

C. ALBERT

P. DAZORD

Théorie des groupoïdes symplectiques

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1990
, p. 27-99

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1990____27_0

© Université de Lyon, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

C. ALBERT - P.DAZORD

THEORIE DES GROUPOIDES SYMPLECTIQUES

CHAPITRE II

Groupoïdes symplectiques

CHAPITRE II

GROUPOIDES SYMPLECTIQUES

Introduction

Un groupoïde symplectique est un groupoïde de lie $\Gamma \begin{smallmatrix} \alpha \\ \rightarrow \\ \beta \end{smallmatrix} \Gamma_0$ muni d'une forme symplectique σ invariante par un pseudogroupe de définition de Γ , et telle que Γ_0 soit une sous-variété lagrangienne. Ces groupoïdes ont la propriété que la variété des unités Γ_0 est canoniquement munie d'une structure de Poisson Λ_0 pour laquelle α (resp. β) est un morphisme (resp. un antimorphisme) de Poisson. Cette notion a été introduite par A. Weinstein [24] et indépendamment par M. Karasev [11]. Le premier exposé d'ensemble est paru en 1987 [1].

L'exemple fondamental est fourni par le groupoïde cotangent d'un groupe de Lie G qui est un groupoïde symplectique quand on munit T^*G de sa structure symplectique canonique de cotangent. Dans ce cas α et β sont respectivement les moments des actions naturelles à droite et à gauche de G dans T^*G et la structure de Poisson dont se trouve muni le dual \mathfrak{g}^* de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G , qui est l'espace des unités de T^*G , est la structure de Poisson de \mathfrak{g}^* donnée par le théorème de Kostant-Kirillov-Souriau [20]. Ainsi, si \mathfrak{g}^* est le dual d'une algèbre de Lie de dimension finie munie de sa structure de Poisson linéaire Λ_0 canonique, $(\mathfrak{g}^*, \Lambda_0)$ s'identifie à l'espace des unités de $(T^*G, d\lambda)$.

Le problème de l'intégration symplectique consiste à généraliser la situation précédente au cas d'une variété de Poisson arbitraire et à se demander si (Γ_0, Λ_0) étant une variété de Poisson, il existe un groupoïde symplectique (Γ, σ) d'unités (Γ_0, Λ_0) . Il s'agit donc, modulo le passage de \mathfrak{g} à \mathfrak{g}^* du problème de la généralisation non linéaire du Troisième théorème de Lie (cf. [3]).

Malheureusement il est connu depuis longtemps que, quelle que soit la façon de poser le problème de l'intégration des algèbres de Lie de dimension infinie, il n'existe pas en général d'objet global, analogue à un groupe, répondant à la question. Ceci avait été noté initialement par V. Van Est [8] ainsi que par A. Douady et M. Lazard [6]. Une solution sous des conditions très restrictives a été fournie par M. Plaisant [15].

Dans le cadre qui nous occupe, A.Weinstein a prouvé l'existence pour toute variété de Poisson d'un groupoïde symplectique **local** dont elle est l'espace des unités, [1] [24] en s'appuyant sur la notion de réalisation symplectique [23]. Dans le cas des variétés de Poisson régulières on peut construire des restrictions à l'intégration par un groupoïde [3].

L'objectif de ce chapitre est d'une part d'étudier la structure de groupoïde symplectique, local ou global, et en particulier d'étudier la structure de Poisson des unités, et d'autre part de prouver l'existence pour toute variété de Poisson d'un groupoïde local qui l'intègre. L'originalité de la méthode suivie consiste en l'utilisation des structures difféologiques de JM. Souriau [21] ce qui rend rigoureuse la démarche heuristique d'A. Weinstein [23].

L'équivalence de catégorie établie au tome I Chapitre 1 [5] entre algèbroïdes de Lie et fibrés vectoriels de Lie Poisson - qui généralise la dualité algèbre de Lie \mathfrak{g} , variété de Lie-Poisson \mathfrak{g}^* - met en correspondance l'intégration des algèbroïdes de Lie au sens de J. Pradines [18] et l'intégration symplectique (dans la référence [18] seul le théorème local est exact). Ce point de vue sera développé par ailleurs [4].

Afin de ne pas alourdir l'exposé sur les groupoïdes symplectiques, on a rassemblé dans une première partie une brève étude de la notion de relation lagrangienne et de sa généralisation la notion de relation coïso trope due à Weinstein [25], et une étude, qui semble présenter un intérêt intrinsèque, sur les groupes de difféomorphismes à support compact et leurs difféologies.

NB : l'indication chapitre I Théorème 8.1 renvoie au premier chapitre de **Théorie des groupoïdes symplectiques** [Publ. dept. Math Lyon 4/B 1988].

1 - PRELIMINAIRES

A - Relations lagrangiennes et relations coïso tropes

Si (M, σ) est une variété symplectique, on la notera M si aucune ambiguïté n'est à craindre sur σ , et on notera \overline{M} la variété symplectique $(M, -\sigma)$. De même une variété de Poisson (P, Λ) sera simplement notée P , et \overline{P} désignera la variété de Poisson $(P, -\Lambda)$.

Si (M, σ_M) et (N, σ_N) sont deux variétés symplectiques, une application $f : M \rightarrow N$ est à la fois un morphisme de Poisson et un morphisme symplectique (i. e. $f^* \sigma_N = \sigma_M$) (on dira que f est un symplecto isomorphisme local) si et seulement si son graphe

$$\text{Gr}(f) = \{(f(x), x) \in N \times M\}$$

est une sous-variété lagrangienne de $\bar{N} \times M$, ce qui implique que N et M aient même dimension. Plus généralement, on appelle **relation lagrangienne** (ou relation canonique) de M vers N toute sous-variété lagrangienne (immergée) de $\bar{N} \times M$. On peut composer les relations de M vers N et les relations de N vers W (opération qui généralise la composition des applications) : si R est une relation de M vers N et S une relation de N vers W , on note

$$\text{SoR} = \{(t, x) \in W \times M \mid (\exists y \in N) (t, y) \in S \text{ et } (y, x) \in R\}$$

Si U et V sont deux sous-variétés d'une même variété M , on dit que **U et V se coupent nettement** si $U \cap V$ est une variété dont le fibré tangent est $TU \cap TV$. On a le résultat fondamental du "calcul lagrangien" [1] [10].

Proposition 1- A1 : *Soient M, N, W des variétés symplectiques, R une relation lagrangienne de M vers N , S une relation lagrangienne de N vers W . Soit Δ_N la diagonale du produit $N \times N$.*

Alors si $S \times R$ coupe nettement $W \times \Delta_N \times M$, SoR est une relation lagrangienne de M vers W .

En particulier, si M (ou N) est réduite à un point, une relation lagrangienne de M vers N est simplement une sous-variété lagrangienne de N (ou M), et on peut parler de l'image par une relation lagrangienne d'une sous-variété lagrangienne, ou d'une relation lagrangienne par une sous-variété lagrangienne. On prouve que l'opération de composition est associative et on désigne le calcul construit sous le nom de **calcul lagrangien**.

Si (M, Λ) et (N, Λ) sont deux variétés de Poisson, $f : M \rightarrow N$ est un morphisme de Poisson si et seulement si son graphe $\text{Gr}(f)$ est une sous-variété coïso trope de $\bar{N} \times M$. (cf. [1]). Plus généralement on dira que $W \subset \bar{N} \times M$ est une **relation coïso trope** de M vers N si W est une sous-variété coïso trope (immergée) de $\bar{N} \times M$. Aux relations coïso tropes on peut étendre la proposition 1-A1 et construire ainsi un calcul coïso trope [25] qui étend le calcul lagrangien et généralise le calcul sur les morphismes de Poisson.

B - Difféologies de groupes de difféomorphismes à support compact et Formes de Maurer-Cartan

B-1 Sous groupes de Lie de $\text{Diff}_0(M)$

La référence générale en ce qui concerne les difféologies est [21]

Soit M une variété, et soit E un espace vectoriel de dimension finie [resp. un fibré vectoriel sur M]. Désignons par $C_0^\infty(M, E)$ l'ensemble des applications C^∞ de M dans E à supports compacts [resp. des sections C^∞ de E à supports compacts]. On munit $C_0^\infty(M, E)$ de la **difféologie à contrôle compact** : ceci signifie que si W est une variété, une application $F : W \rightarrow C_0^\infty(M, E)$, $\tau \mapsto F_\tau$ est dite **différentiable** si elle vérifie les deux conditions suivantes :

(D1) : L'application $W \times M \rightarrow E$, $(\tau, x) \mapsto F_\tau(x)$ est C^∞ .

(D2) : Pour tout $\tau_0 \in W$, il existe un voisinage U de τ_0 dans W et un compact K de M tels que

$$\bigcup_{\tau \in U} \text{spt } F_\tau \subset K$$

où on a noté $\text{spt } F_\tau$ le support de F_τ .

Rappelons que si D et D' sont deux espaces difféologiques, une application $\Phi : D \rightarrow D'$ est dite différentiable si pour toute variété W et toute application $F : W \rightarrow D$ différentiable, $\Phi \circ F$ est différentiable.

Par exemple, l'espace vectoriel $C_0^\infty(M, \mathbb{R})$ des fonctions à supports compacts sur M , muni de la difféologie à contrôle compact, est un espace vectoriel difféologique : cela signifie que les applications $C_0^\infty(M, \mathbb{R}) \times C_0^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C_0^\infty(M, \mathbb{R})$ et $\mathbb{R} \times C_0^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C_0^\infty(M, \mathbb{R})$ définies respectivement par l'addition des fonctions et la multiplication par un scalaire, sont différentiables, la difféologie produit se définissant de manière évidente.

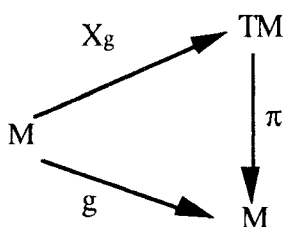
De même, l'algèbre de Lie $\mathfrak{X}_0(M)$ des champs de vecteurs à supports compacts sur M est une algèbre de Lie difféologique, si on munit $\mathfrak{X}_0(M)$ de la difféologie à contrôle compact.

Considérons maintenant l'ensemble $\text{DIFF}_0(M)$ des difféomorphismes de M sur elle-même à supports compacts [rappelons que le support $\text{spt } \varphi$ d'un difféomorphisme $\varphi : M \rightarrow M$ est l'adhérence du complémentaire de l'ensemble des points fixes de φ]. On munit aussi $\text{DIFF}_0(M)$ de la difféologie à contrôle compact, qui se définit encore par (D1) et (D2) en remplaçant E par M . Avec cette difféologie, $\text{DIFF}_0(M)$ est un groupe difféologique, en ce sens que la composition et l'inversion définissent des applications différentiables.

Soit alors G un sous-groupe de $\text{DIFF}_0(M)$. On le munit de la difféologie induite : les applications différentiables d'une variété W dans G sont celles qui, composées avec l'injection $G \rightarrow \text{DIFF}_0(M)$, sont différentiables dans $\text{DIFF}_0(M)$. Soit $g \in G$. Une **courbe différentiable** (g_t) de G passant par g est une application différentiable $\mathbb{R} \rightarrow G$ telle que $g_0 = g$. Le **vecteur tangent** X_g à la courbe (g_t) en g est l'application $M \rightarrow TM$ définie par

$$(\forall x \in M) \quad X_g(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g_t(x)$$

C'est un "champ de vecteurs au dessus de g " en ce sens que si $\pi : TM \rightarrow M$ est la projection naturelle, on a le diagramme commutatif



L'**espace tangent** $T_g G$ en g à G est l'ensemble de tous les vecteurs tangents à toutes les courbes de G passant par g . C'est un \mathbb{R} -espace vectoriel. Dans le cas particulier où $G = \text{DIFF}_0(M)$ et $g = e = \text{id}_M$, $T_e \text{DIFF}_0(M)$ est l'espace vectoriel $\mathfrak{X}_0(M)$. Pour tout sous-groupe G de $\text{DIFF}_0(M)$, $T_e G$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{X}_0(M)$.

Définition 1-B1 Soit G un sous-groupe de $\text{DIFF}_0(M)$. On dit que G est un **sous-groupe de Lie (difféologique)** de $\text{DIFF}_0(M)$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées

(i) pour tout $X \in T_e G$, le flot (φ_t^X) de X est une courbe différentiable de G

(ii) $T_e G$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{X}_0(M)$.

L'algèbre de Lie $T_e G$ est alors appelée **algèbre de Lie (à droite)** de G et est notée \mathfrak{g}° .

Exemples

1°) $\text{DIFF}_0(M)$ est un "sous-groupe de Lie" de $\text{DIFF}_0(M)$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{X}_0(M)$.

2°) Soit G un groupe de Lie (au sens usuel) et considérons une action effective de G sur M dans laquelle tout élément de G agit comme un difféomorphisme à support compact. On a alors une injection $G \rightarrow \text{DIFF}_0(M)$, qui fait de G un sous-groupe de Lie difféologique de $\text{DIFF}_0(M)$, dont l'algèbre de Lie est l'algèbre opposée \mathfrak{g}° de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} du groupe de Lie G , (ce qui justifie la terminologie générale). La difféologie à contrôle compact de G coïncide avec la difféologie naturelle du groupe de Lie G .

3°) Soit T un tenseur sur M . Le sous groupe G_T de $\text{DIFF}_0(M)$, formé des difféomorphismes à supports compacts respectant T est un sous groupe de Lie de $\text{DIFF}_0(M)$: en effet $T_e G_T$ s'identifie au sous-espace de $\mathfrak{X}_0(M)$ formé des champs de vecteurs X tels que $\mathcal{L}_X T = 0$, qui est une algèbre de Lie.

4°) Si (P, Λ) est une variété de Poisson, le groupe G_Λ des difféomorphismes de Poisson à supports compacts est d'après l'exemple précédent un sous-groupe de Lie de $\text{DIFF}_0(P)$. Il en est de même du sous-groupe G de G_Λ formé des éléments qui laissent invariant le feuilletage caractéristique de (P, Λ) . L'algèbre de Lie \mathfrak{g}° de G contient l'algèbre de Lie des champs de vecteurs hamiltoniens à supports compacts.

Soit G un groupe difféologique et $i : G \rightarrow \text{DIFF}_0(M)$ un morphisme injectif de groupes (au sens algébrique). On suppose que le morphisme i est un **morphisme difféologique** de G dans $\text{DIFF}_0(M)$. On définit à l'aide des courbes différentiables de G l'espace tangent en g à G : si $t \mapsto g_t$ est une courbe différentiable de G issue de g , on appelle vecteur tangent à la courbe (g_t) en g l'application X_g , de M dans TM , définie par

$$X_g(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (i \circ g_t(x))$$

et on note $T_g G$ l'ensemble des vecteurs tangents aux courbes de G issues de g ,

$TG = \bigcup_{g \in G} T_g G$ et $\pi : TG \rightarrow G$ la projection naturelle.

Définition 1- B2 Soit G un sous-groupe (au sens algébrique) de $\text{DIFF}_0(M)$. On dit que G est un sous-groupe de Lie faible de $\text{DIFF}_0(M)$ si

- (i) Pour tout $X \in T_e(G)$, le flot (φ_t^X) de X est une courbe différentiable de G
- (ii) $T_e G$ est une sous algèbre de Lie de $\mathfrak{X}_0(M)$ notée \mathfrak{g}°

On remarquera qu'avec cette définition, un sous groupe de Lie de $\text{DIFF}_0(M)$ est un sous-groupe de Lie faible muni de la difféologie induite par $\text{DIFF}_0(M)$.

Exemple : Soit $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$ un groupoïde de Lie et G le groupe des glissements à gauche dont le support est contenu dans l'image réciproque d'un compact K de Γ_0 par β . On note $\text{DIFF}_0^\beta(\Gamma)$ le groupe des difféomorphismes de Γ à support à β - image compacte et on contrôle la difféologie par les ensembles $\beta^{-1}(K)$, où K parcourt l'ensemble des compacts de Γ_0 . On munit G de la difféologie induite. L'application $\beta : G \rightarrow \text{DIFF}_0(M)$, $\varphi \mapsto \beta_\circ \varphi \mid_{\Gamma_0}$ est un morphisme difféologique. On peut munir $\beta(G)$ soit de la difféologie image de G par β soit de la difféologie induite par $\text{DIFF}_0(\Gamma_0)$. Pour la première on vérifie que $\beta(G)$ est un sous groupe de Lie faible de $\text{DIFF}_0(\Gamma_0)$. En effet si $X \in T_e \beta(G)$, par construction même $X = T\beta \tilde{X}$ ou \tilde{X} est un champ de vecteurs invariant à droite de Γ . \tilde{X} est donc complet et son flot est formé de glissements à gauche ayant les bonnes propriétés de support. La propriété (i) est donc vérifiée par $\beta(G)$. Si X et Y sont deux éléments de $T_e \beta(G)$, avec des notations évidentes $[X, Y] = T\beta[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ et, $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ étant invariant à gauche, $[X, Y] \in T_e \beta(G)$. $\beta(G)$ est donc un sous groupe de Lie faible mais n'est pas en général un sous-groupe de Lie de $\text{DIFF}_0(\Gamma_0)$.

Remarque : Si $G \subset \text{DIFF}_0(M)$ est un sous groupe de Lie (faible ou non) il résulte de la propriété (i) que $T_e G$ est une sous algèbre complète de $\mathfrak{X}_0(M)$ au sens de [2] c'est à dire que si X, Y sont deux éléments de $T_e G$ et si φ_t^X, φ_t^Y sont leurs flots l'image $\varphi_t^{Y*} \cdot X$ de X par φ_t^Y , est un élément de $T_e G$. En effet, par définition,

$$\varphi_t^{Y*} \cdot X = \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \varphi_t^Y \circ \varphi_\tau^X \circ \varphi_t^Y$$

et d'après (i) $\tau \mapsto \varphi_{-\tau}^Y \circ \varphi_{\tau}^X \circ \varphi_{\tau}^Y$ est une courbe différentiable de G .

B.2. Fibrés tangents - Formes sur un sous-groupe de Lie

Dans tout ce qui suit on ne considère que des sous-groupes de Lie faibles G de $\text{DIFF}_0(M)$ et on commettra l'abus de langage consistant à les appeler sous groupes de Lie (voire groupes de Lie).

On munit TG de la difféologie suivante : pour toute variété W de dimension finie $F : W \rightarrow TG$ est dite différentiable si

(i) $\pi_0 F : W \rightarrow G$ est C^∞ .

(ii) $W \times M \rightarrow M$, $(w, x) \mapsto F(w)(x)$ est C^∞ . (par abus de notation, on notera souvent F cette application)

(iii) pour tout $w_0 \in W$, il existe un voisinage U de w_0 dans W et un compact K de M tels que pour tout $w \in U$ $F(w, x) = 0$ si $x \notin K$.

Si on se restreint aux applications $F : W \rightarrow T_g G$, on munit $T_g G$, et en particulier $\mathfrak{g}^\circ = T_e G$, de la difféologie à contrôle compact. Par définition même de la difféologie, $\pi : TG \rightarrow G$ est un fibré difféologique, appelé **fibré difféologique tangent** de G dont la fibre type est \mathfrak{g}° muni de la difféologie à contrôle compact. On définit de manière évidente les puissances π^i $\Lambda^p TG \rightarrow G$ qui sont des fibrés difféologiques. On notera qu'avec les difféologies introduites l'application $T_g : \mathfrak{g}^\circ \rightarrow T_g G$, $X \mapsto T_g X$ définie par $(T_g X)(x) = T_x g \cdot X(x)$ est un isomorphisme difféologique.

Rappelons que si D est un espace difféologique, une **p-forme** α sur D est une fonctionnelle qui à chaque application différentiable $F : W \rightarrow D$ où W est une variété, associe une p-forme $F^* \alpha$ sur W , de sorte que si $h : W' \rightarrow W$ est une application C^∞ , on ait

$$(F_0 h)^* \alpha = h^* (F^* \alpha)$$

Deux p-formes α et β ont la même valeur en $\delta \in D$ si pour toute $F : W \rightarrow D$ où $F(\tau) = \delta$, on a $(F^* \alpha)_\tau = (F^* \beta)_\tau$. Une p-forme est définie par l'ensemble de ses valeurs aux différents points de D .

Si V est un espace vectoriel difféologique, on définit de même les p -formes sur D à valeurs dans V , en demandant aux p -formes $F^*\alpha$ d'être différentiables de $\Lambda^p TW$ dans V . La différentielle d'une p -forme α (à valeurs dans V) est la $(p + 1)$ -forme $d\alpha$ (à valeurs dans V) qui à $F : W \rightarrow D$ associe $d(F^*\alpha)$. Ainsi, si $\Phi : D' \rightarrow D$ est une application différentiable, à la p -forme α sur D correspond une p -forme $\Phi^* \alpha$ sur D' et on a

$$\Phi^* (d\alpha) = d(\Phi^*\alpha).$$

Si maintenant α est une p -forme sur le groupe G à valeur dans un espace vectoriel difféologique V , et si $g \in G$, on peut associer à la valeur en g de α une application linéaire

$$\alpha_g : \Lambda^p T_g G \rightarrow V$$

de la façon suivante : si X_g^1, \dots, X_g^p sont des vecteurs tangents en g à G , on choisit une application différentiable $F : \mathbb{R}^p \rightarrow G$ telle que $F(0) = g$ et $\frac{\partial F}{\partial t^j}(0) = X_g^j$. [Par exemple, si pour tout j , $\gamma^j : \mathbb{R} \rightarrow G$ est une courbe différentiable de G passant par g et de vecteur tangent X_g^j on peut prendre

$$F(t^1, \dots, t^p) = \gamma^1(t^1) \cdot_g \gamma^2(t^2) \dots \cdot_g \gamma^p(t^p)$$

On pose

$$\alpha_g (X_g^1, \dots, X_g^p) = (F^*\alpha) \circ \left(\frac{\partial}{\partial t^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t^p} \right)$$

ce qui ne dépend pas du choix de F . La p -forme α est alors définie par la donnée des $(\alpha_g)_{g \in G}$, et une p -forme α sur G apparaît en définitive comme une application différentiable $\alpha : \Lambda^p TG \rightarrow V$ dont la restriction à chaque fibre $\Lambda^p T_g G$ est linéaire.

B3. Forme de Maurer Cartan d'un sous groupe de Lie :

L'exemple fondamental est le suivant : si \mathfrak{g}° est muni de la difféologie induite par la difféologie à contrôle compact de $\mathfrak{X}_0(M)$, l'application

$$\omega : TG \rightarrow \mathfrak{g}^\circ$$

définie pour tout $X_g \in T_g G$ par

$$(\omega_g X_g)(x) = T_x g^{-1}(X_g(x))$$

est, pour tout g , un isomorphisme de $T_g G$ sur \mathfrak{g}° . ω est la **forme de Maurer-Cartan du sous-groupe de Lie G** .

Un **champ de vecteurs** sur G se définit naturellement comme une section différentiable de $TG \rightarrow G$. Si $X \in \mathfrak{g}^\circ$, on lui associe un **champ de vecteurs invariant à gauche X^L** sur G en posant pour tout $g \in G$ et tout $x \in M$

$$X_g^L(x) = T_x g(X(x))$$

de sorte qu'en tout $x \in M$

$$X_e^L(x) = X(x)$$

Ce champ X^L admet un flot $\varphi^{X^L} : \mathbb{R} \times G \rightarrow G$, solution de

$$\frac{d}{dt} \varphi_t^{X^L} = X^L \circ \varphi_t^{X^L} \quad \text{avec} \quad \varphi_0^{X^L}(g) = g \quad \forall g \in G$$

En effet $\varphi_t^{X^L}(e)$ est nécessairement le flot φ_t^X du champ de vecteur à support compact

X , et donc pour tout $g \in G$

$$\varphi_t^{X^L}(g) = g \circ \varphi_t^X$$

Si on introduit les translations à gauche L_g et à droite R_g , ceci s'écrit

$$\varphi_t^{X^L} = R_\varphi X_t$$

et on notera que $TL_g(X_g^L) = X_{gg'}^L$, ce qui justifie le terme "invariant à gauche" pour X^L .

Ceci permet d'introduire l'**application exponentielle** de G

$$\exp : \mathfrak{g}^0 \mapsto G \quad \exp X = \varphi_1^X$$

qui est différentiable pour les difféologies à contrôle compact, et permet de définir l'**opérateur de dérivée de Lie par rapport à X^L** :

si $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable, on pose

$$\mathfrak{L}_{X^L} f = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \varphi_t^{X^L})$$

et si Y est un autre élément de \mathfrak{g}^0

$$\mathfrak{L}_{X^L} Y^L = [X^L, Y^L] = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} T \varphi_{-t}^{X^L} (Y \circ \varphi_t^{X^L})$$

Il est immédiat de vérifier, avec ces définitions, que si $X, Y \in \mathfrak{g}^0$

$$[X^L, Y^L] = - [X, Y]^L$$

de sorte que l'algèbre de Lie des champs invariants à gauche est l'algèbre opposée de \mathfrak{g}^0 .
On pourra la noter \mathfrak{g} .

Pour tout $X_g \in T_g G$, on a

$$X_g = (\omega_g X_g)^L$$

et par conséquent une p-forme α sur G est définie par les valeurs qu'elle prend sur les p-uples $X_1^L \dots X_p^L$ de champs invariants à gauche. Ceci permet de vérifier la relation

$$\begin{aligned} d \alpha (X_0^L, \dots, X_p^L) &= \sum_{0 \leq i \leq p} (-1)^i \mathfrak{L}_{X_i^L} (\alpha (X_0^L, \dots, \widehat{X_i^L}, \dots, X_p^L)) \\ &+ \sum_{0 \leq i, j \leq p} (-1)^{i+j} \alpha ([X_i^L, X_j^L], X_0^L, \dots, \widehat{X_i^L}, \dots, \widehat{X_j^L}, \dots, X_p^L) \end{aligned}$$

pour tout $X_0, \dots, X_p \in \mathfrak{g}^0$, en se ramenant sur \mathbb{R}^{p+1} par l'application $F : \mathbb{R}^{p+1} \rightarrow G$ où $F(t^0, \dots, t^p) = \varphi_{t^0}^{X^0} \dots \varphi_{t^p}^{X^p}$.

Si V est un espace vectoriel difféologique, la dérivée de Lie d'une application différentiable $f : G \rightarrow V$ se définit comme plus haut, et on obtient la même expression pour $d\alpha$ si α est une p -forme à valeurs dans V .

Soient α et β deux 1-formes sur G à valeurs dans \mathfrak{g}° ; on définit naturellement la 2-forme $[\alpha, \beta]$ par

$$[\alpha, \beta]_g (X_g, Y_g) = [\alpha_g X_g, \beta_g Y_g] - [\alpha_g Y_g, \beta_g X_g]$$

où les crochets du second membre sont calculés dans \mathfrak{g}° .

Ceci dit, en appliquant les deux membres à des champs invariants à gauche, on vérifie immédiatement la **relation de Maurer-Cartan**

$$d\omega - \frac{1}{2} [\omega, \omega] = 0$$

(le signe - provenant du fait que ω est à valeurs dans l'algèbre de Lie à droite de G).

Si V est un espace vectoriel difféologique, on peut encore, en utilisant la structure de groupe abélien, interpréter les p -formes sur V comme des applications de $\Lambda^p TV$ dans \mathbb{R} . De même, si $X \in V$, on peut lui associer le champ de vecteurs invariant X^L sur V défini par

$$X_Y^L = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (Y + tX)$$

pour tout $Y \in V$, de sorte que X^L admet un flot $(\varphi_t^{X^L})$ où

$$\varphi_t^{X^L} (Y) = Y + tX$$

Ceci permet de définir comme plus haut la dérivée de Lie

$$(\mathfrak{L}_{X^L} f) (Y) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f (Y + tX)$$

pour tout $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ et tout $Y \in V$. On a ici $[X^L, Y^L] = 0$, de sorte que si α est une p -forme sur V

$$d\alpha (X_0^L, \dots, X_p^L) = \sum_{0 \leq i, j \leq p} (-1)^i \mathfrak{L}_{X_i^L} (\alpha (X_0^L, \dots, \widehat{X_i^L}, \dots, X_p^L))$$

Enfin toutes ces définitions sont compatibles : si $\Phi : V \rightarrow G$ est différentiable, on a pour toute p-forme α sur G

$$\Phi^* \alpha = \alpha \circ T\Phi$$

où $T\Phi : \Lambda^p TV \rightarrow \Lambda^p TG$ est l'application induite par $T\Phi : TV \rightarrow TG$.

Ceci étant, on appelle forme de **Maurer-Cartan de l'algèbre de Lie** \mathfrak{g}° de G la 1-forme $\Omega = \exp^* \omega$. C'est donc une 1-forme sur \mathfrak{g}° à valeurs dans \mathfrak{g}° , et

$$\Omega_X Y = \omega_{\exp X} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \exp (X + sY)$$

ou encore pour tout $x \in M$

$$(\Omega_X Y) (x) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \varphi_{-1}^X \circ \varphi_1^{X+sY} (x)$$

Si φ est un difféomorphisme de M sur elle-même, $\varphi_* X$ est le champ de vecteurs défini par

$$\varphi_* X(x) = T_{\varphi(x)} \varphi^{-1} (X (\varphi(x)))$$

$$\text{comme } \left. \frac{d}{dt} \right|_t \varphi_{-t}^X \circ \varphi_t^{X+sY} (x) = s T\varphi_{-t}^X (Y (\varphi_t^{X+sY} (x)))$$

on obtient de façon explicite

$$(\Omega_X Y) (x) = \int_0^1 (\varphi_{-t}^X)_* Y (x) dt \quad (*)$$

Par définition, Ω vérifie la formule de Maurer-Cartan

$$d\Omega - \frac{1}{2} [\Omega, \Omega] = 0 \quad (**)$$

B-4 Forme de Maurer Cartan d'une algèbre de Lie complète fermée

Soit \mathfrak{g} une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{X}_0(M)$ la formule (*) a encore un sens même si \mathfrak{g} n'est pas l'algèbre de Lie d'un sous-groupe de Lie faible de $\text{Diff}_0(M)$, et définit une 1-forme sur \mathfrak{g} à valeurs dans $\mathfrak{X}_0(M)$.

Si \mathfrak{g} est complète $t \mapsto \varphi_{-t}^X(Y)$ est une courbe de \mathfrak{g} . Le champ de vecteurs $\Omega_X Y$ est un élément de \mathfrak{g} si l'on peut assurer que l'intégrale Z de cette courbe, qui est définie par :

$$Z(x) = \int_0^1 \varphi_{-t}^X(Y) dt$$

(et qui a priori appartient à $\mathfrak{X}_0(M)$) est à valeurs dans \mathfrak{g} .

Soit \mathfrak{g} une sous algèbre complète de $\mathfrak{X}_0(M)$. On dit que \mathfrak{g} est **fermée** si pour tout couple $(X, Y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ on a $\int_0^1 \varphi_{-t}^X(Y) dt \in \mathfrak{g}$. Dans ce cas la formule (*) a encore un sens et définit une 1-forme Ω sur \mathfrak{g} telle que $d\Omega - \frac{1}{2}[\Omega, \Omega] = 0$ on dit que Ω est la **1-forme de Maurer-Cartan** de \mathfrak{g} .

Exemple fondamental : Soit $\text{Ham}_0(P, \Lambda)$ l'espace des champs de vecteurs hamiltoniens à supports compacts d'une variété de Poisson (P, Λ) $\text{Ham}_0(P, \Lambda)$ est une algèbre de Lie complète fermée. La démonstration de la fermeture est en fait la même que celle de la complétion donnée en [2]. Soit $X = [\Lambda, u]$ et $Y = [\Lambda, v]$ (où $[\cdot, \cdot]$ est le crochet de Schouten) deux champs hamiltoniens à support compact. On a

$$\varphi_{-t}^X(Y) = \varphi_{-t}^X([\Lambda, v])$$

Or d'une part le crochet de Schouten est transparent pour φ_{-t}^X , d'autre part $\varphi_{-t}^X(\Lambda) = \Lambda$ car φ_{-t}^X est un isomorphisme de Poisson. Il en résulte que

$$\varphi_{-t}^X(Y) = [\Lambda, \varphi_{-t}^{X*} v]$$

ce qui assure que $\text{Ham}_0(P, \Lambda)$ est complète. D'autre part par intégration en t

$$\int_0^1 (\varphi_{-t}^X(Y)) dt = [\Lambda, \int_0^1 \varphi_{-t}^{X*} v dt]$$

ce qui entraîne que $\text{Ham}_0(P, \Lambda)$ est fermée. $\text{Ham}_0(P, \Lambda)$ est donc muni d'une 1-forme de Maurer-Cartan notée Ω .

En général il ne semble pas qu'on puisse affirmer que $\text{Ham}_0(\Gamma_0, \Lambda_0)$ est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe de Lie faible, bien qu'on puisse construire de nombreux exemples où il en est ainsi (cf. Appendice).

B.5 Forme de Maurer-Cartan de l'algèbre de Lie $C_0^\infty(P, \mathbb{R})$ des fonctions à support compact d'une variété de Poisson (P, Λ) .

Si (P, Λ) est une variété de Poisson l'application $f \mapsto Xf = [\Lambda, f] = \Lambda^\# df$ qui à une fonction associe le champ dont elle est le hamiltonien est un morphisme d'algèbre de Lie qui étend la représentation coadjointe du cas de dimension finie. En effet si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie de dimension finie \mathfrak{g}^* la variété de Lie-Poisson sur le dual, \mathfrak{g} est une sous-algèbre de Lie de $C^\infty(\mathfrak{g}^*, \mathbb{R})$ et

$$\Lambda^\# X(\xi) = \text{ad}_x^* \xi.$$

On munit $C_0^\infty(P, \mathbb{R})$ et $\text{Ham}_0(P, \Lambda)$ des difféologies canoniques à contrôle compact ($\text{Ham}_0(P, \Lambda)$ est un sous-espace difféologique de $\mathfrak{X}_0(P)$). $\Lambda^\# \circ d = \rho$ est un morphisme difféologique et on a une suite exacte d'algèbres de Lie difféologiques (à contrôle compact)

$$0 \rightarrow Z_0 \rightarrow C_0^\infty(P, \mathbb{R}) \xrightarrow{\rho} \text{Ham}_0(P, \Lambda) \rightarrow 0$$

Soit Ω la 1-forme de Maurer-Cartan de $\text{Ham}_0(P, \Lambda)$. Elle se rappelle sur $C_0^\infty(P, \mathbb{R})$ en une 1-forme $\rho^* \Omega$ à valeurs dans $\text{Ham}_0(P, \Lambda)$ et :

$$(\rho^* \Omega)_f h = \int_0^1 (\varphi_{-t}^{[\Lambda, f]})_* [\Lambda, h] dt = \int_0^1 [\Lambda, \varphi_t^{[\Lambda, f]}]_* h dt$$

Donc en posant, pour $f, h \in C_0^\infty(P, \mathbb{R})$

$$(\Omega_0)_f h = \int_0^1 \varphi_{-t}^{[\Lambda, f]} h dt$$

on définit une 1-forme sur $C_0^\infty(P, \mathbb{R})$ à valeurs dans $C_0^\infty(P, \mathbb{R})$ telle que

$$(\rho^* \Omega)_f(h) = [\Lambda, (\Omega_0)_f h] = \rho_0(\Omega_0)_f(h).$$

Si l'on note $\{ , \}$ le crochet dans $C_0^\infty(P, \mathbb{R})$, compte tenu de ce que ρ est un morphisme difféologique et d'algèbres de Lie

$$d\Omega_0 - \frac{1}{2} \{ \Omega_0, \Omega_0 \} \in Z_0.$$

On va prouver

Théorème et définition 1.B.3 : $d\Omega_0 - \frac{1}{2} \{ \Omega_0, \Omega_0 \} = 0$

On dit que Ω_0 est la **1-forme de Maurer-Cartan** de l'algèbre de Lie difféologique $C_0^\infty(P, \mathbb{R})$.

Démonstration : on va calculer explicitement $d\Omega_0$. Notons pour simplifier $\psi_t^f = \phi_t^{[\Lambda, f]}$ le flot de $[\Lambda, f]$ pour tout $f \in C_0^\infty(P, \mathbb{R})$. Si $h_1, h_2 \in C_0^\infty(P, \mathbb{R})$, on a, par définition de l'opérateur d sur un espace vectoriel [cf. B3]

$$(d\Omega_0)_f(h_1, h_2) = \mathcal{L}_{h_1}^L(\Omega_0 h_2)(f) - \mathcal{L}_{h_2}^L(\Omega_0 h_1)(f)$$

$$= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_0^1 (\psi_{-t}^{f+sh_1} * h_2 - \psi_{-t}^{f+sh_2} * h_1) dt$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (h_2 \circ \psi_{-t}^{f+sh_1} - h_1 \circ \psi_{-t}^{f+sh_2}) dt$$

en écrivant

$$h_2 \circ \psi_{-t}^{f+sh_1} = h_2 \circ \psi_{-t}^f \circ (\psi_t^f \circ \psi_{-t}^{f+sh_1})$$

et en remarquant que

$$\frac{d}{dt} \psi_t^f \circ \psi_{-t}^{f+sh_1} = -s T \psi_t^f ([\Lambda, h_1] \circ \psi_{-t}^{f+sh_1})$$

on obtient :

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (h_2 \circ \Psi_{-t}^{f+sh_1}) = -d(\Psi_{-t}^{f*} h_2) \left[\Lambda, \int_0^t \Psi_{-s}^{f*} h_1 ds \right]$$

c'est à dire

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (h_2 \circ \Psi_{-t}^f) = - \int_0^t \{ \Psi_{-s}^{f*} h_1, \Psi_{-t}^{f*} h_2 \} ds$$

On introduit alors les fonctions $H_{ij}(s,t)$ ($1 \leq i, j \leq 2$) définies par

$$H_{ij}(s,t) = \{ \Psi_{-s}^{f*} h_i, \Psi_{-t}^{f*} h_j \}$$

on remarque que $H_{ij}(s,t) = -H_{ij}(t,s)$ ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} (d\Omega_0)_f(h_1, h_2) &= - \int_0^1 \int_0^t H_{12}(s,t) ds dt + \int_0^1 \int_0^t H_{21}(s,t) ds dt \\ &= - \int_0^1 \int_0^t H_{12}(s,t) ds dt - \int_0^1 \int_0^s H_{12}(s,t) ds dt \\ &= - \int_0^1 \int_0^1 H_{12}(s,t) ds dt \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} (d\Omega_0)_f(h_1, h_2) &= - \int_0^1 \int_0^1 \{ \Psi_{-s}^{f*} h_1, \Psi_{-t}^{f*} h_2 \} ds dt \\ &= - \left\{ \int_0^1 \Psi_{-s}^{f*} h_1 ds, \int_0^1 \Psi_{-t}^{f*} h_2 dt \right\} \\ &= - \{ (\Omega_0)_f h_1, (\Omega_0)_f h_2 \} \end{aligned}$$

ce qui démontre le théorème.

Remarque : La méthode suivie pour la construction de la forme de Maurer-Cartan généralise la méthode de Cartan-Smith de preuve du troisième théorème de Lie (cf. [9]). Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie de dimension finie, à la représentation adjointe de \mathfrak{g} est associé la suite exacte

$$0 \rightarrow Z \rightarrow \mathfrak{g} \xrightarrow{\rho} \text{ad}\mathfrak{g} \rightarrow 0$$

$\text{ad}\mathfrak{g}$ étant une algèbre de Lie de matrices s'intègre et on construit ainsi sur un voisinage de 0 une forme de Maurer-Cartan Ω à laquelle on associe Ω_0 sur un voisinage V de 0 dans \mathfrak{g} . On prouve que Ω_0 est de Maurer-Cartan ce qui munit ce voisinage V d'une structure de

groupe local. En dimension finie il y a le miracle, que met en évidence la méthode de Cartan Smith, que l'on peut globaliser ceci et obtenir un groupe (ce qui n'est que très rarement le cas en dimension infinie).

2-GROUPOIDES SYMPLECTIQUES

Définition 2-1 [1] [11] [24]. *Un groupoïde symplectique est un groupoïde de Lie $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$ muni d'une forme symplectique σ telle que le graphe $\text{Gr}(\mu)$ de la multiplication soit une sous-variété lagrangienne de $\overline{\Gamma} \times \Gamma \times \Gamma$.*

Comme $\text{Gr}(\mu)$ est une variété difféomorphe à Γ_2 , une des premières conséquences de cette définition est que si $\dim \Gamma = 2n$, on a $\dim \Gamma_2 = 3n$. En particulier, un groupe de Lie muni d'une forme symplectique n'est un groupoïde symplectique que s'il est discret. (Sa structure symplectique est alors évidemment sans intérêt).

Proposition 2-1 Soit $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$ un groupoïde symplectique. Alors

- 1) la base Γ_0 est une sous-variété lagrangienne de Γ .
- 2) l'inversion ι est un antisymplectomorphisme de Γ sur lui-même (autrement dit un symplectomorphisme de Γ sur $\overline{\Gamma}$).

Preuve : Comme $\Gamma_0 = \alpha(\Gamma)$, on a

$$\Gamma_0 = \{u \in \Gamma \mid (\exists x \in \Gamma) (x, x, u) \in \text{Gr}(\mu)\}$$

En d'autres termes, $\Gamma_0 = \Delta_\Gamma \circ R_\mu$ où R_μ est la relation lagrangienne de Γ vers $\overline{\Gamma} \times \Gamma$ définie par $\text{Gr}(\mu)$, et Δ_Γ la diagonale de Γ (qui est une sous-variété lagrangienne de $\overline{\Gamma} \times \Gamma$). Dans Γ^5 , $\Delta_\Gamma \times R_\mu$ et $\Gamma \times \Delta_{\Gamma \times \Gamma}$ se coupent nettement. On peut donc appliquer la proposition 1.A1, ce qui montre que Γ_0 est lagrangienne.

De même, on a dans $\Gamma \times \Gamma$

$$\text{Gr}(\iota) = \{(x^{-1}, x) \mid x \in \Gamma\} = \{(y, x) \in \Gamma \times \Gamma \mid (\exists u \in \Gamma_0) (u, y, x) \in \text{Gr}(\mu)\}$$

et donc $\text{Gr}(\iota) = \Gamma_0 \circ R'_\mu$ où R'_μ est la relation lagrangienne de $\Gamma \times \Gamma$ vers $\overline{\Gamma}$ définie par $\text{Gr}(\mu)$. On termine comme précédemment.

Il résulte de cette proposition que si $\dim \Gamma = 2n$, on a $\dim \Gamma_0 = n$, et donc les α -fibres et les β -fibres sont de dimension n .

Définition 2-2. Soit $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$ un groupoïde symplectique. On dira qu'un glissement (à gauche ou à droite) φ de Γ est **symplectique** si φ est un symplectomorphisme local de Γ . De même, un champ invariant (à gauche ou à droite) X de Γ sera dit **symplectique** s'il est localement hamiltonien.

On notera $\underline{\mathfrak{L}}(\Gamma, \sigma)$ et $\underline{\mathfrak{R}}(\Gamma, \sigma)$ les sous-faisceaux de $\underline{\mathfrak{L}}(\Gamma)$ et $\underline{\mathfrak{R}}(\Gamma)$ formés des germes de champs invariants symplectiques.

Proposition 2-2 Soit $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$ un groupoïde symplectique.

1) Un glissement (à gauche ou à droite) φ de Γ est symplectique si, et seulement si, la bissection $\varphi(\Gamma_0 \cap \text{dom } \varphi)$ associée est une sous-variété lagrangienne de Γ . En particulier, φ est symplectique si, et seulement si, son conjugué $\bar{\varphi}$ l'est.

2) Le pseudogroupe le long de β [resp. de α] des glissements symplectiques à gauche [resp. à droite] est transitif sur les α -fibres [resp. les β -fibres] et sépare les β -fibres [resp. les α -fibres].

3) Le faisceau $\underline{\mathfrak{L}}(\Gamma, \sigma)$ [resp. $\underline{\mathfrak{R}}(\Gamma, \sigma)$] est transitif sur les β -fibres [resp. les α -fibres].

4) Les feuilletages de Γ par les α -fibres et les β -fibres sont symplectiquement orthogonaux.

5) La dualité symplectique échange les champs invariants à gauche [resp. à droite] et les 1-formes invariantes à gauche [resp. à droite].

Preuve

1) Soit U un ouvert de Γ_0 , et soit φ un glissement à droite défini sur $\overset{-1}{\alpha}(U)$. Notons $B = \varphi(U)$ la bissection associée. Si φ est symplectique, B est lagrangienne. Réciproquement, supposons B lagrangienne. Le graphe de φ est

$$\begin{aligned} \text{Gr}(\varphi) &= \{(xy, x) \mid x \in \overset{-1}{\alpha}(U) \text{ et } y \in B\} \\ &= \{(z, x) \in \Gamma \times \Gamma \mid (\exists y \in B) (z, x, y) \in \text{Gr}(\mu)\} \end{aligned}$$

et donc $\text{Gr}(\varphi) = R_\mu \circ B$, où R_μ est la relation lagrangienne définie plus haut. φ est donc un symplectomorphisme local.

2) Par tout point x de Γ passe une bissection lagrangienne B , de sorte que $R_B(\beta(x)) = x$. Donc le pseudogroupe le long de α des glissements symplectiques à droite est transitif sur les β -fibres. Il sépare les α -fibres, car si u et u' sont deux points distincts de Γ_0 , donnons nous deux voisinages ouverts U et U' disjoints de u et u' , un point $y' \in \tilde{\beta}^{-1}(u')$ distinct de u' , et une bissection lagrangienne B' passant par y' et telle que $\beta(B') = U'$ (ce qui est possible en restreignant au besoin U'). Alors $U \cup B'$ est une bissection lagrangienne, et $R_{U \cup B'}$ fixe u et non u' .

En prenant les conjugués, on obtient le résultat pour le pseudogroupe le long de β des glissements symplectiques à gauche.

3) Si $x \in \Gamma$, soit $u = \beta(x)$, et considérons n fonctions différentiables f_1, \dots, f_n dont les différentielles sont linéairement indépendantes sur un voisinage U de u . Les champs hamiltoniens $X_{\beta^* f_1}, \dots, X_{\beta^* f_n}$ sont linéairement indépendants sur $\tilde{\beta}^{-1}(U)$ et sont invariants par les glissements symplectiques à droite. D'après 2) et le lemme I-6-2, ils sont invariants à droite et engendrent en tout point l'espace tangent à la α -fibres. Donc $\mathfrak{R}(\Gamma, \sigma)$ est transitif sur les α -fibres. En passant au conjugué, on obtient le résultat pour $\mathfrak{L}(\Gamma, \sigma)$.

4) Dans la construction ci-dessus, en tout point $x \in \tilde{\beta}^{-1}(U)$ l'espace tangent à la α -fibre est engendré par les valeurs en x de $X_{\beta^* f_1}, \dots, X_{\beta^* f_n}$. Les différentielles $d\beta^* f_1, \dots, d\beta^* f_n$ sont des 1-formes invariantes à droites et linéairement indépendantes, de sorte que l'équation $\beta^* df_1 = 0 \dots \beta^* df_n = 0$ est l'équation de la β -fibre.

Donc α -fibres et β -fibres sont symplectiquement orthogonales.

5) Si θ est une 1-forme invariante à droite, le champ X défini par $i_X \sigma = \theta$ est invariant par les glissements symplectiques à droite, donc invariant à droite d'après le lemme I-6-2.

Inversement, si X est un champ invariant à droite, il est tangent aux α -fibres, de sorte que la forme $\theta = i_X \sigma$ est invariante par les glissements symplectiques à droite et nulle sur l'espace tangent aux β -fibres. La forme $\theta - \beta^* j^* \theta$ est alors nulle en tout point de Γ_0 , et invariante par les glissements symplectiques à droite, donc identiquement nulle.

Corollaire : *Le pseudogroupe le long de α des glissements symplectiques à droite est un pseudogroupe de définition de Γ . Si Γ est à fibres connexes, le faisceau $\tilde{\mathcal{L}}(\Gamma, \sigma)$ est un faisceau de définition de Γ .*

Théorème 2-1 .Soit $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$ un groupoïde de Lie muni d'une forme symplectique σ . Alors Γ est un groupoïde symplectique si, et seulement si, il vérifie les deux conditions suivantes :

- 1) la variété Γ_0 est une sous-variété lagrangienne de Γ .
- 2) Γ admet un pseudogroupe de définition formé de symplectomorphismes locaux.

Démonstration : Nous venons de voir que ces conditions sont nécessaires, montrons qu'elles sont suffisantes : soit \mathcal{P} un pseudogroupe de définition de Γ formé de symplectomorphismes locaux. Si $\dim \Gamma = 2n$, on a $\dim \Gamma_0 = n$, et donc α -fibres et β -fibres sont de dimension n .

Si $u \in \Gamma_0$, soient f^1, \dots, f^n n fonctions C^∞ dont les différentielles sont linéairement indépendantes, sur un voisinage ouvert U de u dans Γ_0 . Les champs hamiltoniens $X_{\beta^* f^1}, \dots, X_{\beta^* f^n}$ sont linéairement indépendants en tout point de $\bar{\beta}^{-1}(U)$, sont invariants par les éléments de \mathcal{P} , donc invariants à droite, et engendrent en tout point de $\bar{\beta}^{-1}(U)$ l'espace tangent à la α -fibre. Cet espace est l'orthogonal symplectique du sous-espace défini par les équations

$$d\beta^* f^1 = 0, \dots, d\beta^* f^n = 0$$

c'est à dire l'espace tangent à la β -fibre au point considéré. Par conséquent, les feuilletages définis sur Γ par les α -fibres et les β -fibres sont symplectiquement orthogonaux. Il résulte de là que l'inversion ι est un antisymplectomorphisme de Γ . En effet soient X et Y deux \mathcal{P} -champs de vecteurs définis au voisinage de $u \in \Gamma_0$. On a $\bar{X}_u = X_u - T\alpha(X_u)$, et donc

$$0 = \sigma(\bar{X}_u, Y_u) = \sigma(X_u, Y_u) - \sigma(T\alpha(X_u), Y_u)$$

Puisque $T\iota(X_u) = -\bar{X}_u$ et Γ_0 est lagrangienne, on a

$$(\iota^* \sigma_u)(X_u, Y_u) = \sigma_u(\bar{X}_u, Y_u) = -\sigma_u(X_u, Y_u)$$

Si maintenant Z_u et Z'_u sont deux vecteurs de $T_u \Gamma_0$,

$$(\iota^* \sigma_u)(Z_u, Z'_u) = \sigma_u(Z_u, Z'_u) = 0 = -\sigma_u(Z_u, Z'_u)$$

$$(\iota^* \sigma_u)(Z_u, X_u) = -\sigma_u(Z_u, \bar{X}_u) = -\sigma_u(Z_u, X_u)$$

Par conséquent on a $\iota^*\sigma = -\sigma$ en tout point de Γ_0 . Comme \mathcal{P} agit transitivement sur les β -fibres en respectant σ , cette relation est vraie en tout point de Γ .

Une première conséquence est que si $\varphi \in \mathcal{P}$, $\overline{\varphi} = \iota \circ \varphi^{-1} \circ \iota$ est un symplectomorphisme local de Γ . Les glissements à gauche "symplectiques" agissent de façon transitive sur les α -fibres.

Considérons alors le graphe $\text{Gr}(\mu)$ de la multiplication : c'est une sous-variété de $\overline{\Gamma} \times \Gamma \times \Gamma$ de dimension égale à $\dim \Gamma_2$, c'est à dire $3n$. A tout élément $\varphi \in \mathcal{P}$ on peut associer le symplectomorphisme local $\hat{\varphi}$ de $\overline{\Gamma} \times \Gamma \times \Gamma$ défini par

$$\text{dom } \hat{\varphi} = \text{dom } \varphi \times \Gamma \times \text{dom } \varphi \text{ et } \hat{\varphi}(z, x, y) = (\varphi(z), x, \varphi(y))$$

Puisque φ est un glissement à droite, $\hat{\varphi}$ respecte $\text{Gr}(\mu)$.

Si $\varphi(\beta(y)) = y$, on a

$$(xy, x, y) = \hat{\varphi}(x, x, \beta(y))$$

Par conséquent, pour montrer que $\text{Gr}(\mu)$ est lagrangienne dans $\overline{\Gamma} \times \Gamma \times \Gamma$, il suffit de montrer que la forme $-\sigma + \sigma + \sigma$ est nulle sur le sous-espace

$$T_{(x,x,u)} \text{Gr}(\mu) \text{ où } x \in \Gamma \text{ et } u = \alpha(x).$$

Or on a

$$T_{(x,x,u)} \text{Gr}(\mu) = \{(T\mu(X_x, Y_u), X_x, Y_u) \mid X_x \in T_x\Gamma, Y_u \in T_u\Gamma, \text{ et } T\alpha(X_x) = T\beta(Y_u)\}$$

Introduisons dans $T_{(x,x,u)} \text{Gr}(\mu)$ le sous-espace "vertical"

$$V_{(x,x,u)} = \{(T\mu(X_x, Y_u), X_x, Y_u) \mid T\alpha(X_x) = T\beta(Y_u) = 0\}$$

On peut prolonger X_x et Y_u en des champs de vecteurs localement hamiltoniens respectivement invariants à droite et à gauche, X et Y . Si (φ_t) et (ψ_t) sont les flots locaux en x et en u de ces champs, les (ψ_t) sont définis sur un ouvert α -saturé, donc en x , et on a

$$T\mu(X_x, Y_u) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t(x). \psi_t(u) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\psi_t \circ \varphi_t)(x) = X_x + Y_x$$

Donc $V_{(x,x,u)}$ est engendré par les $(X_x + Y_x, X_x, Y_u)$ où X et Y sont des champs localement hamiltoniens respectivement invariants à droite et à gauche. Un supplémentaire dans $T_{(x,x,u)} \text{Gr}(\mu)$ de $V_{(x,x,u)}$ est donné par le choix d'une bissection B passant par x , en considérant

$$H_{(x,x,u)}^B = \{(T\mu(X_x, Y_u), X_x, Y_u) \mid Y_u \in T_u \Gamma_0, X_x \in T_x B, T\alpha(X_x) = Y_u\}$$

On peut choisir $B = \psi(U)$, ou ψ est un glissement à gauche "symplectique" : $H_{(x,x,u)}^B$ est alors engendré par les

$$(T\psi(Y_u), T\psi(Y_u), Y_u) \text{ où } Y_u \in T_u \Gamma_0$$

Or si X et X' sont des champs localement hamiltoniens invariants à droite, Y et Y' des champs localement hamiltoniens invariants à gauche, et Z_u, Z'_u deux vecteurs dans $T_u \Gamma_0$, on a d'une part

$$\begin{aligned} (-\sigma + \sigma + \sigma) ((X_x + Y_x, X_x, Y_u), (X'_x + Y'_x, X'_x, Y'_u)) &= \\ &= -\sigma(Y_x, Y'_x) + \sigma(Y_u, Y'_u) \end{aligned}$$

(qui est nul car il existe un glissement à gauche "symplectique" envoyant x sur u , donc Y_x sur Y_u et Y'_x sur Y'_u)
d'autre part

$$\begin{aligned} (-\sigma + \sigma + \sigma) ((X_x + Y_x, X_x, Y_u), (T\psi(Z_u), T\psi(Z_u))) &= \\ &= -\sigma(Y_x, T\psi(Z_u)) + \sigma(Y_u, Z_u) \end{aligned}$$

(qui est nul car $T\psi(Y_u) = Y_x$)

et enfin

$$(-\sigma + \sigma + \sigma) ((T\psi(Z_u), T\psi(Z_u), Z_u), (T\psi(Z'_u), T\psi(Z'_u), Z'_u)) = 0$$

d'où le résultat.

Corollaire : Soit $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$ un groupoïde de Lie à fibres connexes muni d'une forme symplectique σ . Alors Γ est un groupoïde symplectique si, et seulement si, il vérifie les conditions suivantes :

- 1) la variété Γ_0 est lagrangienne dans Γ .
- 2) Γ admet un faisceau de définition formé de germes de champs de vecteurs hamiltoniens.

Exemple 2-1 : M étant une variété, désignons par λ la forme de Liouville sur T^*M , et par $\pi : T^*M \rightarrow M$ la projection canonique. Alors T^*M , muni de la forme symplectique $d\lambda$ et de la structure de groupoïde définie par l'addition dans les fibres de π , est un groupoïde symplectique : en effet on a $\alpha = \beta = \pi$, et M identifié avec la section nulle de T^*M , est une sous-variété lagrangienne. D'autre part à toute fonction différentiable f définie sur un ouvert de M , on peut associer le difféomorphisme $\varphi_f : \pi^{-1}(U) \rightarrow \pi^{-1}(U)$ défini par la translation par df

$$(\forall x \in U) \varphi_f(\theta_x) = \theta_x + df_x$$

φ_f est un symplectomorphisme, et le pseudogroupe le long de π engendré par les φ_f est le pseudogroupe (le long de π) formé des translations par les 1-formes fermées. C'est un pseudogroupe de définition de $T^*M \begin{smallmatrix} \pi \\ \rightrightarrows \\ \pi \end{smallmatrix} M$.

Exemple 2-2. Soit $M = (M, \sigma)$ une variété symplectique. Alors, muni de la forme symplectique $\tilde{\sigma} = -\sigma + \sigma$, le groupoïde grossier $\overline{M} \times M \begin{smallmatrix} \text{pr}_2 \\ \rightrightarrows \\ \text{pr}_1 \end{smallmatrix} M$ est symplectique. On obtient en effet un pseudogroupe de définition de $\overline{M} \times M$ en considérant les difféomorphismes locaux φ de la forme $\varphi = \text{id}_M \times \varphi_0$ ou φ_0 parcourt l'ensemble des symplectomorphismes locaux de M .

Exemple 2-3. Soit $M = (M, \sigma)$ une variété symplectique, et considérons le groupoïde fondamental $\pi(M)$ (exemple I-5-4). Si U et V sont des ouverts de M , un glissement à droite dans $\pi(M)$ de $\overset{-1}{\alpha}(U)$ dans $\overset{-1}{\alpha}(V)$ est un couple $\varphi = (h_\varphi, \tau_\varphi)$ où h_φ est un difféomorphisme de U sur V et τ_φ une section de β au dessus de U telle que $\alpha(\tau_\varphi(x)) = h_\varphi(x)$ pour tout $x \in U$, l'action de φ sur une classe d'homotopie de lacet $[\gamma] \in \overset{-1}{\alpha}(U)$ étant donnée par $\varphi([\gamma]) = [\gamma]. \tau_\varphi(\alpha([\gamma]))$.

Comme $\pi(M) \begin{smallmatrix} (\beta, \alpha) \\ \rightrightarrows \end{smallmatrix} M \times M$ est un revêtement, la forme $\tilde{\sigma} = (\beta, \alpha)^*(-\sigma + \sigma)$ est une forme symplectique sur $\pi(M)$ telle que $M = \Delta_M$ soit une sous-variété lagrangienne. En se bornant aux glissements à droite φ tels que h_φ soit un symplectomorphisme, on obtient un pseudogroupe de définition de $\pi(M)$ qui en fait un groupoïde symplectique.

En tant que variété symplectique, $\pi(M)$ jouit d'ailleurs de la propriété suivante :

Proposition 2-3 [1]. Soit G un groupe de Lie. Toute action symplectique de G sur M se relève en une action de G sur $\pi(M)$ fortement hamiltonienne.

Preuve : Si ψ est un difféomorphisme local de M , il se relève sur $\pi(M)$ en $\tilde{\psi}$ où $\tilde{\psi}[\gamma] = [\psi \circ \gamma]$. D'autre part, si $[\gamma] \in \pi(M)$, on a $T_{[\gamma]} \pi(M) = T_{\gamma(1)} M \times T_{\gamma(0)} M$, de sorte que si X est un champ de vecteurs sur M , il se relève sur $\pi(M)$ en $X_L = (0, X)$ qui est invariant à gauche, en $X_R = (X, 0)$ qui est invariant à droite, et en $\tilde{X} = X_L + X_R$ qui est le relèvement naturel correspondant au relèvement des difféomorphismes. Si X est localement hamiltonien, \tilde{X} est hamiltonien; en effet la fonction $H_x : \pi(M) \rightarrow \mathbb{R}$ où

$$H_x[\gamma] = \int_{\gamma} i_x \sigma$$

est alors bien définie, et comme $dH_x = \beta^* i_x \sigma - \alpha^* i_x \sigma$, on aura $i_{\tilde{X}} \tilde{\sigma} = -dH_x$.

Par suite, si G agit sur M , soit A_M le champ fondamental associé à l'élément $A \in \mathfrak{g}$. L'application $J : \pi(M) \rightarrow \mathfrak{g}^*$ où $\langle J[\gamma], A \rangle = H_{A_M}[\gamma]$ est un moment Ad_G^* -équivariant pour l'action de G relevée sur $\pi(M)$.

3 - ETUDE D'UN EXEMPLE : LE COTANGENT D'UN GROUPOÏDE DE LIE [1].

Soit $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$ un groupoïde de Lie. Le fibré cotangent $T^*\Gamma \xrightarrow{\pi} \Gamma$ muni de la forme canonique $d\lambda$ est d'après l'exemple 2-1 un groupoïde symplectique. Nous allons relever la structure de groupoïde de Γ en une seconde structure de groupoïde sur $T^*\Gamma$, qui sera elle aussi symplectique et fera de $T^*\Gamma$ un groupoïde double.

En tout point $u \in \Gamma_0$, la décomposition en somme directe

$$T_u \Gamma = T_u \Gamma_0 \oplus T_u \beta^{-1}(u)$$

définit une projection

$$p_\beta : T_u^* \Gamma \rightarrow \mathfrak{v}_u^* \Gamma_0$$

(où $\nu^* \Gamma_0$ est le fibré conormal à Γ_0), avec

$$p_\beta(\omega_u) = \omega_u - \beta^* j^* \omega_u$$

On a de même une projection

$$p_\alpha : T_u^* \Gamma \rightarrow \nu_u^* \Gamma_0$$

où $p_\alpha(\omega_u) = \omega_u - \alpha^* j^* \omega_u$.

Lemme 3-1. Soit $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$ un groupoïde de Lie, et soit $x \in \Gamma$.

Si φ est un glissement à gauche tel que $\varphi(\alpha(x)) = x$, l'application

$$\hat{\alpha} = p_\beta \circ \varphi^* : T_x^* \Gamma \rightarrow \nu_{\alpha(x)}^* \Gamma_0$$

est indépendante du choix de φ .

Si ψ est un glissement à droite tel que $\psi(\beta(x)) = x$, l'application

$$\hat{\beta} = p_\alpha \circ \psi^* : T_x^* \Gamma \rightarrow \nu_{\beta(x)}^* \Gamma_0$$

est indépendante du choix de ψ .

Preuve : Si φ' est un autre glissement à gauche avec $\varphi'(\alpha(x)) = x$, φ et φ' coïncident sur toute la β -fibre $\beta^{-1}(\alpha(x))$. Par conséquent $\varphi^* - \varphi'^*$ envoie $T_x^* \Gamma$ sur le conormal à la β -fibre en $\alpha(x)$, c'est à dire sur le noyau de p_β en ce point.

On procède de même pour les glissements à droite.

On a donc défini des projections $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ telles que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} T^* \Gamma & \xrightarrow{\hat{\alpha}} & \nu^* \Gamma_0 \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi_0 \\ \Gamma & \xrightarrow{\alpha} & \Gamma_0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T^* \Gamma & \xrightarrow{\hat{\beta}} & \nu^* \Gamma_0 \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi_0 \\ \Gamma & \xrightarrow{\beta} & \Gamma_0 \end{array}$$

commutent (on a noté $\pi_0 = \pi |_{\nu^* \Gamma_0}$). De manière explicite

$$\hat{\alpha}(\theta_x) = \varphi^*(\theta_x) - (\varphi \circ j \circ \beta)^* \theta_x \text{ si } \varphi(\alpha(x)) = x$$

$$\hat{\beta}(\theta_x) = \psi^*(\theta_x) - (\psi \circ j \circ \alpha)^* \theta_x \text{ si } \psi(\beta(x)) = x$$

Pour la forme canonique de $T^*\Gamma$, la sous-variété (séparée) $\mathfrak{v}^*\Gamma_0$ est lagrangienne. Pour obtenir la structure de groupoïde cherchée, il suffit donc de construire un pseudogroupe de définition formé de symplectomorphismes locaux. Désignons pour cela par \mathcal{P} le pseudogroupe de définition de Γ formé de tous les glissements à droite.

Si U est un ouvert de Γ_0 , notons $\widehat{U} = \pi_0^{-1}(U)$. On a $\widehat{\alpha}^{-1}(\widehat{U}) = \pi^{-1}(\alpha^{-1}(U))$

Si $\varphi : \alpha^{-1}(U) \rightarrow \alpha^{-1}(V)$ est un élément de \mathcal{P} , son relevé naturel φ^* dans $T^*\Gamma$ est un symplectomorphisme de $\widehat{\alpha}^{-1}(\widehat{U})$ sur $\widehat{\alpha}^{-1}(\widehat{V})$. De même, si ξ est une 1-forme fermée sur U , la forme $\alpha^*\xi$ est une 1-forme fermée (invariante à gauche) sur $\alpha^{-1}(U)$, de sorte que la translation $\tau_{\alpha^*\xi}$ par $\alpha^*\xi$ est un symplectomorphisme de $\widehat{\alpha}^{-1}(\widehat{U})$ sur lui-même :

$$\tau_{\alpha^*\xi}(\theta_x) = \theta_x + (\alpha^*\xi)_x$$

Désignons par $\widehat{\mathcal{P}}$ le pseudogroupe le long de $\widehat{\alpha}$ engendré par les φ^* et les $\tau_{\alpha^*\xi}$, où φ parcourt \mathcal{P} et ξ les 1-formes locales fermées sur Γ_0 . On notera que $\widehat{\mathcal{P}}$ est un "produit semi-direct" de pseudogroupes, en ce sens que si l'un des deux membres est défini

$$\varphi^* \circ \tau_{\alpha^*\xi} = \tau_{\alpha^*(\varphi^*\xi)} \circ \varphi^*$$

(ce qui fait apparaître l'action des glissements à droite sur les 1-formes invariantes à gauche, si la base Γ_0 n'est pas discrète). En particulier, la définition ci-dessus de $\widehat{\beta}$ s'écrit, en notant $u = \beta(x)$ et $\zeta_u = j^*\psi^*\theta^*$

$$\theta_x = \psi^*(\beta(\theta_x) + \alpha^*\zeta_u).$$

Ceci montre que $\widehat{\mathcal{P}}$ agit transitivement sur les $\widehat{\beta}$ -fibres, et que ces fibres sont les $\widehat{\mathcal{P}}$ -orbites. Si d'autre part $\mu_u \in \mathfrak{v}_u^*\Gamma_0$, $\widehat{\beta}^{-1}(\mu_u)$ se projette par π sur $\beta^{-1}(u)$, et $\pi : \widehat{\alpha}^{-1}(\mu_u) \rightarrow \alpha^{-1}(u)$ est un fibré affine d'espace vectoriel directeur $\mathfrak{v}_u^*\beta^{-1}(u)$. Comme \mathcal{P} est infinitésimalement transitif sur les β -fibres, il en résulte que $\widehat{\mathcal{P}}$ est infinitésimalement transitif sur les $\widehat{\beta}$ -fibres.

Montrons que $\widehat{\mathcal{P}}$ sépare les $\widehat{\alpha}$ -fibres : si $\widehat{\mathcal{Q}}$ est le pseudogroupe le long de $\widehat{\beta}$ engendré par les relevés des glissements à gauche et les translations par les formes fermées β -projetables, le raisonnement ci-dessus montre que les orbites de $\widehat{\mathcal{Q}}$ sont les $\widehat{\alpha}$ -fibres. De plus, tout élément de $\widehat{\mathcal{P}}$ commute avec les éléments de $\widehat{\mathcal{Q}}$. Par conséquent, si

un $\widehat{\varphi} \in \widehat{\mathcal{P}}$ fixe $\theta_x \in T_x^* \Gamma$, il fixe toute la $\widehat{\alpha}$ -fibre en θ_x . Réciproquement, soient $\theta_x \in T_x^* \Gamma$ et $\theta'_{x'} \in T_{x'}^* \Gamma$ tels que pour tout élément $\widehat{\varphi} \in \widehat{\mathcal{P}}$ tel que $\widehat{\varphi}(\theta_x) = \theta_{x'}$, on ait $\widehat{\varphi}(\theta'_{x'}) = \theta_x$: il faut montrer que $\widehat{\alpha}(\theta_x) = \widehat{\alpha}(\theta'_{x'})$. D'après ce qui précède, on peut supposer que $x = u$ et $x' = u'$ sont deux points de Γ_0 . Si Γ_0 est discrète, le résultat est immédiat. Sinon l'existence d'une 1-forme fermée ξ sur Γ_0 nulle en u et non en u' si $u' \neq u$ entraîne, en considérant $\widehat{\varphi} = \tau_{\alpha_* \xi}$, que $u = u'$. Posons alors $\eta_u = \theta_u - \theta'_{u'}$. Si φ est un élément de \mathcal{P} tel que $\varphi(u) = u$, la 1-forme $\varphi^* \theta_u - \theta_u$ est nulle sur la valeur en u de tout champ invariant à droite, et donc $\varphi^* \theta_u - \theta_u \in \mathfrak{v}_u^* \widehat{\alpha}^{-1}(u)$. Il en résulte que $\varphi^* \eta_u = \eta_u$, et donc que η_u est la valeur en u d'une 1-forme invariante à droite. On a donc

$$\eta_u \in \mathfrak{v}_u^* \widehat{\beta}^{-1}(u) = T_u^* \Gamma \cap \ker \widehat{\alpha}$$

ce qui donne le résultat.

Notons encore que si $\varphi \in \mathcal{P}$ et si ξ est une 1-forme fermée locale sur Γ_0

$$\pi \circ (\varphi^* \circ \tau_{\alpha_* \xi}) = \varphi \circ \pi$$

Par conséquent π est un morphisme de groupoïdes de Lie de $T^* \Gamma \xrightarrow[\widehat{\beta}]{\widehat{\alpha}} \mathfrak{v}^* \Gamma_0$ sur $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$. Si l'on remarque que l'identification de Γ avec la section nulle de $T^* \Gamma$ permet de regarder $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$ comme une sous-groupoïde de $T^* \Gamma \xrightarrow[\widehat{\beta}]{\widehat{\alpha}} \mathfrak{v}^* \Gamma_0$, on peut aussi voir la projection π comme un morphisme de groupoïdes de $T^* \Gamma \xrightarrow[\widehat{\beta}]{\widehat{\alpha}} \mathfrak{v}^* \Gamma_0$ dans lui-même.

De plus, $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$ sont des morphismes de fibrés vectoriels, et donc des morphismes du groupoïde de Lie $T^* \Gamma \xrightarrow{\pi} \Gamma$ dans lui-même.

Ecrivons explicitement la loi de compositions sur $T^* \Gamma \xrightarrow[\beta]{\widehat{\alpha}} \mathfrak{v}^* \Gamma_0$: soient θ_x et η_y deux 1-formes composables : cela signifie que $\alpha(x) = \beta(y) = u$ et que $\widehat{\alpha}(\theta_x) = \widehat{\beta}(\eta_y) = \omega_u \in \mathfrak{v}_u^* \Gamma_0$. Calculons la composée $\theta_x \circ \eta_y \in T_{xy}^* \Gamma$: il existe des glissements à gauche φ , à droite ψ sur Γ , et des 1-formes fermées ξ et ζ sur Γ_0 tels que

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= x \\ \Psi(u) &= y \\ \theta_x &= \overset{-1}{\Phi^*} \omega_u + \beta^* \xi \\ \eta_y &= \overset{-1}{\Psi^*} \omega_u + \alpha^* \zeta\end{aligned}$$

la 1-forme $\theta_x \circ \eta_y$ est alors définie par

$$\theta_x \circ \eta_y = \overset{-1}{\Phi^*} \overset{-1}{\Psi^*} \omega_u + \beta^* \xi + \alpha^* \zeta$$

(où d'ailleurs $\overset{-1}{\Phi^*} \overset{-1}{\Psi^*} \omega_u = \overset{-1}{\Psi^*} \overset{-1}{\Phi^*} \omega_u$). Ceci étant, si θ'_x et η'_y sont deux autres formes composables, on vérifie immédiatement que

$$(\theta_x \circ \eta_y) + (\theta'_x \circ \eta'_y) = (\theta_x + \theta'_x) \circ (\eta_y + \eta'_y)$$

ce qui établit l'"échangeabilité" des deux lois de groupoides de $T^*\Gamma$. En résumé :

Théorème 3-1. Soit $\Gamma \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} \Gamma_0$ un groupoïde de Lie. Alors, les projections $T^*\Gamma \overset{\hat{\alpha}}{\underset{\hat{\beta}}{\rightrightarrows}} \mathfrak{v}^*\Gamma_0$ et le pseudogroupe le long de $\hat{\alpha}$ engendré par les relèvements naturels des glissements à droite de Γ et les translations par les 1-formes fermées α -projetables, définissent sur $T^*\Gamma$ une structure de groupoïde symplectique tel que la projection naturelle $\pi : T^*\Gamma \rightarrow \Gamma$ soit un morphisme de groupoides de Lie.

De plus, ajoutée à la structure de fibré vectoriel de $T^*\Gamma \overset{\pi}{\rightarrow} \Gamma$, cette structure de groupoïde fait de $T^*\Gamma$ un groupoïde double (symplectique).

Remarque : Si Γ_0 n'est pas une variété discrète, les 1-formes (fermées) α -projetables ne sont autres que les 1-formes (fermées) invariantes à gauche. On notera dans ce cas l'analogie entre les structures de groupoides doubles de $T\Gamma$ et $T^*\Gamma$. En fait Pradines a établi [19] une dualité entre $T\Gamma$ et $T^*\Gamma$ en se plaçant dans la catégorie des "groupoides vectoriels" en généralisant la procédure de construction de $T^*\Gamma$ à partir de $T\Gamma$ donnée dans [1], qui prend comme point de départ le résultat suivant :

Proposition 3-1. Dans les groupoides $T\Gamma \overset{T\alpha}{\underset{T\beta}{\rightrightarrows}} T\Gamma_0$ et $T^*\Gamma \overset{\hat{\alpha}}{\underset{\hat{\beta}}{\rightrightarrows}} \mathfrak{v}^*\Gamma_0$, les multiplications \oplus et \circ sont reliées de la façon suivante : si $(x, y) \in \Gamma_2$, et si $X_x \in T_x \Gamma$,

$Y_y \in T_y \Gamma, \theta_x \in T_x^* \Gamma, \eta_y \in T_y^* \Gamma$ vérifient $T\alpha(X_x) = T\beta(Y_y)$ et $\widehat{\alpha}(\theta_x) = \widehat{\beta}(\eta_y)$, on a
au point xy

$$\langle (\theta_x \circ \eta_y), (X_x \oplus Y_y) \rangle = \langle \theta_x, X_x \rangle + \langle \eta_y, Y_y \rangle$$

Preuve : soit $u = \alpha(x) = \beta(y)$. On choisit des glissements φ et ψ respectivement à gauche et à droite tels que $\varphi(u) = x$ et $\psi(u) = y$. Si $\omega_u = \widehat{\alpha}(\theta_x) = \widehat{\beta}(\eta_y)$ et $Z_u = T\alpha(X_x) = T\beta(Y_y)$, il existe des 1-formes ξ et ζ sur Γ_0 , et des champs invariants Y' et X' respectivement à gauche et à droite sur Γ tels que

$$\begin{aligned}\theta_x &= \overline{\varphi}^* \omega_u + \beta^* \xi_{\beta(x)} \\ \eta_y &= \overline{\psi}^* \omega_u + \alpha^* \zeta_{\alpha(y)} \\ X_x &= T\varphi(Z_u) + X'_x \\ Y_y &= T\psi(Z_u) + Y'_y\end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\theta_x \circ \eta_y &= \overline{\varphi}^* \overline{\psi}^* (\omega_u) + \alpha^* \zeta_{\alpha(y)} + \beta^* \xi_{\beta(x)} \\ X_x \oplus Y_y &= T\varphi \circ T\psi (Z_u) + X'_{xy} + Y'_{xy}\end{aligned}$$

et la vérification devient un calcul immédiat.

Corollaire 1. Dans le groupoïde $T^*\Gamma \xrightarrow[\widehat{\beta}]{\widehat{\alpha}} \mathfrak{V}^*\Gamma_0$, l'inversion $\widehat{\iota}$ est donnée par $\widehat{\iota}(\theta_x) = -\iota^* \theta_x$ pour tout $\theta_x \in T_x^* \Gamma$

En effet, comme l'inversion dans $T\Gamma$ est $T\iota$, tout revient à vérifier que le couple $(\theta_x, -\iota^* \theta_x)$ est composable, c'est à dire que $\widehat{\beta}(-\iota^* \theta_x) = \widehat{\alpha}(\theta_x)$: soient $u = \alpha(x)$ et φ un glissement à gauche tel que $\varphi(u) = x$. Alors $\overline{\varphi}$ est un glissement à droite envoyant u sur x^{-1} . D'autre part en tout point $\omega_u \in \mathfrak{V}_u^* \Gamma_0$, on a $\iota^* \omega_u = -\omega_u$, comme on peut le voir en appliquant les deux membres à la valeur en u d'un champ invariant à gauche. On a alors

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha}(\theta_x) &= \overline{\varphi}^* \theta_x - \beta^* j^* \overline{\varphi}^* \theta_x \\ &= \iota^* \left(\overline{\varphi}^* \iota^* \theta_x - \alpha^* j^* \overline{\varphi}^* \iota^* \theta_x \right) \\ &= \iota^* \widehat{\beta}(\iota^* \theta_x)\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat.

Cas particulier : groupoïde cotangent d'un groupe de Lie :

Supposons que $\Gamma = G$ soit un groupe de Lie. On a alors $\Gamma_0 = \{e\}$ et $\nu^*\Gamma_0 = T_e^*G = \mathfrak{g}^*$, \mathfrak{g} désignant l'algèbre de Lie de G . La projection $\hat{\alpha}$ [resp. $\hat{\beta}$] coïncide au point $x \in G$ avec la translation à gauche $L_x^* : T_x^*G \rightarrow T_e^*G$ [resp. la translation à droite $R_x^* : T_x^*G \rightarrow T_e^*G$].

On peut aussi remarquer que les applications $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ sont les moments respectifs des actions naturelles à droite et à gauche de G sur T^*G . Si $\theta_x \in T_x^*G$ et $\eta_y \in T_y^*G$, le produit $\theta_x \circ \eta_y$ est défini toutes les fois que $L_x^*(\theta_x) = R_y^*(\eta_y)$, et si l'on note ω la valeur commune de ces éléments de \mathfrak{g}^* , on a

$$\theta_x \circ \eta_y = L_x^{-1*} \circ R_y^{-1*} (\omega)$$

Contrairement à celle de T^*G , la structure de groupoïde de TG dégénère en une structure de groupe, et l'on a pour $X_x \in T_xG$ et $Y_y \in T_yG$

$$X_x \oplus Y_y = T_x R_y (X_x) + T_y L_x (Y_y)$$

(ou encore, si $X_x = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} x_t$ et $Y_y = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} y_t$,

$$X_x \oplus Y_y = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} x_t y_t$$

Si l'on identifie T^*G à $G \times \mathfrak{g}^*$ au moyen d'un parallélisme invariant à gauche sur G , on peut écrire, si $x, y \in G$ et $\xi, \eta \in \mathfrak{g}^*$

$$\hat{\alpha}(x, \xi) = \xi$$

$$\hat{\beta}(x, \xi) = \text{Ad}_x^* \xi$$

et $(x, \xi) \circ (y, \eta) = (xy, \eta)$ si $\xi = \text{Ad}_y^* \eta$ de sorte que la structure de groupoïde de T^*G s'identifie à la structure définie sur $G \times \mathfrak{g}^*$ par l'action coadjointe de G (exemple I-5-2). Sous cette forme, on voit que les orbites de T^*G dans \mathfrak{g}^* sont les orbites de la représentation coadjointe de G .

4- GROUPOÏDE LOCAUX SYMPLECTIQUES

Le Théorème 2-1 amène à poser la définition suivante :

Définition 4-1. *Un groupoïde local symplectique est un groupoïde local de Lie $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$ muni d'une forme symplectique σ telle que*

- 1°) *La sous-variété Γ_0 est lagrangienne*
- 2°) *Γ admet un faisceau de définition formé de germes de champs de vecteurs hamiltoniens.*

Un faisceau de définition de Γ sera dit **symplectique** s'il est formé de germes de champs hamiltoniens.

Les propriétés essentielles des groupoïdes symplectiques se généralisent aux groupoïdes locaux symplectiques. En fait

Proposition 4-1. *Soit $(\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0, \sigma)$ un groupoïde local symplectique. Alors*

1°) *Les feuilletages définis sur Γ par les fibrations α et β sont symplectiquement orthogonaux.*

2°) *Un champ invariant (à gauche ou à droite) est localement hamiltonien si, et seulement si, son conjugué l'est.*

3°) *Un glissement local (à gauche ou à droite) est symplectique si, et seulement si, son conjugué l'est.*

4°) *Les glissements locaux à gauche [resp. à droite] symplectiques sont transitifs sur les α -fibres [resp. sur les β -fibres].*

5°) *Γ_0 admet dans Γ un voisinage ouvert contenu dans le domaine d'inversion Γ_{ι} , stable par l'inversion, et sur lequel $\iota^* \sigma = -\sigma$.*

6°) *La dualité symplectique échange les champs invariants à gauche [resp. à droite] et les 1-formes invariantes à gauche [resp. à droite].*

7°) *Pour toute fonction différentiable f définie sur un ouvert U de Γ_0 , le champ hamiltonien X_{α^*f} [resp. X_{β^*f}] est un champ invariant à gauche sur $\alpha^{-1}(U)$ [resp. invariant à droite sur $\beta^{-1}(U)$].*

Un calcul local utilisant le lemme I-6-1 permet facilement d'obtenir ces propriétés au voisinage de Γ_0 . On les étend ensuite à Γ en utilisant les flots associés à un faisceau de définition de Γ .

Exemple 4-1. Soit $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$ un groupoïde local de Lie. Alors son fibré cotangent $T^*\Gamma$ est naturellement muni d'une structure de groupoïde local double symplectique. La construction procède comme au paragraphe 3 : la première structure est la fibration vectorielle $T^*\Gamma \xrightarrow{\pi} \Gamma$ naturelle. Pour obtenir la seconde, on construit les projections $T^*\Gamma \xrightarrow[\beta]{\hat{\alpha}} \mathfrak{v}^*\Gamma_0$ en utilisant les glissements locaux (à gauche et à droite), et on prend comme faisceau de définition le faisceau $\hat{\mathfrak{L}}$ engendré par les relèvements naturels des champs invariants à gauche et les translations infinitésimales dans les fibres de $T^*\Gamma$ par les 1-formes fermées α -projetables.

Définition 4-2 [23]. Soit M une variété symplectique. Une *paire duale* (α, β) sur M est un couple d'applications différentiables $\alpha : M \rightarrow P$ et $\beta : M \rightarrow P'$ telles qu'en tout point $x \in M$ les noyaux des applications tangentes $T_x\alpha$ et $T_x\beta$ soient symplectiquement orthogonaux.

Une *paire duale stricte* [1] $M \xrightarrow[\beta]{\alpha} M_0$ sur M est une paire duale (α, β) formée de deux projections sur une sous-variété lagrangienne M_0 de M .

Avec cette terminologie, un corollaire de la proposition 4-1 est que tout groupoïde local symplectique est une paire duale stricte. On a en fait la réciproque :

Théorème 4-1 [1]. Soit $M \xrightarrow[\beta]{\alpha} M_0$ une paire duale stricte à fibres connexes. Alors il existe sur M une unique structure de groupoïde local symplectique de base M_0 et dont α et β soient les applications source et but. Un faisceau de définition symplectique de cette structure est formé des germes des champs hamiltoniens de la forme X_{α^*f} où f parcourt l'ensemble des germes de fonctions différentiables sur M_0 .

Démonstration. Désignons par \mathfrak{A} l'ensemble des fonctions différentiables définies sur un ouvert de Γ_0 . Pour toute $f \in \mathfrak{A}$, α^*f est une fonction différentiable sur Γ (dom f), et pour tout $x \in \Gamma$ l'application

$$\alpha^* : T_{\alpha(x)}^* \Gamma_0 \rightarrow T_x^* \Gamma$$

est une injection dont l'image est la fibre en x $\mathfrak{v}_x^* \alpha^{-1}(\alpha(x))$ du fibré conormal aux α -fibres.

Si \mathfrak{L} désigne le faisceau des germes des X_{α^*f} où f parcourt \mathfrak{A} , c'est un faisceau d'algèbres de Lie formé de germes de champs de vecteurs tangents aux β -fibres, et transitifs sur ces β -fibres. Le commutant \mathfrak{L}^c de \mathfrak{L} contient les hamiltoniens X_{β^*f} où $f \in \mathfrak{A}$, et est donc transitif sur les α -fibres. Comme en tout point $x \in \Gamma$

$$X_{\alpha^*f}(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad df_{\alpha(x)} = 0$$

\mathfrak{L} sépare les α -fibres, et donc \mathfrak{L} est un faisceau de définition d'une structure de groupoïde local symplectique. Le point 7°) de la proposition 4-1 montre de plus que cette structure est la seule possible.

Proposition 4-2. Soit $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$ un groupoïde local symplectique. Alors il existe sur Γ_0 une unique structure de Poisson telle que $\alpha : \Gamma \rightarrow \Gamma_0$ soit un morphisme de Poisson. Pour cette structure $\beta : \Gamma \rightarrow \Gamma_0$ est un anti-morphisme de Poisson, et le feuilletage caractéristique de Γ_0 coïncide avec le feuilletage de Stefan défini par l'algèbroïde de Γ .

Preuve. Si $f \in \mathfrak{A}$, le champ X_{α^*f} est invariant à gauche, donc α -projetable. Posons

$$X_f^0 = T \alpha (X_{\alpha^*f})$$

S'il existe sur Γ_0 une structure de Poisson Λ_0 répondant à la question, X_f^0 sera dans (Γ_0, Λ_0) le hamiltonien de la fonction f . Il suffit donc de vérifier que X_f^0 est bien associé à une structure de Poisson. Or si $\{, \}_0$ est le crochet pour cette structure on aura si f et g sont deux éléments de \mathfrak{A} définis sur le même ouvert

$$\{f, g\}_0 = X_f^0 g = (\alpha^* dg) (X_{\alpha^*f}) = \{\alpha^*f, \alpha^*g\}$$

où $\{, \}$ est le crochet de Poisson dans Γ . Ceci donne immédiatement le résultat.

Par définition du feuilletage de Stephan de Γ_0 , il est la projection des β -fibres par α , c'est à dire la projection par α des orbites de n'importe quel faisceau de définition de Γ . Il coïncide donc avec le feuilletage singulier défini par les hamiltoniens de la structure Λ_0 .

Enfin le fait que β soit un anti-morphisme de Poisson va résulter du lemme suivant :

Lemme 4-1. *Pour toute fonction différentiable f définie sur un ouvert de Γ_0 , on a*

$$\overline{X_{\alpha^*f}} = X_{\beta^*f}$$

Preuve. $\beta^* df$ est une 1-forme invariante à droite, et donc X_{β^*f} est un champ invariant à droite. Il suffit donc pour obtenir le résultat de s'assurer que pour tout $u \in \text{dom } f$, on a

$$X_{\alpha^*f}(u) - T\alpha(X_{\alpha^*f}(u)) = X_{\beta^*f}(u)$$

ou encore

$$\alpha^* df_u - \beta df_u = iT\alpha(X_{\alpha^*f}(u))\sigma$$

ce qui se vérifie en évaluant successivement les deux membres sur un vecteur tangent à Γ_0 , et sur un vecteur de la forme $X_{\alpha^*g}(u)$ où g est une fonction différentiable sur Γ_0 définie au voisinage de u .

Remarque. Si $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$ est un groupoïde symplectique, la construction de la structure de Poisson sur Γ_0 demeure, car les champs de la forme X_{α^*f} sont toujours invariants à gauche, donc α -projetables. On a donc sur Γ_0 la même structure de Poisson que si l'on se restreint à un voisinage séparé à fibres connexes de Γ_0 dans Γ , qui est un groupoïde local. Par conséquent nous ne considérerons dans la suite (sauf mention explicite du contraire) que des groupoïdes locaux. En termes de groupoïdes, la considération de la structure du Poisson de Γ_0 permet d'ailleurs d'apporter une précision au théorème 4-1 :

Théorème 4-2. [1]. *Soit $(\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0, \sigma)$ une paire duale stricte.*

*Alors $(\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0, \sigma)$ est un groupoïde symplectique si, et seulement si, pour toute fonction f différentiable à support compact sur Γ_0 le champ hamiltonien X_{α^*f} est complet dans Γ .*

Démonstration. Si f est à support compact, X_f^0 est complet. Comme $T\alpha(X_{\alpha^*f}) = X_f^0$, la condition est nécessaire d'après la proposition I-3-6.

Réciproquement, si cette condition est réalisée, l'ensemble des germes des X_{α^*f} où f est à support compact forme un faisceau de définition de Γ qui vérifie la condition de saturation du théorème I-6-2.

Par exemple, dans le cas du groupoïde cotangent d'un groupoïde de Lie, on obtient

Proposition 4-3.[1]. Soit $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$ un groupoïde local de Lie. Alors la structure de Poisson sur $\mathfrak{v}^* \Gamma_0$ héritée de la structure de groupoïde local symplectique $T^*\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \mathfrak{v}^* \Gamma_0$ coïncide avec la structure de Lie-Poisson canonique définie par l'algébroïde de Lie $\mathfrak{v}^* \Gamma_0$ de Γ .

Démonstration. Rappelons [1] que la structure de Lie-Poisson sur $\mathfrak{v}^* \Gamma_0$ est l'unique structure de Poisson pour laquelle le crochet de deux sections de $\mathfrak{v}^* \Gamma_0$, considérées comme fonctions sur $\mathfrak{v}^* \Gamma_0$ linéaires sur chaque fibre de $\mathfrak{v}^* \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_0$, coïncide avec le crochet dans $\text{Sect}(\mathfrak{v} \Gamma_0)$ défini par la structure d'algébroïde de Lie de $\mathfrak{v} \Gamma_0$. Tout revient donc à montrer que si X et Y sont deux champs invariants à gauche sur Γ et si $f_X : \mathfrak{v}^* \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R}$ désigne l'application définie par

$$f_X(\omega_u) = \langle \omega_u, X_u \rangle \quad \forall \omega_u \in \mathfrak{v}^* \Gamma_0$$

avec l'identification naturelle de $\mathfrak{v}_u \Gamma_0$ avec $T_u \beta(u)$, on a dans $T^*\Gamma$

$$\{\hat{\alpha}^* f_X, \hat{\alpha}^* f_Y\}(\omega_u) = \langle \omega_u, [X, Y](u) \rangle.$$

Rappelons pour cela que si M est une variété et X un champ de vecteurs sur M , la fonction $i_X : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $i_X \theta_x = \langle \theta_x, X_x \rangle$ admet comme hamiltonien dans $(T^*M, d\lambda)$ le relevé naturel \tilde{X} de X dans T^*M . Comme ici X est invariant à gauche, on a pour tout $\theta_x \in T_x^* \Gamma$ et tout glissement local à gauche φ tel que $\varphi(\alpha(x)) = x$

$$\begin{aligned} \langle \theta_x, X_x \rangle &= \langle \theta_x, T_{\alpha(x)} \varphi X_{\alpha(x)} \rangle \\ &= \langle \varphi^* \theta_x, X_{\alpha(x)} \rangle = \langle \hat{\alpha}^* \theta_x, X_{\alpha(x)} \rangle \end{aligned}$$

Autrement dit

$$i_X = \hat{\alpha}^* f_X$$

et par suite

$$\{\hat{\alpha}^* f_X, \hat{\alpha}^* f_Y\} = d\lambda(X \hat{\alpha}^* f_X, X \hat{\alpha}^* f_Y) = -\lambda[\tilde{X}, \tilde{Y}]$$

ce qui donne le résultat.

Dans le cas particulier où $\Gamma = G$ est un groupe de Lie, on obtient le corollaire :

Corollaire. *Soit G un groupe de Lie connexe. Alors la structure de Poisson induite sur \mathfrak{g}^* par la structure de groupoïde symplectique de $T^*G \xrightarrow[\beta]{\hat{\alpha}}$ \mathfrak{g}^* coïncide avec la structure de Lie-Poisson canonique de \mathfrak{g}^* .*

En ce sens, la correspondance

groupoïde (local) symplectique \mapsto variété de Poisson

peut être considérée, via le "passage au cotangent", comme une généralisation de la correspondance

groupe (local) de Lie \mapsto algèbre de Lie

Le paragraphe 6 va être consacré à l'étude de la naturalité de cette correspondance.

Auparavant, faisons la remarque suivante : Si $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$ est un groupoïde symplectique, Γ_0 est une sous-variété lagrangienne de Γ , et donc la dualité symplectique définit un isomorphisme de $\mathfrak{v}^*\Gamma_0$ sur le fibré tangent $T\Gamma_0$. En considérant le groupoïde symplectique $T^*\Gamma \xrightarrow[\beta]{\hat{\alpha}}$ $\mathfrak{v}^*\Gamma_0$, on obtient une structure de Lie Poisson sur $T\Gamma_0$, d'où par dualité une structure d'algébroïde de Lie sur $T^*\Gamma_0$. En explicitant les identifications faites, le lecteur pourra vérifier le résultat suivant :

Proposition 4-4. *Soit $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$ un groupoïde symplectique. La structure d'algébroïde de Lie définie sur $T^*\Gamma_0$ par l'isomorphisme canonique avec $\mathfrak{v}^*\Gamma_0$ coïncide avec la structure d'algébroïde de Lie du fibré cotangent de la variété de Poisson Γ_0 .*

C'est d'ailleurs ainsi qu'avait été obtenue la structure d'algébroïde de Lie sur $T^*\Gamma_0$ fibré cotangent d'une variété de Poisson dans [1]. Cette structure détermine une structure d'algèbre de Lie sur les 1-formes qui avait été observée indépendamment par plusieurs auteurs [12] [14]. J.L Koszul a conduit dans [12] une étude complète de l'algèbre de Lie graduée des formes sur une variété de Poisson (cf. [5]).

5 - AUTRES EXEMPLES DE GROUPOIDES SYMPLECTIQUES

Exemple 5-1. Soit (M, σ) une variété symplectique. Si Γ est le groupoïde grossier $M \times M$ muni de la forme symplectique $\hat{\sigma} = -\sigma + \sigma$, la base $\Gamma_0 = \Delta_M$ s'identifie à M . Γ est un groupoïde symplectique et la structure de Poisson ainsi définie sur M n'est autre que la structure de Poisson canonique de M .

Exemple 5-2. Soit $\Gamma \xrightarrow{\alpha} \Gamma_0$ un fibré en groupes, G sa fibre-type. Γ est muni d'une structure de groupoïde en prenant $\beta = \alpha, j : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma$ l'injection définie par la "section neutre", les glissements (à droite et à gauche) étant les familles de translations (à droite et à gauche) définies dans les fibres correspondantes par les sections locales de α . L'algèbroïde de Lie $\mathfrak{v}\Gamma_0$ de Γ s'identifie naturellement au fibré en algèbres de Lie \mathfrak{g} associé à Γ .

Dans la structure de groupoïde symplectique de $T^*\Gamma \xrightarrow[\hat{\beta}]{\hat{\alpha}} \mathfrak{v}^*\Gamma_0$, $\mathfrak{v}^*\Gamma_0$ est le fibré en duals d'algèbres de Lie \mathfrak{g}^* associé à Γ , et la structure de Poisson obtenue sur $\mathfrak{v}^*\Gamma_0$ coïncide avec la structure de Lie-Poisson naturelle sur ce fibré. [1].

Exemple 5-3. Soit $E \xrightarrow{\pi} M$ un G -fibré principal et désignons par $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} M$ son groupoïde de jauge : rappelons que $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} M$ est le quotient du groupoïde grossier $E \times E \xrightarrow[\text{pr}_1]{\text{pr}_2} E$ par l'action à droite de G définie par

$$(z, z') a = (za, z'a) \quad (z, z' \in E, a \in G)$$

Si $[z, z'] \in \Gamma$ est l'orbite de $(z, z') \in E \times E$, les glissements à droite de Γ sont les transformations de la forme

$$\varphi_h [z, z'] = [z, h(z')]$$

pour tout automorphisme local h du fibré E , de sorte que le pseudogroupe le long de α des glissements à droite de Γ est isomorphe au pseudogroupe le long de π des automorphismes locaux de E . L'algèbroïde de Lie $\mathfrak{v}\Gamma_0$ de Γ est ainsi le fibré vectoriel quotient TE/G , muni du crochet des champs de vecteurs G -invariants, et de la projection π_* héritée de $T\pi : TE \rightarrow TM$. Si $E(\mathfrak{g}) = E \times_G \mathfrak{g}$ est le fibré en algèbres de Lie modelé sur E ,

on a la suite exacte de fibrés vectoriels sur M

$$0 \rightarrow E(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{v}\Gamma_0 \xrightarrow{\pi^*} TM \rightarrow 0$$

Une connexion principale sur E peut être regardée comme une scission $\gamma : TM \rightarrow \mathfrak{v}\Gamma_0$ de cette suite exacte.

Ceci étant, considérons le groupoïde symplectique $T^*\Gamma \xrightarrow[\beta]{\hat{\alpha}} \mathfrak{v}^*M$. A la suite exacte précédente correspond par dualité la suite exacte

$$0 \rightarrow T^*M \rightarrow \mathfrak{v}^*M \rightarrow E(\mathfrak{g}^*) \rightarrow 0$$

et donc la donnée d'une connexion principale sur E définit un isomorphisme du fibré vectoriel \mathfrak{v}^*M sur le produit fibré $E(\mathfrak{g}^*) \otimes T^*M$, où $E(\mathfrak{g}^*)$ est le fibré en duals d'algèbres de Lie modelé sur E par la représentation coadjointe de G. Ce produit fibré se trouve ainsi muni d'une structure de Poisson. Chaque feuille symplectique de \mathfrak{v}^*M s'interprète comme l'espace des phases d'une particule dans le champ de Yang-Mills défini par la connexion principale γ considérée. [1] [22].

Exemple 5-4. Soit G un groupe de Lie opérant à gauche sur une variété M. Considérons le groupoïde associé [1] $\Gamma = G \times M \xrightarrow[\beta]{\alpha} M$. On a $\alpha(a, x) = x$ et $\beta(a, x) = ax$ pour tout $(a, x) \in G \times M$, et les glissements à droite de Γ sont en correspondance bijective avec les applications différentiables locales de M dans G : à $h : M \rightarrow G$ correspond le glissement ϕ_h défini sur Γ par

$$\phi_h(a, x) = (ah(x), h(x)^{-1}x)$$

Par conséquent les champs invariants à gauche sont associés aux applications locales de M dans \mathfrak{g} : à $Z : M \rightarrow \mathfrak{g}$ correspond le champ

$$X_Z(a, x) = Z(x)_a + \widetilde{Z(x)}_x$$

où on a noté $Z(x)_a$ la valeur en a de Z(x) considéré comme un champ invariant à gauche sur G, et $\widetilde{Z(x)}_x$ la valeur en x du champ fondamental sur M défini par $Z(x) \in \mathfrak{g}$. On a de plus

$$T\alpha(X_Z(a, x)) = \widetilde{Z(x)}_x$$

Ceci montre que l'algébroïde de Lie de Γ est isomorphe au fibré trivial $M \times \mathfrak{g}$ sur M, le crochet étant défini par

$$[Z, Z'](x) = [Z(x), Z'(x)] + (\widetilde{Z(x)}.Z')(x) - (\widetilde{Z'(x)}.Z)(x)$$

où, si Z et Z' sont deux applications de M dans \mathfrak{g} , le crochet $[Z(x), Z'(x)]$ est pour chaque x calculé dans \mathfrak{g} , et $\widetilde{Z(x)}.Z'$ est la dérivée par le champ $\widetilde{Z(x)}$ de l'application Z' .

En passant au groupoïde cotangent $T^*\Gamma \xrightarrow[\beta]{\hat{\alpha}} \mathfrak{v}^*\Gamma_0$, on obtient sur $\mathfrak{v}^*\Gamma_0 = M \times \mathfrak{g}^*$ la structure de Lie-Poisson correspondante, que l'on peut expliciter de la façon suivante : si $f : M \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$, désignons par (x, θ) un point de $M \times \mathfrak{g}^*$, et par $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \theta)$ [resp. $\frac{\partial f}{\partial \theta}(x, \theta)$] la différentielle de f par rapport à x [resp. par rapport à θ], considérée comme un élément de $T_x^* M$ [resp. de \mathfrak{g}]. On a alors

$$\begin{aligned} \{f, g\}(x, \theta) &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x, \theta), \overline{\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}(x, \theta)\right)_x} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x, \theta), \overline{\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}(x, \theta)\right)_x} \right\rangle \\ &+ \left\langle \theta, \left[\frac{\partial f}{\partial \theta}(x, \theta), \frac{\partial g}{\partial \theta}(x, \theta) \right] \right\rangle \end{aligned}$$

Cette structure sur $M \times \mathfrak{g}^*$ peut être considérée comme un produit semi-direct de la structure de Poisson triviale sur M par la structure de Lie-Poisson de \mathfrak{g}^* ([26]).

Exemple 5-5. [1]. Soient (M, \mathcal{F}) une variété feuilletée, et $\text{Hol}(\mathcal{F})$ le groupoïde d'holonomie du feuilletage (I, exemple 5-5) : la variété M s'identifie à la base de $\text{Hol}(\mathcal{F})$ par l'injection $g : M \rightarrow \text{Hol}(\mathcal{F})$ qui à $x \in M$ associe la classe d'holonomie du chemin constant (que nous notons encore x), et α et β sont les projections origine et extrémité.

Notons respectivement $T\mathcal{F}$, $T^*\mathcal{F}$, $\mathfrak{v}^*\mathcal{F}$ les fibrés vectoriels sur M formés des vecteurs tangents aux feuilles, cotangents aux feuilles, conormaux aux feuilles. Si $\gamma \in \text{Hol}(\mathcal{F})$, la définition même de la structure de variété de $\text{Hol}(\mathcal{F})$ donne un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$T_\gamma \text{Hol}(\mathcal{F}) = T_{\alpha(\gamma)} M \oplus T_{\beta(\gamma)} \mathcal{F}$$

En particulier, en tout point $x \in M$ on a la décomposition

$$T_x \text{Hol}(\mathcal{F}) = T_x M \oplus T_x \mathcal{F}$$

La projection sur le premier facteur étant $T\alpha$. Il en résulte une identification naturelle de la base \mathfrak{v}^*M de $T^* \text{Hol}(\mathcal{F}) \rightrightarrows \mathfrak{v}^*M$ avec $T^*\mathcal{F}$, qui se trouve ainsi muni d'une structure de variété de Poisson.

Les feuilles du feuilletage caractéristique de $T^*\mathcal{F}$ se projettent par $\pi : T^*\mathcal{F} \rightarrow M$ sur les orbites de $\text{Hol}(\mathcal{F})$ dans M , c'est à dire les feuilles de \mathcal{F} . D'autre part, tout difféomorphisme local de M respectant les feuilles de \mathcal{F} se prolonge, au moins localement, en un glissement à droite de $\text{Hol}(\mathcal{F})$. Comme les relèvements naturels des glissements à droite de $\text{Hol}(\mathcal{F})$ sont des glissements à droite de $T^* \text{Hol}(\mathcal{F})$, et comme le pseudogroupe sur M des difféomorphismes locaux respectant \mathcal{F} est transitif sur chaque feuille, les orbites de $T^* \text{Hol}(\mathcal{F})$ sont les cotangents aux feuilles. Le feuilletage caractéristique de $T^*\mathcal{F}$ est donc le feuilletage naturel par les T^*F_x , où F_x est la feuille de \mathcal{F} en $x \in M$.

La structure de Poisson ainsi définie sur $T^*\mathcal{F}$ coïncide avec la structure obtenue dans [13] en considérant la projection naturelle $T^*M \rightarrow T^*\mathcal{F}$ (qui, pour la structure symplectique canonique de T^*M est une fibration isotrope symplectiquement complète), comme une réduction symplectique.

Exemple 5-6. [1]. Plaçons nous encore sur la variété feuilletée (M, \mathcal{F}) et conservons les notations de l'exemple précédent. Regardons le fibré vectoriel $\mathfrak{v}\mathcal{F} \xrightarrow{\pi} M$ normal à \mathcal{F} comme un groupoïde. En utilisant l'action des classes d'holonomie de chemins sur les vecteurs normaux, on peut définir le groupoïde produit semi-direct

$$\Gamma = \text{Hol}(\mathcal{F}) \times \mathfrak{v}\mathcal{F} \begin{array}{c} \xrightarrow{\hat{\alpha}} \\ \xrightarrow{\hat{\beta}} \end{array} M$$

En tant que variété, Γ est le produit fibré de $\text{Hol}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha} M$ par $\mathfrak{v}\mathcal{F} \xrightarrow{\pi} M$, et si $(\gamma, X) \in \text{Hol}(\mathcal{F})$, on pose

$$\tilde{\alpha}(\gamma, X) = \alpha(\gamma) = \pi(X) \quad \text{et} \quad \tilde{\beta}(\gamma, X) = \beta(\gamma)$$

La loi de multiplication est donnée par

$$(\gamma, X)(\gamma', X') = (\gamma\gamma', X' + \gamma'^{-1}(X)) \text{ si } \beta(\gamma') = \alpha(\gamma) = \pi(X)$$

$\gamma'^{-1}(X)$ désignant l'action d'holonomie de γ'^{-1} sur X .

Le lecteur pourra vérifier que $T^*\Gamma$ a pour base le produit fibré $T^*F \oplus \mathfrak{v}^*\mathcal{F}$, qui se trouve ainsi muni d'une structure de Poisson. Si $x \in M$, désignons par Ψ_x^1 le groupe

d'holonomie infinitésimale de la feuille F_x de \mathcal{F} en x . La feuille symplectique en $(\theta_x, \omega_x) \in T_x^* \mathcal{F} \oplus \mathfrak{v}_x^* \mathcal{F}$ est ici un revêtement de $T_x^* F_x$ de fibre $\Psi_x^1(\omega_x)$, orbite en ω_x de Ψ_x^1 .

6 - MORPHISMES DE GROUPOIDES LOCAUX SYMPLECTIQUES

Nous allons dans ce paragraphe étudier la naturalité de la correspondance qui à un groupoïde local symplectique associe une variété de Poisson (sa base).

Proposition 6-1. [1]. Soient $(\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0; \sigma)$ et $(\Gamma' \xrightarrow[\beta']{\alpha'} \Gamma'_0; \sigma')$ deux groupoïdes locaux symplectiques. Soit de plus $h: \Gamma \rightarrow \Gamma'$ une application vérifiant les propriétés suivantes

- i) h est un morphisme de Poisson
- ii) $h(\Gamma_0) \subset \Gamma'_0$
- iii) si $h_0 = h|_{\Gamma_0}$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma & \xrightarrow{h} & \Gamma' \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha' \\
 \Gamma_0 & \xrightarrow{h_0} & \Gamma'_0
 \end{array}$$

Alors l'application h_0 est un morphisme de Poisson.

Si de plus $h^* \sigma' = \sigma$, h est un morphisme de groupoïdes symplectiques et est uniquement déterminé par l'application h_0 .

Ce dernier point signifie que si h^1 et h^2 vérifient ii) et iii), respectent les formes symplectiques, et se projettent suivant la même application h_0 , on a $h^1 = h^2$.

On peut évidemment remplacer dans iii) les applications α et α' par β et β' .

Preuve. Si f est une fonction différentiable sur un ouvert de Γ'_0 , la condition (i) s'écrit

$$\text{Th}(X_{h^*\alpha^*f}) = X_{\alpha^*f}$$

et donc d'après (ii) et (iii)

$$(*) \quad \text{Th}(X_{\alpha^*h_0^*f}) = X_{\alpha^*f}$$

en projetant les deux membres par α' , on en déduit, en utilisant encore (iii)

$$\text{Th}_0(X_{h_0^*f}) = X_f$$

qui traduit le fait que h_0 est un morphisme de Poisson.

Si maintenant h est symplectique, elle est de rang maximum. Il en est de même de h_0 , de sorte de la relation (*) montre que Th envoie les éléments du faisceau de définition

$$\mathfrak{L} = \{X_{\alpha^*f} \mid f \in \mathfrak{A}\}$$

sur son homologue \mathfrak{L}' . h est donc un morphisme de groupoïdes locaux symplectiques.

Enfin si h^1 et h^2 sont des applications symplectiques de Γ dans Γ' vérifiant (ii) et (iii) et se projetant suivant h_0 , la relation (*) montre que h^1 et h^2 coïncident sur $\beta^{-1}(\Gamma_0) = \Gamma$.

Corollaire. Soit $h : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ un morphisme de groupoïdes locaux symplectiques. Alors l'application projetée $h_0 : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_0'$ est un morphisme de Poisson. De plus, h est uniquement déterminé par h_0 .

Partant de ce résultat, on peut examiner le problème inverse : Etant donné un morphisme de Poisson $h_0 : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_0'$, peut-on le relever en un morphisme de groupoïdes locaux $h : \Gamma \rightarrow \Gamma'$?

Si on demande à h d'être un morphisme de groupoïdes locaux symplectiques, h sera, s'il existe, unique. Mais cette condition est trop restrictive : h_0 doit être dans ce cas un morphisme de rang maximum entre deux variétés de Poisson de même dimension.

On peut, comme le suggère la Proposition 6-1, chercher un relèvement sous forme d'un morphisme de Poisson. Nous intégrerons plutôt cette démarche dans le cadre des groupoïdes de Poisson.

On peut aussi suivre de près la théorie des groupes de Lie. Examinons la situation suivante : Soient G et G' deux groupes de Lie connexes, et $H : G' \rightarrow G$ un morphisme de groupes de Lie. Il donne lieu à un morphisme $H_* : \mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{g}$ d'algèbres de Lie, et partant à un morphisme de Poisson (linéaire) $h_0 : \mathfrak{g}'^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Si on regarde \mathfrak{g}^* et \mathfrak{g}'^* comme les bases des groupoïdes symplectiques T^*G et T^*G' , on peut chercher à relever h_0 en un morphisme $h : T^*G \rightarrow T^*G'$. Si H est inversible, l'application $H^{*-1} : T^*G \rightarrow T^*G'$ est un morphisme de groupoïdes symplectiques répondant à la question. Dans le cas général, il n'y a pas de solution évidente, mais la sous-variété

$$L = \{(\theta'_{x'}, \theta_x) \in T^*G' \times T^*G \mid x = H(x') \text{ et } \theta'_{x'} = H^*\theta_x\}$$

est une sous-variété lagrangienne de $\overline{T^*G'} \times T^*G$ qui est un sous-groupoïde du groupoïde produit $\overline{T^*G'} \times T^*G$, dont la base est $\text{Gr}(h_0)$. Si H est inversible, on a d'ailleurs $L = \text{Gr}(H^*)$. On peut donc ici relever le morphisme de Poisson h_0 en une **relation lagrangienne de groupoïdes** de T^*G vers T^*G' . C'est ce procédé que nous allons mettre en oeuvre dans la suite.

Proposition 6-2. Soit $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$ un groupoïde local symplectique. Alors si $L \xrightarrow[\beta]{\alpha} L_0$ est un sous-groupoïde local coïso trope de Γ , sa base L_0 est une sous-variété coïso trope de la variété de Poisson Γ_0 .

Preuve. Soient $u_0 \in L_0$, et f un germe de fonction en u_0 tel que df soit une section de ν^*L_0 . En tout point $x \in L \cap \alpha^{-1}(u_0)$, on a $(\alpha^*df)_x \in \nu_x^*L$ et donc $X_{\alpha^*f}(x) \in T_xL$. Par suite

$$X_f^0(u_0) = T\alpha(X_{\alpha^*f}(x)) \in T_{u_0}L_0$$

Corollaire 1. Tout sous-groupoïde local lagrangien de Γ se projette suivant une sous-variété coïso trope de Γ_0 .

Corollaire 2. Soient $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$ et $\Gamma' \xrightarrow[\beta']{\alpha'} \Gamma'_0$ deux groupoïdes locaux symplectiques. Alors toute relation lagrangienne de groupoïdes locaux de Γ vers Γ' se projette suivant une relation coïso trope de Γ_0 vers Γ'_0 .

Le corollaire 1 admet une réciproque.

Théorème 6-1. Soient $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$ un groupoïde (local) symplectique, et L_0 une sous-variété coïso trope de Γ_0 . Alors il existe un unique sous-groupoïde (local) lagrangien maximal L de Γ de base L_0 .

Un faisceau de définition de L est donné par les restrictions à L des germes de champs hamiltoniens X_{α^*f} , où f parcourt l'ensemble des sections locales du faisceau des germes de fonctions constantes sur L_0 .

Démonstration. Soit $W_\alpha = \overset{-1}{\alpha} L_0$. La relation $T\alpha \Lambda^\# \alpha^* \gamma^* L_0 = \Lambda_0^\# \nu^* L_0$ assure que W_α est coïso trope. Son feuilletage caractéristique est $\mathfrak{F}_\alpha = \Lambda^\# \alpha^* \nu^* L_0$, L_0 qui est coïso trope dans Γ_0 , est isotrope dans Γ et on a la relation

$$\dim L_0 + \dim \mathfrak{F}_\alpha = \frac{1}{2} \dim \Gamma.$$

La méthode des caractéristiques [1] assure alors l'existence d'une unique sous variété (immergée) lagrangienne maximale L contenant L_0 et contenu dans W_α . Comme ensemble

$$L = \bigcup_{u \in L_0} F_\alpha(u)$$

(où $F_\alpha(u)$ désigne la feuille de \mathfrak{F}_α passant par u). Comme $T\beta(\mathfrak{F}_\alpha) = 0$, L est aussi contenue dans la sous-variété coïso trope $W_\beta = \overset{-1}{\beta} L_0$. L est donc à la fois l'unique sous variété lagrangienne maximale contenant L_0 et contenu dans W_α et W_β . Enfin si $(x, y) \in L^2$ est un couple composable dans Γ , $\alpha(x) = \beta(y) = u \in L_0$. Comme $\beta(y) \in F_\alpha(u)$ il existe un glissement à droite de Γ produit de flots de champs de hamiltoniens associée à des 1-formes (fermées) appartenant à $\nu^* L_0$ telles que $\varphi(u) = y$. Comme $\varphi(x) = xy$, il en résulte que $xy \in F_x$ ce qui assure que L est une sous-groupoïde (local) de Γ .

Si Γ est un groupoïde, la démonstration précédente assure que si $(x, y) \in L^2$ et si $\alpha(x) = \beta(y)$, $xy \in L$. L est donc un groupoïde dans ce cas ce qui achève la démonstration.

En appliquant le théorème 6.1 au graphe d'un morphisme de Poisson $h_0 : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma'_0$ on obtient le

Corollaire [1]. Soient $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$ et $\Gamma' \xrightarrow[\beta']{\alpha'} \Gamma'_0$ deux groupoïdes locaux symplectiques [resp. deux groupoïdes symplectiques à fibres connexes], et soit $h : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma'_0$ un morphisme de Poisson. Alors il existe une unique relation lagrangienne maximale de groupoïdes locaux [resp. de groupoïdes] de Γ vers Γ' se projetant suivant h .

En termes d'applications, ce résultat s'énonce de la façon suivante :

Proposition 6-3 [1]. Soient $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$ et $\Gamma' \xrightarrow[\beta']{\alpha'} \Gamma'_0$ deux groupoïdes locaux symplectiques de même dimension, et soit $h : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma'_0$ un morphisme de Poisson étale. Alors si Γ est à fibres simplement connexes, il existe un morphisme H de groupoïdes locaux symplectiques se projetant suivant h .

Preuve. Il suffit de montrer que la relation lagrangienne maximale L de Γ vers Γ' relevant h est alors un graphe. Considérons pour cela le morphisme de groupoïdes locaux $pr_2 : L \rightarrow \Gamma$. Il se projette suivant $pr_2 : Gr(h) \rightarrow \Gamma_0$ qui est un difféomorphisme. D'autre part, si $u \in \Gamma_0$, l'espace tangent en tout point $(x', x) \in L$ tel que $\alpha(x) = u$ est engendré par les vecteurs $X_{\alpha * \tilde{f}}(x', x)$ où f est une fonction définie au voisinage de $h(u)$ dans Γ'_0 et \tilde{f} est définie par

$$\tilde{f}(v, u) = f(v) - f(h(u))$$

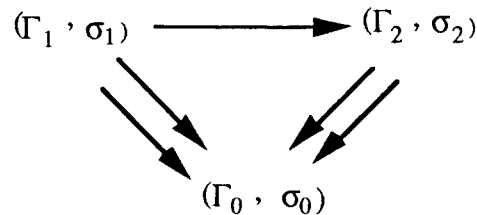
comme $\text{Tr}_2(X_{\alpha * \tilde{f}}(x', x)) = -X_{\alpha * h * f}(x)$, il en résulte, puisque h est supposée étale, que la β -fibre en (x', x) de L est un revêtement de la β -fibres en x de Γ . $pr_2 : L \rightarrow \Gamma$ est donc un étalement dont la restriction à chaque β -fibres est un revêtement. Si Γ a des β -fibres simplement connexes, c'est un difféomorphisme.

Corollaire 1.[1] Soient $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$ et $\Gamma' \xrightarrow[\beta']{\alpha'} \Gamma'_0$ deux groupoïdes locaux symplectiques de même base Γ_0 .

Alors, si les structures de Poisson définies sur Γ_0 par Γ et Γ' coïncident, il existe un sous-groupoïde local ouvert Γ_1 de Γ , un sous-groupoïde local ouvert Γ'_0 de Γ' , et un isomorphisme H de groupoïdes locaux symplectiques de Γ_1 sur Γ'_0 induisant l'identité sur Γ_0 . De plus, si Γ est à fibres simplement connexes, on peut prendre $\Gamma_1 = \Gamma$.

Il suffit de prendre $h = \text{id}_{\Gamma_0}$ et d'utiliser la proposition 6-3.

Corollaire 2 [1]. Soit (Γ_0, Λ_0) une variété de Poisson intégrable (Γ_i, σ_i) deux groupoïdes symplectiques de base (Γ_0, Λ_0) . On suppose (Γ_1, σ_1) à fibres simplement connexes. Il existe un unique morphisme de groupoïdes symplectiques $H : (\Gamma_1, \sigma_1) \rightarrow (\Gamma_2, \sigma_2)$ rendant commutatif le diagramme



Ce morphisme est un étalement. En particulier, à isomorphismes de groupoïdes symplectiques près, il existe un unique groupoïde symplectique à fibres connexes intégrant (Γ_0, Λ_0) .

7 - INTEGRATION LOCALE DES VARIETES DE POISSON

On va dans ce paragraphe montrer que la correspondance qui à un groupoïde local symplectique associe une variété de Poisson est biunivoque. Le problème est le suivant : étant donnée une variété de Poisson (P, Λ) , existe-t-il un groupoïde local symplectique $(\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0, \sigma)$ tel que $(P, \Lambda) = (\Gamma_0, \Lambda_0)$? Compte tenu de la proposition 6-3, si Γ existe, son germe le long de Γ_0 est parfaitement déterminé. C'est donc en fait en termes de germe de groupoïde le long de sa base que la situation se présente.

Soit $(\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0, \sigma)$ un groupoïde local symplectique, et soit $u_0 \in \Gamma_0$. Une première remarque est que, si l'on connaît la structure de Poisson de Γ_0 , **un voisinage de u_0 dans Γ est complètement décrit, en tant que groupoïde local symplectique, par la seule donnée de la projection α et de la forme symplectique σ** . En effet, un faisceau de définition de Γ est donné par les hamiltoniens de la forme X_{α^*f} . Ces champs définissent par ailleurs un feuilletage de Γ , dont les feuilles sont les β -fibres, ce qui permet de retrouver la projection β au voisinage de u_0 .

Supposons alors que la structure de Poisson Λ_0 admette une singularité en $u_0 : \Lambda_0(u_0) = 0$. L'espace cotangent $T_{u_0}^* \Gamma_0$ admet dans ces conditions une structure naturelle d'algèbre de Lie, définie (cf [7]) par

$$[df_{u_0}, dg_{u_0}] = d\{f, g\}_{u_0}$$

pour toutes fonctions différentiables f et g au voisinage de u_0 dans Γ_0 .

Notons \mathcal{I} cette algèbre de Lie. On a par ailleurs $\alpha^{-1}(u_0) = \beta^{-1}(u_0)$, qui est une sous-variété lagrangienne L de Γ , et coïncide avec le groupe local d'isotropie Γ_{u_0} de Γ en u_0 . La dualité symplectique définit un isomorphisme entre l'algèbre de Lie des champs invariants à gauche le long de L (c'est à dire l'algèbre de Lie de Γ_{u_0}) et l'espace cotangent $T_{u_0}^* \Gamma_0$. Autrement dit, L est un groupe local de Lie d'algèbre de Lie \mathcal{I} . De plus L est une sous-variété fermée de Γ . Par conséquent un résultat de B.Kostant assure que ([cf.10]) L admet un voisinage tubulaire Ω dans Γ symplectomorphe à un voisinage tubulaire de la section nulle de T^*L avec sa forme symplectique naturelle. Le choix d'un tel symplectomorphisme définit une projection $\pi : \Omega \rightarrow L$. Les projections π et α sont transverses au voisinage de u_0 , et définissent donc un difféomorphisme d'un voisinage de u_0 dans Γ sur un voisinage de (e, u_0) dans $L \times \Gamma_0$, où on a noté e l'élément neutre du groupe de Lie local L . En définitive, on est, à un difféomorphisme respectant Γ_0 près, sur un voisinage de (e, u_0) dans $L \times \Gamma_0$, avec une application $\Theta : L \times \Gamma_0 \rightarrow T^*L$ commutant aux projections pr_1 et π d'une part, pr_2 et α d'autre part, et définissant un difféomorphisme au voisinage de (e, u_0) . La forme symplectique sur $L \times \Gamma_0$ est $\Theta^*(d\lambda)$, où λ est la forme de Liouville de T^*L . Compte tenu de la remarque précédente, la situation est alors (toujours au voisinage de u_0) complètement décrite par la seule donnée de Θ .

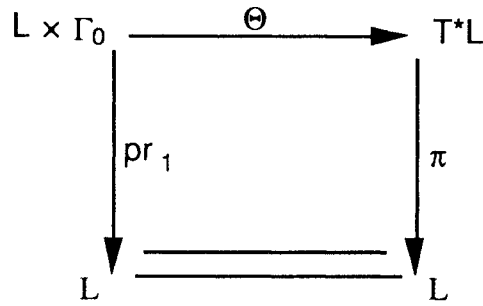
On obtient ainsi :

Lemme 7-1. *Soient (Γ_0, Λ_0) une variété de Poisson avec $u_0 \in \Gamma_0$ tel que $\Lambda_0(u_0) = 0$, et L un groupe de Lie local d'algèbre de Lie $\mathcal{I} = T_{u_0}^* \Gamma_0$.*

*Soit $\Theta : L \times \Gamma_0 \rightarrow T^*L$ une application telle que*

1°) Θ est de rang maximum en (e, u_0)

2°) on a le diagramme commutatif



3°) $\text{pr}_2 : L \times \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_0$ induit un morphisme de Poisson d'un voisinage de (e, u_0) muni de la forme symplectique $\Theta^* d\lambda$ dans (Γ_0, Λ_0) .

Alors (e, u_0) admet dans $L \times \Gamma_0$ un voisinage muni d'une structure de groupoïde local symplectique dont la base est la trace de (Γ_0, Λ_0) sur ce voisinage, la projection source étant la projection pr_2 .

De plus, tout groupoïde local symplectique de base Γ_0 admet un voisinage de u_0 isomorphe à un groupoïde local de ce type par un isomorphisme induisant l'identité sur Γ_0 .

La construction d'un groupoïde local au voisinage de u_0 revient donc à celle d'une application Θ vérifiant les 3 conditions du lemme. Les propriétés demandées à Θ étant locales au voisinage de (e, u_0) , on peut imposer en plus que $\Theta(y, u) = 0_y$ en dehors d'un voisinage compact de (e, u_0) dans $L \times \Gamma_0$. Dans ces conditions, une application Θ satisfaisant 2°) est la même chose qu'une 1-forme $\hat{\Theta}$ sur L à valeurs dans l'espace vectoriel difféologique $C_0^\infty(\Gamma_0, \mathbb{R})$, muni de la difféologie à contrôle compact : on posera en effet pour $X_y \in T_y L$

$$\langle \hat{\Theta}_y, X_y \rangle (u) = \langle \Theta(y, u), X_y \rangle$$

On a alors

Lemme 7-2. Soit $\Theta : L \times \Gamma_0 \rightarrow T^*L$ satisfaisant les conditions 1) et 2) du lemme 7-1. Alors Θ satisfait 3) si, et seulement si, la 1-forme $\hat{\Theta}$ à valeurs dans $C_0^\infty(\Gamma_0, \mathbb{R})$ vérifie la relation de Maurer-Cartan

$$d\hat{\Theta} - \frac{1}{2} \{\hat{\Theta}, \hat{\Theta}\} = 0$$

Preuve. Soient (y^1, \dots, y^n) et (u^1, \dots, u^n) des coordonnées locales respectivement en e dans L et u_0 dans Γ_0 . Si $(y, u) \in L \times \Gamma_0$, on peut écrire

$$\Theta(y, u) = \sum_{1 \leq i \leq n} \varphi_i(y, u) dy^i$$

de sorte que $(\Theta)^*\lambda = \sum_{1 \leq i \leq n} \varphi_i dy^i$,

Pour tout k , soit $X_k = X_{\text{pr}_2^* u^k}$ le hamiltonien de $\text{pr}_2^* u^k$, pour $\Theta^*(d\lambda)$. Si

$$X_k = \sum_{1 \leq i \leq n} A_k^j \frac{\partial}{\partial u^j} + \sum_{1 \leq i \leq n} B_k^i \frac{\partial}{\partial y^i}$$

on aura

$$- du^k = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial u^i} A_k^j + \frac{\partial \varphi_j}{\partial u^i} B_k^i \right) dy^j - B_j^k \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial u^i} du^i + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y^i} dy^i \right)$$

La condition 3) s'écrit alors

$$A_k^i = \Lambda_0^{ik} = \{u^i, u^k\}_0$$

On en déduit que la matrice (B_j^i) est la matrice inverse de la matrice jacobienne $(\frac{\partial \varphi_j}{\partial u^i})$, et donc la condition précédente s'écrit

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial y^i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial y^j} = \sum_{l, k} \frac{\partial \varphi_l}{\partial u^i} \Lambda_0^{lk} \frac{\partial \varphi_l}{\partial u^k}$$

Comme $\widehat{\Theta} = \sum_{1 \leq i \leq n} \widehat{\varphi}_i dy^i$ où $\widehat{\varphi}_i$ est l'application qui à y associe la fonction $u \mapsto \varphi_i(y, u)$, on a

$$d\widehat{\Theta} = \sum_{i, j} \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}_j}{\partial y^i} - \frac{\partial \widehat{\varphi}_i}{\partial y^j} \right) dy^i \wedge dy^j$$

et la relation précédente s'écrit alors

$$\widehat{d\Theta} = \frac{1}{2} \{ \widehat{\Theta}, \widehat{\Theta} \}.$$

Lemme 7-3. Soit (Γ_0, Λ_0) une variété de Poisson admettant un point singulier u_0 . Alors il existe un groupoïde local symplectique admettant pour base un voisinage de u_0 dans Γ_0

Preuve. L étant un groupe local de Lie d'algèbre $T_{u_0}^* \Gamma_0$, tout revient à construire l'application Θ . On va prendre pour cela $\widehat{\Theta} = F^* \Omega_0$, où Ω_0 est la forme de Maurer-Cartan de l'algèbre de Lie $C_0^\infty(\Gamma_0, \mathbb{R})$ [(1-B-5)], F étant une application différentiable de L dans $C_0^\infty(\Gamma_0, \mathbb{R})$ choisie convenablement pour que la propriété 1) du lemme 7-1 soit vérifiée.

Le problème est local au voisinage de u_0 , ce qui permet de travailler en coordonnées locales : soit $(u^1 \dots u^n)$ un système de coordonnées locales centré en u_0 dans Γ_0 . Alors du^1, \dots, du^n forme au point u_0 une base de $T_{u_0}^* \Gamma_0 = \mathbb{I}$. Soient $(y^1 \dots y^n)$ les coordonnées logarithmiques de L associées cette base, et posons pour $1 \leq j \leq n$

$$F(y^1 \dots y^n)(u^1 \dots u^n) = \sum_{1 \leq i \leq n} y^i u^i$$

que l'on prolonge en $F : L \rightarrow C_0^\infty(\Gamma_0, \mathbb{R})$ différentiable.

Montrons que ce choix convient : il suffit de montrer que Θ est de rang maximum en (e, u_0) . C'est à dire que $\Theta^*(d\lambda)$ est symplectique. Or si l'on note comme plus haut

$$\Theta(y, u) = \sum_{1 \leq j \leq n} \varphi_j(y, u) dy^j$$

$$\text{on aura } \widehat{\Theta} = \sum_j \widehat{\varphi}_j dy^j \text{ où}$$

$$\widehat{\varphi}_j = \Omega_0 \left(TF \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right) \right)$$

$F(e)$ est la fonction nulle et Ω_0 est l'identité sur l'espace tangent en 0 à $C_0^\infty(\Gamma_0, \mathbb{R})$, de sorte que

$$\widehat{\varphi}_j(e)(u^1 \dots u^n) = u^j$$

et donc $\frac{\partial \varphi_j}{\partial u^i}(e, u_0) = \delta_i^j$.

$$\text{Par suite } \Theta^* (d\lambda)_{(e, u_0)} = \sum_{1 \leq j \leq n} du^j \wedge dy^j + \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial \phi_i}{\partial y^j} (e, u_0) dy^j \wedge du^i$$

et on obtient le résultat.

On est alors en mesure de montrer le

Théorème 7-1 [1] [24]. *Soit (P, Λ) une variété de Poisson. Alors pour tout $u_0 \in P$, il existe un groupoïde local symplectique dont la base est un voisinage ouvert de u_0 dans (P, Λ) .*

Démonstration. On utilise le théorème de décomposition locale des variétés de Poisson, dû à A. Weinstein [23]. Si S est la feuille du feuilletage caractéristique de (P, Λ) passant par u_0 , il existe un voisinage U de u_0 dans P difféomorphe en tant que variété de Poisson au produit $U_1 \times U_2$ où U_1 est un ouvert de $U \cap S$ (et est donc une variété symplectique dont on notera ω la forme symplectique) et U_2 est une sous-variété passant par u_0 , transverse à U_1 , et munie d'une structure de Poisson Λ_2 singulière en u_0 . D'après le lemme 7-3, quitte à restreindre U , on obtient sur U_2 un groupoïde local symplectique $(\Gamma_2 \xrightarrow[\beta_2]{\alpha_2} U_2, \sigma_2)$.

Comme le groupoïde grossier $\Gamma_1 = \overline{U_1} \times U_1$ intègre (U_1, ω) , $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ intègre $U = U_1 \times U_2$, ce qui achève la démonstration.

Remarque. Le théorème 7-1 est équivalent au théorème de réalisation locale des variétés de Poisson, d'A. Weinstein (voir plus loin), qui affirme que si (P, Λ) est une variété de Poisson et $u_0 \in P$, il existe un voisinage U de u_0 dans P , et une variété symplectique M admettant U comme sous-variété lagrangienne, et une projection $\alpha : M \rightarrow U$ qui soit un morphisme de Poisson. La démonstration proposée ici est, en termes de groupoïdes locaux et de difféologies, la formalisation de la démonstration heuristique d'A. Weinstein [23], dont elle explique en même temps le fonctionnement.

Théorème 7-2. [1]. **(Théorème d'intégration locale des variétés de Poisson).**

Soit (P, Λ) une variété de Poisson séparée. Alors il existe un groupoïde local symplectique $(\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} P, \sigma)$ de base (P, Λ) .

Démonstration. P étant paracompacte, il existe d'après le théorème 7-1 un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de P localement fini, formé d'ouverts relativement compacts, avec

pour chaque $i \in I$ un groupoïde local symplectique $(\Gamma_i \xrightarrow[\beta_i]{\alpha_i} U_i, \sigma_i)$ de base $(U_i, \Lambda |_{U_i})$.

Pour obtenir le résultat, on va montrer que l'on peut recoller ces groupoïdes locaux.

Pour chaque $i \in I$, l'ensemble I_i des indices $j \in I$ tels que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ est fini. Pour chaque $j \in I_i$, il existe d'après le corollaire de la proposition 6-3 un voisinage ouvert Ω_i^j de $U_i \cap U_j$ dans Γ_i , un voisinage ouvert Ω_j^i de $U_i \cap U_j$ dans Γ_j et un isomorphisme de groupoïdes locaux symplectiques $\Phi_i^j : \Omega_i^j \rightarrow \Omega_j^i$ induisant l'identité sur $U_i \cap U_j$.

Sur $\Gamma'' = \coprod_{i \in I} \Gamma_i$, la relation

$$x \sim y \Leftrightarrow (\exists i, j \in I) \quad x \in \Omega_i^j, y \in \Omega_j^i \text{ et } y = \Phi_i^j(x)$$

est une relation d'équivalence dont chaque classe n'a qu'un nombre fini d'éléments. Sur $\Gamma' = \Gamma'' / \sim$ on a alors une structure naturelle de variété (non séparée), symplectique puisque les Φ_i^j sont des symplectomorphismes. Comme les Φ_i^j induisent l'identité sur

$U_i \cap U_j$, $\coprod_{i \in I} U_i / \sim = P$, et par suite P est une sous-variété lagrangienne de Γ' , et on

a deux projections $\Gamma' \xrightarrow[\beta]{\alpha} P$ bien définies, qui coïncident localement avec les α_i et les β_i ,

et sont donc symplectiquement orthogonales. Utilisons le théorème I-7-2 : P admet un voisinage ouvert Γ dans Γ' qui est séparé. Les restrictions $\alpha = \alpha|_{\Gamma}$ et $\beta = \beta|_{\Gamma}$

forment une paire duale stricte $\alpha, \beta : \Gamma \rightrightarrows P$, et quitte à restreindre Γ on peut la

supposer à fibres connexes. Le théorème 4-1 dit alors que $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} P$ est un groupoïde local symplectique, et comme α coïncide localement avec les α_i , c'est un morphisme de Poisson.

Pour terminer ce paragraphe, on va faire le lien entre la notion de "réalisation pleine stricte" d'une variété de Poisson [1] et celle de groupoïde local symplectique.

Définition 7-1 [1]. Soit (P, Λ) une variété de Poisson. Une **réalisation pleine stricte** de (P, Λ) est une variété symplectique (M, σ) admettant P comme sous-variété lagrangienne, et munie d'une projection $\alpha : M \rightarrow P$ qui est un morphisme de Poisson.

Si $(\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0, \sigma)$ est un groupoïde local symplectique, $(\Gamma \xrightarrow{\alpha} \Gamma_0, \sigma)$ est une réalisation pleine stricte, et donc le théorème 7-2 admet le corollaire :

Proposition 7-1. *Toute variété de Poisson (P, Λ) admet une réalisation pleine stricte.*

Par ailleurs, la remarque initiale faite dans ce paragraphe consiste à noter que si $(M \xrightarrow{\alpha} P, \sigma)$ est une réalisation pleine stricte de (P, Λ) , tout point $u \in P$ admet un voisinage Γ dans M muni d'une structure de groupoïde local symplectique de base $\Gamma \cap P$.

On peut globaliser ce résultat.

Proposition 7-2. *Soit $(M \xrightarrow{\alpha} P, \sigma)$ une réalisation pleine stricte de la variété de Poisson (P, Λ) . Alors il existe un voisinage ouvert Γ de P dans M muni d'une structure de groupoïde local symplectique de projection source $\alpha|_{\Gamma}$ et de forme symplectique $\sigma|_{\Gamma}$.*

Preuve. Soit \mathcal{F} le feuilletage de M défini par les X_{α^*f} où f est une fonction C^∞ sur P (\mathcal{F} est donc le feuilletage de Liberman de moment α). Comme on l'a remarqué au début de ce paragraphe tout point $u \in P$ admet un voisinage ouvert Ω_u dans M muni d'une projection $\beta_u : \Omega_u \rightarrow U_u$ où U_u est un voisinage ouvert de u dans P , telle que les préimages des points par β_u soient les feuilles de $\mathcal{F}|_{\Omega_u}$. En remplaçant au besoin Ω_u par son intersection avec $\alpha^{-1}(U_u)$, on obtient un triple (Ω_u, U_u, β_u) ayant les propriétés précédentes, et vérifiant de plus $\alpha(\Omega_u) = U_u$. Nous dirons brièvement que (Ω_u, U_u, β_u) est un "triple adapté".

Il existe donc un recouvrement localement fini $(U_i)_{i \in I}$ de la variété P , avec pour chaque $i \in I$

- 1) un triple adapté (Ω_i, U_i, β_i)
- 2) un triple adapté $(\Omega'_i, U'_i, \beta'_i)$ où $\Omega_i \subset \Omega'_i$, U_i est un ouvert relativement compact d'adhérence $\bar{U}_i \subset U'_i$, et $\beta_i = \beta'_i|_{\Omega_i}$

Posons

$$\Omega = \{x \in \bigcup_{i \in I} \Omega_i \mid x \in \Omega_i \cap \Omega_j \Rightarrow \beta_i(x) = \beta_j(x)\}$$

Nous allons montrer que Ω est un voisinage ouvert de P dans M . Soient pour cela $u_0 \in P$ et $i_0 \in I$ tel que $u_0 \in U_{i_0}$. L'ensemble I_0 des indices j tels que $U_{i_0} \cap U'_j \neq \emptyset$ est fini. Posons alors

$$I'_0 = \{j \in I_0 \mid u_0 \in \bar{U}_j\}$$

et

$$U_{u_0} = (U_{i_0} \cap \bigcap_{j \in I'_0} U'_j) - \bigcup_{j \in I_0 - I'_0} \bar{U}_j$$

$$\Omega_{u_0} = (\Omega_{i_0} \cap \bigcap_{j \in I'_0} \Omega'_j) - \bigcup_{j \in I_0 - I'_0} \bar{\Omega}_j \cap \alpha^{-1}(U_0)$$

et enfin $\beta_{u_0} = \beta_{i_0} \mid \Omega_{u_0}$. Le triple $(\Omega_{u_0}, U_{u_0}, \beta_{u_0})$ est adapté.

Si $x \in \Omega_{u_0} \cap \Omega_j$ avec $j \in I$, on a $\alpha(x) \in U_{u_0} \cap U_j$ et donc $j' \in I'_0$, de sorte que $\Omega_{u_0} \subset \Omega'^j$. Désignons par $p_x^{u_0}$ et $p_x^{j'}$ respectivement les plaques en x de $\mathcal{F} \mid \Omega_{u_0}$ et $\mathcal{F} \mid \Omega'^j$. On a $p_x^{u_0} \subset p_x^{j'}$ et donc

$$\{\beta_{u_0}(x)\} = p_x^{u_0} \cap P \subset p_x^{j'} \cap P = \{\beta_j(x)\}$$

Par conséquent $\beta_j(x) = \beta_{u_0}(x)$, et donc $\Omega_{u_0} \cap \Omega$, ce qui donne le résultat cherché

On a donc sur Ω une projection $\beta : \Omega \rightarrow P$, de sorte que $\Omega \xrightarrow[\beta]{\alpha \mid \Omega} P$ est une paire duale stricte. En prenant pour Γ un voisinage ouvert à fibres connexes de P dans Ω , on obtient la proposition.

Corollaire. Si $(M \xrightarrow{\alpha} P, \sigma)$ et $(M' \xrightarrow{\alpha'} P, \sigma')$ sont deux réalisations pleines strictes de la même variété de Poisson P , il existe un voisinage ouvert Ω de P dans M , un voisinage ouvert Ω' de P dans M' , et un symplectomorphisme $H : \Omega \rightarrow \Omega'$ laissant invariants les points de P et commutant aux projections α et α' .

8 - GROUPOIDES DE POISSON

Les groupoïdes symplectiques forment une sous-catégorie d'une catégorie plus vaste : la catégorie des groupoïdes de Poisson.

Les groupoïdes de Poisson, introduits par A.Weinstein [25], généralisent les groupes de Poisson [7]. Ils apparaissent de façon naturelle dans les problèmes de réalisation et de dualité.

Définition 8-1 [25]. *Un groupoïde de Poisson est un groupoïde de Lie $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$ muni d'une structure de Poisson Λ telle que le graphe de la multiplication $\text{Gr}(\mu)$ soit une variété coïso trope de $\overline{\Gamma} \times \Gamma \times \Gamma$.*

Au groupoïde de Lie Γ on a associé dans ce qui précède les groupoïdes doubles $T^*\Gamma$ et $T\Gamma$. Si Γ est muni d'une structure de Poisson Λ , on a d'autre part le morphisme de fibrés vectoriels associé

$$\Lambda^\# : T^*\Gamma \rightarrow T\Gamma$$

Théorème 8-1. *Soit $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$ un groupoïde de Lie, et soit Λ une structure de Poisson sur Γ . Alors (Γ, Λ) est un groupoïde de Poisson si, et seulement si, l'application*

$$\Lambda^\# : T^*\Gamma \rightarrow T\Gamma$$

est un morphisme de groupoïdes doubles.

Démonstration : Comme $\Lambda^\#$ est un morphisme de fibrés vectoriels, la condition ne porte en fait que sur les structures de groupoïdes cotangent $(T^*\Gamma \xrightarrow[\beta]{\hat{\alpha}} \mathfrak{v}^* \Gamma_0)$ et tangent

$$(T\Gamma \xrightarrow[T\beta]{T\alpha} T\Gamma_0).$$

Notons comme précédemment \circ et \oplus respectivement les multiplications dans $T^*\Gamma$ et $T\Gamma$. On a montré (corollaire 2 de la Proposition 3-1) que les graphes $\text{Gr}(\hat{\mu})$, $\text{Gr}(T\mu)$ et $\text{Gr}(\mu)$ des multiplications de $T^*\Gamma$, $T\Gamma$, Γ sont liés par

$$\begin{aligned} \text{Gr}(\hat{\mu}) &= \{(\omega_{xy}, \theta_x, \eta_y) \mid (-\omega_{xy}, \theta_x, \eta_y) \in \mathfrak{v}^* \text{Gr}(\mu)\} \\ \text{Gr}(T\mu) &= T\text{Gr}(\mu). \end{aligned}$$

Considérons alors le tenseur de Poisson $\Lambda_3 = (-\Lambda, \Lambda, \Lambda)$ de $\overline{\Gamma} \times \Gamma \times \Gamma$. $\text{Gr}(\mu)$ est coïso trope si, et seulement si

$$\Lambda_3^\# \mathfrak{v}^* \text{Gr}(\mu) \subset T\text{Gr}(\mu)$$

autrement dit si, et seulement si, pour tout couple $(\theta_x, \eta_y) \in T^*\Gamma \times T^*\Gamma$ composable,

$$\Lambda^\#(\theta_x \circ \eta_y) = \Lambda^\# \theta_x \oplus \Lambda^\# \eta_y$$

ce qui donne le résultat.

Corollaire. Si $(\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0, \Lambda)$ est un groupoïde de Poisson, alors

(i) Γ_0 est une sous-variété coïso trope de Γ

(ii) ι est un anti-morphisme de Poisson de Γ sur Γ .

En effet, $\Lambda^\#$ envoie les unités de $T^*\Gamma$ dans celles de $T\Gamma$, et donc $\Lambda^\#(\nu^*\Gamma_0) \subset T\Gamma_0$, ce qui prouve (i), d'autre part $\Lambda^\# \circ \hat{\iota} = T\iota \circ \Lambda^\#$, où $\hat{\iota}$ est l'inversion dans $T^*\Gamma$. D'après le corollaire 1 de la Proposition 3-1, ceci s'écrit

$$- \Lambda^\# \circ \iota^* = T\iota \circ \Lambda^\#$$

ce qui prouve (ii)

Exemple 8-1. Soit (P, Λ) une variété de Poisson. Alors le groupoïde grossier $\bar{P} \times P$ est un groupoïde de Poisson.

Exemple 8-2. Si (Γ^1, Λ^1) et (Γ^2, Λ^2) sont deux groupoïdes de Poisson, il en est de même du groupoïde produit $\Gamma^1 \times \Gamma^2$, muni de la structure produit (Λ^1, Λ^2) .

Exemple 8-3. Soit (Γ, Λ) un groupoïde de Poisson. Alors Γ est un groupoïde symplectique si, et seulement si, l'application $\Lambda^\#$ est un isomorphisme. En effet, on a alors sur Γ une forme symplectique σ et avec les notations ci-dessus on a un isomorphisme de $\Lambda_3^\# \nu^* \text{Gr}(\mu)$ sur $TG_r(\mu)$, de sorte que $G_r(\mu)$ est une sous-variété lagrangienne de $\bar{\Gamma} \times \Gamma \times \Gamma$.

Exemple 8-4. Soit G un groupe de Lie muni d'une structure de Poisson Λ . Alors (G, Λ) est un groupoïde de Poisson si, et seulement si, (G, Λ) est un groupe de Poisson [7].

En effet μ est alors une application $G \times G \rightarrow G$, et donc $G_r(\mu)$ est coïso trope si, et seulement si, μ est un morphisme de Poisson.

Théorème 8-2. Soit $(\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0, \Lambda)$ un groupoïde de Poisson à base non réduite à un point. Notons encore $\Lambda^\#$ le morphisme induit sur les formes différentielles par $\Lambda^\# : T^*\Gamma \rightarrow T\Gamma$.

Alors $\Lambda^\#$ envoie les 1-formes invariantes à gauche [resp. à droite] sur des champs invariants à gauche [resp. à droite].

Pour montrer ce résultat, on va donner des 1-formes invariantes à gauche une caractérisation analogue à celle des champs invariants à gauche donnée dans le chapitre I. Remarquons tout d'abord que les translations à gauche opèrent sur les fibrés conormaux aux α -fibres. Plus précisément, si $x \in \Gamma$, notons

$$L_{x*} : \mathfrak{v}_y^* \overset{-1}{\alpha}(\alpha(y)) \rightarrow \mathfrak{v}_{xy}^* \overset{-1}{\alpha}(\alpha(xy))$$

pour tout $y \in \overset{-1}{\beta}(\alpha(x))$, l'application définie par

$$L_{x*} ((\alpha^*\omega)_y) = (\alpha^*\omega)_{xy}$$

pour tout $\omega \in T_{\alpha(y)}^* \Gamma_0 = T_{\alpha(xy)}^* \Gamma_0$.

On a alors

Lemme 8-1. *Une 1-forme (locale) sur le groupoïde de Lie Γ est invariante à gauche si, et seulement si, $\widehat{\beta}\theta = 0$ et si θ est invariante par les translations à gauche.*

Preuve. Si $\theta_x \in T_x^* \Gamma$, on a, en choisissant un glissement à droite φ envoyant $\beta(x)$ sur x , $\widehat{\beta}\theta_x = \varphi^*\theta_x - \alpha^* j^* \varphi^* \theta_x$. Par suite

$$\widehat{\beta}\theta_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta_x = \varphi^{-1*} \alpha^* j^* \varphi^* \theta_x \quad \Leftrightarrow \quad \theta_x = \alpha^* \omega_{\alpha(x)}$$

où on a noté $\omega_{\alpha(x)} = (j^* \varphi^{-1*} \alpha^* j^* \varphi^* \theta_x)_{\alpha(x)}$. Par conséquent, la relation $\widehat{\beta}\theta_x = 0$ caractérise les formes conormales aux α -fibres, ce qui donne un sens au lemme. Le dernier point est alors évident.

Lemme 8-2. *Sur le groupoïde Γ , soient $(x, y) \in \Gamma_2$, et $Y_y \in T_y \overset{-1}{\beta}(\beta(y))$, $\theta_y \in \mathfrak{v}_x^* \overset{-1}{\alpha}(\alpha(y))$. Alors dans les groupoïdes $T\Gamma$ et $T^*\Gamma$, on a*

$$0_x \oplus Y_y = TL_x(Y_y)$$

$$0_x \circ \theta_y = L_{x*}(\theta_y)$$

Preuve. Notons $u = \alpha(x) = \beta(y)$. On a $T\alpha(0_x) = T\beta(Y_y) = 0_u$, et $\widehat{\alpha}(0_x) = \widehat{\beta}(\theta_y) = 0_u$, ce qui permet de composer 0_x et Y_y d'une part, 0_x et θ_y d'autre part. Il suffit alors d'utiliser les définitions des multiplications dans $T\Gamma$ et $T^*\Gamma$.

Démonstration du théorème 8-2. $\Lambda^\#$ est un morphisme de groupoïdes doubles : il commute donc aux projections $\widehat{\beta}$ et $T\beta$ d'une part, $\widehat{\alpha}$ et $T\alpha$ d'autre part, et envoie la section nulle de $T^*\Gamma \rightarrow \Gamma$ sur celle de $T\Gamma \rightarrow \Gamma$.

Remarque. Le théorème est en défaut (ainsi d'ailleurs que les deux lemmes) pour les groupes de Poisson.

Corollaires. Soit (Γ, Λ) un groupoïde de Poisson à base non réduite à un point.

Alors

1) Pour toute fonction $f \in C^\infty(\Gamma_0, \mathbb{R})$, le champ hamiltonien X_{α^*f} [resp. X_{β^*f}] est invariant à gauche [resp. à droite].

2) Γ_0 est canoniquement muni d'une structure de Poisson pour laquelle $\alpha : \Gamma \rightarrow \Gamma_0$ est un morphisme de Poisson et $\beta : \Gamma \rightarrow \Gamma_0$ un antimorphisme de Poisson.

3) Les sous-algèbres de Lie $\alpha^*(C^\infty(\Gamma_0, \mathbb{R}))$ et $\beta^*(C^\infty(\Gamma_0, \mathbb{R}))$ sont Λ -orthogonales dans $C^\infty(\Gamma_0, \mathbb{R})$.

4) Si (Γ, Λ) est à fibres connexes, les orbites de Γ dans Γ_0 sont des sous-variétés (immergées) de Poisson.

5) L'application $(\beta, \alpha) : \Gamma \rightarrow \overline{\Gamma_0} \times \Gamma_0$ est un morphisme de groupoïdes de Poisson.

En effet $X_{\alpha^*f} = \Lambda^\#(\alpha^*df)$, ce qui donne 1). Il en résulte que les champs X_{α^*f} sont α -projetables. Si on note $X_f^0 = T\alpha(X_{\alpha^*f})$, on aura

$$\{\alpha^*f, \alpha^*g\}(x) = (X_{\alpha^*f} \cdot \alpha^*g)(x) = (X_f^0 g)(\alpha(x))$$

ce qui montre que X_f^0 est le hamiltonien de f pour une structure de Poisson sur Γ_0 telle que α soit un morphisme de Poisson, d'où 2). Le même calcul donne d'ailleurs

$$\{\alpha^*f, \beta^*g\}(x) = (X_{\alpha^*f} \cdot \beta^*g)(x) = 0$$

d'où 3).

Si maintenant Γ est à fibres connexes et $u \in \Gamma_0$, l'orbite S_u de Γ en u contient l'orbite en u des champs X_f^0 où f parcourt $C^\infty(\Gamma_0, \mathbb{R})$. Donc S_u est une réunion de feuilles du feuilletage caractéristique de Γ_0 . D'où 4).

Enfin, 5) résulte immédiatement de 2).

Remarque. En général les composantes connexes des orbites de Γ dans Γ_0 ne coïncident pas avec les feuilles du feuilletage caractéristique de (Γ_0, Λ_0) , comme c'était le cas pour les groupoïdes symplectiques. En fait, l'algèbre de Lie des champs hamiltoniens des fonctions α -projetables n'est pas transitive sur les β -fibres : il suffit pour s'en convaincre de considérer sur un groupoïde de Lie arbitraire la structure de Poisson triviale ($\Lambda = 0$).

En d'autres termes, le pseudogroupe le long de α des glissements à droite qui sont des automorphismes de Poisson ne forme pas un pseudogroupe de définition de (Γ, Λ) . Comme un tel glissement est associé à une bissection coïso trope de Γ , cette propriété s'explique par le fait qu'il n'existe pas en général de bissection coïso trope passant par un point donné de Γ (c'est déjà le cas si Γ est un groupe de Poisson.)

Notons \mathcal{F} le feuilletage caractéristique de la variété de Poisson Γ , et pour tout $x \in \Gamma$, $T_x \mathcal{F}$ le sous-espace caractéristique de $T_x \mathcal{F}$.

Supposons Γ_0 non discrète. Soient \mathcal{H}^α le faisceau sur Γ des germes des champs de vecteurs hamiltoniens des fonctions α -basiques, et pour tout $x \in \Gamma$, $\mathcal{H}^\alpha(x)$ le sous-espace de $T_x \Gamma$ formé des valeurs de ces champs. (Si Γ est un groupoïde symplectique à fibres connexes, \mathcal{H}^α est un faisceau de définition de Γ .) Comme les sections de \mathcal{H}^α sont des champs invariants à gauche, $\mathcal{H}^\alpha(x)$ est un sous-espace de l'espace tangent à la

β -fibres en x , et sa dimension reste constante lorsque x parcourt une α -fibre. De plus en tout point u de Γ_0 , $\mathcal{H}^{\alpha(u)} = T_u \mathcal{Y} \cap T_u^{-1} \beta(u)$. Il en résulte que $\mathcal{H}^{\alpha(x)}$ coïncide avec la trace de $T_x \mathcal{Y}$ sur l'espace tangent à la β -fibres en x .

Théorème 8-3. *Soit Γ un groupoïde de Poisson, et soit S la feuille du feuilletage caractéristique de Γ passant par un point u de la base Γ_0 . Alors*

1°) $S_0 = S \cap \Gamma_0$ est une sous-variété connexe de Γ_0 , réunion de feuilles du feuilletage caractéristique de (Γ_0, Λ_0) , et les projections α et β envoient S sur S_0 .

2°) $S \begin{matrix} \xrightarrow{\alpha|_S} \\ \xrightarrow{\beta|_S} \end{matrix} S_0$, muni de sa structure symplectique naturelle, est un sous-groupoïde symplectique de Γ .

Démonstration : Remarquons tout d'abord que le résultat est trivial si Γ est à base discrète : le seul groupe de Lie connexe qui soit un groupoïde symplectique est le groupe réduit à l'élément neutre.

Supposons Γ_0 non discrète, et posons pour tout $v \in \Gamma_0$, $\mathcal{Y}_v^0 = T_v \mathcal{Y} \cap T_v \Gamma_0$.

On définit ainsi sur Γ_0 un champ d'élément de contact intégrable au sens de Sussmann. De plus, si \mathcal{Y}^0 désigne la trace de \mathcal{Y} sur Γ_0 , on a $T\mathcal{Y}^0 = \mathcal{Y}^0$.

Soient maintenant $x \in \Gamma$, et $X_x \in T_x \mathcal{Y}$. Il existe $\eta_x \in T_x^* \Gamma$ tel que $X_x = \Lambda^\# \eta_x$, et

donc

$$T\alpha(X_x) = \Lambda^\# \widehat{\alpha} \eta_x$$

Ceci montre que $T\alpha(T_x \mathcal{Y}) \subset T_{\alpha(x)} \mathcal{Y}^0$. Par conséquent, α envoie la feuille $\mathcal{Y}(x)$ de \mathcal{Y} en x dans la feuille $\mathcal{Y}^0(\alpha(x))$ de \mathcal{Y}^0 en $\alpha(x)$. Si $S = \mathcal{Y}(u)$ et si $x \in S$, il existe un chemin (x_t) dans S tel que $u = x_0$ et $x = x_1$. Le chemin $\alpha(x_t)$ joint alors u à $\alpha(x)$, et est tracé dans $S_0 = \mathcal{Y}^0(u)$. Par conséquent $\alpha(S) = S_0 = S \cap \Gamma_0$ et est connexe. Le même raisonnement s'applique à β .

Désignons par σ_S la forme symplectique de S . Pour tout $v \in S_0$, $T_v \mathcal{Y}^0$ est un sous-espace isotrope de $T_v \mathcal{Y}$: en effet si $X_v \in T_v \mathcal{Y}^0$ et si $\theta_v \in T_v^* \Gamma$ vérifie $X_v = \Lambda^\# \theta_v$, on peut supposer $\theta_v \in \mathfrak{v}_v^* \Gamma_0$, et donc

$$\sigma_S(X_v, Y_v) = \theta_v Y_v = 0$$

Pour tout $Y_v \in T_v \mathcal{Y}^0$. Comme il est clair que de plus $T_v \mathcal{Y}^0$ est coisotrope, il en résulte que S_0 est une sous-variété lagrangienne de S .

Pour montrer que $S \rightrightarrows S_0$ est un groupoïde symplectique, considérons la restriction \mathcal{H}_S^α de \mathcal{H}^α à S .

C'est un faisceau transitif sur les composantes connexes des β_S -fibres, et les flots locaux de ses sections sont des glissements à droite poissonniens, c'est-à-dire respectant Λ . Posons alors

$$\Gamma' = \alpha^{-1}(S_0) \cap \beta^{-1}(S_0)$$

Γ' est la réunion de toutes les feuilles de \mathcal{Y} se projetant par α et β sur S_0 . C'est donc une sous-variété de Poisson de Γ . C'est aussi un sous-groupoïde, dont les glissements (à gauche et à droite) sont les restrictions à Γ' des glissements de Γ .

Si $x \in \Gamma'$ et $\theta'_x \in T_x^* \Gamma'$, pour tout choix de $\theta_x \in T_x^* \Gamma$ dont la restriction à $T_x \Gamma'$ soit θ'_x , on a avec des notations évidentes

$$\widehat{\alpha} \theta'_x = (\widehat{\alpha} \theta_x) | \Gamma'$$

(et de même en remplaçant α par β), et

$$\Lambda^\# \theta'_x = \Lambda^\# \theta_x$$

Donc Γ' est un sous-groupoïde de Poisson de Γ . La remarque essentielle est alors la suivante : par tout $x \in S$ passe une bissection coisotrope de Γ' : en effet une

telle bissection n'est rien d'autre qu'une sous-variété lagrangienne de S transverse aux α -fibres et aux β -fibres.

Soit alors (x,y) un couple composable contenu dans $S \times S$. L'ensemble des glissements poissonniens de Γ agit transitivement sur les β_S -fibres. Donc il existe un tel glissement φ envoyant x sur y . Mais alors $xy = \varphi(x)$ est situé dans la même feuille de \mathcal{F} que x , c'est-à-dire S . De même, $y^{-1} = \varphi^{-1}(\alpha(y))$ est aussi un élément de S . On obtient donc l'ensemble des restrictions à S des glissements à droite poissonniens de Γ constitue un pseudogroupe de définition du groupoïde $S \rightrightarrows S_0$ respectant la forme symplectique σ_S .

Pour préciser la nature des autres feuilles, nous aurons besoin de la notion **d'affinoïde symplectique** [4'] [27]

Rappelons brièvement qu'un **affinoïde de Lie** est un triplet (A, A_a, A_b) de variétés différentiables muni de deux submersions

$$\alpha : A \rightarrow A_a, \quad \beta : A \rightarrow A_b$$

et si on note

$$A_3 = \{(x,y,z) \in A \times A \times A \mid \alpha(x) = \alpha(z) \text{ et } \beta(y) = \beta(z)\}$$

d'une application différentiable

$$\pi : A_3 \rightarrow A$$

dont les points du graphe sont appelés les "parallélogrammes" de A , et vérifiant les propriétés :

$$1) \alpha(\pi(x,y,z)) = \alpha(y) \text{ et } \beta(\pi(x,y,z)) = \beta(z)$$

$$2) \text{ la relation } "(z,x) \sim (y,t) \Leftrightarrow (t,x,y,z) \text{ est un parallélogramme}"$$

[resp. " $(t,x) \sim (y,z) \Leftrightarrow (t,x,y,z)$ est un parallélogramme"] est une relation d'équivalence sur le produit fibré $A \times_{\alpha} A$ [resp. $A \times_{\beta} A$].

Un affinoïde symplectique est un affinoïde de Lie muni d'une forme symplectique pour laquelle $\text{Gr}(\pi)$ soit une sous-variété lagrangienne de $\bar{A} \times A \times A \times \bar{A}$.

Par exemple, si $\alpha, \beta : \Gamma \rightrightarrows \Gamma_0$ est un groupoïde de Lie [resp. un groupoïde symplectique], $(\alpha : \Gamma \rightarrow \Gamma_0, \beta : \Gamma \rightarrow \Gamma_0)$ est un affinoïde de Lie [resp. un affinoïde symplectique] si on pose

$$\pi(x,y,z) = x \overset{-1}{z} y$$

Une remarque essentielle est que dans cet exemple, pour tout glissement à droite φ tel que $\varphi(z) = y$ [resp. tout glissement à gauche ψ tel que $\psi(z) = x$ on a $\varphi(x) = \pi(x,y,z)$ [resp. $\psi(y) = \pi(x,y,z)$].

Utilisant cette remarque et les raisonnements précédents, on obtient immédiatement :

Théorème 8-4 : *Soient Γ un groupoïde de Poisson à base non discrète, x un point de Γ , S la feuille en x du feuilletage caractéristique de Γ , et S_a et S_b respectivement les feuilles en $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ du feuilletage obtenu sur Γ_0 comme trace du feuilletage caractéristique de Γ . Alors*

1°) S_a et S_b sont des sous-variétés connexes de Γ_0 , réunions de feuilles du feuilletage caractéristique de (Γ_0, Λ_0) , et $\alpha(S) = S_a, \beta(S) = S_b$.

2°) Si les traces sur S des fibres de α (ou de β) sont connexes, $(\alpha : S \rightarrow S_a, \beta : S \rightarrow S_b)$ muni de sa structure symplectique naturelle, est un affinoïde symplectique.

Définition 8-2. *Soit (M, \mathcal{F}) une variété munie d'un feuilletage de Stefan. On dira qu'un groupoïde de $\Gamma \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} \Gamma_0$ est une réalisation de (M, \mathcal{F}) si $\Gamma_0 = M$ et si \mathcal{F} est le feuilletage sur Γ_0 des orbites de Γ .*

Exemples fondamentaux. Si (M, \mathcal{F}) est une variété munie d'un feuilletage régulier, le groupoïde d'holonomie [16] $\text{Hol}(\mathcal{F})$ est une réalisation à fibres connexes de

(M, \mathcal{F}) . Cette réalisation est universelle parmi les réalisations à fibres connexes, au sens suivant : si Γ est une réalisation à fibres connexes de (M, \mathcal{F}) , il existe un morphisme de groupoïdes $\Gamma \rightarrow \text{Hol}(\mathcal{F})$ qui est une submersion subjective, définie de manière canonique [16].

De même, le groupoïde d'homotopie $\text{Hom}(\mathcal{F})$ est une réalisation à fibres simplement connexes de (M, \mathcal{F}) qui possède la même propriété universelle parmi les réalisations à fibres simplement connexes [16].

Définition 8-3. Soit (Γ_0, Λ_0) une variété de Poisson. On dira qu'un groupoïde de Poisson $(\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0, \Lambda)$ est une **réalisation de Poisson** si

- (i) (Γ_0, Λ_0) est la variété de Poisson des unités de (Γ, Λ)
- (ii) Γ est une réalisation de (Γ_0, \mathcal{Y}) où \mathcal{Y} est le feuilletage caractéristique de (Γ_0, Λ_0) .

Tout groupoïde symplectique $(\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0, \sigma)$ à fibres connexes est une réalisation de Poisson de (Γ_0, Λ_0) . Par contre le groupoïde de Poisson grossier $\overline{\Gamma_0} \times \Gamma_0$ n'est une réalisation de (Γ_0, Λ_0) que si (Γ_0, Λ_0) est symplectique.

Proposition 8-1. Soit (Γ_0, Λ_0) une variété de Poisson régulière, dont on note \mathcal{Y} le feuilletage caractéristique, et $\text{Hol}(\mathcal{Y})$ et $\text{Hom}(\mathcal{Y})$ respectivement les groupoïdes d'holonomie et d'homotopie de \mathcal{Y} .

Alors $\text{Hol}(\mathcal{Y})$ et $\text{Hom}(\mathcal{Y})$ sont canoniquement munis de structures de groupoïdes de Poisson qui sont des réalisations de Poisson de (Γ_0, Λ_0) .

De plus, toute réalisation de Poisson à fibres connexes [resp. à fibres simplement connexes] se factorise à travers $\text{Hol}(\mathcal{Y})$ [resp. $\text{Hom}(\mathcal{Y})$] par un morphisme de groupoïdes de Poisson qui est une submersion subjective.

Démonstration. Désignons par $\Gamma' \xrightarrow[\beta']{\alpha'} \Gamma_0$ indifféremment le groupoïde $\text{Hol}(\mathcal{Y})$ ou $\text{Hom}(\mathcal{Y})$. $\gamma' = (\beta', \alpha') : \Gamma' \rightarrow \Gamma_0 \times \Gamma_0$ est un morphisme de groupoïdes de

Lie de Γ' dans le groupoïde grossier $\overline{\Gamma}_0 \times \Gamma_0$, et c'est une immersion. Soit $x \in \Gamma'$, et notons $u = \alpha'(x)$, $v = \beta'(x)$. Alors si S_u est la feuille de \mathcal{Y} passant par u

$$S_v \times S_u \subset T\gamma' (T_x \Gamma')$$

Il existe donc sur Γ' une unique structure de Poisson Λ' qui fait de $\gamma' : (\Gamma', \Lambda') \rightarrow \overline{\Gamma}_0 \times \Gamma_0$ une immersion de Poisson : on peut la définir en demandant au diagramme suivant d'être commutatif

$$\begin{array}{ccc} T^* \Gamma' & \xrightarrow{\gamma'^*} & T^* (\overline{\Gamma}_0 \times \Gamma_0) \\ \downarrow \Lambda' & & \downarrow (-\Lambda_0 \times \Lambda_0)^\# \\ T\Gamma' & \xrightarrow{T\gamma'} & T(\overline{\Gamma}_0 \times \Gamma_0) \end{array}$$

$T\gamma'$ est injectif fibre à fibre, donc γ'^* est surjectif fibre à fibre. Il en résulte que $\Lambda^\#$ est un morphisme de groupoïdes de $(T^*\Gamma', \circ)$ dans $(T\Gamma', \oplus)$, ce qui prouve que (Γ', Λ') est un groupoïde de Poisson.

Considérons maintenant un groupoïde de Poisson $(\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0, \Lambda)$ qui réalise (Γ_0, Λ_0) , à fibres connexes. La propriété universelle des groupoïdes d'holonomie [16] assure l'existence d'un morphisme de groupoïdes

$$h : \Gamma \rightarrow \text{Hol}(\mathcal{Y})$$

qui est une submersion surjective. h est un morphisme de Poisson si, et seulement si, $\gamma' \circ h$ en est un, ce qui est le cas puisque $\gamma' \circ h = \gamma = (\beta, \alpha)$.

Le même raisonnement s'applique en remplaçant $\text{Hol}(\mathcal{Y})$ par $\text{Hom}(\mathcal{Y})$ si Γ est à fibres simplement connexes, ce qui achève la démonstration.

Conservons la notation $\Gamma' \xrightarrow[\beta]{\alpha'} \Gamma'_0$ pour l'un des deux groupoïdes $\text{Hol}(\mathcal{Y})$ ou $\text{Hom}(\mathcal{Y})$, et soient $u \in \Gamma_0$, et S_u la feuille symplectique de Γ_0 en u . Alors

$\Gamma'_{S_u} \overset{-1}{\alpha'}(S_u) \cap \overset{-1}{\beta'}(S_u)$ est le groupoïde de jauge de $\alpha' : \overset{-1}{\beta'}(u) \rightarrow S_u$. L'image par $\gamma' = (\beta', \alpha')$ de Γ'_{S_u} est $\overline{S_u} \times S_u$, feuille symplectique de $\overline{\Gamma_0} \times \Gamma_0$, et $\{\Gamma'_{S_u} \mid u \in \Gamma_0\}$ est le feuilletage symplectique de Γ' . Γ'_{S_u} est le quotient du groupoïde grossier $\overset{-1}{\beta'}(u) \times \overset{-1}{\beta'}(u)$ par le groupe d'isotropie $\Gamma'_u \alpha' : \overset{-1}{\beta'}(u) \rightarrow S_u$ est un revêtement, et donc si σ_u est la forme symplectique de S_u , $\alpha^* \sigma_u$ est une forme symplectique sur $\overset{-1}{\beta'}(u)$ invariante par Γ'_u . Donc la structure symplectique $-\sigma_u + \sigma_u$ du groupoïde grossier $\overset{-1}{\beta'}(u) \times \overset{-1}{\beta'}(u)$ passe au quotient et fait de Γ'_{S_u} un revêtement symplectique de $\overline{S_u} \times S_u$. Donc, muni de sa structure symplectique de feuille caractéristique de Γ' , Γ'_{S_u} est un groupoïde symplectique.

On a donc prouvé

Corollaire. *Les feuilles du feuilletage caractéristique des groupoïdes de Poisson $\text{Hol}(\mathcal{Y})$ (resp. $\text{Hom}(\mathcal{Y}))$ sont les groupoïdes de jauge $\alpha^{-1}(S) = \beta^{-1}(S)$ de $\text{Hol} \mathcal{Y}$ (resp. $\text{Hom} \mathcal{Y}$). Ce sont des groupoïdes symplectiques transitifs.*

Il résulte du corollaire que le pseudogroupe engendré par $\beta^* C^\infty(\Gamma_0, \mathbb{R})$, qui est un pseudogroupe de glissements à gauche formé de difféomorphismes de Poisson, est un pseudogroupe de définition de $\text{Hol}(\mathcal{Y})$ (resp. $\text{Hom} \mathcal{Y}$) à la différence de ce qui se passe en général pour un groupoïde de Poisson.

APPENDICE

Intégrabilité symplectique et sous-groupes de Lie de $\text{Diff}_0(\Gamma_0, \Lambda_0)$

Soit (Γ_0, Λ_0) un variété de Poisson que l'on suppose intégrable. Soit $(\Gamma, \sigma) \xrightarrow[\beta]{\alpha} (\Gamma_0, \Lambda_0)$ un groupoïde symplectique l'intégrant et G_β le groupe des glissements à gauche symplectiques de (Γ, σ) à supports les images réciproques par β des compacts de Γ_0 . On munit (cf. Ex 1.B.2) G_β de la difféologie à contrôle β -image réciproque d'un compact. G_β est un sous-groupe difféologique de $\text{Diff}_0^\beta(\Gamma_0, \Lambda_0)$ dont l'algèbre de Lie est isomorphe à $Z \Omega_0^1(\Gamma_0)$ espace des 1-formes fermées à supports compacts de Γ_0 muni du crochet défini par Λ_0 .

Soit $G_1 = \beta(G_\beta) = \{\beta \circ \varphi \mid \Gamma_0 \mid \varphi \in G_\beta\}$. G_1 est un sous-groupe de $\text{Diff}_0(\Gamma_0, \Lambda_0)$ et l'injection $i : G_1 \rightarrow \text{Diff}_0(\Gamma_0, \Lambda_0)$ est un morphisme difféologique.

Si $t \mapsto g(t)$ est une courbe C^∞ issue de l'identité de G_1 , par définition même de la difféologie de G_1 , il existe une courbe $C^\infty \quad t \mapsto \varphi(t)$ de G_β telle que $g(t) = \beta(\varphi(t))$. Il en résulte que $\frac{dg}{dt} \Big|_{t=0} = [\Lambda_0, \omega]$ pour une 1-forme fermée ω de Γ_0 , à support compact.

Comme inversement toute 1-forme fermée donne naissance par intégration à un flot $g(t)$ de la forme $\beta_0 \varphi(t)$, $\varphi(t)$ étant le flot de $[\Lambda, \alpha^* \omega]$, G_1 est un sous-groupe de Lie faible de $\text{Diff}_0(\Gamma_0, \Lambda_0)$

Il en résulte

Proposition A-1. *Si (Γ_0, Λ_0) est une variété de Poisson intégrable telle que $H^1(\Gamma_0, \mathbb{R}) = 0$, il existe un sous-groupe de Lie faible intégrant $\text{Ham}_0(\Gamma_0, \Lambda_0)$*

Autrement dit l'intégrabilité symplectique résoud - du moins pour les variétés de Poisson à premier groupe de cohomologie de Rham nul - le problème posé en 1-B-4 de l'intégration de $\text{Ham}_0(\Gamma_0, \Lambda_0)$ par un sous-groupe de Lie faible.

Cette condition d'intégrabilité symplectique n'est pas nécessaire comme le montre l'exemple suivant : $\Gamma_0 = S^2 \times S^1$ muni de la structure symplectique $\sigma_y = \sigma_0(2 + \cos \theta)$ où σ_0 est la structure standard de S^2 et $\theta \in S^1$. Il résulte de [3] que (Γ_0, Λ_0) n'est pas

intégrable. On va prouver que si G désigne le sous-groupe de Lie de $\text{Diff}(\Gamma_0, \Lambda_0)$ formé des automorphismes de Poisson de (Γ_0, Λ_0) conservant le feuilletage feuille à feuille, (cf.1-B1 Ex 4), son algèbre de Lie est $\text{Ham}_0(\Gamma_0, \Lambda_0)$. Soit $t \mapsto g(t)$ une courbe C^∞ issue de l'élément neutre de G et $X = \frac{dg}{dt} \Big|_{t=0}$. $\mathcal{L}_X \Lambda_0 = 0$ ce qui entraîne que pour tout y , $X_y : x \mapsto X(x, y)$ est hamiltonien. On peut donc en intégrant $\iota_{X_y} \sigma_y$ à partir du pôle sud par exemple construire une fonction C^∞ f telle que

$$\iota_{X_y} \sigma_y = -d_x f$$

Autrement dit $X = [\Lambda, f]$ ce qui prouve que $T_e G = \text{Ham}(\Gamma_0, \Lambda_0)$.

En général il n'est pas vrai que le sous-groupe de Lie de $\text{Diff}_0(\Gamma_0, \Lambda_0)$ conservant le feuilletage feuille à feuille, ait pour algèbre de Lie $\text{Ham}_0(\Gamma_0, \Lambda_0)$, comme le montre l'exemple suivant : $\Gamma_0 = S^2 \times \mathbb{R}$ et $\Lambda_0 = y^2 \tilde{\Lambda}_0$ ($y \in \mathbb{R}$), $\tilde{\Lambda}_0$ étant la structure de Poisson standard de S^2 . Soit $X = [\tilde{\Lambda}_0, yf]$ où $f \Big|_{S^2 \times 0}$ n'est pas constante. Il est clair que $X \in T_e G$. Cependant $X \notin \text{Ham}_0(\Gamma_0, \Lambda_0)$ car $\frac{f}{y}$ n'est pas C^∞ au voisinage de $S^2 \times 0$. On peut d'ailleurs montrer que $T_e G = y [\tilde{\Lambda}_0, C^\infty(\Gamma_0, \mathbb{R})]$. En effet si $X \in T_e G$, $X(x, 0) = 0$. Comme $\mathcal{L}_X \Lambda_0 = 0$, pour tout $y \neq 0$ $\iota_{X_y} \sigma_0$ est une 1-forme fermée de S^2 et donc $\iota_{X_y} \sigma_0 \Big|_{S^2}$ est fermée pour tout y . Soit $f_1(x, y)$ l'intégrale de cette forme valant 0 au pôle sud de S^2 . Pour tout $y \neq 0$ $X = [\tilde{\Lambda}_0, f_1]$ et donc par continuité $X = [\tilde{\Lambda}_0, f_1]$ pour tout y . Il en résulte que $f_1(x, 0) = 0 = d_x f_1(x, 0)$. f_1 étant C^∞ , ceci implique l'existence d'une fonction C^∞ f telle que $f_1(x, y) = y f(x, y)$, ce qui prouve le résultat cherché.

Enfin $(\Gamma_0, \Lambda_0 = y^2 \tilde{\Lambda}_0)$ n'est pas intégrable du point de vue symplectique. En effet si (Γ_0, Λ_0) était intégrable soit $(\Gamma, \sigma) \xrightarrow[\beta]{\alpha} (\Gamma_0, \Lambda_0)$ l'unique groupoïde symplectique α -simplement connexe intégrant (Γ_0, Λ_0) et Γ^\pm le sous-groupoïde $\alpha^{-1}(S^2 \times \mathbb{R}_*^\pm)$. On considère par ailleurs le groupoïde symplectique $T^* S^3 \rightrightarrows \mathfrak{so}(3)^*$ et on note Γ_1 sa restriction à $\mathfrak{so}(3)^* \setminus 0$.

L'application $\psi_0 : S^2 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathfrak{so}(3)^* \setminus 0$ définie par $\psi_0^{-1}(\theta, y) = y^2 \theta$ est un difféomorphisme de Poisson si on munit $S^2 \times \mathbb{R}_+$ de Λ_0 et $\mathfrak{so}(3)^*$ de sa structure standard. Il en résulte [corollaire 2 Proposition 6-3 § 5] que $(\Gamma^+, \sigma) \xrightarrow[\beta]{\alpha} S^2 \times \mathbb{R}_+$ est isomorphe à $T^* S^3 \Big|_{\mathfrak{so}(3)^* \setminus 0} \rightrightarrows \mathfrak{so}(3)^* \setminus 0$. On considère l'action naturelle de S^3 dans $S^2 \times \mathbb{R}$ définie par $g \cdot (\theta, y) = (g\theta, y)$. C'est une action de Poisson qui se relève donc

en une action symplectique de (Γ, σ) qui admet un moment $J : \Gamma \rightarrow \mathfrak{so}(3)^*$ puisque $\pi_1 \Gamma = 0$. Soit $J^+ = J \mid \Gamma^+$. $J^+ \circ \psi$ (où ψ est l'isomorphisme de $T^*S^3 \mid \mathfrak{so}(3)^* \times 0$ sur Γ^+) est donc le moment de l'action naturelle à gauche de S^3 dans T^*S^3 . Autrement dit $J^+ \circ \psi$ coïncide avec l'application but de T^*S^3 . Or $\beta \circ \psi^{-1} = \psi_0^{-1} \circ \beta$. Donc $J^+ = \psi_0^{-1} \circ \beta$ où $\psi_0^{-1}(\theta, y) = y^2 \theta$. Il en résulte que $dJ \mid \beta^{-1}(S^2 \times 0) = 0$ ce qui implique que l'action de S^3 au dessus de $S^2 \times 0$ est triviale. C' est faux puisque $g(\theta, y) = (g\theta, y)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. COSTE, P. DAZORD & A. WEINSTEIN Groupoïdes symplectiques. Publ. Dept. Maths. Lyon 2/A, 1987, 1-64
- [2] P. DAZORD feuilletages à Singularités. Indag. Math. Volume 47 (1), 1985, 21-39
- [3] P. DAZORD Groupoïdes symplectiques et Troisième théorème de Lie non linéaire. "Géométrie symplectique & Mécanique"(C. ALBERT Ed.) L.N 1416 Springer-Verlag éditeur, 1988, 39-74
- [4] P. DAZORD Equivalence entre intégration des algébroïdes et intégration symplectique (à paraître)
- [4'] P. DAZORD, J-H. LU, D. SONDAZ, A. WEINSTEIN Affinoïdes de Poisson C.R. Acad. Sc Paris 312-1991-523-527
- [5] P. DAZORD - D. SONDAZ Variétés de Poisson Algébroïdes de Lie - Séminaire Sud Rhodanien (1^o partie) Publ. Dept. Maths. Lyon 1988 1/B 1-69
- [6] A. DOUADY - M. LAZARD Espaces fibrés en algèbres de Lie et en groupes. Invent. Math. 1 1966, 133-151
- [7] V. DRINFEL'D. Hamiltonian structures in Lie groups Soviet Math. Dokl. 27, n°1, 1983, 68-71
- [8] V.T VAN EST - Th. J. KORTHAGEN Non élargible Lie Algèbras. Indagationes Math. 26.1 (1964)
- [9] V.T VAN EST - M.A.M VAN DER LEE Enlargeability of local groups according to Malcev and Cartan-Smith in "Actions Hamiltoniennes de groupes. Troisième théorème de Lie". (P. DAZORD, N. DESOLNEUX-MOULIS - J.M MORVAN Ed.) "Travaux en cours. Hermann Ed. Paris 1988.

- [10] V. GUILLEMIN & S. STERNBERG. Géometric Asymptotics. Mathematical Surveys n°14 A.M.S, 1977
- [11] M. KARASEV Analogues of the objects of Lie group theory for non linear Poisson brackets. Math. USSR Izvestiya 28, n°3, 1987 497-527
- [12] J.L KOSZUL Crochet de Schouten - Nijenhuis et cohomologie. Astérisque hors série, 137 bis, S.M.F, 1985, 257-271
- [13] A. LICHNEROWICZ Variétés de Poisson et feuilletages. Ann. Fac.Sciences. Toulouse Vol IV.1982, 195-262
- [14] F. MAGRI & C.MOROSI A geometrical characterisation of integral hamiltonian systems through the theory of Poisson - Nijenhuis manifolds. Quaderno S.19 (1984) Universita di Milano
- [15] M. PLAISANT sur l'intégrabilité des algèbres de Lie banachiques dans le cadre des Q-Variétés. Thèse 3° cycle - Université de Lille et Valenciennes 1980
- [16] J. PRADINES. Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables. Relations entre propriétés locales et globales. C.R Acad. SC Paris 264.1966, 907-910
- [17] J. PRADINES. Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables. Calculs différentiels dans la catégorie des groupoïdes infinitésimaux C.R Acad Sc. Paris 264.1967, 245-248
- [18] J. PRADINES - Troisième théorème de Lie pour les groupoïdes différentiables. CR Acad Sc. PARIS 267, 1968, 21-23
- [19] J. PRADINES. Sur le groupoïde cotangent de Weinstein-Dazord. CR Acad Sc. Paris 306, 1988, 557-560
- [20] J.M SOURIAU Structure des Systèmes dynamiques. Dunod éd. PARIS 1969.

- [21] J.M SOURIAU. Groupes différentiels et Physique Mathématique in "feuilletages et quantification géométrique" (P. DAZORD & N.DESOLNEUX - MOULIS éd.) "Travaux en cours. Hermann éd. PARIS 1984
- [22] A. WEINSTEIN A universal phase space for particles in Yang - Mills fields. Lett. Math Phys. 2, 1978,417-420
- [23] A. WEINSTEIN - the local structural of Poisson Manifolds. J.Diff. Géom 18, 1983, 523-557
- [24] A. WEINSTEIN Symplectic groupoids and Poisson manifolds. Bull. Amer Math. Soc 16 1987, 101-103
- [25] A. WEINSTEIN Coisotropic Calcul and Poisson groupoides. J. Math. Soc. Japan 10, 1988, 705-727
- [26] A. WEINSTEIN. Poisson Geometry of the principal series and non linearizable structures J. Diff. Geometry 23, 1987, 55-73
- [27] A. WEINSTEIN. Affine Poisson structures. International Journal of Maths. vol. 1, n° 3, 1990, 343-360.