L. LESIEUR

**Un ou deux exercices sur les matrices symétriques**

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1988, fascicule 3B
, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1988___3B_1_0>

# UN OU DEUX EXERCICES SUR LES MATRICES SYMETRIQUES

par

L. LESIEUR

Soit $A \in M_n(K)$ une matrice carrée $n \times n$ à entrées dans un corps commutatif $K$ quelconque. On sait que $A$ et sa transposée ${}^tA$ sont semblables dans le groupe linéaire $GL(n,K)$ [1]. Je vais démontrer que la matrice de passage peut être choisie symétrique.

**THEOREME** 1. *$A$ étant une matrice $n \times n$ sur un corps commutatif $K$ quelconque* [2], *${}^tA$ sa transposée, il existe une matrice symétrique inversible $S \in M_n(K)$ telle que :*

$${}^tA = S^{-1}\, A\, S\ .$$

La démonstration passe par la forme réduite de Jordan.
Prenons d'abord le cas d'un corps algébriquement clos.
<u>$K$ algébriquement clos</u>. $A$ est semblable, dans le groupe linéaire $GL(n,K)$ à sa forme réduite de Jordan formée de blocs diagonaux :

$$J_p = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in K\ .$$

Considérons la matrice carrée symétrique inversible :

$$S_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est symétrique et inversible : $S_p \times S_p = I_p$ .

---

[1] On le démontre en remarquant que $A$ et ${}^tA$ ont les mêmes invariants.

[2] La caractéristique peut être non nulle et même égale à 2.

(Si $u$ est l'endomorphisme associé on a : $u(e_i) = e_{n-i}$, $i = 1,2,\dots,p$, d'où $u^2(e_i) = e_i$). Il en résulte $S_p^{-1} = S_p$ . Je dis que $S_p \times J_p$ est symétrique. En effet :

$$S_p\ J_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

On en déduit : ${}^t(S_p\ J_p) = S_p\ J_p = {}^tJ_p\ S_p$ d'où :

$${}^tJ_p = S_p^{-1}\ J_p\ S_p .$$

En juxtaposant les blocs diagonaux $J_p$ et $S_p$ on en déduit la relation :

(1) $\qquad {}^tJ = S^{-1}\ J\ S, \quad S^2 = I, \quad S$ symétrique [(1)].

Le théorème va en résulter aisément en revenant aux matrices données $A$ et ${}^tA$

$$J = P^{-1}\ A\ P, \quad P \in GL(n,K)$$

$${}^tJ = ({}^tP)({}^tA)({}^tP^{-1}) \Longrightarrow {}^tA = ({}^tP)^{-1}({}^tJ)\,{}^tP, \text{ d'où avec (1)}$$

$${}^tA = {}^tP^{-1}\ S^{-1}\ J\ S\ {}^tP = {}^tP^{-1}\ S^{-1}\ P^{-1}\ A\ P\ S\ {}^tP,$$

et en posant $\Sigma = P\ S\ {}^tP$, $\Sigma$ est symétrique $({}^t\Sigma = \Sigma)$ et

$${}^tA = \Sigma^{-1}\ A\ \Sigma\ , \quad \Sigma \text{ symétrique inversible.}$$

<u>K quelconque</u>. En considérant la clôture algébrique $\overline{K}$ de $K$, le résultat précédent prouve l'existence de $\Sigma$ symétrique inversible dans $GL(n,\overline{K})$, mais peut être pas dans $GL(n,K)$. (C'est vrai cependant pour $K = \mathbb{R}$, $\overline{K} = \mathbb{C}$).

La démonstration suivante ne dépend pas de la nature de $K$. Elle s'appuie sur la <u>forme rationnelle de Jordan</u> pour $A$, constituée de

---

(1) Cette égalité m'a été signalée par M. Contessa. Elle figure dans les solutions d'exercices du livre de Bertin [1] par M.P. Malliavin et A. Warusfeld [7] p.58. Elle est également suggérée dans les exercices de Bourbaki [2] § 5 exercice 2 et Appendice, exercices 1,a et 1,b.

blocs diagonaux :

$$J_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_p \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{p-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_{p-2} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_1 \end{pmatrix}$$

où $J_p$ est la <u>matrice compagnon</u> du polynôme caractéristique $f(x) = \det(x\, I_p - J_p) = x^p + \alpha_1 x^{p-1} + \dots + \alpha_{p-1} x + \alpha_p \in K[x]$.

Nous allons prendre une matrice symétrique $S_p$ inversible de façon que $S_p J_p$ soit symétrique. Après quelques tâtonnements on y arrive au moyen de l'identité suivante :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_1 & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 1 & \beta_1 & & \beta_{p-3} & \beta_{p-2} \\ 1 & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{p-2} & \beta_{p-1} \end{pmatrix}}_{S_p} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_p \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{p-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_{p-2} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_1 \end{pmatrix}}_{J_p}$$

$$= \begin{pmatrix} & & & & 1 & \beta_1 \\ & 0 & & 1 & \beta_1 & \beta_2 \\ & & & & \beta_2 & \beta_3 \\ & 1 & & & \vdots & \vdots \\ 1 & \beta_1 & & & \beta_{p-2} & \beta_{p-1} \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \beta_{p-1} & \beta_p \end{pmatrix}$$

où les $\beta_i$ , $i = 1,2,\dots,p$, sont liés aux $\alpha_i$ par les relations du système linéaire triangulaire :

$$(T) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 + \alpha_1 = 0 \\ \beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2 = 0 \\ \beta_3 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3 = 0 \\ \vdots \\ \beta_{p-1} + \alpha_1\beta_{p-2} + \alpha_2\beta_{p-3} + \dots + \alpha_{p-1} = 0 \\ \beta_p + \alpha_1\beta_{p-1} + \dots + \alpha_p = 0 \end{array} \right.$$

$S_p$ est symétrique et inversible (det $S_p = (-1)^p$ pour $n = 2p$ ou $n = 2p+1$) et $S_p\ J_p$ est symétrique d'où ${}^tJ_p = S_p\ J_p\ S_p^{-1}$ .

On termine la démonstration du théorème comme plus haut :

$${}^tA = \Sigma^{-1}\ A\ \Sigma\ ,\ \Sigma = P\ S^{-1}\ {}^tP \text{ symétrique inversible.}$$

<u>Remarque</u>. Les formules T ressemblent aux formules de Newton qui expriment les sommes de Newton en fonction des fonctions symétriques élémentaires. Elles sont même plus sympathiques car la caractéristique du corps K n'intervient pas et les $\beta_i$ $(i = 1,\dots,p)$ sont des générateurs de l'algèbre des polynômes symétriques en $x_i$, $i = 1,\dots,p$, au même titre que les polynômes symétriques élémentaires. Si on associe aux $\beta_i$ le polynôme $g(x) = x^p + \beta_1 x^{p-1} +\dots+ \beta_{p-1}x + \beta_p$ la correspondance entre les polynômes f et g est symétrique.

Le théorème 1 entraîne le suivant :

**THEOREME** 2. *Toute matrice* $A \in M_n(K)$ *est un produit* $A = SS'$ *de deux matrices* $n \times n$ *symétriques, l'un des facteurs (au choix) pouvant être pris inversible. Si* A *est inversible,* S *et* S' *le sont aussi* [(1)].

En effet, considérons une matrice symétrique inversible S telle que $A\ S = \Sigma$ soit symétrique (Théorème 1 avec $\Sigma = S\ {}^tA$). On en déduit $A = \Sigma\ S^{-1}$ (produit de 2 matrices symétriques avec un deuxième facteur inversible). De même :

$$A = S\ S^{-1}\ A = A\ \Sigma' \quad \text{avec} \quad \Sigma' = S^{-1}\ A = {}^tA\ S^{-1} \text{ symétrique.}$$

Une autre formulation du théorème 2 est la suivante :

**COROLLAIRE** 1. *Soit* E *l'espace vectoriel sur* K *des matrices* $n \times n$ *symétriques. L'application* $(A,B) \longrightarrow AB$ *est une application bilinéaire surjective de* $E \times E$ *sur* $M_n(K)$.

---

(1) Il serait intéressant de donner un procédé de calcul pouvant être programmé sur machine. Un autre problème, suggéré par le Professeur Giuseppe Valla (Universita di Genova), est une extension partielle du résultat lorsque K est remplacé par un anneau local.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] J.E. et M.J. BERTIN. *Algèbre linéaire et géométrie classique*, Masson 1981.

[2] N. BOURBAKI. *Algèbre, Chap. VII, § 5, exercice 2 et Appendice, exercices 1.a et (1.b)* (1).

[3] A. CHATELET. *Algèbre et Arithmétique Supérieure*. PUF, 3 volumes

[4] N. JACOBSON. *Basic Algebra*, vol. I, Chap. 3, 1980.

[5] L. LESIEUR, R. TEMAM, J. LEFEBVRE. *Compléments d'Algèbre Linéaire*. Armand Colin, 1978.

[6] C.C. Mac DUFFEE. *The theory of Matrices*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, reprinted Chelsea, New York 1956. (500 références au total mises au bas des pages).

[7] M.P. MALLIAVIN et A. WARUSFEL. *Algèbre linéaire et géométrie classique. Exercices*, Masson 1981.

[8] M. MARCUS. *Finite dimensional linear Algebra*, Part I, M. Dekker, New York 1975.
*Introduction to modern Algebra*, Chap. 4, 1978.

[9] S. WARNER. *Modern Algebra*, vol. II, Chap. IX, 1965.

[10] J.H.M. WEDDERBURN. *Lectures on Matrices*, reprinted 1979, Ann Arbor London. (549 références allant de 1853 à 1933).

[11] F.R. GANTMACHER. *Théorie des matrices*, t.1 et 2, Dunod 1966. Traduit du Russe, 396 références.


(1) Dans (1,b) on demande de démontrer que sur $\mathbb{Z}$, $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas semblable à sa transposée.