M. KHALIS

Dimension des anneaux de séries formelles sur un « $D+M$ »

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1988, fascicule 3B
, p. 31-37
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1988___3B_31_0>

DIMENSION DES ANNEAUX DE SERIES FORMELLES SUR UN "D+M"

M. KHALIS

Université Claude Bernard - LYON 1
43, boulevard du Onze Novembre 1918 - 69622 VILEURBANNE Cedex - LYON - FRANCE

0 - INTRODUCTION.

Soit R un anneau commutatif, intègre, unitaire et de dimension de Krull finie. On note respectivement par R[X] et R[[X]] l'anneau des polynômes et l'anneau des séries formelles à coefficients dans R. Il est déjà connu que si $\dim R = m$, alors $m + 1 \leq \dim R[X] \leq 2m + 1$. J. Arnold a montré [[2], Th. 1] que les anneaux de séries formelles ne possèdent pas cette propriété, plus précisément, si R n'est pas un SFT-anneau, alors $\dim R[[X]] = \infty$. Un idéal I de R est dit SFT-idéal [2] "Strong finite type", s'il existe un entier $k \geq 1$ et un idéal $J \subseteq I$ de type fini de R, tels que : $x^k \in J$, pour tout $x \in I$. L'anneau R est dit SFT-anneau si tous ses idéaux sont des SFT-idéaux.

La dimension de Krull de l'anneau R[[X]] est déjà connue dans le cas où R est noethérien ou prüférien [3], quelques exemples particuliers ont été aussi traités dans la littérature [2], [3], [6],...

La première partie de ce travail est consacrée au transfert de la SFT-propriété aux produits fibrés d'anneaux ; aussi élargira-t-on la classe d'anneaux R tels que la dimension de Krull de R[[X]] soit infinie. Dans la deuxième partie, on considère un anneau de valuation de la forme $V = K + M$, où K est son corps résiduel, M son idéal maximal, et, $R = D + M$ où D est un sous-anneau de K. Si V est un anneau de valuation discrète et D est un SFT-anneau, (dans le cas contraire, $\dim R[[X]] = \infty$ d'après la première partie), alors :

$$\dim R[[X]] = \dim D[[X]] + \dim V.$$

Ceci nous permettra d'évaluer la dimension de Krull d'autres anneaux n'appartenant à aucune des familles déjà connues, et contrairement aux anneaux de polynômes, le degré de transcendance de K sur le corps des fractions de D n'a aucune importance.

I - TRANSFERT DE LA SFT-PROPRIETE AUX PRODUITS FIBRES.

Soient T un anneau, M un idéal maximal de T et K son corps résiduel. Soit $\varphi : T \twoheadrightarrow K$ la surjection canonique et posons $R = \varphi^{-1}(D)$, où D est un sous-anneau de K.

I.1. PROPOSITION. [[1], Lemme 2.1] .

(a). R *est un produit fibré déterminé par le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} R = \varphi^{-1}(D) \arrow[rr, two heads] \arrow[d, hook] & & D \arrow[d, hook] \\ T \arrow[rr, two heads, "\varphi"] & & K \end{tikzcd}$$

où les homomorphismes sont canoniques.

(b). $M = (R:T)$ *et* $R/M \simeq D$.

(c). $\mathrm{Spec}(R) \simeq \mathrm{Spec}(D) \prod_{\mathrm{Spec}(K)} \mathrm{Spec}(T)$.

(d). *Si* T *est local, alors* M *est un idéal premier divisé, et tout idéal premier de* R *est comparable avec* M.

(e). *Si* T *est local, alors* $\dim R = \dim D + \dim T$.

(f). *Pour tout idéal premier* P *de* R *tel que* $M \not\subseteq P$, *il existe un unique idéal premier* Q *de* T *tel que :* $Q \cap R = P$, *et on a :* $T_Q = R_P$.

I.2 - Dans la propriété (f) de la proposition précédente, si on suppose que T est local, alors pour tout $P \in \mathrm{Spec}(R)$ avec $M \not\subseteq P$(donc $P \subseteq M$, d'après (d)), il existe un unique $Q \in \mathrm{Spec}(T)$ tel que : $P = Q \cap R$. Comme M est l'idéal maximal de T et $M \subsetneq R$, $P = Q \cap R = Q$. Ainsi, $P \in \mathrm{Spec}(R)$ avec $P \subseteq M \Longleftrightarrow P \in \mathrm{Spec}(T)$.

I.3. THEOREME - *Sous les hypothèses de la proposition* I.1, *on suppose que* (T,M) *est local. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i). R *est un* SFT-*anneau ;*

(ii). *Les anneaux* T *et* D *sont des* SFT-*anneaux.*

DEMONSTRATION - Pour montrer qu'un anneau satisfait la SFT-propriété, il suffit de montrer que tous ses idéaux premiers sont des SFT-idéaux, [[3], proposition 2.2].

(ii) $\Rightarrow$ (i). Supposons que T et D soient des SFT-annneaux et soit P un idéal premier de R. Deux cas sont possibles :

$$P \subseteq M \text{ ou } M \subsetneq P \qquad \text{(I.1. (d))}$$

- Si $P \subseteq M$, $P \in \mathrm{Spec}(T)$ et comme T est supposé être un SFT-anneau, il existe $k' > 0$ et $J = (x_1,\ldots,x_n)T \subseteq P$ tel que : $x^{k'} \in J$, pour tout $x \in P$.

Pour tout i : $1 \leq i \leq n$, $x_i \in J \subseteq P \subsetneq R$, d'où $x_i \in R$. On pose :

$$I = (x_1,\ldots,x_n)R \text{ et } k = 2k' > 0,$$

on a :

- $I \subseteq P$, I est un idéal de type fini de R,
- Pour tout $x \in P$, $x^{k'} \in J$ d'où $x^{k'} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ avec $a_i \in T$, $1 \leq i \leq n$.

$$x^k = (x^{k'})^2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i(a_i^2 x_i) + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i(2a_i a_j x_j)$$

or, les $a_i \in T$ et $x_i \in P \subsetneq R$, d'où $x^k \in I$, et par suite P est un SFT-idéal de R.

En particulier, lorsque $P = M$, il existe $J_1 = (y_1,\ldots,y_s)R$ et $k_1 > 0$ tel que : $x^{k_1} \in J_1$, pour tout $x \in M$.

- Si $M \subsetneq P$: $R_{/M} \simeq D$ (I.1. (b)).

$R_{/M}$ est donc un SFT-anneau. Ainsi, pour $P_{/M} \in \mathrm{Spec}(R_{/M})$, il existe :

$$\bar{I} = (\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_r) \subseteq P_{/M} \text{ et } k_2 > 0 \quad \text{tel que : } \bar{x}^{k_2} \in \bar{I},\ \forall\, \bar{x} \in P_{/M}.$$

Soit J : $(x_1,\ldots,x_r, y_1,\ldots,y_s)R$, et $k = k_1 k_2$. On a :

- $J \subseteq P$, est un idéal de type fini de R.
- Pour tout $x \in P$, on a :

$$x^{k_2} \in I + M \quad \text{d'où} : \quad x^{k_2} = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i + b, \quad \text{où} \quad a_i \in R \quad \text{et} \quad b \in M.$$

$$x^k = x^{k_1 k_2} = \Big(\sum_{i=1}^{r} a_i x_i + b\Big)^{k_1}$$

$$= \underbrace{\Big(\sum_{1}^{r} a_i x_i\Big)^{k_1}}_{\in J} + b^{k_1} + \underbrace{\sum_{1}^{r} a_i x_i}_{\in J} \ \underbrace{\Big(\sum \ldots\Big)}_{\in R}$$

or $b^{k_1} \in J_1 = (y_1,\ldots,y_s)R \subseteq J$. Ainsi $x^k \in J$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Supposons que R soit un SFT-anneau. $D \simeq R/M$ et donc D est un SFT-anneau, [[3], Prop. 2.3]. Soit $P \in \operatorname{Spec}(T)$, P est un idéal premier de R (I.2), d'où, il existe $k > 0$ et $J = (x_1,\ldots,x_m)R$ tel que : $x^k \in J$, pour tout $x \in P$. Posons : $I = (x_1,\ldots,x_m)T \subseteq P$, alors, $x^k \in I$ pour tout $x \in P$ et par suite T est un SFT-idéal.

❑

II - DIMENSION DES ANNEAUX DE SERIES FORMELLES SUR UN "D+M".

Dans toute la suite, on considère $V = K + M$, un anneau de valuation de dimension m, et $R = D + M$ où D est un sous-anneau de K. Tout d'abord, si V est de valuation non discrète ou si D n'est pas un SFT-anneau, l'anneau R[[X]] sera de dimension infinie (Th. I.2) et [[2], Th. 1]. On suppose donc que V est de valuation discrète de rang m, et D un SFT-anneau de dimension finie. Soit $(o) \subsetneq P_1 \subsetneq \ldots \subsetneq P_{m-1} \subsetneq M$ la chaîne de tous les idéaux premiers de R contenus dans M.

II.1. THEOREME - *Dans ces conditions on a :*

$$\dim R[[X]] = \dim D[[X]] + \dim V.$$

Pour montrer ceci, on établira les lemmes et les résultats suivants.

II.2. LEMME - *Pour tout* $i : o \leqslant i \leqslant m-1$ *, on a :*

$$(R/P_i[[X]])_{R/P_i - \{o\}} = (V/P_i[[X]])_{V/P_i - \{o\}} .$$

DEMONSTRATION - Pour tout i, $P_i \subsetneq M$;

$$\forall \bar{m} \in M/P_i \; ; \bar{m} \, . \, V/P_i[[X]] \subseteq M/P_i[[X]] \subsetneq R/P_i[[X]].$$

et l'égalité en découle.

A partir de ce lemme, on déduit le résultat suivant.

II.3. COROLLAIRE - *Pour tout* $Q \in \mathrm{Spec}(R[[X]])$ *tel que :* $Q' \cap R = P_i \subsetneq M$, *il existe* $Q' \in \mathrm{Spec}(V[[X]])$ *:*

$$Q' \cap R[[X]] = Q \;\; et \;\; Q' \cap V = P_i .$$

II.4. COROLLAIRE - *Pour tout* $i : o \leqslant i \leqslant m-1$ *, il n'existe pas trois idéaux premiers de* $R[[X]]$ *:* $Q_1 \subsetneq Q_2 \subsetneq Q_3$ *ayant la même trace* P_i *sur* R.

DEMONSTRATION - En effet, pour tout $i : o \leqslant i \leqslant m-1$:

$$(V/P_i[[X]])_{V/P_i - \{o\}} = (R/P_i[[X]])_{R/P_i - \{o\}}$$

et

$$\dim(V/P_i[[X]])_{V/P_i - \{o\}} = 1, \quad [[4], \text{Prop. } 5].$$

II.5. LEMME - *Pour tout* $1 \leqslant i \leqslant m-1$, *si* Q *est un idéal premier de* $R[[X]]$ *tel que :* $Q \subsetneq P_i[[X]]$, *alors il existe* $j < i$ *tel que* $Q = P_j[[X]]$ *, (et donc :* $(o) \subsetneq P_1[[X]] \subsetneq \ldots \subsetneq M[[X]]$ *est la seule chaîne saturée d'idéaux premiers de* $R[[X]]$ *contenus dans* $M[[X]]$, *d'où* $\mathrm{ht}\, M[[X]] = m$*).*

DEMONSTRATION - Soit $Q \in \mathrm{Spec}(R[[X]]) : Q \subsetneq P_i[[X]]$, $Q \cap R = P_j \subsetneq P_i$, il existe $Q' \in \mathrm{Spec}(V[[X]])$ tel que $Q = Q' \cap R[[X]]$ et $Q' \cap V = P_j$. Pour conclure, il suffit de montrer que $Q' \subsetneq M[[X]]$, et donc $Q' = P_j[[X]]$) [4]. Sinon, soit :

$$f(X) = \sum_{i \geqslant 0} a_i X^i \in Q' \setminus M[[X]] ,$$

$a_i \in V$. Soit i_0 minimal tel que : $a_{i_0} \notin M$. a_{i_0} est inversible dans V. On peut supposer que $a_{i_0} = 1$.

$$f(X) = \sum_{0}^{i_0 - 1} a_i X^i + X^{i_0} . g(X) \quad \text{où } g(X) \text{ est inversible dans } V[[X]].$$

$$f(X) . g(X)^{-1} = \Big(\sum_{i=0}^{i_0 - 1} a_i X^i \Big) . g(X)^{-1} + X^{i_0} .$$

$f(X) . g(X)^{-1}$ appartient à Q mais n'appartient pas à M[[X]], or $Q \subsetneq P_i[[X]] \subsetneq M[[X]]$ ce qui est absurde.

II.6. LEMME - *Dans l'anneau* R[[X]], *si* Q *est un idéal premier de hauteur* m + 1, *alors* Q *contient* M[[X]].

DEMONSTRATION - Ceci découle de II.3, II.4 et II.5.

DEMONSTRATION de II.1 - Grâce au fait que : $R[[X]]/M[[X]] \simeq D[[X]]$, on peut supposer que $\dim D[[X]] < \infty$.

Soit $s = \dim R[[X]]$; $(o) \subsetneq \dots \subsetneq Q_s$ une chaîne qui réalise la dimension de R[[X]]. $i = \text{ht } Q_i$. Q_{m+1} contient M[[X]], (II.6), et $\text{ht } Q_{m+1}/M[[X]] = 1$. On a :

$$\begin{aligned} \dim D[[X]] &= \dim R[[X]]/M[[X]] \\ &= \text{ht } Q_s/M[[X]] = s - m = \dim R[[X]] - \dim V. \end{aligned}$$

d'où $\dim R[[X]] = \dim D[[X]] + \dim V$.

❑

BIBLIOGRAPHIE

[1] **D.F. ANDERSON, A. BOUVIER, D.E. DOBBS, M. FONTANA, S. KABBAJ**, "On Jaffard domains".

[2] **J. ARNOLD**, "Krull dimension in Power Series Rings". T. A.M.S., 177 (1973), 299-304.

[3] **J. ARNOLD**, "Power series rings over Prüfer domains", Pacific J. Math. 44 (1973), 1-11.

[4] **J. ARNOLD**, "The caterian property of power series rings over a Prüfer domains", Proc. Ame. Math. Soc. (1985).

[5] **J.W. BREWER**, "Power series rings over commutative rings", Marcel Dekker - INC. (1983).

[6] **J. NACHAR**, "Exemple d'anneau caténaire", C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, Vol. VIII, (1986).