac{\partial M_t}{\partial t_\lambda}\right)_{t=0} \in H^1(M_0,\Theta_0)$, $(\lambda = 1,\ldots,m)$ sont linéairement indépendants.

D'après Kodaira-Spencer

si, pour tout $t \in \Delta$, $\dim H^1(M_t,\Theta_t) = m$ alors $\left(\frac{\partial M_t}{\partial t_\lambda}\right) \in H^1(M_t,\Theta_t)$, $(\lambda = 1,\ldots,m)$ sont

linéairement indépendants pour $|t| < \varepsilon$ et ε suffisamment petit.

Donc la famille $(M\times \Delta_\varepsilon , \Delta_\varepsilon , \pi)$, où $\Delta_\varepsilon = \{t \in \Delta \mid |t| < \varepsilon \}$, est telle que

(i) $\pi^{-1}(0) = M$

(ii) $\forall t \in \Delta_\varepsilon$, l'application

$$\rho_t : T_t(\Delta_\varepsilon) \rightarrow H^1(M_t, \Theta_t)$$

est un isomorphisme.

CHAPITRE IV

Dans ce chapitre on donne une démonstration de la formule de Belavin-Knizhnik: on montre que l'amplitude de probabilité de la corde bosonique libre à l'ordre p (p>1) est donnée, à un facteur "infini" près, par :

$$Z_p = C \int_{\mathcal{T}_p(M)} \| S \|_{L^2}^2 \xi \wedge \bar{\xi}$$

où C est une constante complexe.

$\mathcal{T}_p(M)$ est l'espace de Teichmüller de la surface "source" M.

s est une section holomorphe d'un fibré holomorphe au-dessus de l'espace de Teichmüller.

ξ est une section holomorphe du fibré canonique de l'espace de Teichmüller.

On prouve aussi que, si p>2, on a :

$$Z_p = C \int_{R_p(M)} \| S \|_{L^2}^2 \xi \wedge \bar{\xi}$$

où $R_p(M)$ est l'espace de modules de Riemann (variété quasi-projective).

Pour cela on utilise :

- un résultat de D'Hoker-Phong concernant Z_p (§ 4.1)
- les résultats du Chapitre II
- le théorème d'existence des déformations que nous adaptons aux surfaces de Riemann (§ 4.4.1)
- la théorie du fibré déterminant à la façon de Bismut-Gillet-Soulé (§ 4.3.1)
- la métrique de Quillen définie sur ce fibré (§ 4.3.1)
- l'annulation de la courbure d'un fibré déterminant particulier (§§ 4.4.1; 4.4.3)
- un théorème de Powell concernant le groupe modulaire de M (§ 4.4.3).

CHAPITRE IV

LA MESURE DE POLYAKOV

4.1. La quantification "à la Polyakov" d'une corde bosonique.

Soient :
- M une surface compacte orientée sans bord de genre p (p > 1)
- g une métrique Riemannienne sur M.
- $x : M \to \mathbb{R}^D$ un plongement de M dans l'espace euclidien de dimension D.

L'action de Polyakov est donnée par :

$$S(g,x) = \frac{1}{2} \int_M \sum_{\mu=1}^{D} g^{ab} \frac{\partial x_\mu}{\partial \xi_a} \frac{\partial x_\mu}{\partial \xi_b} \sqrt{\det(g)}\, d^2\xi.$$

$$= \frac{1}{2} \int_M \sum_{i=1}^{D} \| \nabla x_i \|^2 \, d\mu_g$$

où $\|.\|$ $d\mu_g$ et ∇ désignent la norme l'élément d'aire et le gradient associés à la métrique g. [8,10,27]

S(g,x) n'est autre que l'énergie de l'application x de la variété riemannienne (M,g) dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^D$.

Pour quantifier la théorie classique décrite par l'action S(g,x), Polyakov considère l'intégrale fonctionnelle :

$$Z_p = \int e^{-S(g,x)} DgDx \quad [8,10,27]$$

Dans cette expression, le domaine d'intégration est le produit de l'espace de toutes les métriques g sur M et de l'espace des plongements de M dans $\mathbb{R}^D$. Dg Dx désigne une "mesure" sur cet espace.Z_p représente alors la contribution d'ordre p dans la fonction de partition Z de la corde de Polyakov

$$Z = \sum_{p \geq 0} Z_p$$

Celle-ci décrit les interactions "vide-vide", dûs à la création et à l'annihilation des cordes fermées.

Comme l'action S(g,x) est invariante par reparamétrisation et transformation de Weyl, il faut, pour quantifier cette théorie construire une "mesure naturelle" sur le quotient de l'espace $\{g | g$ métrique sur $M\} \times \{x | x$ plongement de M dans $\mathbb{R}^D\}$ par ces symétries Par ailleurs, si Dx est une mesure invariante par translation, l'intégrale $\int e^{-S(g,x)} Dx$ s'évalue facilement :

c'est une intégrale gaussienne, car S est quadratique en x.

Il s'agit donc de construire une mesure naturelle DgDx à partir de laquelle, par intégration en x, on obtienne une mesure sur l'ensemble des métriques compatible avec l'action du groupe des difféomorphismes et des transformations de Weyl.

Ce type de construction est connu en théorie quantique des champs sous le nom de procédure de Faddeev-Popov. On ne sait réaliser ce programme de façon naturelle que lorsque D=26 (anomalie conforme) [10].

D'après d'Hoker-Phong .

Si D = 26

$$Z_p = \int_{\mathcal{T}_p(M)} \left[\frac{(\det'_\zeta \Delta_0)_g}{\mathrm{Vol}(g)} \right]^{-13} (\det'_\zeta \Delta_2)_g \; d(w\text{-}P) \qquad [10]$$

(à une constante "infinie" près).

où $\bullet\mathcal{T}_P(M)$ désigne l'espace de Teichmüller de M,

• d(W-P) la forme volume de Weil-Petersson

$$\bullet\ \mathrm{Vol}\,(g) = \int_M \sqrt{\det(g)}\, d^2\xi$$

4.2 : Déterminants régularisés.

Rappelons la relation entre métriques riemanniennes et structures complexes sur M.

Soit g une métrique riemannienne $\mathcal{C}^\infty$ sur M. D'après le "théorème des coordonnées isothermes", tout point de M admet un voisinage ouvert U sur lequel sont définies les coordonnées locales $\mathcal{C}^\infty$, (x,y), orientées positivement, et une fonction $\mathcal{C}^\infty$ réelle ψ, telle que, sur U :

$$g = e^{\psi}\,(dx \otimes dx + dy \otimes dy).$$

Les changements de cartes entre les cartes complexes sur M de la forme (U, x + iy) sont holomorphes.

Ces cartes définissent donc une structure de courbe holomorphe sur M. Inversement, toute structure complexe sur M, compatible avec son orientation et sa structure $\mathcal{C}^\infty$, provient d'une métrique riemannienne $\mathcal{C}^\infty$ sur M.

De plus, deux telles métriques g et g' définissent la même structure complexe si et seulement si il existe $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ telle que : $g' = e^{\varphi} g$.

Notons X la courbe holomorphe ainsi construite.

On a un isomorphisme de fibrés vectoriels réels sur M : ($Z = x + iy$ désigne une coordonnée holomorphe locale; $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$)

$$\mathrm{Re} : T_{\mathbb{C}}X \simeq T_{\mathbb{R}}M$$

$$a\frac{\partial}{\partial Z}. \mapsto \frac{1}{2}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

La métrique g sur $T_{\mathbb{R}}M$ devient par cet isomorphisme une métrique hermitienne sur $T_{\mathbb{C}}X$.

Expliquons $\det'_\zeta \Delta_0$ et $\det'_\zeta \Delta_2$.

Soit M une variété $\mathcal{C}^\infty$ compacte, de dimension d, munie d'une métrique riemannienne g, et soit E un fibré vectoriel sur M, $\mathcal{C}^\infty$, de rang fini, muni d'une métrique (,).

Au moyen de ces métriques, on peut définir le produit scalaire de deux sections sur M de E, S_1 et S_2, par la formule :

$$<S_1,S_2> = \int_M (S_1(x),S_2(x))\,\mu(x)$$

où $\mu(x)$ désigne l'élément de volume sur M défini par la métrique g.

Grâce à ce produit scalaire, on peut construire l'espace de Hilbert $L^2(M,E)$ des sections L^2 de E sur M.

Soit P un opérateur différentiel elliptique d'ordre $p > 0$, agissant sur les sections $\mathcal{C}^\infty$ de E sur M.

Supposons P positif, c'est-à-dire que, $\forall s \in \mathcal{C}^\infty(M,E)$, $<S,PS> \geq 0$.

En tant qu'opérateur non borné sur $L^2(M,E)$, de domaine l'espace $\mathcal{C}^\infty(M,E)$, P est essentiellement autoadjoint.

Le spectre de sa fermeture est un ensemble fermé discret de réels positifs, chacun de multiplicité fini. On notera $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des valeurs propres de P, en ordre croissant, répétées suivant leur multiplicité.

Il est possible de définir le déterminant régularisé de P restreint à $(\mathrm{Ker}\ P)^\perp$, $\det'_\zeta P$, par le procédé suivant, connu sous le nom de régularisation zêta (Ray-Singer : [30]).

On remarque que, formellement :

$$\frac{d}{ds}\left(\sum_{\lambda_n\neq 0} \lambda_n^{-S}\right)_{|S=0} = -\sum_{\lambda_n\neq 0} \log \lambda_n$$

Or, la série de Dirichlet :

$$\zeta_P(S) = \sum_{\lambda_n\neq 0} \lambda_n^{-S}$$

convergente si $\mathrm{Re}\,s > \frac{d}{p}$, définit une fonction holomorphe sur ce demi-plan et admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$, holomorphe en O (Seeley, [31]). Cela conduit à définir $\det'_\zeta P$ par l'égalité :

$$\det'_\zeta P = \exp(-\zeta'_P(o))$$

Soient M une surface de Riemann compacte et E un fibré vectoriel holomorphe sur M de rang r. Munissons $T_{\mathbb{C}} M$, le fibré tangent holomorphe de M, et E de métriques hermitiennes h et h'.

La métrique h détermine une métrique riemannienne sur M, et une métrique hermitienne sur le fibré $\overline{\omega}$ des formes de type (0,1) sur M.

Considérons l'opérateur " $\bar{\partial}$ à coefficients dans E"

$$\bar{\partial}_E : \mathcal{C}^\infty(M,E) \to \mathcal{C}^\infty(M,E \otimes \overline{\omega}) \cdot$$

Grâce aux métriques h et h', on peut définir des produits scalaires L^2, $< , >$, sur $\mathcal{C}^\infty(M,E)$ et $\mathcal{C}^\infty(M,E \otimes \overline{\omega})$, puis un adjoint formel : $\bar{\partial}_E^* : \mathcal{C}^\infty(M,E \otimes \overline{\omega}) \to \mathcal{C}^\infty(M,E)$,caractérisé par :

$$< \bar{\partial}_E^* S,t > \; = \; < S,\bar{\partial}_E t > \cdot$$

Le produit $\Delta_E = \bar{\partial}_E^* \bar{\partial}_E$ est un opérateur elliptique positif du second ordre et

$$\det{}'_\zeta \Delta_E = \exp\left(- \zeta'_{\Delta_E}(0)\right) \cdot$$

Par définition , $\Delta_0 = \Delta_\theta$ où θ désigne le fibré trivial et $\Delta_2 = \Delta_{\omega^{\otimes 2}}$.

4.3 : Le fibré déterminant et la métrique de Quillen.

4.3.1 : Le fibré déterminant :

Soient $\pi : X \to S$ une famille analytique de surfaces de Riemann compactes et E un fibré vectoriel holomorphe sur X.

Posons pour tout $s \in S$, $X_s = \pi^{-1}(s)$ $d = \dim H^0(X_s, E)$, $d' = \dim H^1(X_s, E)$ et

$$\lambda(E)_s = \left[\Lambda^d H^0(X_s,E)\right]^* \otimes \Lambda^{d'} H^1(X_s,E)$$

La famille des déterminants de la cohomologie $\lambda(E) = \left(\lambda(E)_S\right)_{s \in S}$ est munie d'une structure naturelle de fibré en droites holomorphe sur S, que l'on peut définir par la variante en géométrie analytique de la théorie du déterminant de Grothendieck, Knudsen et Mumford [7,22].

4.3.2 : La métrique de Quillen. [7,29].

Soit $s \in S$.

Si ω_{X_S} est muni d'une structure hermitienne $\mathcal{C}^\infty$, on dispose d'une densité positive sur X_S, définie par la formule locale suivante, où α désigne une section non nulle de ω_{X_s}

$$dA = i\,\frac{\alpha \wedge \overline{\alpha}}{\|\alpha\|^2}\,.$$

Si de plus $E_{|X_s}$ est muni d'une structure hermitienne C^∞, alors il en va de même

$E_{|X_s} \otimes \overline{\omega}_{X_s}$, par produit tensoriel, et l'on peut définir des produits scalaires L^2 sur

$\mathcal{C}^\infty(X_s,E)$ et $\mathcal{C}^\infty(X_s\,,E \otimes \overline{\omega}_{X_s})$ par :

$$< S_1\,,S_2 >_{L^2} = \int_{X_s} (S_1(x)\,,S_2(x))\,dA(x).$$

L'opérateur $\overline{\partial}$ sur X_s à coefficients dans E

$$\overline{\partial}_{E,s} : \mathcal{C}^\infty(X_s,E) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X_s,E\otimes\overline{\omega}_{X_s})$$

possède un adjoint $\overline{\partial}^*_{E,s}$ relativement à ces produits scalaires, qui nous permettent de munir de structures hermitiennes

$$H^0(X_s,E) \cong \mathrm{Ker}\ \overline{\partial}_{E,s} \subset \mathcal{C}^\infty(X_s,E)$$

et

$$H^1(X_s,E) \cong \mathrm{Ker}\ \overline{\partial}^*_{E,s} \subset \mathcal{C}^\infty(X_s,E \otimes \overline{\omega}_{X_s})\,.$$

Nous désignons par $\|\,.\,\|_{L^2}$ la métrique hermitienne sur $\lambda(E)_s$ déduite par puissance extérieure, dualité et produit tensoriel de ces structures hermitiennes. Explicitement, la norme $\|\,.\,\|_{L^2}$ est donnée par la formule suivante, où $(V_1\,,\ldots,V_d)$ et $(w_1,\ldots,w_{d'})$ désignent des bases de

$H^0\,(X_s,E)$ et $H^1\,(X_s,E)$ respectivement :

$$\left\|(v_1 \wedge \ldots \wedge v_d)^{-1} \otimes (w_1 \wedge \ldots \wedge w_{d'})\right\|^2_{L^2} = \frac{\det(<w_i,w_j>)_{i,j}}{\det(<v_i,v_j>)_{i,j}}$$

La métrique de Quillen sur $\lambda(E)_s$ est donnée par :

$$\|\,.\,\|_Q = \mathrm{det}'_\zeta\left(\overline{\partial}^*_{E,S}\,\overline{\partial}_{E,S}\right)^{1/2}\ \|\,.\,\|_{L^2}$$

En général, à cause des "sauts" de la dimension de $H^0(X_s,E)$ lorsque s varie, la métrique $\| \, . \, \|_{L^2}$ n'est pas une métrique C^∞, ni même continue, sur le fibré $\lambda(E)$. Cependant, d'après Quillen [29,7], lorsque E et $\omega_{X|S}$, le fibré vertical des (1,0)-formes, sont munies de structures hermitiennes C^∞ , alors les métriques de Quillen sur les $\lambda(E)_S$ construites au moyen des métriques sur $E_{|X_S}$ et ω_{X_S} qui s'en déduisent, déterminent une métrique hermitienne C^∞ sur le fibré holomorphe $\lambda(E)$.

4.4. : LE THEOREME FONDAMENTAL.

4.4.1. La courbe locale de Teichmüller.

Soit Δ un ouvert suffisamment petit de l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}_p(M)$ d'une surface de Riemann compacte, sans bord de genre $p > 1$ ($o \in \Delta$).

D'après le théorème d'existence des déformations, il existe une famille analytique $\pi : C_p \rightarrow \Delta$ de surfaces de Riemann compactes de genre p telle que l'application

$$\rho_0 : T_o \, \Delta \rightarrow H^1 (M,T(M))$$

soit un isomorphisme. Soit $T = TC_p \mid \Delta$ le sous-fibré tangent holomorphe, formé de vecteurs tangents aux fibres de π (sous-fibré tangent vertical).

Il existe une métrique naturelle sur T qui coïncide, sur chaque fibre de π, avec la métrique de Poincaré.

Cette métrique induit une métrique sur chaque $T^{*\otimes n}$ ($n \in \mathbb{Z}$) et par conséquent une métrique de Quillen sur $\lambda(T^{*\otimes n})$.

D'après, Takhtajan [33], on a :

$$C_1(\lambda(T^{*\otimes n}), \|.\|_Q) = - \frac{6n^2 - 6n+1}{12\pi^2} \, \omega_{w\text{-}P}$$

où C_1 est la première forme de Chern et $\omega_{w\text{-}p}$ la (1-1)-forme réelle associée à la métrique de Weil-Petersson.

En particulier, pour n = 0 et n = -1 on obtient :

$$C_1(\lambda(T), \|.\|_Q) = 13 \, C_1 \, (\lambda(\theta), \|.\|_Q)$$

où θ est le fibré trivial.

Ceci montre que le fibré $\lambda(T) \otimes \lambda(\theta)^{*\otimes 13}$ muni de la métrique produit tensoriel des métriques de Quillen et le fibré trivial muni de la métrique triviale sont isométriques [8].

Montrons que dim $H^1(M_t, T(M_t))$ ne dépend pas de t ($t \in \Delta$)

Soit $\omega = \omega_{C_p}|_\Delta$ le fibré dual de T. D'après le théorème de Riemann-Roch, [35]

$$\dim H^\circ(M_t,\omega) - \dim H^1(M_t,\omega) = \text{degré}\ (\omega) - p+1.$$

Or, pour tout $t \in \Delta$,

$$\dim H^0(M_t,\omega) = p \quad (\text{p est le genre de la surface } M_t)$$

et

$$H^1(M_t,\omega) \equiv H^0(M_t\ , \omega \otimes \ \omega^*)^* \text{ (dualité de Serre [35])}$$

D'où

$$H^1(M_t,\omega) \equiv H^0(M_t\ , \theta\ )^*$$

M_t étant compacte, $\dim H^0(M_t\ , \theta) = 1$.

D'où :

$$p-1 = \text{degré}\ (\omega) - p+1$$

$$\text{degré}\ (\omega) = 2p - 2 > 0.$$

Il en résulte que degré $(T) < 0$ et d'après le théorème d'annulation de Kodaira [35]

$$\dim H^0(M_t,T) = 0.$$

On a :

$$\begin{aligned}\dim H^0(M_t,T) - \dim H^1(M_t,T) &= \text{degré}(T) - p+1\\ &= 2 - 2p - p+1\\ &= 3 - 3p.\end{aligned}$$

D'où

$$\dim H^1(M_t,T) = 3p - 3.$$

On en déduit que :

$\forall t \in \Delta$, l'application

$$\rho_t : T_t \Delta \to H^1(M_t, T(M_t))$$

est un isomorphisme

$$T_t \Delta \cong H^1(M_t, T(M_t))$$

Par transposition et dualité de Serre :

$$T_t^* \Delta \cong H^0(M_t, \omega^{\otimes 2})$$

4.4.2. Les fibrés $\lambda(\theta)$ et $\lambda(T)$ associés à $\pi : \mathbf{C}_P \to \Delta$.

Par définition $\lambda(\theta)_t = \left[\Lambda^{max} H^0(M_t, \theta)\right]^* \otimes \Lambda^{max} H^1(M_t, \theta)$

De $\dim H^0(M_t, \theta) = 1$ et de

$$\dim H^1(M_t, \theta) = \dim H^0(M_t, \omega)^*$$
$$= p$$

résulte que :

$$\begin{aligned} \lambda(\theta)_t &\cong \left[H^0(M_t, \theta)\right]^* \otimes \Lambda^P H^0(M_t, \omega)^* \\ &\cong \left(\Lambda^P F\right)_t^* \end{aligned}$$

où F est le fibré tel que :

$\forall t \in \Delta$, $F_t = H^0(M_t, \omega)$.

D'autre part :

$\lambda(T)_t = [\Lambda^{max} H^0(M_t, T)]^* \otimes \Lambda^{max} H^1(M_t, T)$.

De $\dim H^0(M_t, T) = 0$ et de

$$\dim H^1(M_t, T) = \dim H^0(M_t, \omega^{\otimes 2})^*$$
$$= 3p - 3$$

résulte que

$$\begin{aligned} \lambda(T)_t &\cong \Lambda^{3P-3} H^0(M_t, \omega^{\otimes 2})^* \\ &\cong \Lambda^{3P-3} T_t(\mathcal{T}_p(M)) \end{aligned}$$

4.4.3 : La mesure de Polyakov est une forme volume holomorphe sur l'espace de Teichmüller.

Soit $(\Delta_\varepsilon\ ,\ t_1\ ,\ \ldots,\ t_{3p-3})$ une carte de $\mathcal{T}_P(M)$ et $\psi_1\ ,\ \ldots,\ \psi_{3P-3}$ les différentielles quadratiques associées à $dt_1\ ,\ \ldots,\ dt_{3P-3}$.

Posons

$$\mathbb{A}_P = \left[\frac{(\det'_\zeta\Delta_0)_g}{\mathrm{Vol}(g)}\right]^{-13} (\det'_\zeta\Delta_2)_g\ d(w\text{-}P)$$

On a :

$$d(w\text{-}P) = \left(\frac{i}{2}\right)^{3P-3} \frac{\prod_{i=1}^{3P-3} dt_i \wedge d\bar{t}_i}{\det(\langle\psi_i,\psi_j\rangle)}$$

Soit $\varphi_1,\ldots,\varphi_p$ un champ de repères holomorphe au-dessus de Δ_ε du fibré F

$(\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\ldots\wedge\varphi_p)^{-1}$ est une section au-dessus de Δ_ε du fibré $\lambda(\theta)$.

On peut écrire :

$$\mathbb{A}_P = \left[\frac{(\det'_\zeta\Delta_0)_g}{\mathrm{Vol}(g)\det(\langle\varphi_i\,,\,\varphi_j\rangle)}\right]^{-13} \frac{(\det'_\zeta\Delta_2)_g}{\det(\langle\psi_i\,,\,\psi_j\rangle)} \left(\frac{i}{2}\right)^{3P-3} \frac{\prod_{i=1}^{3p-3} dt_i\wedge d\bar{t}_i}{\det(\langle\varphi_i\,,\,\varphi_j\rangle)^{13}}$$

Or ,
$$\frac{(\det'_\zeta\Delta_0)_g}{\mathrm{Vol}(g)\det(\langle\varphi_i\,,\,\varphi_j\rangle)} = \left\|1\otimes(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_p)^{-1}\right\|_Q^2$$

et

$$\frac{(\det'_\zeta\Delta_2)_g}{\det(\langle\psi_i\,,\,\psi_j\rangle)} = \left\|(\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_{3P-3})^{-1}\right\|_Q^2$$

$$\left[\frac{(\det'_\zeta\Delta_0)_g}{\mathrm{Vol}(g)\det(\langle\varphi_i\,,\,\varphi_j\rangle)}\right]^{-1} = \left\|1\otimes(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_p)\right\|_{Q^*}^2$$

où $\|\,.\,\|_{Q^*}$ désigne la norme duale de la norme de Quillen.

Par suite

$$\left[\frac{(\det{}'_{\zeta}\Delta_0)_g}{\mathrm{Vol}(g)\det(<\varphi_i\,,\varphi_j>)}\right]^{-13} = |||1 \otimes(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_p)^{13}|||^2$$

où $|||\,.\,|||$ désigne la norme sur $\lambda(\theta)^{*\otimes 13}$ induite de $\|\,.\,\|_{Q^*}$ par produit tensoriel.

Posons

$$S_1 = 1 \otimes (\varphi_1 \wedge\ldots\wedge \varphi_p)^{13} \quad (\text{section de } \lambda(\theta)^{*\otimes 13})$$

$$S_2 = (\psi_1 \wedge\ldots\wedge \psi_{3p-3})^{-1} \quad (\text{section de } \lambda(T))$$

$$S_\varepsilon = 1 \otimes (\varphi_1 \wedge\ldots\wedge \varphi_p)^{-13} \quad (\text{section de } \lambda(\theta)^{\otimes 13})$$

On obtient :

$$\mathbb{A}_P = |||S_1|||^2\|S_2\|^2_Q\|S_\varepsilon\|^2_{L^2}\left(\frac{i}{2}\right)^{3p-3}\prod_i dt_i\wedge d\bar{t}_i$$

$$= ||||S_1 \otimes S_2||||^2\|S_\varepsilon\|^2_{L^2}\left(\frac{i}{2}\right)^{3p-3}\prod dt_i\wedge d\bar{t}_i$$

où $||||\,.\,||||$ désigne la norme sur $\lambda(\theta)^{*\otimes 13} \otimes \lambda(T)$ induite de $|||\,.\,|||$ et de $\|\,.\,\|_Q$ par produit tensoriel.

Posons $S_1 \otimes S_2 = \sigma_\varepsilon$.

La première forme de Chern relativement à $||||\,.\,||||$ du fibré $\lambda(\theta)^{*\otimes 13} \otimes \lambda(T)$ est donnée par :

$$C_1(\lambda(\theta)^{*\otimes 13} \otimes \lambda(T)) = \frac{1}{2\pi i}\partial\bar{\partial}\, l\, n\; ||||\,\sigma_\varepsilon||||^2$$

$$= -13\; C_1\,(\lambda(\theta), \|\,.\,\|_Q) + C_1\,(\lambda(T), \|\,.\,\|_Q)$$

$$= 0$$

Il en résulte qu'il existe sur Δ_ε une fonction holomorphe f_ε telle que :

$$||||\,\sigma_\varepsilon\,||||^2 = |f_\varepsilon|^2$$

D'où :

$$\mathbb{A}_P = \left(\frac{i}{2}\right)^{3p-3}|f_\varepsilon|^2\|S_\varepsilon\|^2_{L^2}\prod_{i=1}^{3p-3} dt_i\wedge d\bar{t}_i$$

Posons

$$\frac{f_\varepsilon dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_{3p-3}}{\left(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_P\right)^{13}} = S_\varepsilon \otimes \xi_\varepsilon$$

où ξ_ε est la (3p-3, 0)-forme définie sur Δ_ε par : $\xi_\varepsilon = f_\varepsilon\, dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_{3P-3}$.

Sur Δ_ε on a :

$$\mathbb{A}_P = C\|S_\varepsilon\|^2_{L^2}\ \xi_\varepsilon \wedge \overline{\xi_\varepsilon}$$

où C désigne une constante complexe.

Or, l'espace de Teichmüller est une variété de Stein contractible. Donc tout fibré holomorphe en droites est holomorphiquement trivial.

Donc les sections $S_\varepsilon \otimes \xi_\varepsilon$ définissent une section globale $S \otimes \xi$ de la courbe universelle de Teichmüller [23], telle que :

$$\mathbb{A}_P = C\|S\|^2_{L^2}\ \xi \wedge \overline{\xi}$$

On a montré le théorème suivant :

THEOREME :

Soit $$\mathbb{A}_p = \left[\frac{\left(\det'_\zeta \Delta_0\right)_g}{\mathrm{Vol}(g)}\right]^{-13} (\det'_\zeta \Delta_2)_g\ d(w\text{-}P) \quad (p > 1)$$

Il existe une section holomorphe $S \otimes \xi$ du fibré $\lambda(\theta)^{\otimes 13} \otimes K$ où K est le fibré canonique sur $\mathcal{T}_p(M)$.

Telle que : $$\mathbb{A}_p = C\|S\|^2_{L^2}\ \xi \wedge \overline{\xi}$$

et la contribution d'ordre p (p > 1), dans la fonction de partition de Polyakov est donnée à une constante "infinie" près, par :

$$\mathbb{Z}_p = C \int_{\mathcal{T}_{p(M)}} \|S\|^2_{L^2}\ \xi \wedge \overline{\xi}$$

où C est une constante complexe.

COROLLAIRE :

Soit : $R_p(M)$ l'espace de modules de Riemann de la surface M

$$R_p(M) = \mathcal{T}_p(M)/_{\Gamma_p} \qquad \text{où} \qquad \Gamma_p = \mathfrak{D}/\mathfrak{D}_0$$

Si $p \geq 3$, alors $S \otimes \xi$ est Γ_p -invariante et on a :

$$\mathbb{Z}_p = C \int_{R_p(M)} \|S\|^2_{L^2}\, \xi \wedge \bar{\xi}.$$

En effet :

Posons $\Sigma = S \otimes \xi$.

Montrons que Γ_p opère sur Σ par multiplication par les éléments de U(1).

Soit $g \in \mathcal{T}_p(M)$ fixé.

On a :

$$\forall \gamma \in \Gamma_p,\ \Sigma(\gamma.g) = \varphi(\gamma)\Sigma(g)$$

$$= \varphi(\gamma)(S \otimes \xi)(g).\ \ (\varphi(\gamma) \in \mathbb{C})$$

Or, $\mathbb{A}_p$ est Γ_p-invariante [10]

$\gamma \in \Gamma_p$, $\mathbb{A}_p\,(g) = \mathbb{A}_p\,(\gamma.g)$

D'où $\|S\|^2_{L^2}\, \xi \wedge \bar{\xi} = |\varphi(\gamma)|^2 \|S\|^2_{L^2}\, \xi \wedge \bar{\xi}$

Donc $|\varphi(\gamma)| = 1$.

On a donc une représentation :

$$\Gamma_p \rightarrow U(1)$$

$$\gamma \mapsto \varphi(\gamma)$$

et d'après un théorème de Powell [28]:'

Si $p \geq 3$, alors $\Gamma_p = [\,\Gamma_p, \Gamma_p]$

(Powell : Two theorems on the mapping class group of a surface.
Proceedings American Mathematical Society 68 (1978)).

Donc si $p \geq 3$ toute représentation abélienne de Γ_p est triviale.

Il en résulte que Σ est Γ_p-invariante, ce qui prouve le corollaire.

CONCLUSION

On a montré que les amplitudes de probabilités Z_p de la corde bosonique libre dans la formulation de Polyakov, à l'ordre p (p > 1)-genre de la surface de Riemann "source" - de la théorie des cordes perturbative, sont données par la formule suivante :

$$\mathbb{Z}_p = C \int_{R_p(M)} \|S\|^2_{L^2} \, \xi \wedge \bar{\xi}$$

où s est une section holomorphe au-dessus de l'espace de Teichmüller du fibré $\lambda(\theta)^{\otimes 13}$

ξ est une section holomorphe du fibré canonique de l'espace de Teichmüller.

On a montré aussi que la section $S \otimes \xi$ est Γ_p-invariante.

Ce travail nous conduit aux questions suivantes :

Peut-on définir les sections s et ξ sur l'espace de modules de Riemann ?

Peut-on généraliser la théorie de Kodaira-Spencer pour pouvoir l'appliquer aux super-cordes ?

REFERENCES

[1] ABRAHAM,R-MARSDEN,J.
Foundations of mechanics. New-York. Benjamin 1978.

[2] AHLFORS L.
Some remarks on Teichmüller's space of Riemann surfaces. Annals of Maths. Vol.74 N°1 (1961).

[3] ATIYAH M.
The geometry and Physics of Knots Cambridge University Press 1990.

[4] BELAVIN - KNIZHNIK.
Complex geometry and the theory of Quantum Strings.
Sov.Phys. J.E.T.P. 64 (2) August 1986.

[5] BERGER, M-EBIN,D.
Somme decompositions of the space of symetric tensors on a Riemann manifold. J. Diff. Geametry, 3, 379-392 (1969).

[6] BISMUT J.M. - BOST J.B.
Fibrés déterminants, métriques de Quillen et dégénerescence des courbes.
C.R. Acad.Sci. t 307, Série I p.317-320 (1988).

[7] BISMUT J.M. - GILLET H. -SOULE G.
Analytic Torsion and Holomorphic Déterminant Bundles.
I. Bott-Chem Forms and Analytic Torsion Commun. Math.Phys. 115, p.49-78 (1988)
II. Direct Images and Bott-Chem Forms Commun. Math. Phys. 115, p.79-126 (1988).
III. Analytic Torsion and Holomorphic Determinant Bundles.
Commun.Math.Phys. 115, 301-351 (1988).

[8] BOST J.B.
Fibrés déterminants, déterminants régularisés et mesures sur les espaces de modules des courbes complexes. Sém.Bourbaki n°676 - Février 1987.

[9] BOST J.B. - JOLICŒUR
A holomorphic property and the critical dimension in string theory from an index theorem.
Phys.Lett.B 174 (1986) p.273-276.

[10] D'HOKER - PHONG
Multiloop amplitudes for the bosonic Polyakov string.
Nucl. Phys. B.269 (1986) p.205-234.

[11] FISCHER A.E. - TROMBA A.J. :
On a Purely Riemannian Proof of the structure and dimension of the Unramified Moduli Space of a Compact Riemann Surface Math. An. 267, 311-345 (1984).

[12] FISCHER A.E. - TROMBA A.J.
Almost complex principal fiber bundles and the complex structure on Teichmüller Space.
Crelles J. Band. 352, 151-160 (1984).

[13] FISCHER A.E. - TROMBA A.J.
On the Weil-Petersson metric on Teichmüller Space.
Trans. A.M.S. 284, 319-335 (1984).

[14] FREED D.
Determinants, Torsion and Strings . Commun. Math.Phys. 107, 483-533 (1986).

[15] GILKEY P.B.
Invariance theory, the heat equation and the Atiyah-Singer index theorem. Puplish or Perish, 1984.

[16] KOBAYASHI, S-NOMIZU, K
Foundations of differential geometry. New-York : Intersciences 1963.

[17] KODAIRA K - SPENCER D. G.
On deformations of complex structures I, II, III.
An of Math. Vol.67, Vol.71 (1958;1960).

[18] KODAIRA K - NIRENBERG L. - SPENCER D.G.
On the existence of deformations of complex analytic structures.
An. of Math.Vol.68 (1958).

[19] LANG S.
An introduction to Arakelov theory
Springer-Verlag 1988.

[20] LEHTO O.
Univalent Functions and Teichmüller Spaces
G.T.M. Springer-Verlag 1987.

[21] MUMFORD D.
Stability of projective varieties.
L'Enseignement Mathématique 23 (1977).

[22] MUMFORD D - KNUDSEN F.
The projectivity of the moduli space of stable curves.
I. - Preliminaries on "det" and "div"
Math. Scand. 39 (1976).

[23] NAG S.
The complex analytic theory of Teichmüller spaces.
Canadian Math. Society Series of monographies and advanced texts.
John-Wiley 1988.

[24] NEWLANDER, A.-NIRENBERG, L.
Complex analytic coodinates in almost-complex manifolds. Annals of Maths.65 (1957).

[25] OMORI, H.
On the group of diffeomorphism on a compact manifold. Proc.Sym.Pure Math.AMS 15 (1970).

[26] PALAIS, R.
Foundations of global non-linear analysis. New-York. Benjamin 1968.

[27] POLYAKOV A.M.
Quantum geometry of bosonic strings
Phys. lett. 103 B 207-210 (1981).

[28] POWELL,J.
Two theorems on the mapping class group of a surface. Proc. AMS 68 (1978).

[29] QUILLEN D.
Determinant of Cauchy-Riemann operators over a Riemann surface.
Funct. Anal.Appl. 19 (1985).

[30] RAY D. - SINGER I.M.
R-torsion and the laplacian on riemann manifolds
Adv. in Math. 7, 145-210 (1971).

[31] SEELEY R.T.
Complex powers of an elliptic operator.
Proc. Symp.Pure Math. AMS Vol.X (1967).

[32] SINGER I.M.
Some Problems in the Quantization of Gauge theories and String theories.
Proce.Symp.Pure Math. Vol.48 (1988).

[33] TAKHTAJAN L.A.
Uniformization, local Index theorem and geometry of the moduli Spaces of Riemann surfaces and vector Bundles.
Proc.Symp.Pure Math. Vol.49 (1989) Part.I.

[34] TOMI F - TROMBA A.J.
Existence theorems for minimal surfaces of non-zero genus spanning a contour.
Memoirs A.M.S. Vol.71 N° 382 (1988).

[35] WELLS
Differential Analysis on Complex manifolds.
Prendice-Hall Series in modern analysis 1973.