

C. ALBERT

P. DAZORD

Théorie des groupoïdes symplectiques

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1988, fascicule 4B
« Travaux du Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie - II », , p. 51-105

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1988__4B_51_0

© Université de Lyon, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

C. ALBERT - P. DAZORD

THEORIE DES GROUPOIDES SYMPLECTIQUES

Chapitre I

THEORIE GENERALE DES GROUPOIDES DE LIE

Dans ce premier chapitre, nous présentons les généralités sur la théorie des groupoïdes de Lie, introduits sous le nom de groupoïdes différentiels par C. Ehresmann [7], et dont l'étude a été développée ultérieurement par divers auteurs au premier rang desquels il faut citer J. Pradines [13][14][15] qui est à l'origine de la plupart des concepts fondamentaux et K. Mackenzie [12].

La présentation que nous faisons ici de cette théorie repose essentiellement sur le concept de **glissement** : les glissements (à gauche et à droite) sont aux groupoïdes de Lie ce que les translations (à gauche et à droite) sont aux groupes de Lie. L'avantage de cette présentation est de fournir un outil géométrique très souple, et qui s'avèrera utile dans l'étude des groupoïdes symplectiques.

On prendra garde que les variétés différentielles étudiées ici sont certes à base dénombrable d'ouverts, mais ne sont **pas nécessairement séparées** [sauf mention explicite du contraire]. Il est en effet indispensable de se placer dans un tel cadre pour pouvoir rendre compte des propriétés d'un certain nombre de groupoïdes qui apparaissent naturellement en géométrie différentielle (notamment les groupoïdes d'homotopie et d'holonomie d'un feuilletage régulier sur une variété séparée).

La notion de feuilletage s'étend naturellement (cf. § 1) à de telles variétés M : un feuilletage sera défini par une distribution de sous-espaces vectoriels E tels que E vérifie, en restriction à tout voisinage ouvert séparé, les conditions d'intégrabilité de Frobenius-Sussmann. La feuille de E issue de x_0 sera la réunion des courbes intégrales de E . Une telle feuille est une sous-variété immergée - en général non séparée - de M .

En particulier si X est un champ de vecteurs sur M , il définit un feuilletage dont les feuilles sont appelées orbites de X . Ce sont des sous-variétés immergées de dimension 1, non séparées en général, ce qui interdit de parler du **flot** de X . Cependant sur chaque

ouvert séparé U on pourra parler de flot de X sur U , qu'on appellera flot local (sur U) de X . L'ensemble des flots locaux en x_0 définit de façon naturelle le germe de flot de X en x_0 .

1. FEUILLETAGES ET FAISCEAUX D'ALGÈBRES DE LIE DE CHAMPS DE VECTEURS SUR UNE VARIÉTÉ NON SÉPARÉE.

Dans tout ce paragraphe M est une variété C^∞ - au sens de Bourbaki [2], Ehresmann [7], - i.e. M n'est pas séparée a priori.

Définition 1.1. *Un feuilletage de STEFAN (ou "feuilletage") sur M est la donnée pour tout $x \in M$ d'un sous-espace \mathcal{F}_x de $T_x M$ tel que pour tout ouvert U séparé de M la restriction de \mathcal{F} à U soit un feuilletage de STEFAN de U .*

Il est clair que cette condition est locale, autrement dit qu'il suffit qu'elle soit vérifiée en tout point x de M pour un voisinage ouvert séparé de x . En particulier ceci permet d'utiliser sur chaque ouvert séparé choisi, le théorème de FROBENIUS-SUSSMANN [17], afin de caractériser les distributions (\mathcal{F}_x) définissant un feuilletage. Si la dimension de \mathcal{F}_x est constante sur M , ce théorème se réduit au théorème usuel de FROBENIUS.

Par tout point $x_0 \in M$, il passe une unique variété intégrale maximale connexe immergée F_{x_0} , appelée feuille de \mathcal{F} en x_0 .

En particulier si X est un champ de vecteurs sur M il définit un feuilletage de STEFAN dont les feuilles sont appelées orbites de X . Pour tout ouvert séparé U de M , on peut définir le flot de $X|_U$, ϕ_t^U , appelé flot local de X sur U . On ne peut définir le flot de X que si les orbites de X sont séparées. Ceci amène à considérer une catégorie particulière de feuilletages sur M :

Définition 1.2. *Un feuilletage \mathcal{F} sur M est à feuilles séparées si toute feuille de \mathcal{F} , munie de sa topologie de feuille, est séparée .*

Dans ces conditions, si X est un champ de vecteurs sur M tel que pour tout $x \in M$, $X(x) \in \mathcal{F}_x$, on peut définir le flot de X .

Soit \mathcal{G} une sous-algèbre de Lie de champs de vecteurs sur M (ou plus généralement un faisceau d'algèbres de Lie). Soit \mathcal{F} la distribution de sous-espaces tangents de M définie pour tout $x \in M$ par $\mathcal{F}_x = \{X(x) \mid X \in \mathcal{G}\}$. On dira que $x \in M$

est \mathfrak{G} -accessible à partir de x_0 [16] si il existe une suite finie $(X_i)_{1 \leq i \leq k}$ de champs de \mathfrak{G} de flots locaux $(\phi_t^i)_{1 \leq i \leq k}$ et k scalaires $(t_i)_{1 \leq i \leq k}$ tels que $\phi_{t_k}^k \circ \dots \circ \phi_{t_1}^1(x_0) = x$. C'est clairement une relation d'équivalence et on appelle orbite de \mathfrak{G} en x_0 la classe d'équivalence de x_0 pour la relation d'accessibilité.

En général \mathfrak{F} n'est pas un feuilletage de STEFAN, même si toutes les orbites de \mathfrak{G} sont des sous-variétés immergées comme le montre l'exemple suivant dans \mathbb{R}^2 : \mathfrak{G} est la sous-algèbre de Lie de champs de vecteurs sur \mathbb{R}^2 engendrée par $\frac{\partial}{\partial y}$ et $\psi(x)\frac{\partial}{\partial y}$ où (x,y) désignent les coordonnées de \mathbb{R}^2 et ψ est une application C^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} nulle pour $x \leq 0$ et strictement positive pour $x > 0$. \mathfrak{G} a une seule orbite \mathbb{R}^2 . $\dim \mathfrak{F} = 1$ si $x \leq 0$, $\dim \mathfrak{F} = 2$ si $x > 0$ et \mathfrak{F} n'est pas un feuilletage de Stefan puisqu'il n'existe pas de sous-variété passant par $(0,0)$ de dimension 1 si $x \leq 0$ et 2 si $x > 0$.

Ceci conduit aux définitions suivantes :

Définition 1.3. Soit \mathfrak{G} un faisceau d'algèbre de Lie de champs de vecteurs et W une orbite de \mathfrak{G} . On dit que W est une orbite transitive de \mathfrak{G} si :

- (i) W est une sous-variété immergée de M .
- (ii) W est une variété intégrale maximale de \mathfrak{F} (i.e. $\forall x \in W \ T_x W = \mathfrak{F}_x = \mathfrak{G}(x)$).

Dans l'exemple précédent \mathfrak{G} a une seule orbite \mathbb{R}^2 qui n'est pas transitive.

Le théorème suivant, dû à SUSSMANN [17] pour le cas séparé, étend le théorème de FROBENIUS.

Théorème 1.1. [17]. \mathfrak{F} est un feuilletage de STEFAN si et seulement si \mathfrak{F} est invariant par tout flot local de champ de \mathfrak{G} .

Si \mathfrak{F} est un feuilletage de rang constant la condition est vide : c'est le théorème usuel de FROBENIUS.

Définition 1.4. Un faisceau de sous-algèbres de Lie de champs de vecteurs \mathfrak{G} est intégrable si l'image par tout flot local de champ de \mathfrak{G} d'un germe de champ de \mathfrak{G} est un germe de champ de \mathfrak{G} .

Le résultat suivant est essentiellement dû à SUSSMANN (cf. [4]).

Théorème 1.2. [17]. *Si \mathcal{G} est un faisceau d'algèbres de Lie intégrable, \mathcal{F} est un feuilletage de Stefan dont les feuilles sont les orbites de \mathcal{G} . En particulier toutes les orbites de \mathcal{G} sont transitives.*

Remarque : La réciproque est fautive : \mathcal{F} peut être un feuilletage de Stefan sans que \mathcal{G} soit intégrable comme le montre l'exemple très simple suivant : \mathcal{G} est, sur \mathbb{R} , l'algèbre de Lie des champs polynômiaux $P(x) \frac{\partial}{\partial x}$. L'image par le flot du champ $x^2 \frac{\partial}{\partial x}$ d'un champ de \mathcal{G} n'appartient pas à \mathcal{G} en général.

Définition 1.5. *Un faisceau d'algèbres de Lie \mathcal{G} sur M est à orbites séparées si toutes les orbites sont séparées quand on les munit de la topologie induite.*

Si \mathcal{G} est à orbites séparées, pour tout $X \in \mathcal{G}$, on peut définir le flot de X : il est en effet immédiat que l'orbite de tout point par l'algèbre de Lie engendrée par X est également séparée quand on la munit de sa topologie de feuille.

Exemples fondamentaux.

1. Soit (P, Λ) une variété de Poisson, de 2-tenseur Λ , pas forcément séparée. Pour tout ouvert U séparé (U, Λ_U) est une variété de Poisson au sens usuel. Soit \mathcal{G} l'algèbre de Lie des champs hamiltoniens, i.e., \mathcal{G} est l'ensemble des champs $[\Lambda, u] = \Lambda^\# u$ où $u \in C^\infty(P, \mathbb{R})$, $[\Lambda, u]$ désigne le crochet de Schouten et $\Lambda^\# : T^*P \rightarrow TP$ le morphisme $\omega \rightarrow \Lambda^\# \omega$ défini par $\iota(\Lambda^\# \omega) \omega_1 = \iota(\Lambda) (\omega \wedge \omega_1)$ pour tout $\omega_1 \in T^*P$. Soit $\mathcal{A} = \text{Im } \Lambda^\#$. Pour tout U séparé, \mathcal{G} induit \mathcal{G}_U algèbre de Lie intégrable des champs hamiltoniens sur U de feuilletage associé \mathcal{A}_U en variétés symplectiques. \mathcal{G} est donc intégrable et $\mathcal{A} = \text{Im } \Lambda^\#$ est un feuilletage en variétés symplectiques (non séparées) appelé feuilletage caractéristique de (P, Λ) [9] [11][18].
2. Soit M une variété séparée, \mathcal{F} un feuilletage régulier sur M . Le "groupeïde fondamental" (cf. infra) [13] n'est pas séparé en général. Le feuilletage relevé de \mathcal{F} , (par l'application source ou l'application but) et constitué des nappes d'holonomie, est un feuilletage à feuilles séparées.

2. LA NOTION GENERALE DE GROUPOÏDE.

Définition 2.1. *Un groupeïde Γ est un ensemble muni d'une "loi de groupe non partout définie". Plus précisément, on se donne*

- * Un sous-ensemble Γ_0 de Γ
- * deux surjections α et β de Γ sur Γ_0
- * une application $\mu : \Gamma_2 \rightarrow \Gamma$ $(x,y) \mapsto xy$ où

$$\Gamma_2 = \{(x,y) \in \Gamma \times \Gamma \mid \alpha(x) = \beta(y)\}$$
- * une application $\iota : \Gamma \rightarrow \Gamma$, $x \mapsto x^{-1}$

le tout astreint à vérifier les axiomes :

(ass) : quels que soient x,y,z dans Γ , si l'un des produits $x(yz)$ ou $(xy)z$ est défini, l'autre l'est aussi et $x(yz) = (xy)z$.

(id) : pour tout $x \in \Gamma$, $\beta(x)x$ et $x\alpha(x)$ sont définis et $\beta(x)x = x\alpha(x) = x$.

(inv) : pour tout $\xi \in \Gamma$, $\xi\xi^{-1}$ et $\xi^{-1}\xi$ sont définis et $\xi\xi^{-1} = \beta(\xi)$, $\xi^{-1}\xi = \alpha(\xi)$.

Exemples-types : X est un espace topologique et Γ est l'ensemble des **germes d'homéomorphismes** de X sur lui-même. Les applications α et β sont les applications source et but. Si $\beta(y) = \alpha(x)$, xy désigne le germe composé xoy , et x^{-1} est le germe de l'homéomorphisme réciproque de x . On a ici $\Gamma_0 = X$, l'injection $j : X \hookrightarrow \Gamma$ étant l'application qui, à $u \in X$, associe le germe $[id]_u$.

Une variante de cet exemple consiste à prendre pour X une variété, et, k étant un entier donné, pour Γ l'ensemble de tous les **k -jets de difféomorphismes locaux** de X ; α et β sont toujours les applications source et but, μ la composition des jets, ι l'inversion des jets, et l'injection $j : X = \Gamma_0 \hookrightarrow \Gamma$ associe à $u \in X$ le k -jet en u de l'identité.

On peut aussi remplacer dans cet exemple l'ensemble de tous les difféomorphismes locaux par n'importe quel pseudogroupe de difféomorphismes.

En particulier, si $k = 0$, un 0-jet est seulement la donnée de sa source et de son but, et la structure de variété de X devient inutile, ce qui conduit à la notion de groupoïde grossier : le groupoïde grossier sur l'ensemble X est l'ensemble $\Gamma = X \times X$ sur lequel on définit :

- * $\Gamma_0 = X$ plongé dans $X \times X$ par l'application diagonale

$$j : X \rightarrow X \times X \quad x \mapsto (x,x)$$

- * $\beta = pr_1 : X \times X \rightarrow X$ et $\alpha = pr_2 : X \times X \rightarrow X$

- * $\mu((a,b),(b,c)) = (a,c)$

- * $\iota(a,b) = (b,a)$.

Un autre exemple consiste à prendre pour X un espace topologique, et pour Γ l'espace des classes d'homotopie à extrémités fixes des chemins de X . X est plongé dans Γ en associant à $u \in X$ la classe $j(u)$ du lacet constant en u ; les applications α et β sont

les applications origine et extrémité, μ est l'application induite par la composition des chemins, et ι l'application induite par le passage au chemin inverse. Le groupoïde Γ ainsi obtenu est le groupoïde **fondamental** $\Pi(X)$.

Proposition 2.1. Soit $\Gamma(\Phi_0, \alpha, \beta, \mu, \iota)$ un groupoïde. Alors :

- (i) $\alpha \circ \beta = \beta \circ \beta = \beta$ et $\beta \circ \alpha = \alpha \circ \alpha = \alpha$;
- (ii) pour tout $(x, y) \in \Gamma_2$ $\beta(x, y) = \beta(x)$ et $\alpha(xy) = \alpha(y)$;
- (iii) pour tout $x \in \Gamma$ $\alpha(x^{-1}) = \beta(x)$ et $\beta(x^{-1}) = \alpha(x)$;
- (iv) Si $(x, y) \in \Gamma_2$ et $(x, z) \in \Gamma_2$ on a : $xy = xz \Rightarrow y = z$
Si $(x, y) \in \Gamma_2$ et $(z, y) \in \Gamma_2$ on a : $xy = zy \Rightarrow x = z$;
- (v) pour tout $x \in \Gamma$, $(x^{-1})^{-1} = x$;
- (vi) pour tout $x \in \Gamma$, on a $\alpha(x) = x \Leftrightarrow x \in \Gamma_0$
et $\beta(x) = x \Leftrightarrow x \in \Gamma_0$.

La démonstration de cette proposition ne présente aucune difficulté.

Dans toute la suite, les applications α et β seront systématiquement appelées "source" et "but", et le sous-ensemble Γ_0 la "base" de Γ . Les éléments de Γ_0 seront appelés les "unités" de Γ .

On notera $\Gamma \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \rightrightarrows \Gamma_0$ ou $\Gamma \rightrightarrows \Gamma_0$ (ou simplement Γ) le groupoïde, les applications μ et ι étant sous-entendues.

Cas particuliers et autres exemples :

- * Si $\Gamma_0 = \{e\}$, Γ est un groupe car alors $\Gamma_2 = \Gamma \times \Gamma$ et donc μ est partout définie.
- * Si $\Gamma_0 = \Gamma$, $\alpha = \beta = \text{id}_\Gamma$ et les seuls produits définis sont les $xx = x$. On dit que Γ est le **groupoïde nul**.
- * Si $\alpha = \beta$, $\alpha^{-1}(u)$ est, pour tout $u \in \Gamma_0$, un groupe. C'est par exemple le cas d'un **fibré vectoriel** : on peut regarder un fibré vectoriel de base Γ_0 comme un groupoïde de base Γ_0 (identifiée à la section nulle) $\alpha = \beta$ étant la projection, et μ l'addition dans les fibres.

Définition 2.2. Soit $\Gamma \rightrightarrows \Gamma_0$ un groupoïde.

Si $u \in \Gamma_0$, on appelle **groupe d'isotropie en u** le groupe

$$\Gamma_u = \alpha^{-1}(u) \cap \beta^{-1}(u)$$

et on appelle **orbite de Γ en u** l'ensemble

$$\beta(\alpha^{-1}(u)) = \alpha(\beta^{-1}(u)).$$

L'ensemble des orbites de Γ forme une partition de Γ_0 .

Un groupoïde est dit **transitif** s'il possède une seule orbite.

Ces définitions sont motivées par l'exemple du groupoïde des germes d'homéomorphismes.

Définition 2.3. *Etant donnés deux groupoïdes*

$\Gamma \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} \Gamma_0$ et $\Gamma' \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha'} \\ \xrightarrow{\beta'} \end{array} \Gamma'_0$, un *morphisme de groupoïdes de Γ dans Γ' est une application $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ telle que $(f \times f)(\Gamma_2) \subset \Gamma'_2$ et vérifiant*

$$f(xy) = f(x)f(y) \text{ pour tout } (x,y) \in \Gamma_2.$$

Un tel morphisme respecte les unités et commute aux applications source et but.

Par exemple, si Γ est un groupoïde quelconque, l'application $(\beta, \alpha) : \Gamma \rightarrow \Gamma_0 \times \Gamma_0$ est un morphisme si l'on munit $\Gamma_0 \times \Gamma_0$ de sa structure de groupoïde grossier. On dit que Γ est un **groupoïde principal** si (β, α) est injectif.

Dans le langage des catégories, un groupoïde apparaît comme une petite catégorie dont toutes les flèches sont inversibles. Un morphisme est alors un foncteur entre deux telles catégories.

Définition 2.4. *Un sous-groupoïde [resp. un sous-groupoïde plein] d'un groupoïde Γ est une sous-catégorie [resp. une sous-catégorie pleine] de Γ .*

En d'autres termes, un sous-groupoïde Γ' de Γ est un sous-ensemble de Γ muni d'une structure de groupoïde telle que l'inclusion soit un morphisme de groupoïdes, et Γ' est plein si Γ et Γ' ont les mêmes unités.

En d'autres termes, un sous-groupoïde Γ' de Γ est un sous-ensemble de Γ muni d'une structure de groupoïde telle que l'inclusion soit un morphisme de groupoïdes, et Γ' est plein si Γ et Γ' ont les mêmes unités.

Exemple : Soit A une partie quelconque de Γ_0 . Alors $\Gamma_A = \alpha^{-1}(A) \cap \beta^{-1}(A)$ est un sous-groupoïde de Γ . En particulier si $A = S_u$ (orbite de u par Γ),

$\Gamma_{S_u} = \alpha^{-1}(S_u) = \beta^{-1}(S_u)$ est un groupoïde transitif, sous-groupoïde de Γ .

Enfin la catégorie des groupoïdes est une **catégorie à produit** : si Γ^i ($i=1,2$) est un groupoïde d'unité Γ_o^i , $\Gamma^1 \times \Gamma^2$ est un groupoïde d'unité $\Gamma_o^1 \times \Gamma_o^2$ avec comme multiplication $(x^1, x^2)(y^1, y^2) = (x^1 y^1, x^2 y^2)$.

3. GROUPOIDES DE LIE.

Définition 3.1. *Un groupoïde de Lie Γ est une variété différentielle (non nécessairement séparée) munie d'une structure de groupoïde telle que :*

- 1) *L'ensemble Γ_o des unités est une sous-variété séparée paracompacte et connexe ;*
- 2) *Les applications source et but α et β sont des submersions ;*
- 3) *La multiplication $\mu : \Gamma_2 \rightarrow \Gamma$ est différentiable ;*
- 4) *L'inversion $\iota : \Gamma \rightarrow \Gamma$ est un difféomorphisme.*

On désignera par $j : \Gamma_o \hookrightarrow \Gamma$ l'injection canonique. Il résulte de 2) que Γ_2 est une sous-variété $\Gamma \times \Gamma$ (produit fibré de α et β), ce qui donne un sens à 3).

On dira que le groupoïde de Lie $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_o$ est **transitif** si l'application $(\alpha, \beta) :$

$\Gamma \rightarrow \Gamma_o \times \Gamma_o$ est une surmersion (c'est-à-dire une submersion surjective).

Exemple fondamental. Soient G un groupe de Lie et $E(G) \rightarrow M$ un G -fibré principal. Le quotient par l'action diagonale de G du groupoïde grossier $E(G) \times E(G)$ est un groupoïde de Lie transitif d'unités M appelé **groupoïde de jauge** du fibré $E(G) \rightarrow M$. (C'est le premier groupoïde de Lie considéré par C. Ehresmann). Nous reviendrons sur cet exemple au paragraphe 5.

Remarque. Conformément à ce qui a été fait dans [3], on appelle "groupoïde de Lie" les groupoïdes appelés "groupoïdes différentiels" par C. Ehresmann et divers auteurs. Il a semblé préférable d'abandonner la terminologie, traditionnelle jusque là, qui réservait le nom de groupoïdes de Lie aux groupoïdes de Lie transitifs.

Définition 3.2. *Soit $\pi : M \rightarrow M_o$ une application de M dans M_o . On dira que $\pi : M \rightarrow M_o$ est π -connexe si pour tout $x \in M_o$ $\pi^{-1}(x)$ est connexe. En particulier on dira qu'un groupoïde de Lie est à fibres connexes s'il est α -connexe.*

On a de même une notion de groupoïde à fibres simplement connexes et la condition (4) entraîne que α -connexité (ou simple connexité) et β -connexité (ou simple connexité) sont équivalentes.

On appelle **composante α -connexe** de Γ , et on note Γ_α , la réunion des composantes connexes des points de Γ_0 dans les α -fibres de Γ .

Définition 3.3. Si Γ et Γ' sont deux groupoïdes de Lie, un **morphisme de groupoïdes de Lie** est un morphisme de groupoïdes $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ qui est différentiable. Cette notion de morphisme fait des groupoïdes de Lie une catégorie à produit.

Un sous-groupoïde Γ' de Γ est un sous-groupoïde de Lie si l'inclusion $\Gamma' \subset \Gamma$ est une immersion.

En particulier, tout sous-groupoïde ouvert de Γ est un sous-groupoïde de Lie de Γ ; $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ est un morphisme de groupoïdes de Lie si et seulement si le graphe de f est un sous-groupoïde de $\Gamma \times \Gamma$.

Proposition 3.1. [15] :

- (i) La composante α -connexe Γ_α d'un groupoïde de Lie Γ est un sous-groupoïde de Lie plein et ouvert de Γ .
- (ii) Si Γ est un groupoïde de Lie à fibres connexes, l'ensemble $\tilde{\Gamma}$ des classes d'homotopie α -fibre à α -fibre des chemins contenus dans les α -fibres dont l'origine est une unité est naturellement muni d'une structure de groupoïde de Lie (admettant les mêmes unités que Γ), qui est à fibres simplement connexes et tel que la projection $\rho : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ induite par l'application "extrémité" des chemins soit un morphisme de groupoïdes et un étalement.

Si Γ_0 est réduit à l'identité, ρ est bien sûr un revêtement.

Proposition 3.2. [15]. Un groupoïde de Lie $\Gamma \xrightarrow{\quad} \Gamma_0$ est séparé si, et seulement si, la sous-variété Γ_0 est fermée dans Γ .

Preuve. La condition est nécessaire puisque α est continue. Elle est aussi suffisante, car si Γ_0 est fermée, soit (x_n) une suite de points de Γ ayant deux limites a et b distinctes. La suite $(x_n^{-1}x_n)$ est une suite de points de Γ_0 convergeant vers $a^{-1}a$ et aussi vers $a^{-1}b$.

L'hypothèse montre que ces deux points sont dans Γ_0 , et on a supposé Γ_0 séparée. Donc nécessairement $a^{-1}a = a^{-1}b$, ce qui entraîne $a=b$, et par conséquent le résultat.

Cette proposition étend aux groupoïdes la caractérisation des groupes séparés.

Bien qu'un groupoïde de Lie ne soit pas, en général, séparé, on a la propriété remarquable suivante :

Théorème 3.1. Si $\Gamma \xrightarrow{\text{}} \Gamma_0$ est un groupoïde de Lie, il existe un voisinage ouvert séparé U de Γ_0 dans Γ . De plus on peut imposer que U soit symétrique (c'est-à-dire invariant par l'application $x \rightarrow x^{-1}$), α et β -connexes. De plus Γ_0 est fermé dans U .

Scolie : L'existence d'un voisinage séparé de l'identité d'un groupe suffit à assurer la séparation ce qui n'est pas le cas d'un groupoïde.

Démonstration. L'étape essentielle de la démonstration est le lemme suivant de topologie générale :

Lemme 3.1. Soit M une variété (non séparée) munie d'une projection π sur une sous-variété M_0 de M séparée et paracompacte. Alors il existe un voisinage séparé de M_0 dans M , π -connexe.

Démonstration du lemme. Soit p la codimension de M_0 dans M . Pour tout $u \in M_0$, il existe un voisinage Ω_u de u dans M et un difféomorphisme ϕ_u de Ω_u sur $\Omega_u^0 \times B'_u$ où

$\Omega_u^0 = \Omega_u \cap M_0$ et B'_u est une boule ouverte de \mathbb{R}^p , rendant commutatif le diagramme

suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega_u & \xrightarrow{\phi_u} & \Omega_u^0 \times B'_u \\
 \searrow \pi & & \swarrow \text{pr} \\
 & \Omega_u^0 &
 \end{array}$$

Ceci résulte du fait que π est une submersion et M_0 une sous-variété. Ω_u est un voisinage séparé de u . On dit que Ω_u est π -distingué.

On choisit maintenant un voisinage ouvert V_u de u dans Ω_u^0 dont la fermeture dans M_0 , notée \bar{V}_u , est compacte et contenue dans Ω_u^0 . Soit B_u une boule ouverte dont la fermeture, compacte, est contenue dans B'_u . On pose $W_u = \phi_u^{-1}(\bar{V}_u \times \bar{B}_u)$.

Les $(V_u)_{u \in M_0}$ forment un recouvrement ouvert de M_0 qui est paracompacte. On peut donc en extraire un sous-recouvrement localement fini $(V_i)_{i \in I}$, auquel on associe $(W_i)_{i \in I}$, $(\Omega_i)_{i \in I}$, $(\phi_i)_{i \in I}$. $V_i = W_i \cap M_0$ et W_i est un sous-espace compact de l'espace topologique séparé Ω_i .

$$\text{Soit } W = \bigcup_{u \in M_0} \pi^{-1}(u) \cap \bigcap_{\{i|u \in W_i\}} W_i.$$

Pour tout u , $W_u = \pi^{-1}(u) \cap \bigcap_{\{i|u \in W_i\}} W_i$ est un voisinage de u dans $\alpha^{-1}(u)$ car u n'appartient qu'à un nombre fini de V_i .

On va prouver que W est un voisinage de M_0 . Soit $u_0 \in M_0$ et $(V_j)_{1 \leq j \leq k}$ l'ensemble fini, des V_i qui contiennent u_0 . $\bigcap_{j=1}^k V_j$ est un voisinage de u_0 . Il existe donc un voisinage ouvert V de u_0 , dont la fermeture dans M_0 est compacte et contenue dans $\bigcap_{j=1}^k V_j$, et qui ne rencontre qu'un nombre fini $1 \leq j \leq k+l$ de voisinages $(V_i)_{i \in I}$ car $(V_i)_{i \in I}$ est localement fini. Soit $\Omega = \bigcap_{i=1}^k \Omega_i$, $\mathcal{W} = \bigcap_{i=1}^k W_i$.

Pour tout r , $1 \leq r \leq l$, $W_r \cap \mathcal{W}$ est un voisinage compact de $\bar{V} \cap \bar{V}_r$ dans \mathcal{W} . Soit i , $1 \leq i \leq k$. $\phi_i(W_r \cap \mathcal{W})$ est un voisinage compact de $\bar{V} \cap \bar{V}_r$ dans $(\bar{V} \cap \bar{V}_r) \times B$ et contient donc un voisinage de la forme $(\bar{V} \cap \bar{V}_r) \times B_2$ où B_2 est une boule compacte de rayon non nul de \mathbb{R}^p . Il en résulte qu'il existe un voisinage compact \mathcal{W}^r de \bar{V} dans \mathcal{W} tel que $\mathcal{W}^1 \cap \pi^{-1}(\bar{V}_r)$ soit contenu dans $W_r \cap \mathcal{W}$. $\bigcap_{r=1}^l \mathcal{W}^r$ est donc un voisinage, compact, de u_0 contenu dans W ce qui prouve que W est un voisinage de M_0 .

La séparation de W résulte de ce que si x_1 et x_2 sont deux points de W de même projection sur M_0 , ils appartiennent à un même voisinage π -distingué et donc séparé.

Enfin soit $\overset{\circ}{\pi}$ la restriction de π à l'intérieur $\overset{\circ}{W}$ de W . Soit W' la réunion des composantes connexes des points de M_0 dans les $\overset{\circ}{\pi}$ -fibres correspondantes. π étant une submersion W' est ouvert dans $\overset{\circ}{W}$, ce qui achève la preuve du lemme.

Fin de la démonstration du théorème 3.1. Le lemme précédent fournit un voisinage séparé U_0 de Γ_0 qui est α -connexe. $U_0 \cap U_0^{-1}$ est un voisinage ouvert de Γ_0 stable par l'inversion. Soit U l'ensemble des $x \in U_0$ qui appartiennent à la fois à la composante connexe de $\alpha(x)$ dans $\alpha^{-1}|_U(\alpha(x))$ et de $\beta(x)$ dans $\beta^{-1}|_U(\beta(x))$. α et β étant des submersions U est ouvert dans U_0 . Comme U_0 est stable par inversion U l'est aussi, ce qui achève la démonstration.

Soit $\Gamma \rightrightarrows \Gamma_0$ un groupoïde de Lie. Si $x \in \Gamma$, la **translation à gauche**

$$\begin{aligned} L_x : \beta^{-1}(\alpha(x)) &\rightarrow \beta^{-1}(\beta(x)) \\ L_x(y) &= xy \end{aligned}$$

et la **translation à droite**

$$\begin{aligned} R_x : \alpha^{-1}(\beta(x)) &\rightarrow \alpha^{-1}(\alpha(x)) \\ R_x(y) &= yx \end{aligned}$$

sont des difféomorphismes entre les fibres correspondantes. On notera que pour tout $x \in \Gamma$

$$\alpha \circ L_x = \alpha \text{ et } \beta \circ R_x = \beta.$$

De plus, si $\alpha(x') = \alpha(x)$ on a $x' = L_{x'x^{-1}}(x)$ et si $\beta(x') = \beta(x)$, on a $x' = R_{x^{-1}x'}(x)$. Par conséquent, les **translations à gauche [resp. à droite] agissent transitivement sur les α -fibres [resp. les β -fibres]**.

Contrairement à ce qui se passe dans les groupes de Lie, les translations à gauche ou à droite ne sont pas des difféomorphismes de Γ sur lui-même. Pour pallier cet inconvénient, on va introduire la notion suivante :

Définition 3.4. Un glissement à gauche de Γ est un difféomorphisme local φ de Γ ayant la propriété suivante : étant donnés x et y dans Γ , si l'un des éléments $\varphi \circ R_y$ ou $R_y \circ \varphi$ est défini en x , l'autre l'est aussi et $(\varphi \circ R_y)(x) = (R_y \circ \varphi)(x)$.

De même un glissement à droite de Γ est un difféomorphisme local ψ de Γ tel que si l'un des éléments $\psi \circ L_y$ ou $L_y \circ \psi$ est défini en x , l'autre l'est aussi et $(\psi \circ L_y)(x) = (L_y \circ \psi)(x)$.

Dire que φ est un difféomorphisme local d'une variété Γ signifie que φ est un difféomorphisme d'un ouvert de Γ , appelé domaine de φ et noté $\text{dom } \varphi$, sur un ouvert de Γ , appelé image de φ et noté $\text{im } \varphi$.

Proposition 3.3. Soit φ un glissement à gauche de Γ . Alors :

- (i) $\text{dom } \varphi$ et $\text{im } \varphi$ sont des réunions de β -fibres ;
- (ii) $\alpha \circ \varphi = \alpha$ (de sorte que chaque α -fibre est invariante par φ) ;
- (iii) $\beta \circ \varphi = \beta \circ \varphi \circ \beta$ (de sorte que φ envoie β -fibre sur β -fibre).
- (iv) pour chaque $u \in \Gamma_0 \cap \text{dom } \varphi$, $\varphi|_{\beta^{-1}(u)} = L_{\varphi(u)}$.

Preuve. Soit $x \in \text{dom } \varphi$. Si $y \in \beta^{-1}(\alpha(\varphi(x)))$, $\varphi(xy)$ est défini, et donc $y \in \alpha^{-1}(x)$, d'où (ii). De plus, si $x' \in \beta^{-1}(\beta(x))$, α s'écrit

$$x = x'y' \text{ avec } y' = x'^{-1}x$$

donc $\varphi(x')y'$ est défini, ce qui montre que $\text{dom } \varphi$ est β -saturé.

Prenant alors $u = \beta(x)$, on a pour tout $x' \in \beta^{-1}(u)$

$$\varphi(u)x' = \varphi(x')$$

ce qui montre (iv) et (iii), et que $\text{im } \varphi$ est β -saturé.

Corollaire. Si φ est un glissement à gauche de $\beta^{-1}(U)$ sur $\beta^{-1}(V)$, où U et V sont deux ouverts de Γ_0 , φ est β -projetable en un difféomorphisme $\varphi_0 : U \rightarrow V$.

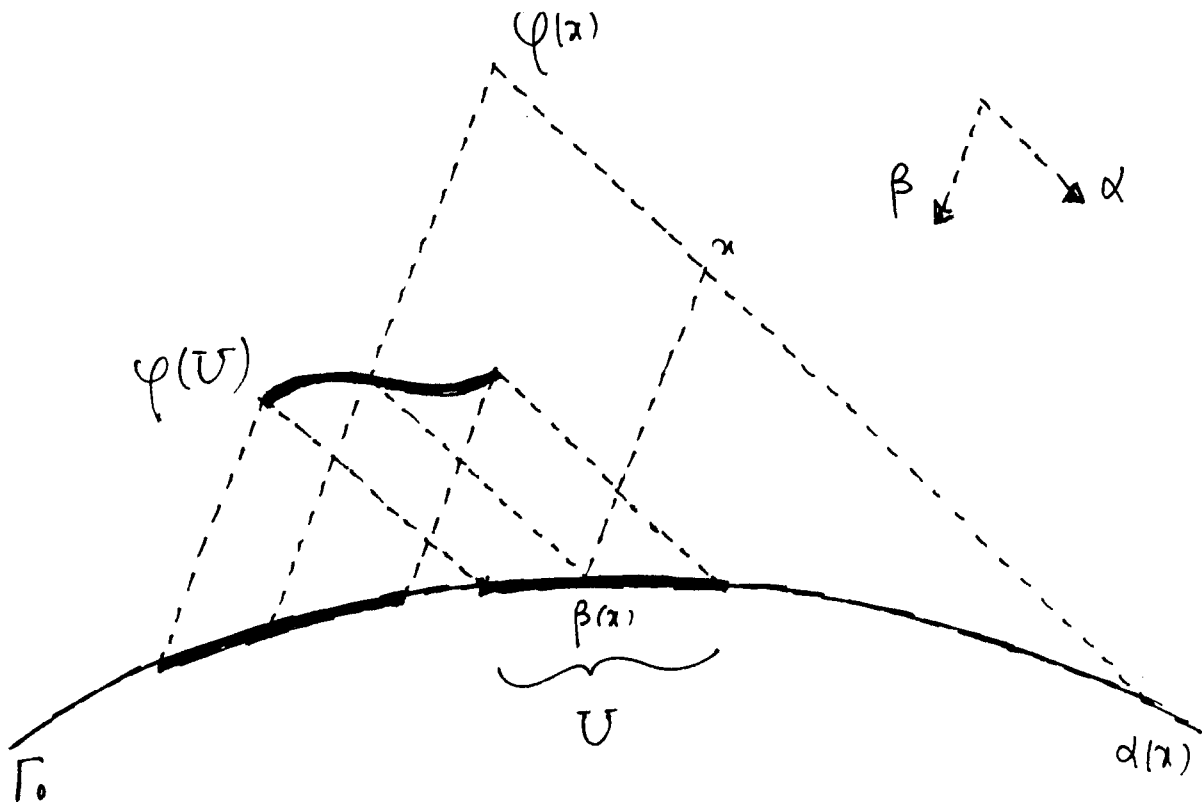
Exemple de glissement à gauche. On appelle **bissection** (locale) de Γ [3] toute sous-variété B de Γ telle que les applications $\alpha|_B$ et $\beta|_B$ soient des difféomorphismes sur leurs images. Si B est une bissection de Γ , on lui associe le glissement à gauche

$$L_B : \beta^{-1}(\alpha(B)) \rightarrow \beta^{-1}(\beta(B))$$

$$L_B(x) = (\alpha|_B)^{-1}(\beta(x)).x .$$

En fait, tout glissement à gauche est associé à une bissection. En effet, si φ est un glissement à gauche, $U = \beta(\text{dom } \varphi)$ est un ouvert de Γ_0 , et $B = \varphi(U)$ est une bissection, de sorte que $\varphi = L_B$.

La figure ci-dessous illustre les relations bissections-glissements. Les projections α et β sont matérialisées par des lignes pointillées.



Remarque : A la bissection B on peut également associer le glissement à droite R_B où

$$R_B : \alpha^{-1}(\beta(B)) \rightarrow \alpha^{-1}(\alpha(B))$$

$$R_B(y) = y.(\beta|_B)^{-1}(\alpha(y)).$$

Définition 3.5. Soit M une variété munie d'une submersion $\pi : M \rightarrow M_0$. Nous appellerons pseudogroupe le long de π de difféomorphismes locaux de M (en abrégé pseudogroupe le long de π sur M) tout ensemble \mathcal{P} de difféomorphismes locaux définis sur les ouverts π -saturés et respectant les fibres de π tel que

1° id_M est un élément de \mathcal{P} .

- 2° Si $\varphi_1 : \pi^{-1}(U_1) \rightarrow \pi^{-1}(V_1)$ et $\varphi_2 : \pi^{-1}(U_2) \rightarrow \pi^{-1}(V_2)$ sont deux éléments de \mathcal{P} tels que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, alors $\varphi_1 \circ \varphi_2 : \varphi_2^{-1}(\pi^{-1}(U_1 \cap U_2)) \rightarrow \varphi_1(\pi^{-1}(U_1 \cap U_2))$ est un élément de \mathcal{P} .
- 3° Si $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow \pi^{-1}(V)$ est un élément de \mathcal{P} , alors $\varphi^{-1} : \pi^{-1}(V) \rightarrow \pi^{-1}(U)$ est aussi un élément de \mathcal{P} .
- 4° Si $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow \pi^{-1}(V)$ est un élément de \mathcal{P} et si U_1 est un ouvert de M_0 tel que $U_1 \subset U$, alors $\varphi|_{\pi^{-1}(U_1)}$ est un élément de \mathcal{P} .
- 5° Si $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow \pi^{-1}(V)$ est un difféomorphisme local de M tel qu'il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de U ayant la propriété que $\varphi|_{\pi^{-1}(U_i)}$ soit un élément de \mathcal{P} , alors φ est un élément de \mathcal{P} .

Remarque de terminologie. Si π est l'identité de M , on dira plus simplement que \mathcal{P} est un pseudogroupe sur M . On prendra garde alors que si π n'est pas l'identité, un pseudogroupe le long de π n'est pas un pseudogroupe sur M à cause de la condition de π -saturation sur les domaines des éléments de \mathcal{P} .

Proposition 3.4. *L'ensemble des glissements à gauche de Γ est un pseudogroupe le long de β , qui respecte chaque α -fibre et agit transitivement sur chaque α -fibre. De plus, pour tout $x \in \Gamma$, la β -fibre $\beta^{-1}(\beta(x))$ est l'ensemble des points $x' \in \Gamma$ tels que tout glissement à gauche fixant x fixe également x' .*

Preuve. Les propriétés de pseudogroupe de la définition 2.4 sont trivialement vérifiées. Si de plus $x \in \Gamma$, soit $u = \alpha(x)$. Si B est une bissection passant par x , on a

$$L_B(u) = x$$

et donc le pseudogroupe le long de β des glissements à gauche agit transitivement sur $\alpha^{-1}(\alpha(x))$. Si maintenant $v = \beta(x)$, et si $x' \in \beta^{-1}(v)$, on aura

$$x' = x(x^{-1}x')$$

de sorte que pour tout glissement à gauche φ défini sur $\beta^{-1}(v)$

$$\varphi(x') = \varphi(x)x^{-1}x'$$

Par suite $\varphi(x) = x \Rightarrow \varphi(x') = x'$. Enfin si y est un point de Γ tel que $\beta(y) = w \neq v$, soit B' une bissection passant par v et ne passant pas par w . Alors d'après ce qui précède $L_{B'}(x) = x$ alors que $L_{B'}(y) \neq y$.

Proposition 3.5. *Un difféomorphisme local ψ de Γ défini sur un ouvert α -saturé est un glissement à droite si, et seulement si, il respecte chaque β -fibre et commute avec tous les glissements à gauche.*

Preuve. Si ψ est un glissement à droite, il respecte chaque β -fibre, et si $x \in \text{dom } \psi$ et φ est un glissement à gauche défini en $\psi(x)$

$$\varphi(\psi(x)) = \varphi(x\psi(\alpha(x))) = \varphi(\beta(x))x\psi(\alpha(x))$$

de plus $\beta(\psi(x)) = \beta(x)$ et $\alpha(\varphi(x)) = \alpha(x)$, de sorte que $\psi(\varphi(x))$ est aussi défini, et un calcul analogue donne

$$\psi(\varphi(x)) = \varphi(\beta(x))x\psi(\alpha(x)).$$

D'où la commutation.

Réciproquement, si $\psi : \alpha^{-1}(U) \rightarrow \Omega$ respecte chaque β -fibre, si et seulement si, $x \in \alpha^{-1}(U)$, $u = \alpha(x)$, et $y \in \beta^{-1}(u) \cap \alpha^{-1}(U)$, de sorte que xy , $\psi(xy)$, et $\psi(y)$ sont définis. Si B est une bissection passant par x , on a $x = L_B(u)$ et donc

$$xy = L_B(u)y = L_B(uy) = L_B(y)$$

de sorte que $\psi(xy) = \psi(L_B(y)) = L_B(\psi(y))$ si ψ commute avec les glissements à gauche. Mais $\beta(\psi(y)) = \beta(y) = u$, et $L_B(\psi(y)) = x\psi(y)$ donc ψ est un glissement à droite.

Corollaire. *Soit ψ un difféomorphisme local de Γ qui respecte chaque β -fibre, et commute avec les glissements à gauche [c'est-à-dire $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi$ en tout point x où les deux membres sont définis, pour tout glissement à gauche φ].*

Alors il existe un unique glissement à droite $\tilde{\psi}$ défini sur $\alpha^{-1}(\alpha(\Omega))$ tel que $\psi = \tilde{\psi}|_{\Omega}$, où Ω est la source de ψ .

En effet, si $x' \in \alpha^{-1}(\Omega)$, il existe $x \in \Omega$ et un glissement à gauche φ tel que $\varphi(x) = x'$. On pose alors $\tilde{\psi}(x') = \varphi(\psi(x))$, ce qui est cohérent d'après ce qui précède.

Définition 3.6. Si φ est un difféomorphisme local de Γ , on appelle **difféomorphisme conjugué de φ** le difféomorphisme local $\overline{\varphi} = \iota \circ \varphi^{-1} \circ \iota$.

Proposition 3.6. Si $\varphi : \beta^{-1}(U) \rightarrow \beta^{-1}(V)$ est un glissement à gauche, où U et V sont deux ouverts de Γ_0 , alors $\overline{\varphi} : \alpha^{-1}(V) \rightarrow \alpha^{-1}(U)$ est un glissement à droite. En particulier, pour toute bissection B , on a :

$$\overline{L}_B = R_B.$$

La vérification est immédiate.

On notera aussi que si φ et ψ sont deux difféomorphismes locaux, on a

$\overline{\varphi \circ \psi} = \overline{\psi} \circ \overline{\varphi}$ et $\overline{\overline{\varphi}} = \varphi$, de sorte que la conjugaison définit un anti-isomorphisme du pseudogroupe le long de β des glissements à gauche sur le pseudogroupe le long de α des glissements à droite.

Enfin, il faut remarquer que tout ce qui a été dit pour les glissements à gauche est vrai pour les glissements à droite, en permutant les deux fibrations α et β . En particulier la proposition 2.3 permet de faire l'observation suivante : si $u \in \Gamma_0$, l'orbite de Γ en u peut être regardée indifféremment comme :

- la projection par β de l'orbite en u des glissements à gauche ;
- la projection par α de l'orbite en u des glissements à droite ;
- la projection par α et β de l'orbite en u des glissements à gauche et à droite.

4. ALGEBROÏDE DE LIE ASSOCIÉ À UN GROUPOÏDE DE LIE.

Soit Γ un groupoïde de Lie. X est un **champ de vecteurs local** sur Γ si X est un champ de vecteurs sur un ouvert de Γ , appelé domaine de X et noté $\text{dom } X$.

Définition 4.1. On dit qu'un champ de vecteurs local X sur Γ est **invariant à gauche** [resp. **invariant à droite**] si pour tout glissement à gauche [resp. à droite] φ , on a $T\varphi(X) = X$ (c'est-à-dire si $T_x\varphi(X\alpha) = X_{\varphi(x)}$ pour tout $x \in \Gamma$ tel que les deux membres soient définis).

Comme le pseudogroupe le long de β des glissements à gauche agit transitivement sur les α -fibres, un champ invariant à gauche X se prolonge de manière unique en un

champ invariant à gauche \tilde{X} défini sur $\alpha^{-1}(\alpha(\text{dom } X))$. De même, un champ invariant à droite est toujours la restriction d'un unique champ invariant à droite défini sur le β -saturé de son domaine de définition.

Exemple. Soit $(\psi_t)_{|t|<\varepsilon}$ un groupe local à un paramètre dont les éléments sont des glissements à droite. Alors le champ de vecteurs local $X = \frac{d}{dt} \psi_t$ est un champ invariant à gauche défini sur un ouvert α -saturé. On notera qu'un tel champ est tangent aux β -fibres. La proposition suivante montre que les champs invariants à gauche sont tous de ce type.

Proposition 4.1. Soit X un champ de vecteurs invariant à gauche défini sur un ouvert α -saturé. Alors

- (i) X est tangent aux β -fibres ;
- (ii) les flots locaux de X sont définis sur des ouverts α -saturés et sont formés de glissements à droite.

Remarque. Il résultera de la proposition 4.5. ci-dessous que les β -fibres (comme les α -fibres) d'un groupoïde sont toujours séparées. On pourra alors parler du **flot** des champs invariants à gauche (ou à droite).

Preuve. Notons tout d'abord que si U est un ouvert de Γ_0 , tout champ de vecteurs le long de U tangent aux β -fibres se prolonge de manière unique en un champ invariant à gauche défini sur $\alpha^{-1}(U)$. En effet si $u \mapsto X_u$ est un tel champ, soient $x \in \alpha^{-1}(U)$ et $u = \alpha(x)$. Si B est une bissection passant par x , posons

$$X_x = T_u L_B(X_u)$$

c'est un vecteur en x qui ne dépend pas du choix de B , car si (y_t) est un chemin dans $\beta^{-1}(u)$ tel que $X_u = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} y_t$, on a

$$L_B(y_t) = xy_t$$

et donc

$$X_x = T_u L_x(X_u).$$

En d'autres termes, pour tout glissement à gauche ϕ tel que $\phi(u) = x$, on a $X_x = T_u \phi(X_u)$: un tel champ X est invariant à gauche.

Cette remarque étant faite, soit X un champ de vecteurs invariant à gauche. On peut supposer que $\text{dom } X$ est α -saturé. Si $u \in \Gamma_0 \cap \text{dom } X$, on peut décomposer X_u en

$$X_u = X'_u + X''_u$$

où $T\beta(X'_u) = 0$ et $X''_u \in T_u\Gamma_0$. D'après la remarque précédente, X' se prolonge en un champ invariant à gauche tangent aux β -fibres, et donc X'' est un champ invariant à gauche tangent à Γ_0 en tout point de Γ_0 . Comme la valeur en $x \in \text{dom } X$ de X'' doit être tangente à toute bissection passant par x , on a nécessairement $X'' = 0$. Par suite X est tangent aux β -fibres.

Si maintenant $x_0 \in \text{dom } X$, soit $(\psi_t)_{|t| < \varepsilon}$ le flot local de X en x_0 . Pour chaque t , ψ_t commute avec les glissements à gauche, et respecte chaque β -fibre. Quitte à restreindre l'ouvert Ω sur lequel les ψ_t sont définis, on peut le supposer α -connexe. Le corollaire de la proposition 2.3 affirme que chaque ψ_t se prolonge sur $\alpha^{-1}(\Omega)$ en un glissement à droite $\tilde{\psi}_t$. Mais les $(\tilde{\psi}_t)_{|t| < \varepsilon}$ forment un groupe local à 1 paramètre associé à X , ce qui signifie qu'on peut prendre $\alpha^{-1}(\Omega)$ comme domaine de définition du flot local de X en x_0 .

Corollaire. *Un champ de vecteurs local X sur Γ est invariant à gauche [resp. invariant à droite], si, et seulement si $T\beta(X) = 0$ et $TL_x(X) = X$ [resp. $T\alpha(X) = 0$ et $TR_x(X) = X$] pour tout $x \in \Gamma$ tel que les deux membres soient définis.*

C'est la définition des champs invariants à gauche et à droite initialement donnée par J. Pradines [14].

Proposition 4.2. *Soient $\underline{\mathfrak{L}}(\Gamma)$ [resp. $\underline{\mathfrak{R}}(\Gamma)$] le faisceau des germes des champs de vecteurs invariants à gauche [resp. à droite] sur Γ . Alors :*

(i) $\underline{\mathfrak{L}}(\Gamma)$ et $\underline{\mathfrak{R}}(\Gamma)$ sont des faisceaux d'algèbres de Lie, et si $X \in \underline{\mathfrak{L}}(\Gamma)$ et

$Y \in \underline{\mathfrak{R}}(\Gamma)$ sont deux germes en un même point, on a $[X, Y] = 0$.

(ii) Les orbites de [resp. $\underline{\mathfrak{L}}(\Gamma)$] sont les composantes connexes des α -fibres [resp.

$\underline{\mathfrak{R}}(\Gamma)$ des β -fibres].

(iii) Pour tout $x \in \Gamma$, la composante connexe de x dans la β -fibre $\beta^{-1}(\beta(x))$ [resp. dans la α -fibre $\alpha^{-1}(x)$] est l'ensemble des points $x' \in \Gamma$ tels que toute section locale de $\mathfrak{L}(\Gamma)$ [resp. $\mathfrak{R}(\Gamma)$] sur un ouvert α -saturé [resp. β -saturé] nulle en x s'annule en x' .

La démonstration procède, comme pour la proposition 3.3 dont c'est la version infinitésimale, en n'utilisant que les glissements éléments de flots locaux (ce qui ne permet pas de changer de composante connexe).

Soit $L(\Gamma)$ le fibré vectoriel de base Γ_0 formé des vecteurs aux points de Γ_0 tangents aux β -fibres en ces points. La démonstration de la proposition 3.1. montre que les sections locales de ce fibré peuvent être regardées comme les champs invariants à gauche sur Γ dont le domaine est α -saturé. Le faisceau des germes de sections de $L(\Gamma)$ est donc un faisceau d'algèbres de Lie. Si l'on remarque que, si X est une section locale de $L(\Gamma)$ et f une fonction définie sur le même ouvert de Γ_0 , le champ invariant à gauche associé à fX est $\tilde{f}X = (\alpha^*f)\tilde{X}$, où \tilde{X} est le champ invariant à gauche associé à X , on voit que la restriction à $L(\Gamma)$ de la projection $T\alpha$ est un morphisme de fibrés vectoriels de $L(\Gamma)$ dans $T\Gamma_0$.

Il en résulte que $L(\Gamma)$ muni du crochet des champs de vecteurs et du morphisme $T\alpha$ est un algébroïde de Lie au sens de J. Pradines [14] (cf. [6]). La projection canonique ρ de $T\Gamma|_{\Gamma_0}$ sur le fibré normal de Γ_0 déduite de la suite exacte :

$$0 \longrightarrow T\Gamma_0 \xrightarrow{j^*} T\Gamma|_{\Gamma_0} \xrightarrow{\rho} \nu\Gamma_0 \longrightarrow 0$$

induit un isomorphisme de fibrés vectoriels de $L\Gamma$ sur $\nu\Gamma_0$ qui permet de transporter sur $\nu\Gamma_0$ la structure d'algébroïde de Lie construite sur $L(\Gamma)$.

Définition 4.2. $\nu\Gamma_0$, muni de la structure d'algébroïde de Lie transportée de $L(\Gamma)$, est appelé l'algébroïde de Lie du groupoïde de Lie Γ .

On notera que si Γ_0 est réduit à un point, Γ est un groupe et la construction précédente est celle de l'algèbre de Lie de Γ .

De manière analogue, on peut définir le fibré vectoriel $R(\Gamma)$ sur Γ_0 des vecteurs le long de Γ_0 tangents aux α -fibres. La projection

$$T\beta : R(\Gamma) \rightarrow T\Gamma_0$$

en fait un algèbroïde de Lie, et l'on peut transporter sur $v\Gamma_0$ cette structure. On obtient ainsi la structure **d'algèbroïde de Lie opposée**. En effet la conjugaison des difféomorphismes locaux de Γ respecte les flots locaux, et donc induit une application de conjugaison sur les champs de vecteurs locaux, que nous noterons également $X \mapsto \bar{X}$.

On a par ailleurs :

$$\bar{X} = -T\alpha(X)$$

de sorte que si X et Y sont deux champs de vecteurs

$$[\bar{X}, \bar{Y}] = -[\overline{[X, Y]}]$$

En particulier, la conjugaison échangeant les glissements à gauche et à droite, la conjugaison des champs de vecteurs locaux induit un anti-isomorphisme de faisceaux d'algèbres de Lie de $\underline{\mathfrak{L}}(\Gamma)$ sur $\underline{\mathfrak{R}}(\Gamma)$. On peut d'ailleurs préciser cet anti-isomorphisme :

Proposition 4.3. *Soient X un champ invariant à gauche, et Y un champ invariant à droite. Alors en tout point $u \in \Gamma_0$ où ils sont définis*

$$\bar{X}_u = X_u - T\alpha(X_u)$$

$$\bar{Y}_u = Y_u - T\beta(Y_u)$$

Preuve. Soient $u \in \Gamma_0$, et φ un glissement à gauche défini en u . Alors

$$\beta((\varphi(u))^{-1}) = \alpha(\varphi(u)) \quad \text{et} \quad u(\varphi(u))^{-1} = (\varphi(u))^{-1}$$

et donc

$$\beta((\varphi(u)) = \varphi(u)(\varphi(u))^{-1} = \varphi((\varphi(u))^{-1}) = \varphi(\bar{\varphi}^{-1}(u)).$$

En remplaçant φ par φ^{-1} , ceci s'écrit

$$\bar{\varphi}(v) = \varphi(\beta(\varphi^{-1}(v)))$$

pour tout $v \in \text{im } \varphi$. D'où par dérivation la formule annoncée pour Y . Un calcul analogue donne l'autre formule.

Par conséquent, si X est un champ invariant à gauche ou à droite, le champ $X-\bar{X}$ est tangent à Γ_0 en tout point de Γ_0 où il est défini, et on a donc le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 L(\Gamma) & & \\
 \updownarrow & \searrow \rho & \\
 & & \nu\Gamma \\
 & \nearrow \rho & \\
 R(\Gamma) & &
 \end{array}$$

où la double flèche verticale est la conjugaison.

Remarques :

1. Soient $\Gamma \rightrightarrows \Gamma_0$ et $\Gamma' \rightrightarrows \Gamma'_0$ deux groupoïdes de Lie de même base, et $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ un morphisme de groupoïdes de Lie induisant un difféomorphisme d'un voisinage Ω de Γ_0 dans Γ sur un voisinage de Ω' de Γ'_0 dans Γ' . Alors l'application linéaire tangente Tf induit un isomorphisme de l'algèbroïde de Lie de Γ sur celui de Γ' . En particulier, l'algèbroïde de Lie d'un groupoïde de Lie Γ ne dépend que de la composante α -connexe Γ_α , et même que du groupoïde à fibres simplement connexes associé à Γ_α .
2. La construction de l'algèbroïde de Lie d'un groupoïde de Lie est l'exacte généralisation de la construction de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie : si Γ_0 est réduit à un seul point, $\nu\Gamma_0$ est l'algèbre de Lie du groupe de Lie Γ .
3. Différents auteurs (notamment P. Libermann dans sa thèse [10]) avaient considéré les faisceaux $\underline{\mathfrak{L}}(\Gamma)$ et $\underline{\mathfrak{R}}(\Gamma)$. Mais c'est à J. Pradines [14] que revient le mérite d'avoir forgé le concept d'algèbroïde de Lie et d'avoir associé à tout groupoïde de Lie son algèbroïde de Lie.

A tout algèbroïde de Lie est associé canoniquement un feuilletage de Stefan engendré par la distribution notée ici $T\alpha(T\Gamma_{\Gamma_0})$ [15], [6].

Proposition 4.4. [15]. *Le feuilletage de Stefan de Γ_0 défini par $\nu\Gamma_0$ admet comme feuilles les orbites de la composante α -connexe Γ_α de Γ .*

Preuve. Par définition le feuilletage de Stefan est défini sur Γ_0 par intégration du champ de plans singuliers image de

$$T\alpha : \nu\Gamma_0 \rightarrow T\Gamma_0$$

Les feuilles en sont donc les projections par α des orbites de $\mathfrak{R}(\Gamma)$, c'est-à-dire, d'après la proposition 3.2, des composantes connexes des β -fibres.

Proposition 4.5. [15]. *Soit $\Gamma \xrightarrow{\cong} \Gamma_0$ un groupoïde de Lie à fibres connexes, et soit $u \in \Gamma_0$.*

Alors le groupe d'isotropie Γ_u en u est un groupe de Lie, et la restriction de α à la β -fibre $\beta^{-1}(u)$ est une Γ_u -fibration principale de base l'orbite S_u de Γ en u .

Preuve. Comme S_u est une feuille d'un feuilletage de Stefan, c'est une sous-variété stricte [1] de Γ_0 . Par conséquent l'application $\alpha : \beta^{-1}(u) \rightarrow S_u$ est une submersion. Pour la même raison, $\Gamma_u \alpha^{-1}(u) \cap \beta^{-1}(u)$ est un groupe de Lie. Enfin l'action à droite de Γ_u sur $\beta^{-1}(u)$ induite par la multiplication de Γ

$$\beta^{-1}(u) \times \Gamma_u \rightarrow \beta^{-1}(u), \quad (x, a) \mapsto a^{-1}x$$

fait de Γ_u une fibration principale.

En permutant les rôles de α et β , on obtient évidemment le fait que $\beta : \alpha^{-1}(u) \rightarrow S_u$ est aussi une fibration principale.

Corollaire. *Si $\Gamma \xrightarrow{\cong} \Gamma_0$ est un groupoïde de Lie, les α -fibres et les β -fibres sont des sous-variétés séparées de Γ .*

En effet, si Γ est à fibres connexes, $\beta^{-1}(u)$ est pour tout $u \in \Gamma_0$, séparé puisqu'un groupe de Lie est toujours séparé, et que S_u l'est aussi comme sous-variété de Γ_0 .

Si Γ n'est pas à fibres connexes, le raisonnement vaut pour Γ_α , et donc la composante connexe de $\beta^{-1}(u)$ contenant u est séparée. Comme les autres s'en déduisent par l'action des glissements (ou même des translations) à droite, elles le sont également. En particulier on peut parler du **flot** d'un champ invariant à gauche (ou à droite) :

Proposition 4.6. *Si X est un champ invariant à gauche, la trajectoire de tout*

$x \in \text{dom } X$ par X est une courbe paramétrée par le même intervalle de temps que celle de $\alpha(x)$ par $T\alpha(X)$.

En particulier si X est un champ global tel que $T\alpha(X)$ soit à support compact, X est complet.

Preuve. Notons tout d'abord que l'orbite de X en x reste dans la β -fibre de x , et donc dans une variété séparée. Par conséquent c'est bien une courbe paramétrée, et l'on peut parler des trajectoires de X . De plus, si $u = \alpha(x)$, la restriction de X à $\beta^{-1}(u)$ est un champ de vecteurs invariant à droite sur le fibré principal $\alpha : \beta^{-1}(u) \rightarrow S_u$. Ceci donne immédiatement le résultat. Enfin, si X est global, il est complet si et seulement si $T\alpha(X)$ l'est, d'où le dernier point.

Proposition 4.7. Soit $\Gamma \rightrightarrows \Gamma_0$ un groupoïde de Lie à fibres connexes, et soit S une orbite de Γ dans Γ_0 . Alors $\Gamma_S = \alpha^{-1}(S) = \beta^{-1}(S)$ est un sous-groupoïde de Lie de Γ . Plus précisément, Γ_S est le groupoïde de jauge du fibré principal $\alpha : \beta^{-1}(u) \rightarrow S$, pour tout $u \in S$.

Preuve. Soit $u \in S$. Par définition, le groupoïde de jauge de $\alpha : \beta^{-1}(u) \rightarrow S$ est le quotient de $\beta^{-1}(u) \times \beta^{-1}(u)$ par l'action diagonale de Γ_u . Or l'application

$$\begin{aligned} \beta^{-1}(u) \times \beta^{-1}(u) &\longrightarrow \Gamma_S \\ (z_1, z_2) &\longmapsto z_1^{-1}z_2 \end{aligned}$$

est un morphisme du groupoïde grossier $\beta^{-1}(u) \times \beta^{-1}(u)$ sur Γ_S , qui passe au quotient par l'action diagonale de Γ_u sur $\beta^{-1}(u) \times \beta^{-1}(u)$, et qui induit un isomorphisme de $\beta^{-1}(u) \times \beta^{-1}(u) / \Gamma_u$ sur Γ_S . D'où le résultat.

En particulier, un groupoïde de Lie transitif à fibres connexes apparaît toujours comme le groupoïde de jauge d'un fibré principal.

5. FORMES INVARIANTES.

Définition 5.1. Une p -forme (locale) θ sur un groupoïde de Lie Γ est dite *invariante à gauche* [resp. *invariante à droite*] si elle est invariante par tout glissement à gauche [resp. à droite] de Γ .

On notera que si θ est une p -forme locale invariante à gauche [resp. à droite], on peut toujours la prolonger de manière unique en une p -forme invariante à gauche [resp. à droite] définie sur le α -saturé [resp. le β -saturé] de son domaine de définition.

Proposition 5.1. *Les fonctions invariantes à gauche [resp. à droite] sur Γ sont les pré-images par α [resp. β] des fonctions définies sur Γ_0 .*

En effet les glissements à gauche sont transitifs sur les α -fibres.

Soit maintenant θ une 1-forme invariante à gauche définie sur un ouvert Ω que l'on peut supposer α -saturé. Si $x \in \Omega$, soit B une bissection passant par x . Alors, si $X_x \in T_x B$

$$\theta_x X_x = \theta_x (T(L_B \circ \alpha)(X_x)) = \theta_{\alpha(x)} (T\alpha(X_x)) \quad (1)$$

Cette remarque a une curieuse conséquence **qui distingue le cas des groupoïdes de celui des groupes** : si $\dim \Gamma_0 = 0$, Γ_0 est réduit à un point, Γ est un groupe de Lie et il n'existe pas de vecteur tangent non nul à une bissection. **La condition (1) est donc vide.** Les glissements à gauche étant les translations à gauche, l'espace vectoriel des 1-formes invariantes à gauche est le dual de l'algèbre de Lie de Γ . Par contre, si $\dim \Gamma_0 > 0$, soit X_x un vecteur non nul tangent à une bissection. Si $Y_x \in T_x \alpha^{-1}(\alpha(x))$, $X_x + Y_x$ est transverse à $T_x \alpha^{-1}(\alpha(x))$, et, si Y_x est suffisamment proche de O_x , également à $T_x \beta^{-1}(\beta(x))$. Par suite (pour Y_x suffisamment proche de O_x), $X_x + Y_x$ est encore tangent à une bissection : la remarque précédente montre qu'alors $\theta_x Y_x = 0$. On en déduit que dans ce cas les 1-formes invariantes à gauche sont nulles sur l'espace tangent aux α -fibres.

Il en résulte que si θ est une 1-forme invariante à gauche, la 1-forme $\theta - \alpha^* j^* \theta$ est aussi invariante à gauche, et nulle en tout point de Γ_0 , donc identiquement nulle.

Proposition 5.2. *Soit $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$ un groupoïde de Lie.*

Si Γ_0 est réduit à un point, Γ est un groupe de Lie et les 1-formes invariantes à gauche sur Γ sont les formes invariantes à gauche sur ce groupe de Lie.

Si $\dim \Gamma_0 \geq 1$, les 1-formes invariantes à gauche définies sur un ouvert α -saturé sont les préimages par α des 1-formes locales sur la variété Γ_0 .

On a évidemment un résultat analogue pour les formes invariantes à droite, en permutant les rôles de α et β .

Remarques :

1. Soit U un ouvert de Γ_0 . Si η est une 1-forme définie sur U et ψ un glissement à droite défini sur $\alpha^{-1}(U)$, la relation $\alpha \circ \psi = \alpha \circ \psi \circ j \circ \alpha$ montre que

$$\psi^* \alpha^* \eta = \alpha^* (j^* \psi^* \alpha^* \eta)$$

On a donc une action naturelle des glissements à droite sur les 1-formes invariantes à gauche, et de manière analogue une action des glissements à gauche sur les 1-formes invariantes à droite.

2. Soit Γ un groupoïde qui n'est pas un groupe.

L'application naturelle d'évaluation d'une forme invariante à gauche sur un champ invariant à gauche induit l'application de $T^*\Gamma_0 \times \nu\Gamma_0$ dans $\mathbb{R} : (\omega, X) \rightarrow \alpha^* \omega(X)$ qui ne met $T^*\Gamma_0$ et $\nu\Gamma_0$ en dualité que si α est surjective. Ainsi formes invariantes à gauche et champs invariants à gauche sont en dualité si et seulement si Γ est transitif.

Les groupoïdes transitifs de ce point de vue sont très proches des groupes (qui en sont un cas particulier !). En général $T^*\Gamma_0$ et $\nu\Gamma_0$ ne sont même pas de même rang. Il n'en sera par contre pas ainsi si Γ est un groupoïde symplectique.

6. QUELQUES EXEMPLES DE GROUPOIDES DE LIE.

Exemple 6.1 : Groupoïde grossier. Si M est une variété différentielle, la variété produit $M \times M$ munie de sa structure de groupoïde grossier est un groupoïde de Lie. Les glissements à gauche de $M \times M$ sont les applications $\varphi : U \times M \rightarrow V \times M$ où U et V sont des ouverts de M , de la forme

$$\varphi(x, y) = (\varphi_0(x), y)$$

où φ_0 est un difféomorphisme de U sur V . On a donc une bijection canonique entre le pseudogroupe le long de β des glissements à gauche de $M \times M$ et le pseudogroupe des difféomorphismes locaux de M . Les champs invariants à droite sont simplement les champs de vecteurs β -verticaux (rappelons que β est ici la première projection $M \times M \rightarrow M$).

Exemple 6.2 : a) Groupoïdes transformationnels [15].

Soit Φ une action à gauche d'un groupe de Lie G sur une variété M . Notons simplement $\Phi_a(x) = ax$ si $a \in G$ et $x \in M$. On a sur la variété $G \times M$ deux structures naturelles de G -fibré principal de base M :

- la première, notée à gauche, est définie par l'action à gauche de G

$$L_b(a, x) = (ba, x) \quad a, b \in G, x \in M$$

et correspond à la projection $\alpha = \text{pr}_2 : G \times M \rightarrow M$.

- la seconde, notée à droite, est associée à Φ par

$$R_b(a, x) = (ab, b^{-1}x) \quad a, b \in G, x \in M$$

et correspond à la projection $\beta : G \times M \rightarrow M$, $\beta(a, x) = ax$.

On a alors sur $\Gamma = G \times M$ une structure de groupoïde de Lie, dite associée à Γ , définie en posant $\Gamma_0 = \{e\} \times M = M$, et en prenant pour projections les applications α et β , et en définissant

$$\begin{aligned} \mu((a', x'), (a, x)) &= (aa', x) \quad \text{si } x' = ax \\ \iota(a, x) &= (a^{-1}, ax). \end{aligned}$$

Dans cette structure, les glissements à gauche sont les morphismes de G -fibrés pour la structure à droite respectant chaque α -fibre, et les champs invariants à gauche sont les champs de vecteurs β -verticaux invariants pour l'action à gauche de G . On notera que dans cet exemple, les glissements à gauche sont en correspondance bijective avec les applications différentiables locales de M dans G .

Notons aussi que le groupoïde Γ est principal si, et seulement si, l'action Φ est libre.

A titre d'exemple, on peut appliquer la construction précédente à l'action coadjointe notée ad^* d'un groupe de Lie G sur le dual \mathfrak{G}^* de son algèbre de Lie. On munit alors $G \times \mathfrak{G}^*$ d'une structure de groupoïde de Lie de base \mathfrak{G}^* . Identifiant T^*G à $G \times \mathfrak{G}^*$ à l'aide des translations à gauche, on munit ainsi T^*G d'une structure, la structure canonique de groupoïde de Lie de T^*G [3].

b) L'exemple 6-2a se généralise de la manière suivante [15] :

Soit $\Gamma \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} \Gamma_0$ un groupoïde de Lie, et soit M une variété munie d'une

application $J : M \rightarrow \Gamma_0$. On peut alors définir **une action à gauche du groupoïde de Lie Γ sur la variété M (fibrée par J)** comme une application différentiable

$$\Phi : \Gamma \times M \rightarrow M \quad (x, \xi) \mapsto \Phi_x(\xi)$$

(α, J)

où $\Gamma \times M$ est le produit fibré des deux applications α et J (qui est une sous-variété de (α, J))

$\Gamma \times M$, car (α, J) est transverse à la diagonale de $\Gamma_0 \times \Gamma_0$).

$$\Gamma \times M \underset{(\alpha, J)}{=} \{(x, \xi) \in \Gamma \times M \mid \alpha(x) = J(\xi)\},$$

vérifiant les propriétés

$$1^\circ \quad (\forall x \in \Gamma) \quad J(\Phi_x(\xi)) = \beta(\xi)$$

$$2^\circ \quad (\forall (x', x) \in \Gamma_2) (\forall \xi \in J^{-1}(\alpha(x))) \quad \Phi_{x'}(\Phi_x(\xi)) = \Phi_{x'x}(\xi)$$

(ce qui a un sens à cause de 1°).

Il résulte de ces propriétés que si $u \in \Gamma_0$, on a $\Phi_u = \text{id}_{J^{-1}(u)}$.

On peut associer, de la même manière que précédemment, à l'action Φ un groupoïde

de Lie $H \xrightarrow[\beta_H]{\alpha_H} H_0$ de la manière suivante :

- * $H = \Gamma \times M$
(α, J)
- * $H_0 = M$ et $j : M \rightarrow M$ est définie par $j(\xi) = (J(\xi), \xi)$
- * $\alpha_H(x, \xi) = \xi$
- * $\beta_H(x, \xi) = \Phi_x(\xi)$
- * $\mu_H((x', \xi'), (x, \xi)) = (x'x, \xi)$ si $\xi' = \Phi_x(\xi)$
- * $\iota_H(x, \xi) = (x^{-1}, \Phi_x(\xi))$.

On vérifie aisément que l'injection de H dans le groupoïde produit de Γ par le groupoïde grossier $M \times M$ fait de H un sous-groupoïde de $\Gamma \times M \times M$. En fait ceci caractérise les actions de groupoïde : $\phi : \Gamma \times M \rightarrow M$ est une action de groupoïde si et

(α, J)

seulement si H est un sous-groupoïde de $\Gamma \times (M \times M)$.

Les glissements à gauche définis sur H sont ici les applications de $\Gamma \times M$ dans $\Gamma \times M$ de la forme $\varphi(x, \xi) = (h(x, \xi), \xi)$ où $h : H \rightarrow \Gamma$ vérifie :

$$(\forall (x', x) \in \Gamma_2)(\forall \xi \in J^{-1}(\alpha(x))) \quad h(x', \xi')(x, \xi) = h(x', \xi')x$$

où $\xi' = \Phi_x(\xi)$. On peut définir une action à gauche de Γ sur H fibrée par $\text{Jo}B_H$ en posant

$$L_x(x, \xi) = (x'x, \xi) \quad \text{si} \quad \alpha(x') = \beta(x) = J(\beta_H(x, \xi))$$

et une action à droite de Γ sur H fibrée par $\text{Jo}\alpha_H$ (c'est-à-dire une application différentiable $\Gamma \times M \rightarrow H$ vérifiant les propriétés analogues à (1°) et (2°)) en posant

$$(\beta, \text{Jo}\alpha_x)$$

$$R_x(x, \xi) = (xx', \Phi_{x^{-1}}(\xi)) \quad \text{si} \quad \alpha(x) = \beta(x') = J(\xi).$$

Les glissements à gauche de H s'interprètent alors comme dans l'exemple 6.2 : ce sont les transformations locales de H commutant à l'action à droite de Γ et respectant chaque α_H -fibre. Ils sont en correspondance bijective avec les applications différentiables locales de M dans Γ commutant aux submersions J et α .

Exemple 6.4. Soit M une variété connexe. Désignons par $\Pi(M)$ l'ensemble des classes d'homotopie à extrémités fixes des chemins continus (supposés paramétrés par $[0,1]$) de M . Si γ est un tel chemin, on notera $[\gamma]$ sa classe. On a des applications origine $\alpha : \Pi(M) \rightarrow M$ et extrémité $\beta : \Pi(M) \rightarrow M$ où $\alpha[\gamma] = \gamma(0)$ et $\beta[\gamma] = \gamma(1)$, et l'application $(\alpha, \beta) : \Pi(M) \rightarrow M \times M$ est un revêtement si $\Pi(M)$ est muni de la topologie quotient de la topologie compacte ouverte sur l'espace des chemins de M . Par suite, $\Pi(M)$ a une structure naturelle de variété. Si on définit pour $\Gamma = \Pi(M)$ l'injection $j : M = \Gamma_0 \rightarrow G$ par $j(x) = [0_x]$ (classe du chemin constant), la multiplication μ comme la composition des classes de chemins, et ι l'inversion des classes de chemins, on voit que $\Pi(M)$ est un groupoïde de Lie. C'est le **groupoïde fondamental de la variété M** .

Pour voir ce que sont ici les glissements à gauche, il est plus simple de passer par l'intermédiaire des bisections de $\Pi(M)$. Une bisection B telle que $\alpha(B) = U$ et $\beta(B) = V$ est la donnée d'un difféomorphisme h_B de l'ouvert U sur l'ouvert V de M , et, pour chaque $x \in U$, d'une classe d'homotopie de chemin $\tau(x)$ d'origine x et d'extrémité $h_B(x)$, telle que τ soit une section différentiable de α au-dessus de U . Le glissement à gauche L_B est alors défini par

$$L_B[\gamma] = \tau(\beta[\gamma]) \cdot [\gamma]$$

pour tout $[\gamma] \in \beta^{-1}(U)$.

Les champs de vecteurs invariants à gauche sur $\Pi(M)$ apparaissent ainsi comme les champs α -projetables et β -verticaux.

Exemple 6.5. Soit (M, \mathcal{F}) une variété séparée de dimension n feuilletée en codimension q . On procède comme ci-dessus en considérant les chemins de M contenus dans une même feuille, la relation d'équivalence étant

$$\gamma \sim \gamma' \Leftrightarrow \gamma \text{ et } \gamma' \text{ ont même origine, même extrémité et } \gamma \cdot \gamma'^{-1} \text{ est sans holonomie.}$$

Le quotient $\text{Hol}(M, \mathcal{F})$ est une variété (en général non séparée) de dimension $2n - q$. En plongeant comme précédemment M dans $\text{Hol}(M, \mathcal{F})$ et en prenant comme projections α et β les applications origine et extrémité, la multiplication et l'inversion étant données par la composition et l'inversion des chemins, on obtient sur $\text{Hol}(M, \mathcal{F})$ une structure de groupoïde de Lie : c'est le **groupoïde d'holonomie de (M, \mathcal{F})** [13]. En particulier le feuilletage image réciproque par α et β est à feuilles séparées.

Une variante consiste à prendre comme relation d'équivalence la relation d'homotopie à extrémités fixes pour les chemins tracés dans les feuilles. On obtient ainsi le **groupoïde d'homotopie $\Pi(M, \mathcal{F})$** (appelé groupoïde de monodromie par J. Pradines [13]). C'est d'ailleurs le groupoïde à fibres simplement connexes associé à $\text{Hol}(M, \mathcal{F})$.

Les glissements à gauche s'interprètent comme dans l'exemple 6.4 par l'intermédiaire des bissections : Une bissection B où $\alpha(B) = U$ et $\beta(B) = V$ est un difféomorphisme $h_B : U \rightarrow V$ respectant chaque feuille, muni, pour chaque $x \in U$ d'une classe d'équivalence $\tau_B(x)$ d'origine x et extrémité $h_B(x)$.

7. UNE AUTRE DEFINITION DES GROUPOIDES DE LIE.

Rappelons tout d'abord quelques définitions classiques concernant les pseudogroupes de difféomorphismes locaux [1].

Définition 7.1. Soit M une variété (non nécessairement séparée).

(i) Si \mathcal{P} est un pseudogroupe sur M et $x \in M$, on note

$$\mathcal{P}_x = \{\varphi \in \mathcal{P} \mid x \in \text{dom } \varphi \text{ et } \varphi(x) = x\}$$

c'est l'isotropie de \mathcal{P} en x .

(ii) Un **\mathcal{P} -champ de vecteurs** (local) sur M est un champ de vecteurs (local) de M dont les flots locaux sont formés d'éléments de \mathcal{P} . L'ensemble des germes de \mathcal{P} -champs de vecteurs constitue un faisceau d'algèbres de Lie sur M , dit faisceau d'algèbres de Lie associé à \mathcal{P} . Nous le noterons $\underline{\mathfrak{L}}(\mathcal{P})$.

(iii) Si $\underline{\mathfrak{L}}$ est un faisceau d'algèbre de Lie de germes de champs de vecteurs de M , on appelle **pseudogroupe engendré par $\underline{\mathfrak{L}}$** le pseudogroupe engendré par $\underline{\mathfrak{L}}$ les flots locaux des sections (locales) de $\underline{\mathfrak{L}}$. Nous noterons $\mathcal{P}(\underline{\mathfrak{L}})$ ce pseudogroupe.

(iv) Si $\underline{\mathfrak{L}}$ est un faisceau d'algèbre de Lie (de germes de champs de vecteurs) sur M , et si W est une sous-variété de M , on dit que $\underline{\mathfrak{L}}$ est **transitif sur W** si tout vecteur tangent à W est la valeur d'un élément de $\underline{\mathfrak{L}}$. On dit qu'un pseudogroupe \mathcal{P} sur M est **infinitésimalement transitif** sur W si le faisceau $\underline{\mathfrak{L}}(\mathcal{P})$ est transitif sur W .

Remarques :

1. Si un pseudogroupe \mathcal{P} est infinitésimalement transitif sur une sous-variété connexe W , il est transitif sur W : étant donnés $(x,y) \in W \times W$, il existe $\varphi \in \mathcal{P}$ tel que $\varphi(x) = y$ (voir à ce sujet le lemme 7.1).

2. Pour tout pseudogroupe \mathcal{P} sur M , on a $\mathcal{P}(\underline{\mathcal{L}}(\mathcal{P})) \subset \mathcal{P}$. Il en résulte que toute orbite de $\underline{\mathcal{L}}(\mathcal{P})$ est contenue dans une orbite de \mathcal{P} .

Si M est une variété munie d'une submersion $\pi : M \rightarrow M_0$, et si \mathcal{P} est un pseudogroupe le long de π sur M , on étendra à \mathcal{P} les définitions précédentes.

Par exemple, si $\Gamma \xrightarrow{\quad} \Gamma_0$ est un groupoïde de Lie, et si l'on prend pour \mathcal{P} le pseudogroupe le long de α des glissements à droite, un \mathcal{P} -champ de vecteurs est un champ invariant à gauche dont le domaine est α -saturé. Le faisceau d'algèbre de Lie associé à \mathcal{P} est donc ici le faisceau $\underline{\mathcal{L}}(\Gamma)$ des germes de champs invariants à gauche. Un

pseudogroupe le long de α n'étant pas un pseudogroupe si α est différent de l'identité, (cf. Remarque de terminologie, Définition 3.5), $\mathcal{P}(\underline{\mathcal{L}}(\Gamma))$ n'est pas contenu dans \mathcal{P} si

$\alpha \neq \text{Id}$. En tenant compte des problèmes de saturation des domaines on montre le résultat suivant :

Proposition 7.1. *Tout élément $\varphi \in \mathcal{P}(\underline{\mathcal{L}}(\Gamma))$ à domaine α -connexe est la restriction d'un unique glissement à droite défini sur le α -saturé de son domaine de définition.*

Définition 7.2. *Soit M une variété munie d'une submersion $\pi : M \rightarrow M_0$. Si \mathcal{P} est un pseudogroupe le long de π , on dit que \mathcal{P} sépare les fibres de π si, étant donné $x \in M$ et $x' \in M$*

$$\pi(x) = \pi(x') \Leftrightarrow (\forall \varphi \in \mathcal{P}_x | x' \in \text{dom } \varphi) \varphi(x') = x'.$$

Proposition 7.2. *Soit M une variété munie d'une submersion $\pi : M \rightarrow M_0$ et \mathcal{P} un pseudogroupe le long de π . Alors :*

1. *Si deux éléments de \mathcal{P} ont même valeur en $x \in M$, ils ont même valeur en tout point de la π -fibre en x .*
2. *Les éléments de \mathcal{P} respectent les fibres (c'est-à-dire envoient fibre sur fibre).*

La vérification est immédiate.

Si M_0 est une sous-variété de M , notons $j : M_0 \rightarrow M$ l'injection. Nous appellerons pour abrégé projection de M sur M_0 toute submersion surjective $\pi : M \rightarrow M_0$ telle que $\pi \circ j = \text{id}_{M_0}$.

Théorème 7.1. *Soit Γ une variété (non nécessairement séparée). On se donne :*

1. *une sous-variété séparée connexe Γ_0 de Γ*
2. *deux projections α et β de Γ sur Γ_0*
3. *un pseudogroupe \mathcal{P} le long de α sur Γ tel que*
 - α) *\mathcal{P} sépare les α -fibres*
 - β) *les β -fibres sont les orbites de \mathcal{P} , et \mathcal{P} agit de façon infinitésimalement transitive sur chaque β -fibre.*

Alors il existe sur Γ une unique structure de groupoïde de base Γ_0 , admettant α et β comme projections source et but, et telle que \mathcal{P} soit formé de glissements à droite. De plus, muni de cette structure, Γ est un groupoïde de Lie, et un champ de vecteurs à domaine β -saturé X sur Γ est invariant à droite si, et seulement si, il est invariant par \mathcal{P} .

Le pseudogroupe \mathcal{P} sera appelé un pseudogroupe de définition de Γ .

Démonstration. On a nécessairement :

$$\Gamma_2 = \{(x,y) \in \Gamma \times \Gamma \mid \alpha(x) = \beta(y)\}.$$

Il faut définir la multiplication μ et l'inversion ι . Or si $(x,y) \in \Gamma_2$, notons

$u = \alpha(x) = \beta(y)$. D'après (β) il existe $\varphi \in \mathcal{P}$ tel que $\varphi(u) = y$. φ est donc défini en x .

Posons

$$\mu(x,y) = xy = \varphi(x)$$

Ceci est cohérent, car si $\varphi' \in \mathcal{P}$ vérifie aussi $\varphi'(u) = y$, on aura $\varphi'(x) = \varphi(x)$ d'après la proposition 7.2.

De même, on aura $\varphi^{-1}(y) = u$, et on posera

$$\iota(y) = y^{-1} = \varphi^{-1}(\alpha(y))$$

qui ne dépend pas du $\varphi \in \mathcal{P}$ utilisé pourvu que $\varphi(u) = y$.

Les axiomes des groupoïdes se vérifient sans difficulté. Les éléments de \mathcal{P} sont des glissements à droite, car si $xy = \varphi(x)$ est obtenu comme plus haut et si $\psi \in \mathcal{P}$ est défini en xy , on a

$$\psi(xy) = (\psi \circ \varphi)(x)$$

mais alors $\psi \circ \varphi \in \mathcal{P}$ est défini en u et $(\psi \circ \varphi)(u) = \psi(y)$. Par suite

$$x\psi(y) = (\psi \circ \varphi)(x) = \psi(xy).$$

L'unicité de la structure de groupoïde vient du fait que si φ est un glissement à droite tel que $\varphi(\beta(y)) = y$, les relations $xy = \varphi(x)$ et $y^{-1} = \varphi^{-1}(\alpha(y))$ seront nécessairement vérifiées.

Pour montrer que Γ est un groupoïde de Lie, on utilise le lemme suivant :

Lemme 7.1. *Soient M_0 une sous-variété de codimension p d'une variété M , β une projection de M sur M_0 , et \mathcal{P}_1 un pseudogroupe (éventuellement le long d'une fibration) sur M respectant chaque β -fibre et agissant de façon infinitésimalement transitive sur chaque β -fibre. Alors, étant donnés $u_0 \in M_0$ et $\varphi_0 \in \mathcal{P}_1$, il existe un voisinage ouvert Ω de $\varphi(u_0)$ dans M , p flots locaux $(\varphi_{t^1}^1), \dots, (\varphi_{t^p}^p)$ d'éléments de \mathcal{P}_1 définis sur un voisinage de u_0 dans M , et une application différentiable $t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ tels que si $t(y) = (t^1(y), \dots, t^p(y))$ pour tout $y \in \Omega$, on ait*

$$y = (\varphi_0 \circ \varphi_{t^1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{t^p}^p)(\beta(y))$$

pour tout $y \in \Omega$, et tels que l'application $(t, \beta) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p \times M_0$ soit un difféomorphisme de Ω sur un voisinage ouvert de $(0, u_0)$ dans $\mathbb{R}^p \times M_0$.

Démonstration du lemme. Par hypothèse, il existe au voisinage de u_0 un système de p \mathcal{P}_1 -champs de vecteurs (X_1, \dots, X_p) linéairement indépendants en tout point. Soient $(\varphi_{t^1}^1), \dots, (\varphi_{t^p}^p)$ les flots locaux en u_0 de ces champs : il existe un voisinage V_p de 0 dans \mathbb{R}^p , un voisinage U de u_0 dans M_0 , et un voisinage Ω de $\varphi(u_0)$ dans M , tels que l'application

$$\Phi : V_p \times U \rightarrow \Omega, \quad \Phi(t^1, \dots, t^p, u) = (\varphi_0 \circ \varphi_{t^1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{t^p}^p)(u)$$

soit un difféomorphisme. Comme les éléments de \mathcal{P}_1 respectent chaque β -fibre, le difféomorphisme réciproque est de la forme

$$\Phi^{-1}(y) = (t^1(y), \dots, t^p(y), \beta(y))$$

ce qui définit une application différentiable $t = (t^1, \dots, t^p) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ répondant à la question.

Fin de la démonstration du théorème 7.1. On utilise le lemme 7.1 en prenant $\Gamma=M$ et $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$. Soit alors $(x_0, y_0) \in \Gamma_2$; posons $u_0 = \beta(y_0)$, et soit $\varphi_0 \in \mathcal{P}$ tel que $\varphi_0(u_0) = y_0$. D'après le lemme, on a pour tout y appartenant à un voisinage Ω de y_0

$$y = (\varphi_0 \circ \varphi_{t^1(y)}^1 \circ \dots \circ \varphi_{t^p(y)}^p)(\beta(y)).$$

Les flots locaux $(\varphi_{t^1}^1), \dots, (\varphi_{t^p}^p)$ sont définis sur un ouvert α -saturé et donc, si $(x, y) \in (\Omega \times \alpha^{-1}(U)) \cap \Gamma_2$

$$xy = (\varphi_0 \circ \varphi_{t^1(y)}^1 \circ \dots \circ \varphi_{t^p(y)}^p)(x)$$

d'où la différentiabilité de μ , et si $y \in \Omega$

$$y^{-1} = (\varphi_{-t^p(y)}^p \circ \dots \circ \varphi_{-t^1(y)}^1 \circ \varphi_0^{-1})(\alpha(y))$$

d'où celle de ι .

Pour obtenir le dernier point, on utilise le :

Lemme 7.2. Soit $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$ un groupoïde de Lie, et soit \mathcal{P} un pseudogroupe le

long de α transitif sur les β -fibres et séparant les α -fibres. Alors tout champ de vecteurs à domaine β -saturé invariant par tous les éléments de \mathcal{P} est invariant à droite.

Preuve. Si X est défini sur $\beta^{-1}(U)$ et invariant par \mathcal{P} , soit $y \in \beta^{-1}(U)$ et notons (ψ_t) le flot local de X en y . Pour $\varphi \in \mathcal{P}$, on a $\varphi \circ \psi_t = \psi_t \circ \varphi$ dès que les deux membres sont définis. En particulier, t étant fixé, $\varphi(\psi_t(y)) = \psi_t(y)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{P}$ défini en $\psi_t(y)$. Ceci entraîne que la courbe $(\psi_t(y))$ est tracée dans la α -fibre de y .

Mais alors, si $x \in \Gamma$ est tel que $\psi_t(xy)$ soit défini, on a en choisissant un $\varphi \in \mathcal{P}$ tel que $y = \varphi(\beta(y))$

$$\psi_t(xy) = \psi_t(\varphi(x)) = \varphi(\psi_t(x)) = \varphi(\psi_t(x)\beta(y)) = \psi_t(x)y$$

Donc (ψ_t) est formé de restrictions de glissements à gauche, d'où le résultat.

Si $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$ est un groupoïde de Lie, le pseudogroupe le long de α des

glissements à droite de Γ est un pseudogroupe de définition de Γ , et il est maximal : cela résulte directement de la proposition 3.3. Il sera intéressant dans la suite d'utiliser des pseudogroupes de définition plus restreints, d'où l'utilité de cette notion.

Si l'on se borne aux groupoïdes à fibres connexes, on pourra travailler avec des transformations infinitésimales : Rappelons au préalable que si $\underline{\mathfrak{L}}$ est un faisceau

d'algèbres de Lie (de champs de vecteurs) sur une variété M , le commutant $\underline{\mathfrak{L}}^c$ de $\underline{\mathfrak{L}}$

est l'ensemble de tous les germes de champs de vecteurs commutant avec tous les éléments de $\underline{\mathfrak{L}}$. $\underline{\mathfrak{L}}^c$ est aussi un faisceau d'algèbres de Lie sur M .

Définition 7.3. Soit M une variété munie d'une submersion $\pi : M \rightarrow M_0$. Si $\underline{\mathfrak{L}}$ est un faisceau d'algèbres de Lie sur M on dit que $\underline{\mathfrak{L}}$ sépare les fibres de π si :

- (i) le commutant $\underline{\mathfrak{L}}^c$ de $\underline{\mathfrak{L}}$ est transitif sur les fibres de π .
- (ii) pour tout couple (x, x') de points de M tels que $\pi(x) \neq \pi(x')$ il existe une section locale X de $\underline{\mathfrak{L}}$ telle que $X(x) = 0, X(x') \neq 0$.

Si $\underline{\mathfrak{L}}$ est à orbites séparées, on dira qu'une section X de $\underline{\mathfrak{L}}$ est π -saturée si

pour tout x du domaine de X , le flot est à domaine π -saturé.

Exemple fondamental :

Si $\Gamma \xrightarrow{\alpha} \Gamma_0$ est un groupoïde de Lie les faisceaux de champs invariants à gauche $\underline{\mathfrak{L}}(\Gamma)$ (resp. à droite $\underline{\mathfrak{R}}(\Gamma)$) sépare les α -fibres (resp. les β -fibres) et toute section à domaine α -saturée (resp. β -saturée) est α -saturée (resp. β -saturée). Ceci résulte de la proposition 4.1.

Théorème 7.2. Soit Γ une variété (non nécessairement séparée). On se donne :

1. une sous-variété séparée connexe Γ_0 de Γ ;
2. deux projections α et β de Γ sur Γ_0 à fibres connexes et séparées ;

3. un faisceau $\underline{\mathfrak{L}}$ d'algèbres de Lie sur Γ tel que

(α) $\underline{\mathfrak{L}}$ sépare les α -fibres

(β) les β -fibres sont des orbites transitives de $\underline{\mathfrak{L}}$. ($\underline{\mathfrak{L}}$ est donc à orbites séparées)

(saturation) pour tout $X \in \underline{\mathfrak{L}}$, il existe une section locale \tilde{X} de $\underline{\mathfrak{L}}$ passant par X

et α -saturée.

Alors il existe sur Γ une unique structure de groupoïde de Lie de base Γ_0 admettant α et β comme projections source et but, et telle que $\underline{\mathfrak{L}}$ soit formée de germes de

champs invariants à gauche.

De plus, un champ de vecteurs local Y sur Γ est invariant à droite si, et seulement si, il est une section locale du faisceau commutant $\underline{\mathfrak{L}}^c$ de $\underline{\mathfrak{L}}$.

Le faisceau $\underline{\mathfrak{L}}$ sera appelé un faisceau de définition de Γ .

Démonstration. Désignons par \mathcal{P} le pseudogroupe le long de α engendré par les flots locaux des sections α -saturées de $\underline{\mathfrak{L}}$. La propriété (saturation) et la connexité des β -fibres

montrent que \mathcal{P} est infinitésimalement transitif sur les β -fibres et admet les β -fibres comme orbites. Pour montrer que \mathcal{P} est un pseudogroupe de définition d'une structure de groupoïde sur Γ , il suffit alors de montrer qu'il sépare les α -fibres. Or si $\varphi \in \mathcal{P}$ et si $x \in \text{dom } \varphi$ est tel que $\varphi(x) = x$, soit $x' \in \alpha^{-1}(\alpha(x))$. Comme le commutant de $\underline{\mathfrak{L}}^c$ de $\underline{\mathfrak{L}}$

est transitif sur les α -fibres, il existe $\varphi' \in \mathcal{P}(\underline{\mathfrak{L}}^c)$ tel que $\varphi'(x) = x'$, et donc

$$\varphi(x') = \varphi(\varphi'(x)) = \varphi'(\varphi(x)) = \varphi'(x) = x'.$$

Réciproquement, soient x et x' tels que $\alpha(x) \neq \alpha(x')$. Alors il existe une section locale X de $\underline{\mathfrak{L}}$ à domaine α -connexe contenant x et x' et telle que $X(x) = 0$ et $X(x') \neq 0$.

On peut de plus supposer une telle section α -saturée. Soient (φ_t) et (φ'_t) des flots locaux à domaines α -saturés définis respectivement sur un voisinage Ω de x et sur un voisinage Ω' de x' . Pour un t_0 assez petit, le difféomorphisme φ qui coïncide avec φ_{t_0} sur Ω et φ'_{t_0} sur Ω' est un élément de \mathcal{P} fixant x et non x' .

Enfin, les germes des champs invariants par \mathcal{P} sont les éléments du commutant de \mathfrak{L} , ce qui achève la démonstration.

Remarque. Si Γ_0 est réduit à un point, le théorème 7.2 exprime le résultat classique suivant : si une variété de dimension n possède une algèbre de Lie transitive de dimension n formée de champs de vecteurs complets, cette variété est un groupe de Lie.

Corollaire. Soit Γ une variété, Γ_0 une sous-variété séparée connexe et paracompacte, α et β deux projections de Γ sur Γ_0 à fibres séparées. On suppose donnés deux faisceaux \mathfrak{L} et \mathfrak{R} d'algèbres de Lie sur Γ commutant entre eux (i.e. tout $X \in \mathfrak{L}$ et $Y \in \mathfrak{R}$ $[X, Y] = 0$).

Alors si \mathfrak{L} admet les α -fibres pour orbites transitives et \mathfrak{R} les β -fibres pour orbites transitives, et si \mathfrak{L} est composée de champs complets, Γ est canoniquement muni d'une structure de groupoïde de Lie.

Démonstration. Il suffit de constater que $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{L}^c$.

Remarques : Soient $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$ un groupoïde de Lie, et soit \mathfrak{L} un faisceau de

définition de Γ . Alors :

1°) Le faisceau image directe $\alpha(\mathfrak{L})$ admet pour sections locales au-dessus de l'ouvert U

de Γ_0 les sections locales de \mathfrak{L} définies sur $\alpha^{-1}(U)$. Via l'identification

$L(\Gamma) = \nu\Gamma_0$, $\alpha(\mathfrak{L})$ peut être regardé comme un sous-faisceau d'algèbres de Lie de

$\mathfrak{L}(\nu\Gamma_0)$, telle que l'application d'évaluation $\alpha(\mathfrak{L}) \rightarrow \nu\Gamma_0$ soit surjective.

2°) Le feuilletage régulier défini sur Γ par les orbites de \mathfrak{L} se projette par α sur le feuilletage de Stefan de Γ_0 par les orbites de Γ .

3°) La conjugaison des champs de vecteurs permet d'associer à \mathfrak{L} un faisceau

d'algèbres de Lie $\overline{\mathfrak{L}}$, formé de champs invariants à droite, donc contenu dans \mathfrak{L}^c ,

et ayant des propriétés analogues à celles de \mathfrak{L} . On peut ainsi au besoin rétablir une symétrie rompue par le choix des champs invariants à gauche pour définir Γ .

- 4°) Si θ est une 1-forme invariante à droite sur Γ , elle est invariante par tout élément $X \in \mathfrak{L} : \mathfrak{L}_X \theta = 0$. La réciproque est cependant fautive si \mathfrak{L} n'est pas maximal.

Prenons par exemple pour Γ le groupoïde grossier $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (exemple (6.1) ($n \geq 2$)). Si $(x^1 \dots x^n)$ sont les coordonnées usuelles de \mathbb{R}^n , soit $\theta_0 = dx^1$, et désignons par \mathfrak{J}

le faisceau des germes des automorphismes infinitésimaux de θ_0 . Alors le faisceau des germes $\{(0, X) | X \in \mathfrak{J}\}$ est un faisceau de définition de Γ , qui laisse invariante la

1-forme (non invariante à droite) $\alpha^* \theta_0$.

Proposition 7.3. Soient $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$ un groupoïde de Lie, et Γ' un sous-groupoïde

de Lie de Γ . Soit φ' un glissement à droite [resp. à gauche] de Γ' défini sur un ouvert $\beta'^{-1}(U')$ [resp. $\alpha'^{-1}(U')$], où U' est un ouvert de Γ_0 . Alors tout point $u \in U'$ admet un voisinage ouvert V dans Γ_0 tel qu'il existe un glissement à droite [resp. à gauche] φ de Γ défini sur $\beta^{-1}(V)$ [resp. $\alpha^{-1}(V)$] ayant la propriété

$$\varphi|_{\beta^{-1}(V) \cap \Gamma'} = \varphi'|_{\beta'^{-1}(V \cap U')} \quad [\text{resp. } \varphi|_{\alpha^{-1}(V) \cap \Gamma'} = \varphi'|_{\alpha'^{-1}(V \cap U')}].$$

En d'autres termes, tout glissement de Γ' coïncide, au voisinage de chaque point, avec la restriction d'un glissement de Γ .

Preuve. Soit φ' un glissement à droite de Γ' , et $B' = \varphi'(U')$ la bissection de Γ' associée. Soit $u \in U'$, et notons $x = \varphi'(u) \in B'$. B' est une sous-variété de Γ' transverse à $\beta' = \beta|_{\Gamma'}$. Au point x , $T_x B'$ est transverse à $T_x \beta^{-1}(u)$ et à $T_x \alpha'^{-1}(x')$. Comme $T_x \beta'^{-1}(u) = T_x \beta^{-1}(u) \cap T_x \Gamma'$ et $T_x \alpha'^{-1}(x') = T_x \alpha^{-1}(x) \cap T_x \Gamma'$, il existe un sous-espace E_x de $T_x B$ qui contient $T_x B'$ et qui est à la fois transverse à $T_x \beta^{-1}(u)$ et $T_x \alpha^{-1}(x)$. On peut alors prolonger B' en une sous-variété B_1 de Γ passant par x , transverse à β , et d'espace tangent $E_x = T_x B_1$ en x . Par construction, B_1 est transverse à la α -fibre en x . Elle reste donc transverse aux α -fibres sur un voisinage ouvert B de x , et on peut choisir B assez petit pour que B soit une bissection de Γ . Le glissement à droite R_B répond alors à la question.

Corollaire 1. Si Γ' est un sous-groupe de Lie de Γ , il existe des pseudogroupes de définition \mathcal{P}' et \mathcal{P} respectivement de Γ' et Γ tels que les éléments de \mathcal{P}' soient les restrictions à Γ' d'éléments de \mathcal{P} .

Plus généralement :

Corollaire 2. Si $\Gamma \xrightarrow[\beta_i]{\alpha_i} \Gamma_0^i$ sont deux groupoïdes de Lie, et si f (resp. f_0) est une

application C^∞ de Γ^1 dans Γ^2 (resp. Γ_0^1 dans Γ_0^2) tels que $\alpha_2 f = f_0 \circ \alpha_1$,

$\beta_2 \circ f = f_0 \circ \beta_1$, si f_0 est une immersion, f est un morphisme de groupoïdes de Lie si et seulement si il existe deux pseudogroupes de \mathcal{P}_i de Γ^i ($i=1,2$) de glissements à gauche tels que pour tout $\varphi_1 \in \mathcal{P}_1$ et tout x , appartenant à la source de φ_1 , il existe un glissement φ_2 de \mathcal{P}_2 défini au voisinage de $f(x_1)$ tel que $f \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ f_0$.

7. GROUPOIDES LOCAUX DE LIE.

Définition 8.1. [8]. Un groupoïde local de Lie (au sens de Van Est) est une variété Γ séparée munie

1. d'une sous-variété connexe Γ_0 ;
2. de deux projections α et β de Γ sur Γ_0 à fibres connexes ;
3. d'un difféomorphisme involutif $\iota : \Gamma \rightarrow \Gamma$;
4. d'une application différentiable $\mu : \Gamma_\mu \rightarrow \Gamma$, où Γ_μ est un voisinage ouvert de $\Gamma_0 \times \Gamma_0$ dans la sous-variété

$$\Gamma_2 = \{(x,y) \in \Gamma \times \Gamma \mid \alpha(x) = \beta(y)\}$$

le tout vérifiant les propriétés suivantes : si on note $x^{-1} = \iota(x)$ et $xy = \mu(xy)$

(a) pour tout $x \in \Gamma$,

$$(x, \alpha(x)) \in \Gamma_\mu, (\beta(x), x) \in \Gamma_\mu, \text{ et } x\alpha(x) = \beta(x)x = x$$

(b) pour tout $(x,y) \in \Gamma_\mu$

$$(y, x^{-1}) \in \Gamma_\mu \text{ et } (xy)^{-1} = \beta(x), y^{-1}x^{-1}$$

(c) pour tous $x,y,z \in \Gamma$

si $(x,y) \in \Gamma_\mu, (y,z) \in \Gamma_\mu$ et $(x,yz) \in \Gamma_\mu$ ou $(xy,z) \in \Gamma_\mu$ alors $(xy)z$ et $x(yz)$ sont définis et égaux.

Cette définition généralise aux groupoïdes de Lie la notion de groupe local de Lie symétrique (c'est-à-dire sur lequel l'inversion est définie).

Il sera souvent commode d'élargir la notion de groupoïde local de façon à considérer tous les voisinages ouverts de Γ_0 comme des groupoïdes locaux. On laisse au lecteur le soin d'écrire, s'il le souhaite, les axiomes correspondants. On se contentera de noter que si Γ est un groupoïde local il contient un groupoïde local au sens de Van Est qui est un voisinage ouvert de Γ_0 .

Remarque de terminologie : On prendra garde qu'en général un groupoïde de Lie n'étant pas séparé n'est pas lui-même un groupoïde local. Il résulte par contre du théorème 3.1. que tout groupoïde Γ possède un voisinage de Γ_0 qui est un groupoïde local. **Ceci a l'avantage de mettre l'accent sur un point qui distingue des groupes, les groupoïdes qui ne sont pas des groupes :** alors que par prolongement de la structure de groupe de Lie local on obtient toujours un groupe de Lie, pour un groupoïde local et si le prolongement en un groupoïde existe, on perd en général la séparation.

Si $\Gamma \xrightarrow{\cong} \Gamma_0$ est un groupoïde local, on peut définir comme précédemment la notion de glissement (à gauche ou à droite) sur Γ . Un glissement à gauche est encore un difféomorphisme local de Γ , mais de domaine de définition non β -saturé en général. De manière plus précise, si $x \in \Gamma$, posons

$$\begin{aligned} R(x) &= (\{x\} \times \Gamma) \cap \Gamma_\mu \\ L(x) &= (\Gamma \times \{x\}) \cap \Gamma_\mu \end{aligned}$$

Alors, le domaine de définition d'un glissement à gauche [resp. à droite] est une réunion de $R(x)$ [resp. de $L(x)$] (on notera que $R(x)$ et $L(x)$ sont des ouverts respectivement de $\beta^{-1}(\alpha(x))$ et $\alpha^{-1}(\beta(x))$).

On remarquera que si les α -fibres et les β -fibres sont connexes :

- 1°) L'ensemble des glissements à gauche est transitif sur les α -fibres ;
 - 2°) Si deux glissements à gauche φ et ψ coïncident en un point $y \in \Gamma$ et si $x \in L(y)$, alors φ et ψ coïncident en tout point de $R(x)$;
- (on a bien sûr un résultat analogue avec les glissements à droite).

Ces propriétés, jointes au fait qu'un glissement à droite et un glissement à gauche commutent, permettent de définir comme on l'a fait plus haut **l'algébroïde d'un groupoïde local** : on définit les champs de vecteurs invariants à gauche, et on constate qu'un tel champ peut toujours se prolonger en un champ invariant à gauche de domaine α -saturé, et est parfaitement défini par sa restriction à Γ_0 , qui est un champ de vecteurs le long de Γ_0 tangent aux β -fibres. En identifiant le fibré vectoriel de ces vecteurs avec le fibré normal $\nu\Gamma_0$, et en considérant l'application

$$T\alpha : \nu\Gamma_0 \rightarrow T\Gamma_0$$

qui en résulte, on obtient l'algébroïde de Lie cherchée. L'algébroïde de Lie d'un groupoïde (local ou non) ne dépend en fait que du germe de groupoïde local le long de Γ_0 .

On est en mesure de caractériser les groupoïdes locaux à partir des champs invariants à gauche (ou à droite).

Théorème 8.1. *Soit Γ une variété séparée, Γ_0 une sous-variété connexe de Γ , α et β deux projections de Γ sur Γ_0 à fibres connexes. Soit $\underline{\mathfrak{L}}$ un faisceau d'algèbres de*

Lie sur Γ tels que

(i) $\underline{\mathfrak{L}}$ sépare les α -fibres ;

(ii) les β -fibres sont les orbites transitives de $\underline{\mathfrak{L}}$;

(iii) (Saturation faible) par tout point X de $\underline{\mathfrak{L}}$ passe une section de $\underline{\mathfrak{L}}$ α -saturée ;

alors il existe sur $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$ une unique structure de groupoïde local telle que $\underline{\mathfrak{L}}$ soit

constitué de germes de champs de vecteurs invariants à gauche.

De plus $\underline{\mathfrak{L}}^c$ commutant de $\underline{\mathfrak{L}}$, est l'ensemble des champs invariants à droite et

$\underline{\mathfrak{L}}^{cc}$ (bicommutant) de $\underline{\mathfrak{L}}$ l'ensemble des champs invariants à gauche.

On dira que $\underline{\mathfrak{L}}$ est un faisceau de définition de Γ .

Remarque. Si $\Gamma \xrightarrow{\alpha} \Gamma_0$ est un groupoïde local, il existe toujours un voisinage de Γ_0 qui est un groupoïde local à fibres α et β -connexes (cf. démonstration du Théorème 3.1). On peut donc toujours supposer les α -fibres et les β -fibres connexes. Le théorème 8.1 sous cette réserve caractérise les groupoïdes locaux.

Démonstration du Théorème 8.1. On notera $\mathfrak{R}_{\sim}(\Gamma) = \underline{\mathfrak{L}}^c \underline{\mathfrak{L}}(\Gamma) = \underline{\mathfrak{L}}^{cc}$ et on appellera glissement local à droite (resp. à gauche) tout élément du pseudogroupe $\mathcal{P}(\underline{\mathfrak{L}}(\Gamma))$ resp. $\mathcal{P}(\mathfrak{R}_{\sim}(\Gamma))$ dont le domaine est α -saturé (resp. β -saturé). Tout revient à prouver que ce sont les glissements d'une structure de groupoïde local qui sera alors nécessairement unique.

Lemme 8.1 :

- (i) L'ensemble des glissements locaux à gauche [resp. à droite] opère transitivement sur les α -fibres [resp. les β -fibres] ;
- (ii) Un champ de vecteurs à domaine α -saturé [resp. β -saturé] est invariant par les glissements à gauche [resp. à droite] si, et seulement si, c'est une section locale de $\mathfrak{L}(\Gamma)$ [resp. de $\mathfrak{R}(\Gamma)$] ;
- (iii) Tout vecteur X_u tangent en $u \in \Gamma_0$ à $\beta^{-1}(u)$ [resp. $\alpha^{-1}(u)$] est la valeur d'un champ invariant à gauche [resp. à droite] à domaine β -saturé [resp. α -saturé] dont la restriction à $\beta^{-1}(u)$ [resp. $\alpha^{-1}(u)$] est parfaitement déterminée par X_u .

Preuve :

- (i) $\mathcal{P}(\mathfrak{L}(\Gamma))$ agit transitivement sur les α -fibres, et on peut se limiter aux éléments de $\mathcal{P}(\mathfrak{R}(\Gamma))$ dont les domaines sont β -connexes, c'est-à-dire aux glissements locaux à gauche.
- (ii) Si X est un champ de vecteurs invariant par les glissements à gauche (nous dirons simplement **invariant à gauche**), on peut toujours grâce à (i) supposer son domaine de définition α -saturé. Nous ferons toujours cette convention pour les champs invariants à gauche (de même les champs invariants à droite seront toujours supposés à domaine β -saturé). Comme X est invariant par les flots locaux des sections de $\mathfrak{R}(\Gamma)$, il commute avec les éléments de $\mathfrak{R}(\Gamma)$. Réciproquement si X est une section de $\mathfrak{L}(\Gamma)$ à domaine α -saturé et si φ est un glissement local à gauche, on

peut écrire au voisinage de chaque point de $\text{dom } \varphi$ sous la forme

$$\varphi = \varphi_{t_n}^n \circ \dots \circ \varphi_{t_1}^1 \quad \text{où les } (\varphi_t^i)_{\|t\| < \varepsilon_i} \text{ sont des flots locaux de sections } X_i \text{ de } \mathfrak{R}(\Gamma). \text{ Les}$$

trajectoires locales de ces flots sont tracées dans les α -fibres, et donc on a

$$T\varphi_t^i(X) = X \text{ pour tout } i \text{ et tout } t, \text{ de sorte que } T\varphi(X) = X.$$

Enfin (iii) est clair d'après ce qui précède.

Lemme 8.2. Soit $\varphi \in \mathcal{P}(\mathfrak{R}(\Gamma))$ et soit X un champ invariant à gauche défini en

$x \in \text{dom } \varphi$ (donc en $\varphi(x)$). Désignons par $(\psi_t^x)_{\|t\| < \varepsilon}$ et $(\psi_t^{\varphi(x)})_{\|t\| < \varepsilon}$, les flots locaux de

X en x et $\varphi(x)$. Alors il existe deux réels strictement positifs $\eta' < \eta$ tels que pour tout

$t \in]-\eta, \eta[$, le difféomorphisme local $\psi_{-t}^{\varphi(x)} \circ \varphi \circ \psi_t^x$ soit un élément de $\mathcal{F}(\mathfrak{R}_\alpha(\Gamma))$, qui coïncide avec φ pour $|t| < \eta'$.

Preuve. On a $T\varphi(X) = X$, et donc φ échange localement les flots locaux de X . Si donc η' est assez petit pour que $(\psi_t^x)_{|t| < \eta'}$ soit le flot local de X dans $\text{dom } \varphi$, on aura pour $|t| < \eta'$

$$\psi_t^{\varphi(x)} = \varphi \circ \psi_t^x \circ \varphi^{-1}.$$

D'autre part on peut, au voisinage de x , décomposer φ en $\varphi_{t_n}^n \circ \dots \circ \varphi_{t_1}^1$ où les $(\varphi_t^i)_{|t| < \varepsilon_i}$ sont les flots locaux de sections locales Y_1, \dots, Y_n de $\mathfrak{R}_\alpha(\Gamma)$. Comme $\text{dom } X$ est α -saturé, on a alors une décomposition de $\psi_{-t}^{\varphi(x)} \circ \varphi \circ \psi_t^x$ en facteurs du type

$$\psi_{-t}^i \circ \varphi_{t_i}^i \circ \psi_t^{i-1}$$

où $(\psi_{t_i}^i)_{|t_i| < \varepsilon_i}$ est le flot local de X au but de $\varphi_{t_i}^i$, et cette décomposition est valable pour tout t tel que $|t| < \min\{\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon_i\} = \eta$. On peut, quitte à "raffiner" la décomposition de φ , supposer les t_i suffisamment petits pour que le flot local de X au but de $\varphi_{t_i}^i$ soit également défini à la source de $\varphi_{t_i}^i$, et dans ce cas $(\psi_{-t}^i \circ \varphi_{t_i}^i \circ \varphi_{t_i}^i)$ est le flot local de $T\psi_t(Y_i)$, qui est une section locale de $\mathfrak{R}_\alpha(\Gamma)$. D'où le résultat.

Lemme 8.3 :

- (i) Si deux glissements locaux à gauche [resp. à droite] φ et φ' coïncident en un point x , ils coïncident en tout point $x' \in \beta^{-1}(\beta(x))$ [resp. $x' \in \alpha^{-1}(\alpha(x))$] où ils sont tous deux définis.
- (ii) Si φ et ψ sont deux glissements locaux respectivement à gauche et à droite, on a $\varphi \circ \psi(x) = \psi \circ \varphi(x)$ en tout point x où les deux membres sont définis.

Démonstration.

- (i) Soient φ et φ' deux glissements locaux à gauche tels que $\varphi(x) = \varphi'(x)$. Comme les flots locaux des éléments de $\mathfrak{F}(\Gamma)$ agissent transitivement sur les β -fibres, on aura alors $\varphi(x') = \varphi'(x')$ pour tout x' dans la composante connexe de x dans

$\beta^{-1}(\beta(x)) \cap \text{dom } \varphi \cap \text{dom } \varphi'$, en utilisant le lemme 7.1. Pour généraliser ce résultat au cas où $\beta^{-1}(\beta(x)) \cap \text{dom } \varphi \cap \text{dom } \varphi'$ n'est pas connexe, nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 8.4. *Soit Γ un groupoïde local de Lie. Considérons un glissement local à gauche φ de Γ , $x \in \text{dom } \varphi$, et deux immersions $\gamma: [0,1] \rightarrow \Gamma$ et $\gamma': [0,1] \rightarrow \Gamma$ ayant les propriétés suivantes :*

(i) $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = \varphi(x)$,

(ii) $(\forall t \in [0,1]) \beta(\gamma(t)) = \beta(x)$ et $\beta(\gamma'(t)) = \beta(\varphi(x))$

(iii) $(\forall t \in [0,1]) \alpha(\gamma(t)) = \alpha(\gamma'(t))$

(iv) $(\forall t \in [0,1])$ si X est un champ invariant à gauche tel que $X_{\gamma(t)} = \frac{d\gamma(t)}{dt}$, alors

$$X_{\gamma'(t)} = \frac{d\gamma'(t)}{dt},$$

(on remarquera que (iv) n'a un sens que grâce à (ii) et (iii)).

Alors il existe un glissement local à gauche $\tilde{\varphi}$ prolongeant φ , et tel que $\text{im } \gamma \subset \text{dom } \tilde{\varphi}$, avec $\tilde{\varphi}(\gamma(t)) = \gamma'(t)$ pour tout $t \in [0,1]$.

Preuve du lemme 8.4. Soit I l'ensemble des $\tau \in [0,1]$ tels qu'il existe un prolongement $\tilde{\varphi}$ pour $\gamma|_{[0,\tau]}$. On a donc si $\tau \in I$, $\gamma|_{[0,\tau]} \subset \text{dom } \tilde{\varphi}$ et $\tilde{\varphi}(\gamma(t)) = \gamma'(t)$ si $0 \leq t \leq \tau$. I est non vide puisque $0 \in I$ d'après (iv). On va prouver que I est fermé puis ouvert ce qui entraînera $I = [0,1]$. Soit donc $t_0 \in \overline{I}$ et soit X un champ invariant à gauche tel que $X_{\gamma(t_0)} = \frac{d\gamma}{dt}|_{t=t_0}$. Notons $(\psi_t)_{|\tau| < \varepsilon}$ et $(\psi'_t)_{|\tau| < \varepsilon}$ les flots locaux respectifs de X en $\gamma(t_0)$ et $\gamma'(t_0)$. Il existe au réel $\eta < 0$ (que l'on peut supposer $> -\varepsilon'$) tel que $\psi_\tau(\gamma(t_0))$ rencontre $\text{dom } \tilde{\varphi}$ si $\tau \in]\eta, 0[$. Soit $\tau_0 \in]\eta, 0[$. Pour $t < t_0$, t assez voisin de t_0 , $(\varphi_\tau(\gamma(t)))_\tau$ est la trajectoire locale de X en $\gamma(t)$. Comme $T\tilde{\varphi}(X) = X$ et $\varphi(t) \in \text{dom } \tilde{\varphi}$ on aura donc d'après le lemme 8.2

$$\tilde{\varphi}(\psi_{t_0}(\gamma(t))) = \psi'_{t_0}(\tilde{\varphi}(\gamma(t))) = \psi'_{t_0}(\gamma'(t)).$$

Par continuité, lorsque $t \rightarrow t_0$, on obtient

$$\tilde{\varphi}(\psi_{t_0}(\gamma(t_0))) = \psi'_{t_0}(\gamma'(t_0))$$

donc $\psi'_{t_0}(\gamma(t_0)) \in \text{im } \tilde{\varphi}$. Utilisons encore le lemme 8.2 : si on choisit t_0 suffisamment voisin de 0, $\psi'_{-t_0} \circ \tilde{\varphi} \circ \psi_{t_0}$ est un élément de $\mathcal{P}(\mathcal{R}_\sim(\Gamma))$ qui coïncide avec $\tilde{\varphi}$ en tout point $\gamma(t)$ ($t < t_0$) où ψ_{t_0} est défini. D'après le début de démonstration du lemme 8.3, on aura donc $\psi'_{-t_0} \circ \tilde{\varphi} \circ \psi_{t_0} = \tilde{\varphi}$ en tout point de la composante connexe de $\gamma(t_0)$ dans $\text{dom } \tilde{\varphi} \cap \beta^{-1}(\beta(x))$. Quitte à restreindre son domaine de définition, on peut donc utiliser ce difféomorphisme local pour étendre $\tilde{\varphi}$ à un voisinage de $\gamma(t_0)$. On a donc $t_0 \in I$. I est donc fermé. D'autre part γ et γ' étant des immersions, on peut assurer que pour tout $t_0 \in I$, on peut choisir un champ invariant à gauche coïncidant avec $\frac{d}{dt}\gamma(t)$ pour $t \leq t_0$ voisin de t_0 . Il en résulte immédiatement que pour un τ petit négatif $\psi'_{t_0} \circ \tilde{\varphi} \circ \psi_{-t_0}(\gamma(t)) = \gamma'(t)$ si $t - t_0$ est petit. Ceci entraîne que t_0 est intérieur à I . I est donc ouvert, ce qui achève la démonstration.

Fin de la démonstration du lemme 8.3.

- (i) Soit $x' \in \text{dom } \varphi \cap \text{dom } \varphi' \cap \beta^{-1}(\beta(x))$. Il existe un chemin γ qui est une immersion joignant x à x' et contenu dans $\text{dom } \varphi' \cap \beta^{-1}(\beta(x))$ puisque φ' est un glissement local. Posons $\gamma' = \varphi' \circ \gamma$. C'est un chemin joignant $\varphi'(x)$ à $\varphi'(x')$, et le couple (γ, γ') vérifie les hypothèses du lemme 8.2. Donc il existe un prolongement $\tilde{\varphi}$ de φ défini sur $\gamma([a, 1])$. On a alors le résultat, car $\varphi'(x') = \tilde{\varphi}(x')$ et $\tilde{\varphi}(x') = \varphi(x')$.
- (ii) Soient φ un glissement local à gauche et ψ un glissement local à droite tels que $x, \psi(x) \in \text{dom } \varphi$ et $x, \varphi(x) \in \text{dom } \psi$. Considérons un chemin allant de x à $\varphi(x)$ et tracé dans $\text{dom } \psi$. On peut recouvrir ce chemin par un nombre fini d'ouverts $(\Omega_j)_{1 \leq j \leq p}$ tels que Ω_j soit contenu dans $\text{dom } \psi$ et $\psi|_{\Omega_j}$ est décomposable en un produit de flots locaux d'éléments de $\mathcal{B}(\Gamma)$, et choisir pour tout j un glissement

local à gauche φ_j envoyant $\Omega_j \cap \Omega_{j-1}$ dans $\Omega_j \cap \Omega_{j+1}$, de sorte que

$\varphi(x) \circ \varphi_p \circ \varphi_{p-1} \circ \dots \circ \varphi_1(x)$ (on conviendra que $\Omega_0 = \Omega_1$ et $\Omega_{p+1} = \Omega_p$). Tout revient à montrer que l'on peut prolonger les φ_j en des glissements locaux définis aussi en $\psi(\varphi_{j-1} \circ \dots \circ \varphi_1(x))$ et tels que

$\varphi_j \circ \psi(\varphi_{j-1} \circ \dots \circ \varphi_1(\psi(x))) = \psi(\varphi_j \circ \dots \circ \varphi_1(x))$: le point (i) assurera alors que $\varphi(\psi(x)) = \varphi_p \circ \dots \circ \varphi_1(\psi(x))$, et donc le résultat.

On est donc ramené au problème suivant : φ est un glissement à gauche, et ψ un glissement à droite de la forme $\psi = \psi_{t_n}^n \circ \dots \circ \psi_{t_1}^1$ où les $(\psi_t^i)_{|t| < \varepsilon_i}$ sont les flots locaux de champs X_i invariants à gauche. On se donne $x \in \text{dom } \varphi \cap \text{dom } \psi$ tel que $\varphi(x) \in \text{dom } \psi$, et on veut construire un prolongement $\tilde{\varphi}$ de φ défini aussi en $\psi(x)$ et tel que $\tilde{\varphi}(\psi(x)) = \psi(\varphi(x))$. On utilise pour cela le lemme 8.2 : les chemins

$$(\psi_t^1(x)) \text{ et } (\psi_t^1(\varphi(x))) \text{ où } 0 \leq t \leq t_1 \text{ avec } t_1 > t_1$$

satisfaisant aux hypothèses du lemme : d'où un prolongement $\tilde{\varphi}^1$ de φ défini au voisinage de $(\psi_{t_1}^1(x))$ et tel que $\tilde{\varphi}^1(\psi_{t_1}^1(x)) = \psi_{t_1}^1(\tilde{\varphi}^1(x))$. On recommence en considérant les chemins

$$(\psi_t^2(\psi_{t_1}^1(x))) \text{ et } (\psi_t^2(\tilde{\varphi}^1(\psi_{t_1}^1(x)))) \text{ où } 0 \leq t \leq t_2 \text{ avec } t_2 > t_2$$

d'où $\tilde{\varphi}^2, \dots$ etc. Le prolongement $\tilde{\varphi}^n$ répond à la question.

Ceci achève la démonstration du lemme 8.3.

On est en mesure de définir la structure de groupoïde local.

Un élément $x \in \Gamma$ est dit **inversible** s'il existe un glissement local à droite φ tel que $\beta(x) \in \text{dom } \varphi$, $\alpha(x) \in \text{im } \varphi$, et $\varphi(\beta(x)) = x$. On dit alors que φ **inverse** x et on pose

$$x^{-1} = \varphi^{-1}(\alpha(x)).$$

Un couple $(x, y) \in \Gamma \times \Gamma$ est dit **composable** si $\alpha(x) = \beta(y)$ et s'il existe un glissement local à droite φ tel que $\beta(y) \in \text{dom } \varphi$, $x \in \text{dom } \varphi$, et $\varphi(\beta(y)) = y$. On pose alors

$$xy = \varphi(x)$$

Les éléments x^{-1} et xy ne dépendent pas des glissements locaux à droite utilisés pour les définir, d'après le lemme 8.3.

La vérification des axiomes des groupoïdes locaux est alors aisée.

Par "localisation" de ce qui a été fait pour les groupoïdes, on construit une catégorie des groupoïdes locaux qui est une catégorie à produit. On se contente de donner la notion de morphisme de groupoïdes locaux :

Définition 8.2. Soient $\Gamma \xrightarrow[\beta_i]{\alpha_i} \Gamma_o^i$ deux groupoïdes locaux. Un morphisme de

groupoïdes locaux $f: \Gamma^1 \rightarrow \Gamma^2$ est une application C^∞ de Γ^1 dans Γ^2 telle que

(i) si x et $f(x)$ sont inversibles, $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.

(ii) si (x,y) et $(f(x),f(y))$ sont composables,

$$f(xy) = f(x).f(y).$$

9. GROUPOIDES DE LIE DOUBLES.

Définition 9.1. Un groupoïde de Lie double est une variété Γ munie de deux structures

de groupoïdes de Lie $\Gamma \xrightarrow[\beta^1]{\alpha^1} \Gamma_o^1$ et $\Gamma \xrightarrow[\beta^2]{\alpha^2} \Gamma_o^2$ telles que

(1) α^1 et β^1 [resp. α^2 et β^2] sont des morphismes de groupoïdes de Lie de

$$\Gamma \xrightarrow[\beta^2]{\alpha^2} \Gamma_o^2 \text{ [resp. } \Gamma \xrightarrow[\beta^1]{\alpha^1} \Gamma_o^1 \text{]} \text{ dans lui-même.}$$

(2) Si on note $\overset{o}{1}$ et $\overset{o}{2}$ les multiplications de $\Gamma \xrightarrow[\beta^1]{\alpha^1} \Gamma_o^1$ et $\Gamma \xrightarrow[\beta^2]{\alpha^2} \Gamma_o^2$, on a

pour tous x,y,z,t tels que les 2 membres soient définis

$$(x \overset{o}{1} y) \overset{o}{2} (z \overset{o}{1} t) = (x \overset{o}{2} z) \overset{o}{1} (y \overset{o}{2} t)$$

La relation ci-dessus est donc vérifiée dès que

$$\alpha^1(x) = \beta^1(y), \alpha^1(z) = \beta^1(t), \alpha^2(x) = \beta^2(z), \alpha^2(y) = \beta^2(t).$$

Un morphisme de groupoïdes doubles est un morphisme pour les deux structures de groupoïdes.

Ces notions sont dues à C. EHRESMANN [7]. Un exemple naturel est donné par la proposition suivante :

Proposition 9.1. Soit $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_o$ un groupoïde de Lie. Alors, $T\Gamma \xrightarrow[T\beta]{T\alpha} T\Gamma_o$

est de façon naturelle un groupoïde de Lie. De plus, ajoutée à la structure de fibré vectoriel $T\Gamma \xrightarrow{\pi} \Gamma$, cette structure fait de $T\Gamma$ un groupoïde de Lie double.

Preuve. La multiplication est définie sur $T\Gamma \xrightarrow[T\beta]{T\alpha} T\Gamma_0$ par $T\mu : T\Gamma_2 \rightarrow T\Gamma$. En

d'autres termes, si $X_x \in T_x\Gamma$, $Y_y \in T_y\Gamma$ vérifient $T\alpha(X_x) = T\beta(Y_y)$ (de sorte que $\alpha(x) = \beta(y)$), on choisira deux chemins (x_t) et (y_t) de Γ tels que $x_0 = x$, $y_0 = y$, $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} x_t = X_x$, $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} y_t = Y_y$, et $\alpha(x_t) = \beta(y_t)$, et on posera

$$X_x \oplus Y_y = T\mu(X_x, Y_y) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} (x_t y_t)$$

π est un morphisme de groupoïdes de $T\Gamma$ sur Γ puisque $\pi(X_x \oplus Y_y) = xy$. En considérant $\Gamma \hookrightarrow T\Gamma$ définie par la section nulle, la structure induite par \oplus correspond précisément à la multiplication de Γ , ce qui permet de voir π comme un morphisme de

$T\Gamma \xrightarrow[T\beta]{T\alpha} T\Gamma_0$ dans lui-même. Par ailleurs, le fait que $T\alpha$ et $T\beta$ soient des

morphismes de $T\Gamma \xrightarrow{\pi} \Gamma$ dans lui-même traduit simplement leur linéarité sur chaque fibre. Reste à voir que si $X_x, X'_x \in T_x\Gamma$ et $Y_y, Y'_y \in T_y\Gamma$, on a

$$(X_x \oplus Y_y) + (X'_x \oplus Y'_y) = (X_x + X'_x) \oplus (Y_y + Y'_y)$$

ce qui est immédiat en considérant des courbes $(x_t), (y_t), (x'_t), (y'_t)$ comme ci-dessus.

Remarques :

1. Dans le cas particulier où $E \xrightarrow{\rho} M$ est un fibré vectoriel, on retrouve ainsi les deux structures de fibrés vectoriels $TE \xrightarrow{T\rho} TM$ et $TE \xrightarrow{\pi} E$ sur TE . En particulier, si $E = TM$, on obtient sur TTM les deux structures de fibré vectoriel de base TM , notée \oplus et $+$. D'autre part le produit fibré $E \oplus_M TM$ est muni canoniquement d'une structure de groupoïde double et $\pi \oplus T\rho$ est un morphisme de groupoïde double de $(TE, \oplus, +)$ dans $E \oplus_M TM$. Une connexion linéaire dans E est une scission de ce morphisme qui est un morphisme de groupoïde double [5].

2. Dans le cas particulier où Γ est un groupe de Lie, on a $\Gamma_0 = \{e\}$ et donc $T\Gamma_0 = \{e\}$: $T\Gamma$ est groupe de Lie. On retrouve ainsi la structure de groupe bien connue du tangent à un groupe de Lie.

Si φ est un glissement à droite de Γ , alors $T\varphi$ est naturellement un glissement à droite de $T\Gamma$. Cependant l'ensemble des glissements à droite ainsi obtenus n'est pas transitif sur les $T\beta$ -fibres : si $u = \beta(y)$ et si φ est un glissement à droite tel que

$\varphi(u) = y$, l'image $T\varphi(Tu\Gamma_0)$ est l'espace tangent en y à la bissection associée à φ , et ne contient donc aucun point de $T_y\beta^{-1}(u)$ [ni de $T_y\alpha^{-1}(\alpha(u))$]. Cependant, on peut remarquer que si Z est un champ invariant à gauche, la translation τ_Z par Z est un glissement à droite de $T\Gamma$: si $T\alpha(X_x) = T\beta(Y_y)$ et si Z est défini en y (donc en xy), on a, en notant (ψ_t) le flot de Z et (x_t) et (y_t) deux chemins tels que $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} x_t = X_x$, $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} y_t = Y_y$, et $\alpha(x_t) = \beta(y_t)$:

$$\begin{aligned}\tau_Z(X_x \oplus Y_y) &= Z_{xy} + (X_x \oplus Y_y) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \psi_t(x_t y_t) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} x_t \cdot \psi_t(y_t) = X_x \oplus (Z_y + Y_y) = X_x \oplus \tau_Z(Y_y).\end{aligned}$$

On vérifie aisément que :

Proposition 9.2. Soit \mathcal{P} un pseudogroupe de définition de $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$. On

obtient un pseudogroupe de définition de $T\Gamma \xrightarrow[T\beta]{T\alpha} T\Gamma_0$ en considérant le pseudogroupe \mathcal{P}^T le long de $T\alpha$ engendré par les applications tangentes des éléments de \mathcal{P} et les translations par les champs invariants à gauche de Γ .

On notera que si φ est un glissement à droite de Γ et X un champ invariant à gauche, alors $T\varphi(X)$ est encore un champ invariant à gauche, de sorte que

$$T\varphi \circ \tau_X = \tau_{T\varphi(X)} \circ T\varphi.$$

Donc un élément de \mathcal{P}^T peut toujours s'écrire comme un composé $T\varphi \circ \tau_X$.

Le fait que $\pi : T\Gamma \rightarrow \Gamma$ soit un morphisme de groupoïdes de Lie se manifeste alors par la relation

$$\pi \circ (T\varphi \circ \tau_X) = \varphi \circ \pi.$$

Un autre exemple naturel est fourni par ce que l'on peut appeler le "produit bifibré" de deux groupoïdes de même base et qui généralise le produit fibré de deux fibrés vectoriels (cf. Remarque 1).

Proposition 9.3. Soient $\Gamma^1 \xrightarrow[\beta^1]{\alpha^1} \Gamma_0$ et $\Gamma^2 \xrightarrow[\beta^2]{\alpha^2} \Gamma_0$ deux groupoïdes de Lie

de même base, et posons

$$\Gamma = \{(v^1, u^1, v^2, u^2) \in \Gamma^1 \times \Gamma^1 \times \Gamma^2 \times \Gamma^2 \mid \beta^1 v^1 = \beta^2 v^2, \alpha^1 v^1 = \beta^2 u^2, \beta^1 u^1 = \alpha^2 v^2, \alpha^1 u^1 = \alpha^2 u^2\}$$

Alors, si l'on définit l'injection $j^1 : \Gamma^2 \rightarrow \Gamma$ par

$$j^1(u^2) = (\beta^2 u^2, \alpha^2 u^2, u^2, u^2)$$

les projections $\Gamma \begin{array}{c} \xrightarrow{\tilde{\alpha}^1} \\ \xrightarrow{\tilde{\beta}^1} \end{array} \Gamma^2$ par

$$\tilde{\alpha}^1(v^1, u^1, v^2, u^2) = (\alpha^1 v^1, \alpha^1 u^1, u^2, u^2)$$

$$\tilde{\beta}^1(v^1, u^1, v^2, u^2) = (\beta^1 v^1, \beta^1 u^1, v^2, v^2)$$

et $j^2 : \Gamma^1 \rightarrow \Gamma, \Gamma \begin{array}{c} \xrightarrow{\tilde{\alpha}^2} \\ \xrightarrow{\tilde{\beta}^2} \end{array} \Gamma^1$ de manière analogue, et si l'on définit les multiplications

$$(v^1, u^1, v^2, u^2) \underset{1}{\circ} (v'^1, u'^1, v'^2, u'^2) = (v^1 v'^1, u^1 u'^1, v^2, u^2)$$

si $\alpha^1 v^1 = \beta^1 v'^1, \alpha^1 u^1 = \beta^1 u'^1, u^2 = v'^2$

$$(v^1, u^1, v^2, u^2) \underset{2}{\circ} (v'^1, u'^1, v'^2, u'^2) = (v^1, u^1, v^2 v'^2, u^2, u'^2)$$

si $u^1 = v'^1, \alpha^2 v^2 = \beta^2 v'^2, \alpha^2 u^2 = \beta^2 u'^2,$

il existe une structure naturelle de variété sur Γ telle que

$$\left(\Gamma \begin{array}{c} \xrightarrow{\tilde{\alpha}^1} \\ \xrightarrow{\tilde{\beta}^1} \end{array} \Gamma^2, \Gamma \begin{array}{c} \xrightarrow{\tilde{\alpha}^2} \\ \xrightarrow{\tilde{\beta}^2} \end{array} \Gamma^1 \right) \text{ soit un groupoïde de Lie double.}$$

Ce groupoïde jouit de la propriété universelle suivante : tout groupoïde double

$$\left(\Gamma' \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha^1} \\ \xrightarrow{\beta^1} \end{array} \Gamma'_0 \text{ et } \Gamma' \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha^2} \\ \xrightarrow{\beta^2} \end{array} \Gamma'_0 \text{ tel que } \Gamma'_0 \text{ } \overset{1}{=} \Gamma^2 \text{ et } \Gamma'_0 \text{ } \overset{2}{=} \Gamma^1 \text{ et pour lequel les}$$

structures induites de groupoïdes sur $\Gamma'_0 \text{ } \overset{1}{=} \Gamma^2$ et $\Gamma'_0 \text{ } \overset{2}{=} \Gamma^1$ coïncident avec celles de

$$\Gamma^2 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha^2} \\ \xrightarrow{\beta^2} \end{array} \Gamma_0 \text{ et } \Gamma^1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha^1} \\ \xrightarrow{\beta^1} \end{array} \Gamma_0 \text{ donne lieu à un morphisme surjectif de groupoïdes}$$

doubles (en un sens évident) $\Gamma' \rightarrow \Gamma$.

Les vérifications sont laissées au lecteur.

La définition des groupoïdes de Lie doubles s'étend mot pour mot aux groupoïdes locaux :

Définition 9.2. *Un groupoïde local de Lie double est une variété Γ munie de deux structures de groupoïde local de Lie $\Gamma \xrightarrow[\beta^1]{\alpha^1} \Gamma_0^1$ et $\Gamma \xrightarrow[\beta^2]{\alpha^2} \Gamma_0^2$ telles que*

(1) α^1 et β^1 [resp. α^2 et β^2] sont des morphismes de groupoïdes de Lie locaux de $\Gamma \xrightarrow[\beta^2]{\alpha^2} \Gamma_0^2$ [resp. $\Gamma \xrightarrow[\beta^1]{\alpha^1} \Gamma_0^1$] dans lui-même.

(2) Si on note \circ_1 et \circ_2 les multiplications partielles de $\Gamma \xrightarrow[\beta^1]{\alpha^1} \Gamma_0^1$ et

$\Gamma \xrightarrow[\beta^2]{\alpha^2} \Gamma_0^2$ respectivement, on a pour tous x, y, z, t tels que les deux membres

soient définis

$$(x \circ_1 y) \circ_2 (z \circ_1 t) = (x \circ_2 z) \circ_1 (y \circ_2 t).$$

BIBLIOGRAPHIE du CHAPITRE I

- [1] C. ALBERT, P. MOLINO : *Pseudogroupe de Lie transitifs et structures principales*, Travaux en Cours. Hermann, Paris 1984.
- [2] N. BOURBAKI : *Variétés différentielles*, Fascicule de Résultats I. Hermann.
- [3] A. COSTE, P. DAZORD, A. WEINSTEIN : *Groupeïdes Symplectiques*, Publ. Dept. Math. Lyon 2A, 1987, 1-62.
- [4] P. DAZORD : *Feuilletages à singularités*, Indagationes Math. Vol. 47, Fasc. 1, 1985.
- [5] P. DAZORD : *Groupeïdes symplectiques et Troisième Théorème de Lie non linéaire*, à paraître Actes du Séminaire Sud Rhodanien de Géométrie, Colloque de la Grande Motte, 1988.
- [6] P. DAZORD, D. SONDAZ : *Variétés de Poisson, Algèbroïdes de Lie*, Travaux du Séminaire Sud Rhodanien de Géométrie (1ère partie), Publ. Dept. Math. Lyon 1988, 1/B.
- [7] C. EHRESMANN : *Oeuvres Complètes*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle.
- [8] W.T. VAN EST : *Rapport sur les S-atlas in Structure transverse des feuilletages* (J. Pradines ed.), Astérisque 116, 235-292 (1984).
- [9] A.A. KIRILLOV : *Local Lie Algebras*, Russian Math. Surveys 31, 55-75 (1976).
- [10] P. LIBERMANN : *Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales*, Thèses, Faculté des Sciences de Strasbourg, 121, 1953.
- [11] A. LICHNEROWICZ : *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées*, J. Diff. Geometry 12 (1977), 253-300.
- [12] K. MACKENZIE : *Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry*, London Math. Soc., Lectures Notes Series, Cambridge University Press, 1987.
- [13] J. PRADINES : *Théorie de Lie pour les groupeïdes différentiables, Relations entre propriétés locales et globales*, C.R. Acad. Sc. Paris 263, 907-910 (1966).
- [14] J. PRADINES : *Théorie de Lie pour les groupeïdes différentiables, Calculs différentiels dans la Catégorie des Groupeïdes Infinitésimaux*, C.R. Acad. Sc. Paris, 264, 245-248 (1967).
- [15] J. PRADINES : *How to define the differentiable graph of a singular foliation*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle, Vol. XXVI, 4 (1985).

- [16] P. STEFAN : *Accessible sets, orbits and foliations with singularities*, Proc. London Math. Soc. 29 (1974).
- [17] H.J. SUSSMANN : *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*, Trans. Amer. Math. Soc. 180, 171-188 (1973).
- [18] A. WEINSTEIN : *The local structure of Poisson manifolds*, J. Diff. Geometry, 18 (1983), 523-557 et 22 (1985) 255.
- [19] A. WEINSTEIN : *Symplectic Groupoids and Poisson manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. 16 (1987), 101-103.