

A. COSTE

P. DAZORD

A. WEINSTEIN

Groupeïdes symplectiques

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1987, fascicule 2A
, p. 1-62

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1987__2A_1_0

© Université de Lyon, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GROUPOIDES SYMPLECTIQUES

par A. COSTE ⁽¹⁾, P. DAZORD ⁽¹⁾, A. WEINSTEIN ⁽²⁾

**(1) U.A CNRS 040746
Université Claude Bernard (Lyon 1)
43, bd du 11 novembre 1918 - VILLEURBANNE Cedex**

**(2) Department of Mathematics
University of California
BERKELEY - California 94720 - ETATS UNIS**

SOMMAIRE

INTRODUCTION

NOTATIONS ET REMARQUES GENERALES

I - GROUPOIDES - GROUPOIDES DE LIE

- § 1. Un exemple : groupoïde grossier sur un ensemble
- § 2. Définitions algébriques et premières propriétés
- § 3. Extension aux parties d'un groupoïde
- § 4. Groupoïdes de Lie
- § 5. Exemples de groupoïdes

II - GROUPOIDES SYMPLECTIQUES

- § 1. Définition
- § 2. Algébroïdes de Lie d'un groupoïde symplectique
- § 3. Premiers exemples
- § 4. Cotangent d'un groupoïde
- § 5. Autres exemples

III - TROISIEME THEOREME DE LIE LOCAL POUR LES VARIETES DE POISSON

- § 1. Réalisations symplectiques
- § 2. Algébroïdes de Lie d'une variété de Poisson et troisième théorème de Lie.
- § 3. Réalisations symplectiques et quantification.

APPENDICE

- § 1. Réduction symplectique
- § 2. Relations canoniques
- § 3. Méthodes des caractéristiques

BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION

La notion de groupoïde algébrique est due à Brandt. Son utilisation en géométrie remonte à C. Ehresmann [E] : le premier groupoïde qu'il ait exhibé est le groupoïde de jauge d'un fibré principal.

Un groupoïde G est un ensemble muni d'une loi pas toujours définie, qui vérifie des axiomes analogues à ceux des groupes ; l'unique unité d'un groupe est remplacée par un sous-ensemble d'unités G_0 et G est muni de deux applications (but et source) β et α à valeurs dans G_0 . Le groupoïde est de Lie si de plus toutes les opérations prennent place dans la catégorie des variétés, α et β étant des submersions. Sur ce point nous rompons avec la terminologie usuelle qui réserve l'appellation groupoïde de Lie aux groupoïdes différentiels transitifs. La raison en est qu'à tout groupoïde de Lie $G \rightrightarrows G_0$ on associe canoniquement un algèbroïde de Lie, au sens de J. Pradines, sur le fibré normal de $G_0 \vee G_0 \longrightarrow G_0$ et que cette correspondance généralise la correspondance groupe de Lie \rightarrow Algèbre de Lie. D'autre part les groupoïdes que nous construisons ne sont pas, en général, transitif.

Un groupoïde symplectique Γ est un groupoïde de Lie muni d'une structure de variété symplectique compatible avec la multiplication au sens suivant : le graphe de la multiplication est une sous-variété lagrangienne de la variété symplectique produit $(-\Gamma) \times \Gamma \times \Gamma$ où $(-\Gamma)$ désigne Γ munie de la structure symplectique opposée. Les unités de Γ forment une sous-variété lagrangienne de Γ ce qui entraîne qu'en ce sens le seul "groupe symplectique" est le groupe trivial. C'est donc une notion essentiellement "groupoïde" à la différence de la notion de groupoïde de Poisson-Drinfeld : (Γ, Λ) est un groupoïde de Poisson si (Γ, Λ) est une variété de Poisson, si Γ_2 ensemble des couples composables est une sous-variété de Poisson de $\Gamma \times \Gamma$ et si la multiplication $\Gamma_2 \rightarrow \Gamma$ est un morphisme de Poisson. En ce sens, les groupes de Poisson sont ceux introduits par Drinfeld. [Dr. 1983].

Un exemple remarquable de groupoïde symplectique est fourni par le groupoïde cotangent : si $G \rightrightarrows G_0$ est un groupoïde de Lie, $T^*G = \Gamma$ avec sa structure symplectique standard est un groupoïde symplectique d'unités $\vee^* G_0$ fibré conormal de G_0 .

dans G . Ainsi \mathcal{V}^*G_0 se trouve muni d'une structure de Poisson particulière appelée de Lie Poisson qui généralise le cas du dual d'une algèbre de Lie. En effet cette structure induit sur les sections de $\mathcal{V}G_0$ la structure d'algèbroïde de Lie de G .

$\Gamma = T^*G$ a également une autre structure de groupoïde symplectique pour l'addition dans les fibres. Ces deux structures sont compatibles et $\Gamma = T^*G$ est un groupoïde double au sens de C. Ehresmann.

Si G est un groupe, la première structure de groupoïde symplectique est celle sur $T^*G \rightrightarrows \underline{G}^*$ fournie par les moments des actions à gauche et à droite de G .

Le problème se pose inversement de savoir si, (Γ_0, Λ_0) étant une variété de Poisson, on peut lui associer un groupoïde symplectique Γ dont Γ_0 est l'espace des unités. Le problème se décompose en deux

(1) réaliser Γ_0 par $\alpha : (\Gamma, \sigma) \rightarrow (\Gamma_0, \Lambda_0)$ où α est un morphisme de Poisson, Γ_0 étant identifiée à une sous-variété lagrangienne de Γ ;

(2) construire sur Γ une loi de groupoïde symplectique.

Pour tout point $x_0 \in \Gamma_0$, le problème (1) a toujours une solution au voisinage de x_0 [W 1983].

Inversement il résulte de nombreux travaux [V.E.R.1964][Do. La 1966] [MP 1980] qu'il est illusoire même dans le cadre des Q -variétés d'espérer une réponse positive au problème (2). Ceci a conduit Van Est à introduire [V.E. 1984] la notion de groupoïde local qui généralise la situation des voisinages de l'identité d'un groupe. Le principal résultat de cet article est de donner, dans le cadre des groupoïdes locaux, une réponse positive à la deuxième question. (Théorème III. 1.4 et III. 2.1).

Afin de préciser l'analogie avec le troisième théorème de Lie local, on montre qu'à toute variété de Poisson (Γ_0, Λ_0) est associée canoniquement un algèbroïde de Lie sur $T^*\Gamma_0 \rightarrow \Gamma_0$ de morphisme $\Lambda_0^\# : T^*\Gamma_0 \rightarrow T\Gamma_0$. Inversement toute structure d'algèbroïde pour laquelle $\Lambda_0^\#$ définit un tenseur antisymétrique sur Γ_0 et telle que les 1-formes fermés sur Γ_0 constituent une sous-algèbre de Lie des sections de $T^*\Gamma_0$, est la structure canonique d'algèbroïde d'une variété de Poisson.

Ainsi on a prouvé que tout tel algèbroïde de Lie est l'algèbroïde de Lie d'un groupoïde symplectique local, ce qui étend aux variétés de Poisson quelconque le résultat constituant le troisième théorème de Lie vu sous forme symplectique, à savoir la réalisation du dual d'une algèbre de Lie par le cotangent d'un groupe. Le résultat obtenu est à rapprocher d'un théorème de J. Pradines [Pr. 1968] qui affirme que tout algèbroïde de Lie est l'algèbroïde d'un groupoïde local. Ici le résultat obtenu est plus fin : tout algèbroïde "symplectique" est l'algèbroïde d'un groupoïde symplectique.

Comme il a été dit, en général (Γ, σ) ne sera pas un groupoïde. On donne cependant une condition fort simple, (Γ, σ) étant construit, pour savoir si sa structure algébrique est celle d'un groupoïde. (Proposition III.1.2').

La notion de groupoïde symplectique permet de répondre à plusieurs questions posées par Karasev et Maslov [K.M. 1981][K.M. 1984] sur "l'algèbre enveloppante universelle" pour les approximations quasi-classiques des relations de commutations non linéaires. En particulier dans [K. 1986] Karasev pose les questions auxquelles répondent le théorème III.1.4 et la proposition III. 1.2'.⁽¹⁾ Sa construction des interpolations prend place dans le cadre géométrique de la proposition III. 1.2' c'est-à-dire où l'on a effectivement une structure de groupoïde. En fait la lecture des papiers de Karasev et Maslov est un des principaux stimuli de ce travail ; suivant leur approche, il semble qu'une "quantification" convenablement développée pour les groupoïdes symplectiques fournirait un outil pour l'étude des relations de commutation non linéaires analogue à l'usage de la topologie et de l'analyse sur les groupes de Lie globaux dans l'étude des relations de commutation linéaires. Une telle théorie rendrait plus claires les relations, qui sont jusqu'ici surtout des analogies, entre groupoïdes symplectiques, produit * [B.F.F.L.S 1977] et les algèbres d'opérateurs en géométrie différentielle non commutative [C. 1982].

De façon plus immédiate, la notion de groupoïde symplectique unifie beaucoup de constructions en géométrie symplectique et de Poisson ; en particulier elle fournit un cadre pour l'étude de l'ensemble des réalisations symplectiques d'une variété de Poisson donnée.

(1) Maslov (communication privée) annonce des résultats voisins du théorème III.1.4 dûs à Karasev notamment.

Cet article, volontairement limité aux aspects géométriques de la théorie, trouve son origine dans un cours donné par A. Weinstein à l'Université Claude Bernard de Lyon, cours dont les résultats ont été annoncés dans [W. 1987] . De nombreuses discussions avec Jean Pradines ont permis de préciser la problématique et de clarifier les concepts utilisés. Nous lui adressons nos chaleureux remerciements ainsi qu'à D. Sondaz qui nous a assisté dans l'élaboration du manuscrit.

L'article est divisé en trois chapitres et un appendice. Un premier chapitre contient le cadre algébrique-différentiel, le second chapitre étudie plus précisément les groupoïdes symplectiques et la manière d'en construire. Le troisième chapitre est centré sur l'application aux réalisations symplectiques d'une variété de Poisson et au troisième théorème de Lie local. Un appendice regroupe quelques notions classiques de calcul lagrangien utilisées dans le cours du texte et une présentation succincte de la méthode des caractéristiques.

A.C. - P.D. - A.W.

NOTATIONS ET REMARQUES GENERALES

1. L'exemple du groupoïde d'holonomie suffit pour indiquer que l'on ne peut en général imposer la séparation aux variétés utilisées. Quand la variété considérée sera séparée, paracompacte, etc... ceci sera toujours spécifié.
2. Pour toute application $f \in C^\infty$ entre variétés (M, N) $T_x f$ désigne l'application tangente $T_{x_0} f$ l'application tangente en x_0 , $f_{x_0}^* = {}^t T_{x_0} f$ sa transposée.
3. Pour tout fibré $C^\infty E \rightarrow M$ $\text{sect}(M, E)$ désigne l'espace des sections C^∞ de $E \rightarrow M$. Si N est une sous-variété de M et j l'inclusion de N dans M E_N désigne le fibré image réciproque de E par j .
4. Pour la théorie des variétés de Poisson on se reportera à [Lic. 1977] et [W. 1983]. Si (P, Λ) est une variété de Poisson de 2-tenseur Λ , on notera $\Lambda^\#$ le morphisme fibré de T^*P dans TP défini par $\omega \rightarrow \iota_\Lambda \omega$ où ι désigne systématiquement le produit intérieur. Dans le cas où (P, Λ) est une variété symplectique (i.e. Λ de rang maximum), si σ est la 2-forme symplectique, l'isomorphisme réciproque de $\Lambda^\#$ est $X \rightarrow -\iota_X \sigma$.
5. Pour tout groupe de Lie G on notera \underline{G} son algèbre de Lie et \underline{G}^* le dual de \underline{G} .
6. Pour tout sous-espace vectoriel V de $T_x M$ où (M, σ) est symplectique, V^σ désigne l'orthogonal symplectique de V dans $(T_x M, \sigma)$.

CHAPITRE I

Gropoïdes - Gropoïdes de Lie

§ 1. UN EXEMPLE : GROUPOÏDE GROSSIER

Etant donné un ensemble X , les applications de X dans lui-même seront pour nous, identifiées à leur graphe ; si $a : X \rightarrow X$ est une application nous écrirons son graphe $\gamma_a = \{(a(x), x), x \in X\}$ dans l'ordre inverse de l'écriture usuelle.

Si a et b sont deux applications de X dans X , (z, x) est dans $\gamma_{a \circ b}$ s'il existe un y dans X tel que (z, y) soit dans γ_a et (y, x) dans γ_b ; en fait, on peut composer de cette façon deux parties quelconques de $X \times X$ (c'est-à-dire des relations). Si on "oublie" que $\Gamma = X \times X$ est un produit cartésien on retrouve l'opération de composition de ses parties en considérant sur Γ la structure algébrique suivante :

On dit que les éléments (x, y) et (w, z) de Γ sont composables si $y=w$ et on note Γ_2 l'ensemble des paires composables ; pour $((x, y), (y, z))$ dans Γ_2 on appelle (x, z) le produit qu'on note $(x, y) \cdot (y, z)$.

On a donc une multiplication partiellement définie dans $\Gamma \times \Gamma$, une partie $\Gamma_0 = \{(x, x), x \in X\}$ d'unités, des projections $\beta : \beta(x, y) = (x, x)$ et $\alpha : \alpha(x, y) = (y, y)$ de Γ dans Γ_0 , une opération d'inversion $i : i(x, y) = (y, x)$ avec des propriétés évidentes :

$$\begin{aligned} \beta(x, y) \cdot (x, y) &= (x, y) \quad , \quad (x, y) \cdot \alpha(x, y) = (x, y) \quad , \\ (x, y) \cdot i(x, y) &= \beta(x, y) \quad , \quad i(x, y) \cdot (x, y) = \alpha(x, y) \end{aligned}$$

de plus, la partie Γ_2 est constituée des $((x, y), (w, z))$ tels que $\alpha(x, y) = \beta(w, z)$.

Si maintenant A et B sont deux parties de Γ , on peut définir $A \cdot B$ comme l'ensemble des (x, z) pour lesquels existe y avec $(x, y) \in A, (y, z) \in B$. On munit ainsi $\mathcal{P}(\Gamma)$ d'une structure de demi-groupe dont les éléments inversibles sont les graphes des bijections de X sur X .

§ 2. DEFINITIONS ALGEBRIQUES ET PREMIERES PROPRIETES.

En suivant l'exemple du § 1 , on appellera structure de groupoïde sur un ensemble Γ la donnée de deux applications α et β de Γ dans lui-même de même image Γ_0 d'une multiplication m définie sur la partie Γ_2 de $\Gamma \times \Gamma$ formée des couples (x,y) tels que $\beta(y) = \alpha(x)$ et d'une application i de Γ dans Γ (l'inversion), vérifiant les axiomes suivants :

(Ass) : si l'un des produits $m(x,m(y,z))$ et $m(m(x,y),z)$ est défini, l'autre l'est aussi et lui est égal.

(Id) : les produits $m(\beta(x),x)$ et $m(x,\alpha(x))$ sont définis et égaux à x .

(Inv) : $m(x,i(x))$ est défini et égal à $\beta(x)$ et $m(i(x),x)$ est défini et égal à $\alpha(x)$.

Pour simplifier les écritures on notera $x.y$ au lieu de $m(x,y)$ et x^{-1} au lieu de $i(x)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. Une égalité $z = x.y$ signifiera que le produit $x.y$ est défini et égal à z .

LEMME : Pour tout x $\alpha(\beta(x)) = \beta(x)$ et $\beta(\alpha(x)) = \alpha(x)$ (1).

C'est la traduction de l'existence de $\beta(x).x$ et de $x.\alpha(x)$.

PROPOSITION 2.1 : Si $(x,y) \in \Gamma_2$, $\beta(x.y) = \beta(x)$ et $\alpha(x.y) = \alpha(y)$ (2)

De plus pour tout x de Γ $\alpha(\alpha(x)) = \alpha(x)$ et $\beta(\beta(x)) = \beta(x)$ (3),

$\alpha(x^{-1}) = \beta(x)$ et $\beta(x^{-1}) = \alpha(x)$ (4).

DEMONSTRATION : Par (id) $x.y = (\beta(x).x).y = \beta(x).(x.y)$ par (Ass) donc $\alpha(\beta(x)) = \beta(x.y)$ et le lemme donne la première partie de (2) ; la démonstration de la deuxième partie est semblable ; les formules (3) résultent de l'axiome (Id) et les formules (4) de (Inv).

COROLLAIRE : $\alpha(x).\alpha(x) = \alpha(x)$ et $\beta(x).\beta(x) = \beta(x)$.

PROPOSITION 2.2 : (règle de simplification) : Si $x.y_1 = x.y_2$ alors $y_1 = y_2$ et si $x_1.y = x_2.y$ alors $x_1 = x_2$.

DEMONSTRATION : Si $x.y_1 = x.y_2$, $x^{-1}.(x.y_1) = x^{-1}.(x.y_2)$ et par (Ass) et (Inv) $\alpha(x).y_1 = \alpha(x).y_2$ et comme $\alpha(x) = \beta(y_1) = \beta(y_2)$, $y_1 = y_2$ et de même pour la simplification à droite.

COROLLAIRE : $(x^{-1})^{-1} = x$.

En effet $(x^{-1})^{-1}.x^{-1} = \alpha(x^{-1}) = \beta(x) = x.x^{-1}$.

REMARQUE : Γ_0 est exactement l'ensemble des points fixes de α (ou de β). Si $x = \beta(x')$, $\beta(x) = \beta(\beta(x')) = \beta(x') = x$.

CAS PARTICULIERS.

1 - Si Γ_0 est réduit à un élément, Γ est un groupe car la multiplication est alors partout définie et l'élément neutre est l'élément de Γ_0 .

2 - Si, à l'opposé, $\Gamma = \Gamma_0$, α et β sont l'application identique (par la remarque ci-dessus) et donc les seuls produits définis sont les $x.x = x$, on appellera groupoïde nul un tel groupoïde.

3 - Plus généralement, si $\alpha = \beta$, $\alpha^{-1}(x)$ est un groupe pour chaque x de Γ_0 ; c'est le cas, par exemple, d'un fibré vectoriel pour lequel Γ_0 est la section nulle et l'opération de groupoïde est l'addition dans les fibres.

DEFINITION 2.1 : Si Γ est un groupoïde, on appelle groupe d'isotropie d'un élément $u \in \Gamma_0$ le groupe $\Gamma_u = \alpha^{-1}(u) \cap \beta^{-1}(u)$.

DEFINITION 2.2 : L'ensemble $\beta(\alpha^{-1}(x))$, qui est identique à $\alpha(\beta^{-1}(x))$, $x \in \Gamma$ s'appelle orbite de Γ issue de x . L'ensemble des orbites de Γ forme une partition de Γ_0 .

DEFINITION 2.3 : Etant donné deux groupoïdes Γ et Γ' , un morphisme de groupoïdes de Γ dans Γ' est une application $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ telle que si x et y sont multipliables dans Γ , $f(x)$ et $f(y)$ le sont dans Γ' et $f(x.y) = f(x).f(y)$.

La règle de simplification montre que f commute aux projections, par exemple : $\beta'(f(x)).f(x) = f(x) = f(\beta(x).x) = f(\beta(x)).f(x)$, donc f conserve les β -fibres et induit une application $f_0 : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma'_0$ sur les unités.

EXEMPLE : L'application (β, α) est un morphisme de groupoïdes de Γ dans le groupoïde grossier $\Gamma_0 \times \Gamma_0$. On dit que le groupoïde est principal si (β, α) est injective.

REMARQUE : En d'autres termes, on peut dire qu'un groupoïde est une petite catégorie dans laquelle toutes les flèches sont inversibles, les morphismes de groupoïdes sont alors les foncteurs entre deux telles catégories.

§ 3. EXTENSION AUX PARTIES D'UN GROUPOÏDE.

Comme on l'a fait dans l'exemple du § 1, on peut définir sur $\mathcal{P}(\Gamma)$ une opération qui en fait un demi-groupe unitaire.

Si A et B sont deux parties de Γ , $A.B = m((A \times B) \cap \Gamma_2)$.

L'axiome d'associativité implique l'associativité pour cette opération pour laquelle Γ_0 est élément neutre.

Si on note A^{-1} l'ensemble des inverses des éléments de A , le produit $A.A^{-1}$ est l'ensemble des $y.x^{-1}$ avec $\alpha(y) = \beta(x^{-1}) = \alpha(x)$; si donc $\alpha|A$ est bijective $x = y$ et $y.x^{-1} = x.x^{-1}$ est dans Γ_0 ; si de plus $\beta|A$ est bijective et si $u \in \Gamma_0$, $(\beta|A)^{-1}(u) = a \in A$ et $a.a^{-1} = \beta(a) = u$.

On a un calcul analogue pour $A^{-1}.A$.

DEFINITION 3.1 : On appelle bissection une partie A de Γ pour laquelle les restrictions de α et β sont bijectives de A sur Γ_0 .

PROPOSITION 3.1 : L'ensemble $Gr(\Gamma)$ des bisections d'un groupoïde Γ est un groupe.

Les règles du calcul des sources et des buts montrent en effet que le produit de deux bisections en est une et Γ_0 est l'élément neutre. $Gr(\Gamma)$ est le groupe des éléments inversibles du demi-groupe $\mathcal{P}(\Gamma)$. Le groupe $Gr(\Gamma)$ opère de façon naturelle sur Γ_0 , à gauche et à droite par

$$\begin{aligned} A \circ u &= \beta((\alpha|A)^{-1}(u)) \\ u \circ A &= \alpha((\beta|A)^{-1}(u)). \end{aligned}$$

Ces actions ne sont pas en général effectives, par exemple $u \circ A = u$ si et seulement si $(\alpha|A)^{-1}(u) \in \Gamma_u \cap A$; par contre $Gr(\Gamma)$ agit de façon effective sur Γ par deux actions, l'une à droite et l'autre à gauche, commutantes entre elles, définies par :

$$A_{\rho}(x) = A.x = (\alpha|_A)^{-1}(\beta(x)).x$$

$$A_{\Gamma}(x) = x.A = x.((\beta|_A)^{-1}(\alpha(x))).$$

L'action est effective car si $A.x = x$ pour tout x et si $a \in A$,

$$a = a.\alpha(a) = A.\alpha(a) = \alpha(a) \text{ donc } a \in \Gamma_0.$$

REMARQUE : Ces opérations sont des cas particuliers de la multiplication sur l'ensemble des parties de Γ car $A.x = A.\{x\}$ et $x.A = \{x\}.A$.

PROPOSITION 3.2 : L'application α (resp. β) de Γ dans Γ_0 est invariante par l'action à gauche (resp. à droite) de $\text{Gr}(\Gamma)$ et équivariante pour les actions à droite (resp. à gauche) de $\text{Gr}(\Gamma)$ sur Γ et Γ_0 .

En d'autres termes :

$$\alpha(A.x) = \alpha(x) \quad \text{et} \quad \alpha(x.A) = \alpha(x).A$$

$$\beta(x.A) = \beta(x) \quad \text{et} \quad \beta(A.x) = A.\beta(x).$$

§ 4. GRUPOÏDES DE LIE

DEFINITION 4.1 : Un groupoïde de Lie Γ , est une variété différentielle (peut-être non séparée) munie d'une structure de groupoïde telle que :

- 1°) L'ensemble Γ_0 des unités est une sous-variété séparée.
- 2°) Les applications α et β sont différentiables et sont des submersions.
- 3°) La multiplication est une application différentiable de Γ_2 dans Γ (il résulte de 2°) que Γ_2 est une sous-variété de $\Gamma \times \Gamma$).
- 4°) L'application $x \rightarrow x^{-1}$ est un difféomorphisme de Γ sur lui-même.

On dira que le groupoïde de Lie est transitif si l'application $\alpha \times \beta : \Gamma \rightarrow \Gamma_0 \times \Gamma_0$ est une submersion surjective.

N.B. - La terminologie traditionnelle réserve le nom de groupoïde aux groupoïdes appelés ici transitifs. Cette modification de l'usage sera justifiée plus loin.

DEFINITION 4.2 : On dit qu'un groupoïde est α -connexe si les α -fibres sont connexes (par 4 les β fibres le sont alors également).

On appelle composante α -connexe de Γ , et on note Γ_α , la réunion des composantes connexes des points de Γ_0 dans les α -fibres de Γ .

Une notion étroitement liée à celle de groupoïde est celle de feuilletage de Stefan.

DEFINITION 4.3 : Une distribution C^∞ D sur une variété M , au sens de Sussmann [Su.1973], est la donnée pour tout x_0 de M d'un sous-espace D_{x_0} de $T_{x_0}M$ tel que : il existe un nombre fini k_0 , dépendant de x_0 , de champ de vecteurs C^∞ de M , $(X_i)_{1 \leq i \leq k_0}$, tels que D_{x_0} soit engendré par les vecteurs $(X_i(x_0))_{1 \leq i \leq k_0}$ et que pour tout x de M , $X_i(x) \in D_x$.

DEFINITION 4.4 : Un feuilletage de Stefan [St 1974] est une distribution C^∞ D de M vérifiant l'une des propriétés équivalentes suivantes qui constituent le théorème de Frobenius-Sussmann [Su, 1973] (cf. [D 1985] également).

(1) Par tout point il passe une variété intégrale S de D (i.e. telle que $\forall x \in S \ T_x S = D_x$) maximale unique.

(2) Il existe une sous-algèbre de Lie g de $\text{Sect}(M, TM)$ telle que

a) $\forall x \in M \ D_x = g(x)$ ensemble des valeurs en x des champs appartenant à g .

b) g est "complète", i.e. pour tout champ $X \in g$ de flot φ_t , pour tout champ $Y \in g, \varphi_{t*} Y$ est un champ local de g .

Si g_0 désigne la sous-algèbre de Lie de g formée des champs à supports compacts, la condition (2) est équivalente à la condition (2)₀ portant sur g_0 , sous la seule réserve que pour tout $x, g_0(x) \equiv g(x)$.

Enfin si S est la feuille de x_0 , tout point x de S est atteignable par un produit de flots de champs de g (resp. g_0).

THEOREME 4.1 : [P 1985]

- (i) La composante α -connexe Γ_α de Γ est un sous groupoïde ouvert de Γ .
 Les orbites de Γ_α dans Γ_0 constituent un feuilletage de Stefan.
- (ii) Pour toute unité u de Γ_0 , le groupe d'isotropie Γ_u est un groupe de Lie.
- (iii) Si Γ est α -connexe et si S_u est l'orbite de u , $u \in \Gamma_0^-$, $\beta : \bar{\alpha}^{-1}(u) \rightarrow S_u$ (resp. $\alpha : \bar{\beta}^{-1}(u) \rightarrow S_u$ est un Γ_u fibré principal pour l'action naturelle de Γ_u dans $\bar{\alpha}^{-1}(u) : \Gamma_u \times \bar{\alpha}^{-1}(u) \rightarrow \bar{\alpha}^{-1}(u)$ $(\gamma, x) \rightarrow x\gamma$; (resp. par l'action $\Gamma_u \times \bar{\beta}^{-1}(u) \rightarrow \bar{\beta}^{-1}(u)$ $(\gamma, x) \rightarrow \bar{\gamma}^{-1}.x$). En particulier $\bar{\alpha}^{-1}(u)$ et $\bar{\beta}^{-1}(u)$ sont des sous-variétés séparées de Γ .
- (iv) Γ est une variété séparée si et seulement si Γ_0 est fermé dans Γ .

A la différence des groupes, les translations à droite et à gauche ne sont pas partout définies.

Si $x_0 \in \Gamma$ on notera R_{x_0} l'application $y \rightarrow y.x_0$ de $\bar{\alpha}^{-1}(\beta(x_0))$ dans $\bar{\alpha}^{-1}(\alpha(x_0))$ qui est un difféomorphisme.

De même $L_{x_0} : y \rightarrow x_0.y$ est un difféomorphisme de $\bar{\beta}^{-1}(\alpha(x_0))$ dans $\bar{\beta}^{-1}(\beta(x_0))$.

Il est naturel d'introduire deux sous-algèbres de Lie de l'algèbre des champs C^∞ sur Γ :

$\mathcal{L}(\Gamma)$, algèbre de Lie des champs invariants à gauche, est constituée des champs X qui sont dans le noyau de $T\beta$ et tels que pour tout x_0 , en restriction à la sous-variété $\bar{\beta}^{-1}(\alpha(x_0))$

$$TL_{x_0}(X) = X \circ L_{x_0} .$$

$\mathcal{R}(\Gamma)$, algèbre de Lie des champs invariants à droite, est constituée des champs Y qui sont dans le noyau de $T\alpha$ et tels que pour tout x_0 , en restriction à la sous-variété $\bar{\alpha}^{-1}(\beta(x_0))$

$$TR_{x_0}(Y) = Y \circ R_{x_0} .$$

Les flots des champs de $\mathcal{L}(\Gamma)$ commutent aux translations à gauche, ceux de $\mathcal{R}(\Gamma)$ aux translations à droite. De ceci on déduit que, translation à gauche et à droite commutant, $[\mathcal{L}(\Gamma), \mathcal{R}(\Gamma)] \equiv 0$.

L'introduction de la notion d'algébroïde de Lie due à Pradines [P 1976] va clarifier les analogies entre groupes et groupoïdes de Lie et justifier la terminologie adoptée.

DEFINITION 4.5 : *Un algébroïde de Lie sur une variété M est un triplet constitué d'un fibré vectoriel C^∞ de base $M : E \rightarrow M$, d'une structure de \mathbb{R} -algèbre de Lie sur l'espace des sections C^∞ de E, $\text{Sect}(M, E)$, dont on note $[\cdot, \cdot]$ le crochet, et d'un morphisme ρ de fibrés vectoriels C^∞ de E dans TM tels que :*

(i) *l'application induite entre sections :*

$\tilde{\rho} : \text{Sect}(M, E) \rightarrow \text{Sect}(M, TM)$ *est un morphisme d'algèbres de Lie.*

(ii) *pour toute fonction $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, pour tout couple (X, Y) de sections C^∞ de E,*

$$[X, fY] = f[X, Y] + (\tilde{\rho}(X).f)Y.$$

On montre [P. 1967] que la sous-algèbre de Lie $\tilde{\rho}(\text{Sect}(M, E))$ de $\text{Sect}(M, TM)$ définit un feuilletage de Stefan.

Un algébroïde de Lie est transitif s'il n'a qu'une seule feuille : c'est le cas de l'algébroïde de Lie canoniquement associé à un G-fibré principal sur une variété M connexe, $E(G) \xrightarrow{\pi} M$. Si \mathcal{E} désigne le fibré vectoriel de base M quotient de $TE(G)$ par l'action à droite de G, \mathcal{E} équipé du crochet des champs invariants à droite et de $T\pi : \mathcal{E} \rightarrow TM$ est un algébroïde de Lie transitif. [P. 1967].

Si $\Gamma \xrightarrow[\alpha]{\beta} \Gamma_0$ est un groupoïde de Lie, les sous-algèbres de Lie $\mathcal{L}(\Gamma)$ et

$\mathcal{R}(\Gamma)$ de $\text{Sect}(\Gamma, T\Gamma)$ vont permettre d'associer à Γ deux algébroïdes de Lie opposés.

Soit E_α le fibré vectoriel sur Γ_0 dont les fibres sont les noyaux de $T\beta|_{T\Gamma_0} \Gamma$. $\mathcal{L}(\Gamma)$ étant constitué de champs invariants à gauche, $\mathcal{L}(\Gamma)$ est isomorphe à $\text{Sect}(\Gamma_0, E_\alpha)$ qui est donc muni ainsi d'une structure d'algèbre de Lie locale. D'autre part, par construction même, tout champ $X \in \mathcal{L}(\Gamma)$ est α -projetable et d'image $T\alpha(X|_{\Gamma_0})$. On vérifie aisément la condition (ii) sur $\text{Sect}(\Gamma_0, E_\alpha)$. $\mathcal{L}(\Gamma)$ permet donc de munir E_α

d'une structure d'algébroïde de Lie. Mais β étant une submersion, E_β est canoniquement isomorphe au fibré normal $\nu\Gamma_\beta$ de Γ_β dans Γ . Par transport de structure sur $\nu\Gamma_\beta$ on a donc prouvé, en notant α par abus de notation l'application de $\nu\Gamma_\beta \rightarrow TM$ déduite de l'isomorphisme $\nu\Gamma_\beta \simeq E_\alpha$.

PROPOSITION 4.1. [P 1985] : $(\nu\Gamma_\beta \rightarrow \Gamma_\beta, \alpha)$ est une algébroïde de Lie sur Γ_β pour la structure d'algèbre de Lie sur $\text{Sect}(\Gamma_\beta, \nu\Gamma_\beta)$ déduite de $\mathcal{L}(\Gamma)$, appelé algébroïde de Lie de Γ .

On aurait pu - comme pour les groupes de Lie - utiliser les champs invariants à droite $\mathcal{R}(\Gamma)$ et le fibré E_β dont les fibres sont les noyaux de $T\alpha|_{T\Gamma_\beta} \Gamma$. L'isomorphisme de fibrés vectoriels sur $\Gamma_\beta : \nu\Gamma_\beta \simeq E_\beta$ munirait $\nu\Gamma_\beta$ d'une deuxième structure d'algébroïde de Lie qui est opposée à la précédente : en effet si X, Y sont deux sections de $\nu\Gamma_\beta$, dont on note (X_α, Y_α) (resp. X_β, Y_β) les relèvements à E_α (resp. E_β) $X = \nu X_\alpha = \nu X_\beta$ et $Y = \nu Y_\alpha = \nu Y_\beta$ où $\nu : T\Gamma_\beta \rightarrow \nu\Gamma_\beta$; en résulte que $\nu[X_\alpha - X_\beta, Y_\alpha - Y_\beta] = 0$ et comme $[\mathcal{L}(\Gamma), \mathcal{R}(\Gamma)] = 0$, $\nu[X_\alpha, Y_\alpha] + \nu[X_\beta, Y_\beta] = 0$, ce qui achève la démonstration.

Le feuilletage de Stefan associé à l'algébroïde de Lie de Γ est le feuilletage par les orbites de Γ_α dans Γ_α . Si S est une telle feuille, $\alpha : \nu_S\Gamma_\alpha \rightarrow TS$ est un morphisme surjectif de fibrés vectoriels. On suppose, pour simplifier l'écriture, Γ_α -connexe. Soit $u \in S$, $\alpha : \bar{\beta}^{-1}(u) \rightarrow S$ est un Γ_u fibré principal auquel est associé un algébroïde de Lie transitif dont par construction même la structure est la restriction à S de la structure d'algébroïde de E_α , ce qui montre que $(\nu_S\Gamma_\alpha, \alpha)$ est l'algébroïde de Lie de $\alpha : \bar{\beta}^{-1}(u) \rightarrow S$.

On a alors au-dessus de S une suite exacte de fibrés vectoriels

$$0 \rightarrow I_S \rightarrow \nu\Gamma_S \rightarrow TS \rightarrow 0$$

où I_S est un fibré en algèbres de Lie de fibre type l'algèbre de Lie opposée de G_u . Une telle suite exacte est appelée suite d'Atiyah abstraite par Pradines. [P. 1967] [Al. M. 1985].

REMARQUE : A l'inverse de ce qui se passe pour les groupes et algèbres de Lie de dimension finie, il n'y a pas en général de groupoïde de Lie associé à un algébroïde de Lie même dans le cas transitif. Le chapitre III sera précisément consacré à un troisième théorème de Lie local pour certaines algébroïdes de Lie.

§ 5. EXEMPLES DE GROUPOIDES.

a) Si M est une variété différentielle, $M \times M$ avec sa structure de groupoïde grossier et la structure de variété produit est un groupoïde de Lie.

b) Groupoïde transformationnel : Soit Γ un groupoïde de Lie, E une variété différentielle et J une submersion C^∞ de E dans les unités Γ_0 de Γ .

Soit H le produit fibré $\Gamma \times_{\Gamma_0} E = \{(g, x) \in \Gamma \times E / \alpha(g) = J(x)\}$.

On dit que Γ agit sur E si on s'est donné une application φ de H dans E telle que :

a) $J(\varphi(g, x)) = \beta(g)$.

b) Si $(g_1, g_2) \in \Gamma_2$, $\varphi(g_1, \varphi(g_2, x)) = \varphi(g_1 \cdot g_2, x)$

g définit donc une application C^∞ de $J^{-1}(\alpha(g))$ dans $J^{-1}(\beta(g))$ et si $\alpha(g_1) = \beta(g_2)$ $g_1 \cdot g_2$ est la transformation composée

$$J^{-1}(\alpha(g_2)) \xrightarrow{g_2} J^{-1}(\beta(g_2)) = J^{-1}(\alpha(g_1)) \xrightarrow{g_1} J^{-1}(\beta(g_1))$$

Ceci revient à munir H d'une structure de groupoïde de Lie, d'ensemble d'unités E , avec les applications $\alpha_H(g, x) = x$ et $\beta_H(g, x) = \varphi(g, x)$ et telle que l'injection de H dans $\Gamma \times (E \times E)$: $(g, x) \rightarrow (g, gx, x)$ fasse de H un sous-groupoïde ($E \times E$ ayant la structure de groupoïde grossier).

En particulier, si G est un groupe qui opère à gauche sur X , $\Gamma = G \times X$ a une structure naturelle de groupoïde d'unité $\Gamma_0 = \{e\} \times X$; $\alpha(g, x) = (e, x)$ et $\beta(g, x) = (e, gx)$ sont les projections source et but. Le produit $(g_2, x_2) \cdot (g_1, x_1)$ est défini si $x_2 = g_1 x_1$ et vaut $(g_2 g_1, x_1)$.

Par exemple l'action coadjointe d'un groupe de Lie sur le dual de son algèbre de Lie donne, par la construction précédente, une structure de groupoïde au fibré cotangent du groupe de Lie, structure que l'on retrouvera plus loin (chapitre II, n° 4) par une autre voie. La structure de groupoïde sur $G \times X$ est principale si l'opération de G sur X est libre.

c) Groupoïdes de Jauge : Soit (E, M, π) une fibration principale, de groupe structural H . L'espace \mathcal{H} quotient de $E \times E$ par la relation d'équivalence définie par $(z_1, z'_1) \sim (z_2, z'_2)$ s'il existe h dans H tel que $z_2 = z_1 h$ et $z'_2 = z'_1 \cdot h$ est muni

d'une structure de groupoïde de Lie (transitif), l'espace des unités \mathcal{H}_0 (quotient de la diagonale de $M \times M$ par \sim) est isomorphe à M . C'est le groupoïde des isomorphismes, fibre sur fibre, H -équivariants ([E.oc],[Lib 1972]).

d) Le groupoïde fondamental d'une variété différentielle :

$\Pi(X)$ désigne l'ensemble des classes d'homotopie (à extrémités fixes) de chemins d'un espace topologique X , si $[\gamma] \in \Pi(X)$, on pose $\beta([\gamma]) = \gamma(0)$
 $\alpha([\gamma]) = \gamma(1)$, les unités sont les chemins constants (identifiés aux points de X), la multiplication étant celle déduite de la juxtaposition des chemins et la topologie, la topologie quotient de celle de l'espace des chemins (topologie compacte-ouverte).

Si de plus X est une variété différentielle connexe par arcs, l'application $[\gamma] \rightarrow (\gamma(0), \gamma(1))$ de $\Pi(X)$ dans $X \times X$ est un revêtement ; on peut donc munir $\Pi(X)$ d'une structure de variété différentielle qui en fait un groupoïde différentiel de Lie.

REMARQUE : le groupe d'isotropie d'un point x de X est le groupe de Poincaré de X .

e) Groupoïdes d'homologie :

On peut dans l'exemple précédent, remplacer la relation d'équivalence d'homotopie par celle, moins fine d'homologie, on obtient ainsi une suite de groupoïdes de Lie :

$$\Pi(X) \rightarrow \mathcal{H}(X) \rightarrow X \times X$$

Ces trois groupoïdes ayant X comme ensemble d'unités.

Les exemples suivants sont des cas de la variété sous-jacente est non séparée.

f) Les groupoïdes de germes :

Si X est une variété différentielle, l'ensemble des germes de difféomorphismes de X dans elle-même est muni d'une structure de groupoïde de Lie quand on le munit de la topologie usuelle des germes (cf. [Ha. 1984]).

g) Groupeïdes d'holonomie d'un feuilletage :

Supposons que l'on ait sur la variété différentielle X un feuilletage \mathcal{F} .
Considérons dans X les chemins γ , chaque chemin étant contenu dans une feuille, deux chemins γ_1 et γ_2 de même origine et de même extrémité seront équivalents si $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ est sans holonomie ; le quotient $\mathcal{H}ol(X, \mathcal{F})$ est le groupeïde d'holonomie (ou le graphe) du feuilletage \mathcal{F} ; les applications source et but et la multiplication sont définies comme dans l'exemple d) ; un voisinage d'un élément $[\gamma]$ est constitué des éléments $[\gamma^1]$ représentés par des chemins γ^1 voisins de γ . Avec cette topologie $\mathcal{H}ol(X, \mathcal{F})$ est une variété, en général non séparée, de dimension égale à la somme de la dimension de X et de la dimension des feuilles. On peut éssocier à un feuilletage d'autres groupeïdes différentiels, cf. [P. 1966],[Ha.1984],[C. 1982].

CHAPITRE II

Groupeïdes symplectiques

§ 1 - DEFINITIONS.

Dans toute la suite si (Γ, σ) est une variété symplectique on la notera simplement Γ , $(-\Gamma)$ désignera alors la variété symplectique $(\Gamma, -\sigma)$. Dans les démonstrations nous utiliserons les résultats classiques du calcul lagrangien pour lesquels nous renvoyons à l'appendice.

DEFINITION 1.1 : Un groupeïde symplectique est la donnée d'un groupeïde différentiel Γ muni d'une 2-forme symplectique σ telle que le graphe γ_m de la multiplication soit une sous-variété lagrangienne de $(-\Gamma) \times \Gamma \times \Gamma$. Rappelons que notre convention d'écriture des graphes est que $(z, x, y) \in \gamma_m$ si et seulement si $z = x.y$.

PROPOSITION 1.1 : Si Γ est un groupeïde symplectique, l'ensemble des unités Γ_0 est une sous-variété lagrangienne de Γ et l'inversion i est un isomorphisme antisymplectique de Γ dans lui-même (c'est-à-dire un isomorphisme symplectique de Γ dans $(-\Gamma)$).

DEMONSTRATION : Γ_0 est l'ensemble des z de Γ pour lesquels on peut trouver un x dans Γ tel que $(x, x, z) \in \gamma_m$; en d'autres termes Γ_0 est l'image de la diagonale Δ_Γ par la relation canonique de $(-\Gamma) \times \Gamma$ dans Γ définie par la sous-variété lagrangienne γ_m et dans $\Gamma \times \Gamma \times \Gamma \times \Gamma$ les sous-variétés $\gamma_m \times \Delta_\Gamma$ et $\Gamma \times \Delta$ se coupent proprement (Δ est ici l'ensemble des quadruplets (u, v, u, v) de $\Gamma \times \Gamma \times \Gamma \times \Gamma$). Le résultat vient alors du calcul lagrangien.

De la même manière, le graphe γ_i de l'inversion est l'ensemble des couples (x, y) de $\Gamma \times \Gamma$ pour lesquels il existe un z dans Γ_0 tel que $(z, x, y) \in \gamma_m$, c'est donc l'image de Γ_0 par la relation canonique de $(-\Gamma)$ à $\Gamma \times \Gamma$ définie par la sous-variété lagrangienne γ_m .

PROPOSITION 1.2 : Si A est une bissection lagrangienne dans un groupoïde Γ ,
les applications A_ℓ et A_r (cf. I.3) sont symplectiques.

DEMONSTRATION : Le graphe γ_{A_ℓ} de A_ℓ est constitué des couples (z,y) pour lesquels il existe un x dans A tel que $(z,x,y) \in \gamma_m$. C'est donc l'image de A (qui est lagrangienne) par la relation canonique de Γ à $(-\Gamma) \times \Gamma$ définie par γ_m , d'où le résultat ; la démonstration est la même pour A_r .

Dans la suite, la notation $Gr(\Gamma)$ ne sera utilisée que pour les bissections lagrangiennes.

On notera $\mathcal{G}(\Gamma)$ l'ensemble des bissections locales lagrangiennes. Si $A \in \mathcal{G}(\Gamma)$, α et β sont des difféomorphismes de A sur des ouverts de Γ_0 . Les opérations A_ℓ et A_r sont définies par les mêmes formules quand elles ont un sens (mais $\mathcal{G}(\Gamma)$ n'est évidemment plus un groupe) et sont encore symplectiques.

Si $x \in \Gamma$, il passe toujours par x une section lagrangienne locale transverse à l' α -fibre et à la β -fibre en x ; mais en général il n'existe pas de bissection lagrangienne globale passant par x sauf si x est assez proche de la sous-variété lagrangienne Γ_0 (ceci résulte alors de l'existence du "voisinage tubulaire lagrangien" de Γ_0 (cf.[W. 1979])).

PROPOSITION 1.3 : Les orbites de l'action à gauche (resp. à droite) de $Gr(\Gamma)$ dans Γ sont des réunions de composantes connexes des α -fibres (resp. des β -fibres).

DEMONSTRATION : On remarque d'abord que ql'opération à gauche (resp. à droite) de $Gr(\Gamma)$ laisse invariante chaque α -fibre (resp. β -fibre). Il suffit de montrer que les orbites sont ouvertes ; si donc y est proche de x dans la même α -fibre, $\beta(y^{-1}) = \alpha(y) = \alpha(x)$ donc $x.y^{-1}$ est défini et $z = x.y^{-1}$ est proche de $x.x^{-1}$ donc de Γ_0 , il passe donc par z une section lagrangienne A et, puisque $x = z.y$, $x = A.y$ et donc x et y sont sur la même orbite.

REMARQUE 1 : La proposition 1.3 subsiste lorsqu'on ne considère que les sous-variétés lagrangiennes obtenues par déformations exactes de Γ_0 .

REMARQUE 2 : Il résulte de la démonstration que les actions de $\mathcal{G}(\Gamma)$ sont transitives sur l' α -fibré pour l'action à gauche et sur la β -fibre pour l'action à droite. Il en est de même pour $\text{Gr}(\Gamma)$ si Γ est α -connexe.

COROLLAIRE : Les feuilletages définis par les α -fibres et les β -fibres sont symplectiquement orthogonaux.

DEMONSTRATION : Soit u une unité, X un vecteur tangent à l' α -fibre en u , Y un vecteur tangent à la β -fibre en u , si $x(t)$ est une courbe de Γ avec $\alpha(x(t)) = u$ et $x'(0) = X$, la courbe $(x(t), x(t), u)$ est une courbe tracée dans le graphe γ_m de vecteur tangent en o $(X, X, 0)$; de même si $y(t)$ est une courbe dans la β -fibre avec $y'(0) = Y$, la courbe $(y(t), u, y(t))$ est une courbe tracée dans le graphe γ_m de vecteur tangent en o $(Y, 0, Y)$. Puisque γ_m est lagrangien ces deux vecteurs sont symplectiquement orthogonaux, donc : $\sigma(X, Y) - \sigma(X, 0) - \sigma(0, Y) = 0 = \sigma(X, Y)$. Si maintenant X et Y sont tangents à l' α -fibre et à la β -fibre en un point x quelconque, on peut les ramener par l'action d'un élément de $\mathcal{G}(\Gamma)$ donc en gardant la valeur de $\sigma(X, Y)$, en un point de Γ_o .

Une paire duale [W. 1983] sur une variété symplectique (M, σ) est un couple de deux applications $(\Pi_i : M \rightarrow P_i), i=1,2)$ telles que pour tout $x \in M$, $\text{Ker} T_x \Pi_1 = (\text{Ker} T_x \Pi_2)^\sigma$. On a donc prouvé, compte tenu des dimensions.

COROLLAIRE : (α, β) constituent une paire duale sur Γ . Les fonctions sur Γ constantes sur les α -fibres (notées $\alpha^* C^\infty(\Gamma_o)$) et celles constantes sur les β -fibres (notées $\beta^* C^\infty(\Gamma_o)$) commutent. En particulier si Γ est α -connexe, $\alpha^* C^\infty(\Gamma_o)$ (resp. $\beta^* C^\infty(\Gamma_o)$) est le commutateur de $\beta^* C^\infty(\Gamma_o)$ (resp. $\alpha^* C^\infty(\Gamma_o)$)..

THEOREME 1.1 Γ_o est muni naturellement d'une structure de Poisson pour laquelle les applications α et β sont respectivement des morphisme de Poisson et d'anti-Poisson (c'est-à-dire de Poisson lorsqu'on place sur Γ_o la structure opposée). On note Λ_o le tenseur de Poisson de Γ_o .

DEMONSTRATION : Si f et g sont deux éléments de $\alpha^*(C^\infty(\Gamma_o))$, pour toute fonction h de $\beta^*(C^\infty(\Gamma_o))$ on a $\{f, h\} = 0 = \{g, h\}$, donc $\{\{f, g\}, h\} = 0$ $\{f, g\}$ est donc constante le long des orbites de ξ_h , le champ hamiltonien associé à h . Mais ces orbites décrivent toutes les α -fibres dans un voisinage de Γ_o et $\mathcal{G}(\Gamma)$ permet de ramener la situation générale dans ce voisinage.

COROLLAIRE : Si Γ est α -connexe, les orbites de Γ dans Γ_0 constituent le feuilletage symplectique de Γ_0 .

- . On retrouve dans ce cas le théorème de Pradines (cf. I.4.1)
- . Si Γ n'est pas α -connexe, les orbites de Γ sont des réunions de feuilles symplectiques de Γ_0 .

EXEMPLE : Si T^*G est le groupoïde cotangent d'un groupe de Lie (cf. I.5 exemple b), la structure de Poisson dont se trouve munie \underline{G}^* , qui est l'espace des unités de T^*G , est sa structure canonique de dual d'algèbre de Lie (structure de Lie-Poisson) et les orbites de T^*G dans \underline{G}^* sont les orbites coadjointes de G .

REMARQUE : Si A est une bisection (locale) lagrangienne, il existe deux difféomorphismes (locaux) ψ_ℓ et ψ_r de Γ_0 qui sont des morphismes de Poisson et qui rendent commutatifs les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma & \xrightarrow{A_\ell} & \Gamma \\
 \downarrow \beta & & \downarrow \beta \\
 \Gamma_0 & \xrightarrow{\psi_\ell} & \Gamma_0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \Gamma & \xrightarrow{A_r} & \Gamma \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \\
 \Gamma_0 & \xrightarrow{\psi_r} & \Gamma_0
 \end{array}$$

2. ALGÈBROÏDES DE LIE D'UN GROUPOÏDE SYMPLECTIQUE.

$\Gamma \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} \Gamma_0$ étant un groupoïde symplectique le fibré normal de Γ_0 , $\nu\Gamma_0$ s'identifie canoniquement à $T^*\Gamma_0$: si $X \in T_{\Gamma_0}\Gamma$, $-{}^1_X\sigma|_{\Gamma_0}$ ne dépend que de νX et définit l'isomorphisme cherché. Il est donc naturel dans ce cas de transporter la structure d'algèbroïde sur $T^*\Gamma_0$. Pour ceci on a besoin du lemme suivant :

LEMME : $X \in \mathcal{L}(\Gamma)$ (X est un champ invariant à gauche de Γ) si et seulement si $-{}^1_X\sigma = \alpha^*\omega$ où $\omega \in \text{Sect}(\Gamma_0, T^*\Gamma_0)$.

En particulier si $-l_X \sigma = \alpha^* df$, $f \in C^\infty(\Gamma_0, \mathbb{R})$ X est un champ invariant à gauche.

DEMONSTRATION DU LEMME : Le lemme étant de nature "locale", il suffit de se placer sur un ouvert de la forme $\alpha^{-1}(U)$ où U est un voisinage de $u_0 \in \Gamma_0$ de coordonnées locales $(x^i)_{1 \leq i \leq n}$.

Si X^i est le champ sur $\alpha^{-1}(U)$ défini par $-l_{X^i} \sigma = \alpha^* dx^i$ et si l'on prouve que X^i est invariant à gauche, il en résulte que sur U il existe n fonctions a_i telles que $X = \sum_1^n \alpha^* a_i \cdot X^i$, ce qui équivaut à $-l_X \sigma = \alpha^* \omega$ avec $\omega = \sum_1^n a_i dx^i$.

Tout revient donc à prouver que pour toute fonction $f \in C^\infty(\Gamma_0, \mathbb{R})$, le champ X de hamiltonien $\alpha^* df$ est invariant à gauche. Par construction même $X \in (\text{Ker } T_\alpha)^\sigma = \text{Ker } T\beta$. Il ne reste donc qu'à vérifier que $TL_{x_0} \cdot X = X_0 L_{x_0}$ pour tout x_0 ce qui se fait en prenant une bissection lagrangienne locale A passant par x_0 . A_ρ étant une transformation symplectique, X sera invariant par A_ρ si et seulement si $\alpha^* f$ l'est ce qui est trivial. La preuve du lemme est complète.

La structure d'algèbre de Lie de $\text{Sect}(\Gamma_0, T^*\Gamma_0)$ dont le crochet est noté $\{, \}$ s'obtient alors à partir de celle de $\mathcal{L}(\Gamma)$ en posant pour tout couple (ω_1, ω_2) de 1-forme sur $T^*\Gamma_0$, $\{\omega_1, \omega_2\} = \omega$ où

$$\begin{cases} -l_{[X_1, X_2]} \sigma = \alpha^* \omega \\ -l_{X_1} \sigma = \alpha^* \omega_1, \quad -l_{X_2} \sigma = \alpha^* \omega_2 \end{cases}$$

De la relation $\mathcal{L}_{X_1} l_{X_2} \sigma = l_{[X_1, X_2]} \sigma + l_{X_2} \mathcal{L}_{X_1} \sigma$ on déduit la forme explicite du crochet :

$$\alpha^* \{\omega_1, \omega_2\} = l_{X_1} \alpha^* d\omega_2 - l_{X_2} \alpha^* d\omega_1 + d(\sigma(X_1, X_2))$$

$$\text{or } T\alpha(X_i) = \zeta_i \text{ où } \zeta_i = \Lambda_0^\#(\omega_i)$$

Ceci permet d'écrire

$$(1) \quad \{\omega_1, \omega_2\} = l_{\Lambda_0^\#(\omega_1)} d\omega_2 - l_{\Lambda_0^\#(\omega_2)} d\omega_1 + d(l_{\Lambda_0}(\omega_1 \wedge \omega_2)).$$

D'autre part le morphisme noté par abus de notation α de $\nu\Gamma_0$ dans Γ_0 se transforme en le morphisme $\Lambda_0^\#$ de $T^*\Gamma_0$ dans $T\Gamma_0$.

On a donc prouvé :

PROPOSITION 2.1 : Si $(\Gamma, \sigma) \xrightarrow[\alpha]{\beta} \Gamma_0$ est un groupoïde symplectique son algébroïde de Lie est canoniquement isomorphe au triplet $(T^*\Gamma_0, \Lambda_0^\#, \{, \})$ $\{, \}$ étant le crochet sur les 1-formes donné par (1). De plus $d : C^\infty(\Gamma_0, \mathbf{R}) \rightarrow \text{Sect}(\Gamma_0, T^*\Gamma_0)$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie.

La deuxième partie de la proposition résulte immédiatement de la formule (1) qui implique également que $Z^1\text{Sect}(\Gamma_0, T^*\Gamma_0)$ sous-espace vectoriel des 1-formes fermées est une sous-algèbre de Lie dont l'idéal dérivée contient $dC^\infty(\Gamma_0, \mathbf{R})$.

§ 3 - PREMIERS EXEMPLES.

3.1. Si M est une variété symplectique, la structure de groupoïde grossier sur $-M \times M$ donne un premier exemple de groupoïde symplectique, Γ_0 est la diagonale, et le crochet de Poisson pour les fonctions α -invariantes est leur crochet comme fonctions sur Γ_0 . les α -sections sont les graphes des applications de M dans M . Dans cet exemple les feuilletages définis par α et β sont transverses.

Etant donné un hamiltonien $h : M \rightarrow \mathbf{R}$, le relèvement de son flot à $-M \times M$ est engendré par le hamiltonien $H(x, y) = -h(x) + h(y)$ de $-M \times M$ dans \mathbf{R} .

3.2. Considérons maintenant le groupoïde fondamental $\Pi(M)$ d'une variété symplectique M . L'application naturelle (qui est un morphisme de groupoïdes et un revêtement) de $\Pi(M)$ dans $-M \times M$ fait de $\Pi(M)$ un groupoïde symplectique.

THEOREME 3.1 : Toute action symplectique sur M d'un groupe de Lie se relève en une action sur $\Pi(M)$ fortement hamiltonienne (c'est-à-dire admettant une application moment ad^* -équivariante).

REMARQUE : On a le même résultat pour le groupoïde d'homologie $\mathcal{H}(M)$.

DEMONSTRATION : En fait le groupe des difféomorphismes symplectiques de M , $\text{Symp}(M)$, se relève naturellement en un groupe d'actions fortement hamiltonienne de M . Soit $\mathcal{H}_{\text{loc}}(M)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs localement hamiltoniens de M considérée comme algèbre de Lie de $\text{Symp}(M)$. La représentation adjointe étant donnée par $\varphi, X \rightarrow \text{Ad}_{\varphi} X \quad \text{Ad}_{\varphi} X(x) = T\varphi \circ X \circ \varphi^{-1}$:

Si $X \in \mathcal{H}_{\text{loc}}(M)$ il se relève naturellement en \tilde{X} champ C^∞ sur $\Pi(M)$. Si σ est la forme symplectique de M , $\tilde{\sigma}$ celle de $\Pi(M)$, $\Pi : \Pi(M) \rightarrow -M \times M$, $\tilde{\sigma} = \Pi^*(\sigma)$.

Soit $H_X : \Pi, M \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $[\gamma] \rightarrow \int_{\gamma} \iota_X \sigma$

$$dH = \beta^* \theta - \alpha^* \theta \text{ si } \theta = \iota_X \sigma$$

ce qui assure que $\iota_{\tilde{X}} \tilde{\sigma} = -dH$. \tilde{X} est donc hamiltonien et on associe à l'action naturelle de $\text{Symp}(M)$ dans $\Pi(M)$ le moment $J : \Pi(M) \rightarrow (\mathcal{H}_{\text{loc}}(M))'$

$$[\gamma] \rightarrow J[\gamma]$$

$$\langle J[\gamma], X \rangle = \int_{\gamma} \iota_X \sigma$$

$(\mathcal{H}_{\text{loc}}(M))'$ étant, par exemple, le dual de $\mathcal{H}_{\text{loc}}(M)$ pour la topologie compacte ouverte.

Il est immédiat que pour tout $\varphi \in \text{Symp}(M)$

$$J(\varphi[\gamma]) = \text{Ad}_{\varphi}^* J[\gamma]$$

L'action est donc fortement hamiltonienne. Si G est un groupe de Lie agissant de façon symplectique sur M le résultat se déduit alors de l'inclusion $G \hookrightarrow \text{Symp}(M)$.

REMARQUE : $H_X : \Pi(M) \rightarrow \mathbb{R}$ est un morphisme de groupoïdes. La proposition suivante constitue en quelque sorte une réciproque.

PROPOSITION 3.1 : Soit $H : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ un hamiltonien sur un groupoïde symplectique Γ .

Le flot de H est constitué d'automorphismes de groupoïdes si et seulement si H est un homomorphisme modulo les fonctions localement constantes. (C'est-à-dire si la fonction $K(x, y) = -H(x, y) + H(x) + H(y)$ est localement constante sur Γ_2).

DEMONSTRATION : Le flot de H se relève sur $(-\Gamma) \times \Gamma \times \Gamma$ en le flot engendré par $K(z,x,y) = -H(z) + H(x) + H(y)$. Dire que le flot de H agit par automorphismes de groupoïdes c'est dire que son relevé laisse invariant le graphe γ_m de la multiplication, soit puisque ce graphe est lagrangien, que K est localement constante sur γ_m .

REMARQUE : $\Gamma_2 = \bigcup_{u \in \Gamma_0} \bar{\alpha}^{-1}(u) \times \bar{\beta}^{-1}(u) \subset \Gamma \times \Gamma$. Γ_2 est donc connexe si Γ est

α -connexe et Γ_0 connexe. Dans ce cas si le flot de H est constitué d'automorphismes de groupoïde, on peut en modifiant H par l'addition d'une constante, en faire un morphisme de groupoïdes de Γ dans \mathbb{R} . Ainsi, modulo les constantes, les hamiltoniens donnant naissance à des automorphismes de groupoïde sont les morphismes de groupoïdes de Γ dans \mathbb{R} si Γ est α -connexe et Γ_0 connexe.

Remarquons que pour tout H qui engendre un flot d'automorphismes de groupoïdes, le flot induit sur Γ_0 est un flot d'automorphismes de Poisson pour la structure de Poisson définie sur Γ_0 mais, en général non hamiltonien ; il est hamiltonien si $H(x,y)$ est de la forme $\alpha^*h(x) - \beta^*h(y)$, auquel cas le flot de H est le relèvement naturel du flot de Poisson de h sur Γ_0 . Réciproquement si H est un morphisme de groupoïdes et si le flot induit sur Γ_0 est hamiltonien de hamiltonien h , $H - \alpha^*h$ est constant sur les composantes connexes des β -fibres ; en effet si X_H est le champ hamiltonien associé à h , ζ le champ hamiltonien de h sur la variété de Poisson Γ_0 , il résulte de ce que le flot de X_H est un flot d'automorphisme de Γ que $T\alpha(X_H) = \zeta_0\alpha$ $T\beta(X_H) = \zeta_0\beta$. Si Γ est α -connexe, $(H - \alpha^*h)(x) = -h(\beta(x))$ car $H|_{\Gamma_0} = 0$ ce qui assure que $H = \alpha^*h - \beta^*h$.

3.3. Cotangent d'une variété - Si M est une variété, $p : T^*M \rightarrow M$ étant un fibré vectoriel est un groupoïde de Lie pour l'addition dans les fibres. Le graphe de l'addition est l'ensemble des (ζ, ξ, η) tels que $-\zeta + \xi + \eta = 0$. C'est donc l'image dans $-T^*M \times T^*M \times T^*M$ du fibré normal de la diagonale Δ de M^3 dans $(T^*M)^3$ par l'application $\psi : (\zeta, \xi, \eta) \rightarrow (-\zeta, \xi, \eta)$. Le fibré normal de Δ étant une sous-variété lagrangienne de $(T^*M)^3$ et l'application ψ étant un isomorphisme symplectique de $(T^*M)^3$ sur $(-T^*M) \times T^*M \times T^*M$, le graphe de l'addition dans T^*M est une sous-variété lagrangienne ce qui montre que T^*M est canoniquement un groupoïde symplectique. La structure de Poisson induite sur M est évidemment triviale.

De l'étude de 3.2 il résulte que les hamiltoniens qui conservent cette structure de groupoïde sont ceux qui sont linéaires sur les fibres, i.e. ceux canoniquement associés aux champs de vecteurs sur M. Si X est un tel champ sur M $\tilde{X} : \xi \rightarrow \langle X, \xi \rangle$ le hamiltonien sur T^*M associé et X^* le champ sur T^*M de hamiltonien \tilde{X} , X^* est le relèvement naturel de X à M, i.e. le champ dont le flot est la contra-
 grédiente de la différentielle du flot de X. En particulier X^* est caractérisé par $\mathcal{L}_{X^*} \lambda = 0$, $T_p X^* = X$, où λ est la forme de Liouville.

§ 4 - COTANGENT D'UN GROUPOÏDE.

Soit $G \xrightarrow[\beta]{\alpha} G_0$ un groupoïde de Lie ; l'objectif de ce paragraphe est d'exhiber sur $T^*G = \Gamma$, cotangent de G, une structure de groupoïde, distincte de celle construite en 3.c, pour laquelle Γ , muni de sa structure symplectique sera un groupoïde symplectique et la projection $p : \Gamma = T^*G \rightarrow G$ un morphisme de groupoïde. On note μ la multiplication dans G, γ_μ son graphe, G_2 l'ensemble des couples composables. L'isomorphisme symplectique ψ de $(T^*G)^3$ sur $(-T^*G) \times T^*G \times T^*G$ défini par

$$\psi(\zeta, \xi, \eta) = (-\zeta, \xi, \eta)$$

transforme le fibré conormal de γ_μ dans $(T^*G)^3$ en une sous-variété, nécessairement lagrangienne, γ_m de $(-T^*G \times T^*G \times T^*G)$. γ_m munira $T^*G = \Gamma$ d'une structure de groupoïde symplectique si et seulement si γ_m est le graphe d'une multiplication de groupoïde sur Γ . On va donc prouver que γ_m est un graphe et vérifier ensuite les axiomes des groupoïdes pour la loi ainsi définie.

μ étant une loi de groupoïde, il est immédiat que la loi sur TG, \oplus , définie par

$$(X, Y) \mapsto X \oplus Y = T\mu_{(x_0, y_0)}(X, Y) \quad \text{pour } (X, Y) \in T_{(x_0, y_0)}G_2$$

est associative. (C'est d'ailleurs une loi de groupoïde !).

si $(z_0, x_0, y_0) \in \gamma_\mu$ et si $(\zeta, \xi, \eta) \in T_{z_0}^* G \times T_{x_0}^* G \times T_{y_0}^* G$ $(\zeta, \xi, \eta) \in \gamma_m$ si et seulement si

$$(*) \quad \begin{cases} \langle \zeta, X \oplus Y \rangle = \langle \zeta, X \rangle + \langle \eta, Y \rangle \\ \text{pour tout } (X, Y) \in T_{(x_0, y_0)} G_2 . \end{cases}$$

Pour expliciter cette condition on pose $u_0 = \alpha(x_0) = \beta(y_0)$ et on note s_α (resp. s_β) une section locale de α (resp. β) telle que $s_\alpha(u_0) = x_0$ $s_\beta(u_0) = y_0$. Comme

$$(X, Y) \in T_{(x_0, y_0)} G_2, \quad (T\alpha)X = (T\beta)Y = X_0 \in T_{u_0} G_0.$$

Il existe donc $X_1 \in \text{Ker } T\alpha_{x_0}$ et $Y_1 \in \text{Ker } T\beta_{y_0}$ tels que

$$\begin{cases} X = T_{u_0} s_\alpha(X_0) + X_1 \\ Y = T_{u_0} s_\beta(Y_0) + Y_1 \end{cases}$$

(s_α, s_β) est une section de la restriction de $\Pi = (\alpha, \beta)$ à G_2 au-dessus de la diagonale de G_0 . Ceci prouve que

$$(X, Y) = (T_{u_0} s_\alpha(X_0), T_{u_0} s_\beta(Y_0)) + (X_1, Y_1)$$

et par linéarité de $T\mu$;

$$X \oplus Y = (T_{u_0} s_\alpha(X_0) \oplus T_{u_0} s_\beta(Y_0)) + (X_1 \oplus Y_1).$$

soit S l'application $u \rightarrow s_\alpha(u) \cdot s_\beta(u) = S(u)$.

$$T_{u_0} s_\alpha(X_0) \oplus T_{u_0} s_\beta(Y_0) = T_{u_0} S(X_0).$$

D'autre part $X_1 \in \text{Ker } T\alpha$ et $Y_1 \in \text{Ker } T\beta$,

$$X_1 \oplus Y_1 = T_{x_0} R_{y_0} X_1 + T_{y_0} L_{x_0} Y_1 .$$

La condition (*) équivaut alors aux 3 conditions suivantes :

$$(\zeta, \xi, \eta) \in \gamma_m \text{ si et seulement si :}$$

$$(**) \left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad s^* \zeta = s_\alpha^* \xi + s_\beta^* \eta \\ \text{(ii)} \quad R_{y_0}^* (\zeta|_{\text{Ker} T_{z_0} \alpha}) = \xi|_{\text{Ker} T_{x_0} \alpha} \\ \text{(iii)} \quad L_{x_0}^* (\zeta|_{\text{Ker} T_{z_0} \beta}) = \eta|_{\text{Ker} T_{y_0} \beta} \end{array} \right.$$

Soit Γ_2 la projection de γ_m par l'application $(\zeta, \xi, \eta) \rightarrow (\xi, \eta)$. Comme $\text{Ker} T_{z_0} \alpha \oplus \text{Im} T_{u_0} S = T_{z_0} G$, (i) et (ii) définissent un unique ζ si $(\xi, \eta) \in \Gamma_2$

Il en résulte que γ_m est le graphe d'une application de Γ_2 dans Γ que l'on note $(\xi, \eta) \rightarrow \xi \oplus \eta$ par abus de notation.

De même si (ζ, η) appartient à la projection de γ_m sur $G \times G$, il existe un unique ξ tel que $\zeta = \xi \oplus \eta$ puisque $\text{Im} T_{u_0} s_\alpha \oplus \text{Ker} T_{x_0} \alpha = T_{x_0} G$. On peut donc "simplifier à droite" et de même à gauche. En particulier il existe un unique élément noté $\alpha_\Gamma(\xi)$ (resp. $\beta_\Gamma(\xi)$) tel que $\xi \oplus \alpha_\Gamma(\xi) = \xi$ (resp. $\beta_\Gamma(\xi) \oplus \xi = \xi$). Compte tenu des formules (***) en prenant $(s_\alpha, s_\beta = j)$ (resp. $s_\alpha = j, s_\beta$) où j est l'inclusion de G_0 dans G , on montre que $\alpha_\Gamma(\xi)$ (resp. $\beta_\Gamma(\xi)$) est définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_\Gamma(\xi)|_{\text{Ker} T_{u_0} \beta} = L_{x_0}^* (\xi|_{\text{Ker} T_{x_0} \beta}) \\ \alpha_\Gamma(\xi) \in \nu_{u_0}^* G_0 \quad \text{où } u_0 = \alpha(x_0) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_\Gamma(\xi)|_{\text{Ker} T_{v_0} \alpha} = R_{x_0}^* \xi|_{\text{Ker} T_{x_0} \alpha} \\ \beta_\Gamma(\xi) \in \nu_{v_0}^* G_0 \quad \text{où } \beta(x_0) = v_0 \end{array} \right.$$

pour tout $\xi \in T_{x_0}^* G$.

Par construction même de la loi \oplus sur $\Gamma = T^*G$ $\xi \oplus \eta$ est définie si et seulement si l'application $(X,Y) \rightarrow \langle \xi, X \rangle + \langle \eta, Y \rangle$ se factorie à travers $T\mu$. $\xi \oplus \eta$ sera donc défini si et seulement si $T\mu(X,Y) = X \oplus Y = 0$ implique $\langle \xi, X \rangle + \langle \eta, Y \rangle = 0$. D'une part $(X,Y) \in T_{(x_0, y_0)}G_2$, $T\alpha(X) = X_0 = T\beta(Y)$. D'autre part $\alpha(xy) = \alpha(y)$ et $\beta(xy) = \beta(x)$ impliquent que si $X \oplus Y = 0$ $T\alpha(Y)=0=T\beta(X)$. Il existe donc $X_1 \in \text{Ker} T_{u_0} \beta$ et $Y_1 \in \text{Ker} T_{u_0} \alpha$ tels que $X = R_{x_0} X_1$ $Y = L_{y_0} Y_1$. Mais $T\alpha(X_1) = X_0 = T\beta(Y_1)$ ce qui entraîne que $X_0 = X_1 + Y_1$.

$$\text{Ainsi } \begin{cases} \alpha_\Gamma(\xi) - \beta_\Gamma(\eta) \in \nu_{u_0}^* G \\ \langle \alpha_\Gamma(\xi) - \beta_\Gamma(\eta), X_1 \rangle = \langle \xi, X \rangle + \langle \eta, Y \rangle. \\ \text{si } X \oplus Y = 0. \end{cases}$$

Il résulte de ce calcul que $\Gamma_2 = \{(\xi, \eta) \mid \alpha_\Gamma(\xi) = \beta_\Gamma(\eta)\}$. Comme $\alpha_\Gamma(\xi \oplus \eta) = \alpha_\Gamma(\eta)$ $\beta_\Gamma(\xi \oplus \eta) = \beta_\Gamma(\xi)$, l'associativité de la loi \oplus sur TG entraîne l'associativité de la loi \oplus de $\Gamma = T^*G$.

$$\Gamma \xrightarrow[\beta_\Gamma]{\alpha_\Gamma} \nu_{u_0}^* G_0 \text{ sera un groupoïde si l'on sait construire l'inversion } i_\Gamma : \Gamma \rightarrow \Gamma$$

L'application des formules (***) à $\xi \oplus \eta = \beta_\Gamma(\xi)$ fournit la solution $i_\Gamma(\xi) = -{}^t T_i(\xi)$ si i est l'inversion dans G .

Le reste de la vérification que Γ est un groupoïde de Lie est trivial.

On peut donc énoncer

THEOREME 4.1 : Si $G \rightrightarrows G_0$ est un groupoïde, T^*G est muni canoniquement d'une structure de groupoïde symplectique de 2-forme la différentielle de la forme de Liouville λ et d'unités $\nu_{u_0}^* G_0$ fibré conormal de G_0 dans G .

Par ailleurs $p : T^*G \rightarrow G$ est comme cotangent un groupoïde symplectique de 2-forme $d\lambda$ pour l'addition dans les fibres. Afin de préciser les relations qui existent entre les deux structures de groupoïdes (T^*G, \oplus) et $(T^*G, +)$ on introduit la notion suivante d'ue à C. Ehresmann [E].

DEFINITION 4.1 : Un groupoïde double est une variété Γ munie de deux structures de groupoïdes de Lie, de loi \oplus_i , d'applications source et but α_i et β_i , d'unité Γ_i^0 ($i = 1, 2$) telles que

(i) α_1 et β_1 (resp. α_2 et β_2) sont des morphismes (i.e. foncteurs) de (Γ, \oplus_2) vers (Γ, \oplus_1) (resp. de (Γ, \oplus_1) vers (Γ, \oplus_2))

(ii) Axiome de permutabilité : si les composés $(x \oplus_1 y) \oplus_2 (z \oplus_1 t)$ et $(x \oplus_2 z) \oplus_1 (y \oplus_2 t)$ sont définis, ils sont égaux.

Par construction même $p : T^*G \rightarrow G$ est un foncteur de (T^*G, \oplus) dans $(G, .)$. D'autre part sur la définition de α_Γ et β_Γ , il est clair que α_Γ et β_Γ sont des applications linéaires de T^*G dans v^*G_0 .

La seule chose à vérifier est donc la permutabilité. Soit donc $\xi_i \in T_{x_0}^*G$, $\eta_i \in T_{y_0}^*G$ ($i = 1, 2$) tels que $(\xi_1 \oplus \eta_1) + (\xi_2 \oplus \eta_2)$ et $(\xi_1 + \xi_2) \oplus (\eta_1 + \eta_2)$ soient définis. Alors $x_0 y_0 = z_0$ est défini et en posant $\zeta_i = \xi_i \oplus \eta_i$, on a par linéarité

$S^*(\zeta_1 + \zeta_2) = s_\alpha^*(\xi_1 + \xi_2) + s_\beta^*(\eta_1 + \eta_2)$ on vérifie, de même, les autres conditions (**) ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE : $(\Gamma = T^*G, d\lambda)$ muni d'une part de l'addition dans les fibres et d'autre part de la loi \oplus est un groupoïde double.

REMARQUE : Si l'on applique la construction du cotangent d'un groupoïde au groupoïde TX, on passe par l'intermédiaire de (TTX, \oplus) et TTX muni de l'addition dans les fibres de $TTX \rightarrow TX$ et de la loi \oplus , qui est la deuxième structure de fibré vectoriel de TTX, est un groupoïde double. La notion de groupoïde double est à la base d'un travail de Mikami et Weinstein [M. - W.].

Si $\Gamma = T^*G$, l'espace de ses unités \mathcal{V}^*G_0 est munie d'une structure de Poisson. $C^\infty(\mathcal{V}^*G_0, \mathbb{R})$ est donc une algèbre de Lie donc $\text{Sect}(G_0, \mathcal{V}G_0)$ est un sous-espace vectoriel. D'autre part $\mathcal{V}G_0 \rightarrow G_0$ porte la structure d'algèbroïde de Lie de G ; En particulier $\text{Sect}(G_0, \mathcal{V}G_0)$ est une algèbre de Lie.

PROPOSITION 4.1 : $\text{Sect}(G_0, \mathcal{V}G_0)$ est une sous-algèbre de Lie de $C^\infty(\mathcal{V}^*G_0, \mathbb{R})$.

DEMONSTRATION : Pour tout $X \in \text{Sect}(G_0, \mathcal{V}G_0)$ soit X^ℓ le champ invariant à gauche sur G canoniquement associé (cf. I.4). La structure d'algèbre de Lie de $\text{Sect}(G_0, \mathcal{V}G_0)$ est définie par $[X, Y]^\ell = [X^\ell, Y^\ell]$. Soit $\tilde{X} : \xi \rightarrow \langle X(p(\xi)), \xi \rangle$ l'image de X dans $C^\infty(\mathcal{V}G_0, \mathbb{R})$. Si pour tout $\xi \in T^*G$ on note $p(\xi) = x$, de l'invariance à gauche de X^ℓ il résulte que

$$\begin{aligned} \langle X^\ell(x), \xi \rangle &= \langle X^\ell(\alpha(x)), TL_x^*(\xi|_{\text{Ker}T_\beta}) \rangle \\ &= \langle X^\ell(\alpha(x)), \alpha_\Gamma(\xi) \rangle \\ &= \alpha_\Gamma^* X(\xi). \end{aligned}$$

Soit X_Γ le relèvement naturel sur T^*G du champ X^ℓ (cf. 3.3). X_Γ a pour hamiltonien $\alpha_\Gamma^* \tilde{X}(\xi)$ compte tenu du calcul précédent.

Par définition de la structure de Poisson de $\mathcal{V}G_0$,

$$\{\tilde{X}, \tilde{Y}\}(\alpha_\Gamma(\xi)) = \{\alpha_\Gamma^* \tilde{X}, \alpha_\Gamma^* \tilde{Y}\}(\xi)$$

$$\text{soit } \{\tilde{X}, \tilde{Y}\}(\alpha_\Gamma(\xi)) = d\lambda(X_\Gamma, Y_\Gamma)(\xi) .$$

$$\text{Comme } \mathcal{L}_{X_\Gamma} \lambda = 0 = \mathcal{L}_{Y_\Gamma} \lambda$$

$$\{\tilde{X}, \tilde{Y}\}(\alpha_\Gamma(\xi)) = \langle \lambda, [X_\Gamma, Y_\Gamma] \rangle(\xi) .$$

Les champs X_Γ et Y_Γ étant projetables par p

$$\{\tilde{X}, \tilde{Y}\}(\alpha_\Gamma(\xi)) = \langle [X^\ell, Y^\ell], \xi \rangle .$$

Mais par définition du crochet dans $\text{Sect}(G_0, \mathcal{V}G_0)$

$$\langle [X^\ell, Y^\ell], \xi \rangle = \langle [X, Y]^\ell, \xi \rangle = \langle [X, Y], \alpha_\Gamma(\xi) \rangle .$$

Il en résulte que $\{\tilde{X}, \tilde{Y}\} = [\tilde{X}, \tilde{Y}]$ ce qu'il fallait prouver.

DEFINITION 4.2 . Structure de Lie-Poisson

Si $E^* \rightarrow M$ est un fibré vectoriel sur M , dual de $E \rightarrow M$, une structure de Lie-Poisson sur E^* est une structure de Poisson pour laquelle $\text{Sect}(M, E)$ est une sous-algèbre de Lie de $C^\infty(E^*, \mathbb{R})$.

$\text{Sect}(M, E)$ est alors une algèbre de Lie locale au sens de Kirillov.

La proposition 4.1 peut se reformuler ainsi

PROPOSITION 4.2 : si $G \rightrightarrows G_0$ est un groupoïde de Lie, $\nu^* G_0 \rightarrow G_0$ est canoniquement muni d'une structure de Lie-Poisson induisant sur $\text{Sect}(G_0, \nu^* G_0)$ la structure d'algèbre de Lie associée à l'algèbroïde de Lie de G .

CAS PARTICULIER : Si G est un groupe de Lie G_0 est réduit à l'identité et $\Gamma_0 = \underline{G}^*$ dual de l'algèbre de Lie \underline{G} de G . On vérifie que si $\xi \in T_g^* G$,

$$\begin{aligned} \alpha_\Gamma(\tilde{\xi}) &= \tilde{\xi} \circ L_g = L_g^*(\tilde{\xi}) \\ \beta_\Gamma(\tilde{\xi}) &= \tilde{\xi} \circ R_g = R_g^*(\tilde{\xi}) \end{aligned}$$

$\Gamma = T^* G$ est un groupoïde α -connexe si G est connexe et dans ce cas les orbites de Γ dans $\Gamma_0 = \underline{G}^*$ sont les orbites de la représentation coadjointe. La structure induite sur \underline{G}^* est sa structure canonique de variété de Poisson pour laquelle \underline{G} s'identifie à une sous-algèbre de Lie de $C^\infty(\underline{G}^*, \mathbb{R})$. Ceci justifie la définition suivante :

DEFINITION 4.3 : Si $G \rightrightarrows G_0$ est un groupoïde α -connexe, on appelle orbites de la représentation co-adjointe de G les orbites dans $\nu^* G_0$ du groupoïde $(T^* G, \theta)$

§ 5 - AUTRES EXEMPLES.

1 - $G \rightarrow G_0$ est un fibré en groupes au-dessus de G_0 c'est un groupoïde.

$T^* G$ a pour unités $\nu^* G_0$ fibré (en deux d'algèbres de Lie) dual du fibré vertical

$$T^* G \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} \nu^* G_0$$

$\alpha = \beta$ et l'isotropie en un point x_0 est isomorphe au groupe $G_{x_0} \times T_{x_0} G_{x_0}$ où G_{x_0} est le groupe d'isotropie de G en x_0 .

2 - Groupeïde de jauge. Soit $E \rightarrow M$ un G -fibré principal, \mathcal{H} son groupeïde de jauge, (I.5 c) et $\varepsilon \rightarrow M$ sur algèbroïde de Lie transitif (I.4). Le groupeïde cotangent $T^*\mathcal{H}$ a pour unités $\nu^* \mathcal{H}_0$ qui est le dual de ε . Se donner une G -connexion sur $E \rightarrow M$, c'est se donner une scission γ de la suite exacte de fibrés sur M :

$$0 \rightarrow E(\underline{G}) \rightarrow \varepsilon \xrightarrow[\gamma]{\tau} TM \rightarrow 0$$

où $E(\underline{G})$ est le fibré en algèbres de Lie canoniquement associé. $E(\underline{G})$ est encore le fibré associé à $E(G)$ de fibre type \underline{G} pour la représentation coadjointe.

$\tau \gamma$ fournit un isomorphisme de ε^* avec le produit fibré $T^*M \times_M E(\underline{G}^*)$ qui se trouve ainsi muni d'une structure de Poisson dont $T^*\mathcal{H}$ est une réalisation stricte. A chaque orbite de la coadjointe de G est associée une feuille symplectique de ε^* qui est l'espace des phases d'une particule dans le champ de Yang et Mills défini par la connexion de $E \rightarrow M$ donnée. [cf. W. 1978].

3 - Si G est un groupe opérant sur M et Γ le groupeïde $G \times M$ (cf. I.5-b), $T^*\Gamma$ groupeïde cotangent de Γ a pour ensemble d'unités $\underline{G}^* \times M$ muni de la structure de Poisson produit semi-direct de la structure de Poisson de \underline{G}^* par la structure triviale de M ; [W. 1987 b].

4 - Si \mathcal{F} est un feuilletage régulier sur une variété M , $\mathcal{H}ol(\mathcal{F})$ le groupeïde d'holonomie de \mathcal{F} . Le groupeïde cotangent $\Gamma = T^*\mathcal{H}ol(\mathcal{F})$ a pour unités \mathcal{F}^* espace cotangent au feuilletage qui se trouve ainsi muni d'une structure de variété de Poisson dont on vérifie aisément que c'est la structure de Poisson considérée dans [Lic. 1982] obtenu en considérant la réduction symplectique $T^*M \rightarrow \mathcal{F}^*$ qui est une fibration isotrope symplectiquement complète à fibre un espace numérique.

5 - \mathcal{F} étant toujours un feuilletage régulier sur M , $\mathcal{H}ol(\mathcal{F})$ son groupeïde d'holonomie, $\nu\mathcal{F}$ le fibré normal de \mathcal{F} , on peut définir le produit semi-direct G du groupeïde $\mathcal{H}ol(\mathcal{F})$ par le groupeïde vectoriel $\Pi : \nu\mathcal{F} \rightarrow M$

$$\nu\mathcal{F} \times G \rightarrow \mathcal{H}ol(\mathcal{F}).$$

G est le produit fibré sur M de $\alpha : \mathcal{H}ol(\mathcal{F}) \rightarrow M$ par $\pi : \nu\mathcal{F} \rightarrow M$ et si $(g_i, X_i) \in G$ ($i = 1, 2$), le produit $(g_1, X_1)(g_2, X_2)$ n'est défini que si $g_1 g_2^{-1}$ l'est et alors $(g_1, X_1)(g_2, X_2) = (g_1 g_2^{-1}, g_2^{-1} X_1 + X_2)$ où l'on note gX l'action naturelle de $\mathcal{H}ol(\mathcal{F})$ sur $\nu\mathcal{F}$ ($\alpha(g) = \Pi(X)$).

G a pour espace d'unités $G_0 = M$ et $\Gamma = T^*G$ a pour espace d'unités $\nu^*G_0 = \mathcal{F}^* \times_M \nu^*\mathcal{F}$ produit fibré sur M de \mathcal{F}^* par $\nu^*\mathcal{F}$. ν^*G_0 est ainsi muni d'une structure de Poisson qui se projette sur la structure de Poisson de \mathcal{F}^* construite dans l'exemple 4 dont les feuilles sont les cotangents des feuilles de \mathcal{F} . Si S est la feuille de $(\xi_0, \eta_0) \in \mathcal{F}^*_{x_0} \times \nu^*\mathcal{F}_{x_0}$, $\psi_{x_0}^\infty$ le groupe d'holonomie infinitésimale de la feuille F_{x_0} de \mathcal{F} passant par x_0 , S est un revêtement de $T^*F_{x_0}$ de fibre $\psi_{x_0}^\infty \cdot \eta_0$ ensemble des images de η_0 par le groupe d'holonomie infinitésimale de x_0 .

CHAPITRE III

Troisième théorème de Lie local pour les variétés de Poisson

§ 1. REALISATIONS SYMPLECTIQUES

DEFINITION 1.1 : Une réalisation symplectique d'une variété de Poisson (P, Λ) est la donnée d'une variété symplectique (M, σ) et d'un morphisme de Poisson $f : (M, \sigma) \rightarrow (P, \Lambda)$. La réalisation est pleine si f est une submersion surjective ;

Une réalisation stricte est un couple formé d'une réalisation pleine $f : M \rightarrow P$ et d'une section lagrangienne globale s de f .

Si (f, s) est une réalisation stricte, on identifie par s , P à une sous-variété lagrangienne de M .

On sait [W. 1983] que si (P, Λ) est une variété de Poisson, tout point $x_0 \in P$ possède un voisinage qui admet une réalisation stricte. L'objectif de ce paragraphe est de prouver que toute variété de Poisson séparée possède une réalisation séparée stricte qui est un groupoïde local (symplectique) au sens de Van Est.

Dans ce qui suit $\Gamma \xrightarrow{\alpha} \Gamma_0$ désigne systématiquement une réalisation stricte de la variété de Poisson (Γ_0, Λ_0) , Γ_0 étant une sous variété lagrangienne de Γ . Γ_0 sera toujours supposée séparée et paracompacte.

LEMME 1 : si $\alpha : \Gamma \rightarrow \Gamma_0$ est une réalisation symplectique stricte, il existe un voisinage ouvert U de Γ_0 et une submersion surjective β de U sur Γ_0 tels que

(i) $\forall x \in \Gamma_0$, $\bar{\alpha}^{-1}(x)$ et $\bar{\beta}^{-1}(x)$ sont connexes.

(ii) Les α -fibres et les β -fibres sont symplectiquement orthogonales.

En particulier $\beta : U \rightarrow -\Gamma_0$ (où $-\Gamma_0$ désigne Γ_0 muni de la structure de Poisson opposée) est une réalisation symplectique stricte. α et β forment une paire duale au sens de [W. 1983].

DEMONSTRATION : α étant une submersion de Poisson, l'orthogonal symplectique α^σ du feuilletage défini par α est un feuilletage régulier qui Γ_0 étant lagrangienne, est transverse à Γ_0 .

L'étape principale de la démonstration est le lemme suivant dont la preuve repose sur une idée de Godement [G] chapitre II.3.

LEMME 2 : Soit M une variété (pas forcément séparée) N une sous-variété séparée paracompacte de M et \mathcal{F} un feuilletage de M tel que pour tout $x \in N$ $T_x N \oplus \mathcal{F}_x = T_x M$. Il existe alors un voisinage ouvert U_0 de N et une submersion $\beta : U_0 \rightarrow N$ telle que pour tout $x \in N$ le feuilletage induit sur U_0 ait pour feuille $\bar{\beta}^{-1}(x)$.

DEMONSTRATION : N étant une sous-variété de M transverse à \mathcal{F} , on peut pour tout $x \in N$ trouver un voisinage ouvert V_x de x dans N et un ouvert distingué U_x de x dans M tels que

$$(I) \quad U_x \cap N = V_x$$

(II) \mathcal{F}_{U_x} a pour feuilles les contre images d'une submersion β_x de U_x sur V_x .

N étant paracompacte puisque séparée, il existe un recouvrement ouvert localement fini plus fin $(V_i)_{i \in I}$ de N et une famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts distingués tels que l'on ait (I) et (II). Soit $\beta_i : U_i \rightarrow V_i$ la submersion associée et

$$U_0 = \left\{ x \in \bigcup_{i \in I} U_i \mid \text{si } x \in U_i \cap U_j \quad \beta_i(x) = \beta_j(x) \right\}.$$

U_0 contenant N , tout revient à prouver que U_0 est un voisinage de N . Si $x_0 \in N$, x_0 n'appartient qu'à un nombre fini $(V_j)_{1 \leq j \leq k}$ d'ouverts du recouvrement $(V_i)_{i \in I}$.

$\bigcap_j V_j$ étant un voisinage ouvert de x_0 , on peut trouver un voisinage ouvert $W_{x_0} \subset \bigcap_j V_j$ et un ouvert distingué \mathcal{U}_{x_0} tels que \mathcal{U}_{x_0} et W_{x_0} vérifiant (I) et (II),

\mathcal{U}_{x_0} étant contenu dans $\bigcap_j U_j$ qui est un voisinage de x_0 dans M . Si pour tout

$x \in \mathcal{U}_{x_0}$ on note ϕ_x la plaque de $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}_{x_0}}$ contenant x et \mathcal{F}_x^j la plaque de $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}_\gamma}$

contenant x , $\phi_x \subset \mathcal{F}_x^j$. Il en résulte que les β_j coïncident sur \mathcal{U}_{x_0} et donc

$$\mathcal{U}_{x_0} \subset U_0 \quad \text{C.Q.F.D.}$$

FIN DE LA DEMONSTRATION DU LEMME 1 : Soit U_0 le voisinage fourni par le lemme 2 pour le feuilletage α^σ et $\beta : U_0 \rightarrow \Gamma_0$. Soit U le sous-ensemble des x qui appartiennent à la fois aux feuilles de $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ pour, respectivement, les feuilletages induits par α et β ; il est clair que U est un voisinage ouvert de Γ_0 ce qui achève la démonstration.

THEOREME 1.1 : Action symplectique naturelle d'une réalisation stricte sur une réalisation : Soit $\alpha : \Gamma \rightarrow \Gamma_0$ une réalisation stricte et $J : M \rightarrow \Gamma_0$ une réalisation (quelconque de Γ_0). Il existe une immersion lagrangienne unique $\gamma : -M \times M \times \Gamma$, maximale parmi les immersions lagrangiennes contenues dans $K = \{(q,p,x) \mid J(q) = \alpha(x)\}$ et contenant comme sous-variété (fermée si Γ_0 est fermée dans Γ) $I = \{(p,p,u) \mid J(p) = u \in \Gamma_0\}$.

De plus si on restreint α à l'ouvert U fourni par le lemme 1, $\beta(x) = J(p)$ si $(q,p,x) \in \gamma \cap (-M \times M \times U)$.

DEMONSTRATION : Soit $\mathcal{J} : -M \times M \times \Gamma \rightarrow -\Gamma_0 \times \Gamma_0$ le morphisme de Poisson $(q,p,x) \mapsto (J(q), \alpha(x))$. K étant l'image réciproque de la diagonale de $-\Gamma_0 \times \Gamma_0$ par \mathcal{J} qui lui est transverse (puisque α est pleine) est une sous-variété fermée de $-M \times M \times \Gamma$. Par construction, pour tout $z \in K$, l'espace conormal à K en z $\nu_z^* K$ est l'ensemble des $-J^* \omega + \alpha^* \omega$ pour $\omega \in T_{\alpha(x)}^* \Gamma_0$. Il en résulte que l'orthogonal symplectique de $T_z K$ est contenu dans $T_z K$. K est donc une sous-variété coïso-trope fermée de $-M \times M \times \Gamma$ dont le feuilletage caractéristique \mathcal{F} est engendré par les flots des hamiltoniens $(\alpha^* h - J^* h \mid h \in C^\infty(\Gamma_0, \mathbb{R}))$. Ces flots sont de la forme $(q,p,x) \mapsto (\varphi_t^J(q), p, \varphi_t^\alpha(x))$ où φ_t^J (resp. φ_t^α) est le flot de $J^* h$ sur (M, σ) (resp. $\alpha^* h$ sur Γ). De plus si φ_t est le flot sur (Γ_0, Λ_0) du hamiltonien h

$$\alpha \circ \varphi_t^\alpha = \varphi_t \circ \alpha$$

$$J \circ \varphi_t^J = \varphi_t \circ J.$$

Soit L la sous variété lagrangienne $\Delta \times \Gamma_0$ de $-M \times M \times \Gamma$ constituée des points (p, p, u) où $u \in \Gamma_0$. $I = L \cap K$ est donc une sous-variété isotrope (fermée si Γ_0 est fermée dans Γ) de K . Il est immédiat que pour tout $z_0 \in I$ $T_{z_0} I \cap \mathcal{F}_{z_0} = \{0\}$ et que $T_{z_0} I + \mathcal{F}_{z_0} = T_{z_0} K$. On peut donc appliquer la méthode des caractéristiques (cf. Appendice 3) : pour tout $z_0 \in I$ soit F_{z_0} la feuille de \mathcal{F} passant par z_0 et γ la somme disjointe $\bigsqcup_{z_0 \in I} F_{z_0}$; il existe sur γ une structure de variété telle

que (I) I est une sous-variété de γ

(II) l'application canonique $\bigsqcup_{z_0 \in I} F_{z_0} = \gamma \rightarrow -M \times M \times \Gamma$ (qui envoie γ

dans K) est une immersion lagrangienne connexe, maximale parmi les

immersions lagrangiennes connexes contenues dans K et contenant I .

Si $(q, p, x) \in \gamma$ il existe par construction $u \in \Gamma_0$ et k fonctions $h_i \in C^\infty(\Gamma_0, \mathbb{R})$ tels que si $(\varphi^\alpha; \varphi^J)$ désignent par abus de notation les produits des flots $\alpha^* h_i$ et $J^* h_i$, respectivement, pris dans le même ordre,

$$\lambda = \varphi^\alpha(u) \quad q = \varphi^J(p)$$

Par construction même $J(q) = \alpha(x)$ $J(p) = u$. Si, de plus, on se restreint au voisinage U de Γ_0 fourni par le lemme 1, $\beta(x) = u = J(p)$. La démonstration du théorème 11 est achevée.

Si $\Gamma \xrightarrow{\alpha} \Gamma_0$ est stricte on peut appliquer la construction précédente au cas $J = \alpha$: ceci va fournir la structure de groupoïde local sur un voisinage de Γ_0 .

La définition suivante est due à Van Est :

DEFINITION 1.2 : [V.E. 1984] : *Un groupoïde (différentiel) local est une variété G munie de deux submersions α et β sur une sous-variété séparée G_0 , d'un*

difféomorphisme de G dans G $x \rightarrow x^{-1}$ appelé inversion, d'une multiplication notée $(x,y) \rightarrow x.y$ qui est une application différentiable d'un voisinage ouvert G_m de G_0 dans $G_2 = \{(x,y) | \alpha(x) = \beta(y)\}$ vérifiant les axiomes (Id) et (Inv) des groupoïdes et telles que

- (I) si $x.y$ est défini, $y^{-1}.x^{-1}$ est défini et est l'inverse de $x.y$
- (II) Associativité locale si $x.y, y.z$ et $x.(y.z)$ sont définis, $(x.y).z$ est défini et égal à $x.(y.z)$.

Un groupoïde local est symplectique si G est une variété symplectique et si le graphe de la multiplication est une sous-variété lagrangienne de $-G \times G \times G$.

On notera que si $G_m = G_2$ G est un groupoïde.

Si l'on applique le théorème 1.1 au couple (α, α) on obtient une immersion lagrangienne γ_α dans $-\Gamma \times \Gamma \times \Gamma$, dont l'image est contenue dans la variété coïsoptrope : $K_\alpha = \{(z,y,x) | \alpha(z) = \alpha(x)\}$ et s'appuyant sur la sous-variété

$$I_\alpha = \{(y,y,u) | \alpha(y) = u\} .$$

Dorénavant on se restreint au voisinage de Γ_0 fourni par le lemme 1, que par abus de notation l'on note Γ . γ_α est contenu dans $K_\alpha \cap K_\beta$ où $K_\beta = \{(z,y,x) | \beta(z) = \beta(y)\}$.

Un raisonnement analogue à celui conduisant au théorème 1.1 permet de montrer que $K_\alpha \cap K_\beta$ est une sous-variété coïsoptrope de $-\Gamma \times \Gamma \times \Gamma$ dont le feuilletage caractéristique est $\mathcal{F}_\alpha + \mathcal{F}_\beta$ où \mathcal{F}_α est engendré par les flots des hamiltoniens $(z,y,x) \rightarrow -h(\alpha(z)) + h(\alpha(x))$ et \mathcal{F}_β par ceux de $h(\beta(z)) - h(\beta(x))$. (On note ϕ_α le flot de $\alpha^* h$ sur (Γ, σ) et ϕ_β celui de $-\beta^* h$ sur (Γ, σ)). Enfin $I_0 = \{(u,u,u) | u \in \Gamma_0\}$ est une sous-variété isotrope de $K_\alpha \cap K_\beta$ transverse au feuilletage $\mathcal{F}_\alpha + \mathcal{F}_\beta$. La méthode des caractéristiques fournit alors une unique immersion lagrangienne maximale $\gamma_{\alpha\beta}$ contenant I_0 et contenue dans $K_\alpha \cap K_\beta$.

On note $\Gamma_2 = \{(y,x) | \alpha(y) = \beta(x)\}$.

LEMME 3 : $\gamma_{\alpha\beta}$ est un graphe de Γ_2 dans Γ .

DEMONSTRATION : Soit $\rho : -\Gamma \times \Gamma \times \Gamma \rightarrow \Gamma \times \Gamma$ $(z, y, x) \rightarrow (y, x)$. ρ envoie $\gamma_{\alpha\beta}$ sur une partie $U_{\alpha\beta}$ de Γ_2 . Tout revient à prouver que $\rho(z, y, x) = \rho(z_1, y, x)$ entraîne que $z = z_1$.

Cette propriété (qui distingue $\gamma_{\alpha\beta}$ de γ_α) va résulter de la commutation des flots des hamiltoniens définissant \mathcal{F}_α et \mathcal{F}_β et de la définition de $\gamma_{\alpha\beta}$:

si $(z, y, x) \in \gamma_{\alpha\beta}$ il existe un produit de flots hamiltoniens ϕ^α (resp. de flots ϕ^β) tels que

$$y = \phi^\beta(u) \quad x = \phi^\alpha(u) \quad z = \phi^\beta \phi^\alpha(u) = \phi^\alpha \phi^\beta(u)$$

ce qui implique que $z = \phi^\alpha(y) = \phi^\beta(x)$.

De même, avec des notations évidentes, si $(z, y, x) \in \gamma_{\alpha\beta}$

$$\begin{cases} y = \phi_1^\beta(u_1) & x = \phi_1^\alpha(u_1) \\ z_1 = \phi_1^\beta(x) & = \phi_1^\alpha(y) \end{cases}$$

comme $\alpha(y) = u = u_1$, $z_1 = \phi_1^\beta(x) = \phi_1^\beta(\phi_1^\alpha(u)) = \phi_1^\alpha(y)$ et donc $z = z_1$.

C.Q.F.D.

Il est immédiat que $\rho : \gamma_{\alpha\beta} \rightarrow \Gamma_2$ est une submersion, ce qui implique que $U_{\alpha\beta}$ est ouvert dans Γ_2 , et donc que $\gamma_{\alpha\beta}$ est une sous-variété (lagrangienne) de $-\Gamma \times \Gamma \times \Gamma$.

Or $I_\alpha = \{(x, u, x) \mid \alpha(x) = u\}$. Comme Γ est α -connexe, il existe un produit de flots ϕ_α tels que $x = \phi_\alpha(u)$ ce qui implique que $I_\alpha \subset \gamma_{\alpha\beta}$ et par maximalité de γ_α que $\gamma_{\alpha\beta} \subset \gamma_\alpha$.

NOTATION : Si $(z, y, x) \in \gamma_{\alpha\beta}$ on écrira dorénavant $z = y.x$ si $y.x = y_1.x$, $y_1.x = \phi_1^\beta(x) = \phi_1^\beta(\phi_1^\alpha(u)) = \phi_1^\alpha(y_1)$ or $y.x = \phi^\alpha(y)$. ϕ^α étant un difféomorphisme $y = y_1$. On peut donc simplifier à gauche et, de même, à droite. Comme $y.\alpha(y) = y$ (resp. $\beta(y).y = y$), la relation $y.x = y$ (resp. $xy = y$) entraîne que $x = \alpha(y)$ (resp. $x = \beta(y)$).

Pour prouver que $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$ possède un voisinage de Γ_0 qui est un groupe local il reste à vérifier l'associativité et à construire un voisinage ouvert de Γ_0 dans Γ muni d'une inversion.

Comme $\gamma_{\alpha\beta}$ est le graphe d'une application d'un voisinage ouvert $U_{\alpha\beta}$ de Γ_0 dans Γ_2 , Δ désignant la diagonale de $\Gamma \times \Gamma$, $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow x_1 \cdot (x_2 x_3)$ a pour graphe l'image dans $-\Gamma \times \Gamma \times \Gamma \times \Gamma$ de

$$\gamma_{\alpha\beta} \times \gamma_{\alpha\beta} \cap -\Gamma \times \Gamma \times \Delta \times \Gamma \times \Gamma$$

par l'application $(z, x_1, x_2, x_3) \rightarrow (z, x_1, x_2, x_3)$ sous-variété lagrangienne contenue dans

$$K_1 = \{(z, x_1, x_2, x_3) \mid \alpha(z) = \alpha(x_3), \beta(z) = \beta(x_1), \beta(x_2) = \alpha(x_1)\}$$

s'appuyant sur $\{(u, u, u, u) \mid u \in \Gamma_0\}$.

tandis que $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3$ a pour graphe une sous-variété lagrangienne de $-\Gamma \times \Gamma \times \Gamma \times \Gamma$ contenu dans K_2 constitué des (z, x_1, x_2, x_3) tels que

$$(*) \quad \begin{cases} \alpha(z) = \alpha(x_3) & \beta(z) = \beta(x_1) \\ \alpha(x_1 x_2) = \alpha(x_2) & \beta(x_1 x_2) = \beta(x_1) \end{cases}$$

et s'appuyant sur $\{(u, u, u) \mid u \in \Gamma_0\}$.

Des relations (*) on déduit que $K_1 \subset K_2$ et donc que $K_1 \equiv K_2$. Les deux sous-variétés lagrangiennes coïncident ce qui assure que si $x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)$ est défini, ainsi que $(x_1 \cdot x_2)$, $((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3)$ projection de $x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)$ sur $\Gamma_2 \times \Gamma$ a pour image $x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3$ ce qui prouve l'associativité locale.

Enfin de ce que l'on peut simplifier à gauche il résulte que $-\Gamma_0 \times \Gamma \times \Gamma$ se projette par $(z, y, x) \rightarrow (y, x)$ en le graphe d'une application d'un voisinage de Γ_0 dans Γ à valeurs dans Γ , $x \rightarrow y_1(x)$ telle que $y_1(x) \cdot x = \alpha(x)$. Il existe de même un voisinage de Γ_0 sur lequel est défini $x \rightarrow y_2(x)$ tel que $x \cdot y_2(x) = \alpha(x)$. Sur l'intersection y_1 et y_2 sont définis et l'associativité locale entraîne que $y_1 \equiv y_2$. On a donc exhibé un voisinage U_0 de Γ_0 dans Γ sur lequel

est défini : $x \rightarrow x^{-1}$. Comme $f^2(x) = x$ dès que $f(x)$ est défini, il existe un voisinage U de Γ_0 dans Γ tel que $x \rightarrow x^{-1}$ soit un difféomorphisme de U . Si

$U_2 = \{(y,x) \mid \alpha(y) = \beta(x)\}$, U_2 est un voisinage ouvert de Γ_0 dans Γ . si $(y,x) \in U_2 \cap U_{\alpha\beta}$ il résulte de l'associativité locale que $y^{-1} \cdot (y,x)$ est défini et vaut x ce qui à son tour entraîne que $(x^{-1} \cdot y^{-1}) \cdot (y,x) = \alpha(x)$.

Le couple $(U, U_m = U_2 \cap U_{\alpha\beta})$ est donc un groupoïde local symplectique.

Nous avons démontré :

THEOREME 1.2 : Si $\alpha : \Gamma \rightarrow \Gamma_0$ est une réalisation symplectique stricte, il existe un voisinage de Γ_0 dans Γ , U muni canoniquement d'une structure de groupoïde symplectique local pour laquelle $U \xrightarrow{\alpha} \Gamma_0$ est l'application source.

Cette structure est canonique au sens suivant : si V est un autre voisinage ouvert de Γ_0 muni d'une structure de groupoïde local pour laquelle $V \xrightarrow{\alpha} \Gamma_0$ est l'application source, il existe un voisinage ouvert de Γ_0 , $W \subset U \cap V$ sur lequel U et V induisant la même structure de groupoïde local.

Ceci va résulter de la proposition suivante appliquée à l'application identique de $V \cap U$ muni de la structure induite par U , dans V :

PROPOSITION 1.1 : Si $\Gamma^i \xrightarrow[\alpha_i]{\beta_i} \Gamma_0$ ($i = 1, 2$) sont deux groupoïdes (locaux) symplectiques de même base Γ_0 et si $f : \Gamma^1 \rightarrow \Gamma^2$ est un morphisme symplectique, laissant invariant Γ_0 , tel que $\alpha_2 \circ f = \alpha_1$, f est un morphisme de groupoïdes (locaux). De plus f est canoniquement déterminé sur la composante α -connexe de Γ^1 .

PROPOSITION 1.1 : Si $\Gamma^i \xrightarrow[\alpha_i]{\beta_i} \Gamma_0$ ($i = 1, 2$) sont deux groupoïdes (locaux) symplectiques de même base Γ_0 et si $f : \Gamma^1 \rightarrow \Gamma^2$ est un morphisme symplectique, laissant invariant Γ_0 , tel que $\alpha_2 \circ f = \alpha_1$, f est un morphisme de groupoïdes (locaux). De plus f est canoniquement déterminé sur la composante α -connexe de Γ^1 .

DEMONSTRATION : Il faut prouver que si $y.x$ est défini dans Γ^1 $f(y).f(x)$ l'est dans Γ^2 et vaut $f(y.x)$.

NOTATION : Pour tout $h \in C^\infty(\Gamma_0, \mathbb{R})$ on notera $]t^-(h,u), t^+(h,u)[$

(resp. $]t^-(\alpha^*h,x), t^+(\alpha^*h,x)[$) l'intervalle de définition en u (resp. x) du flot du hamiltonien de h (resp. α^*h).

Avec cette notation, $\alpha_2 \circ f = \alpha_1$ et le fait que f soit un morphisme symplectique entraînent que

$$t^-(\alpha_2^* h, f(x)) \leq t^-(\alpha_1^* h, x) < t^+(\alpha_1^* h, x) \leq t^+(\alpha_2^* h, f(x)).$$

Il en résulte que si $(y, x) \in \gamma_{\alpha_2 \beta_1}$, $(f(y), f(x)) \in \gamma_{\alpha_2 \beta_2}$ et $f(y \cdot x) = f(y)/f(x)$.

Si Γ_{12} désigne la composante α -connexe de Γ^1 , tout $x \in \Gamma_{12}$ s'écrit $x = \phi^{\alpha_1}(u)$.

Comme f est un morphisme symplectique induisant l'identité sur Γ_0 ,

$f(x) = f(\phi^{\alpha_1}(u)) = \phi^{\alpha_2}(u)$. Ce qui assure que f est canoniquement déterminée sur Γ_{12} , qui est un voisinage ouvert de Γ_0 dans Γ^1 .

DEFINITION 1.3 : Une paire duale stricte (α, β) connexe $\Gamma \xrightarrow[\alpha]{\beta} \Gamma_0$, $\Gamma_0 \subset \Gamma$ est une

paire duale (α, β) telle que

(I) $\alpha : \Gamma \rightarrow \Gamma_0$ $\beta : \Gamma \rightarrow -\Gamma_0$ sont des réalisations strictes

formant une paire duale.

(II) $\forall x \in \Gamma_0$ $\bar{\alpha}^{-1}(x)$ et $\bar{\beta}^{-1}(x)$ sont connexes.

Tout groupoïde symplectique α -connexe est une paire duale stricte (α, β) -connexe. De plus si $\Gamma \xrightarrow[\alpha]{\beta} \Gamma_0$ est un groupoïde symplectique les champs de hamiltoniens $\alpha^* h$ sont des champs invariants à gauche sur Γ et en particulier si $u \in \Gamma_0$ des champs invariants à gauche sur le fibré, principal pour l'action à gauche de $\Gamma_u = \bar{\alpha}^{-1}(u) \cap \bar{\beta}^{-1}(u)$, $\beta : \bar{\alpha}^{-1}(u) \rightarrow S_u$ où S_u est l'orbite de u par Γ . [II.2. Lemme].

Il est alors classique [Lic. 1955] que, avec les notations introduites plus haut,

$$(*) \quad \begin{cases} t^+(h, \alpha(x)) = t^+(\alpha^* h, x) \\ t^-(h, \alpha(x)) = t^-(\alpha^* h, x) \end{cases}$$

En fait les conditions (*) caractérisent parmi les paires duales strictes les groupoïdes :

PROPOSITION 1.2 : Si $\Gamma \begin{matrix} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{matrix} \Gamma_0$ est une paire duale stricte (α, β) connexe, Γ est un groupoïde symplectique ssi Γ vérifie les conditions (*) et cette structure est canonique.

DEMONSTRATION : Le caractère canonique de la structure résulte de la proposition 1.1. Tout revient à prouver que si Γ vérifie (*), Γ est un groupoïde symplectique ce qui à son tour revient à prouver avec les notations introduites dans la démonstration du théorème 1.2 que $U_{\alpha\beta} = \Gamma_2$; Comme Γ est (α, β) connexe, tout $(y, x) \in \Gamma_2$ s'écrit $(y = \phi^\beta(u), x = \phi^\alpha(u))$. Mais compte tenu de (*), $\phi^\beta(x)$ et $\phi^\alpha(y)$ sont définis et donc coïncident ce qui implique que $(\phi^\alpha(y), y, x) \in \gamma_{\alpha\beta}$. Ainsi $U_{\alpha\beta} = \Gamma_2$, ce qu'il fallait démontrer.

Dans les problèmes d'atteignabilité pour un feuilletage (de Stefan) on peut toujours remplacer l'algèbre de Lie complète \mathcal{G} de champs de vecteurs définissant le feuilletage par la sous-algèbre de Lie \mathcal{G}_0 des champs à supports compacts (cf. I.4) ce qui a l'avantage de n'utiliser que des champs complets. On peut donc dans l'énoncé des conditions (*) de la proposition 1.2 se limiter aux fonctions h sur Γ_0 à support compact, pour lesquelles les conditions (*) signifient simplement que pour tout h à support compact le champ de hamiltonien $\alpha^* h$ est complet. Une réalisation symplectique $\alpha : \Gamma \rightarrow \Gamma_0$ pour laquelle cette propriété est réalisée est appelée complète par Karasev (Ka. 1986). Ceci conduit à la version équivalente de 1.2 :

PROPOSITION 1.2' : Si $\Gamma \begin{matrix} \xrightarrow{\beta} \\ \xrightarrow{\alpha} \end{matrix} \Gamma_0$ est une paire duale stricte (α, β) connexe Γ est un groupoïde symplectique ssi $\alpha : \Gamma \rightarrow \Gamma_0$ est une réalisation complète au sens de Karasev. De plus cette structure est canonique.

La proposition 1.1 s'interprète en disant que l'identité de Γ_0 se relève de façon unique au voisinage de Γ_0 dans Γ^1 en un morphisme de groupoïde symplectique.

Inversement si $f : \Gamma^1 \rightarrow \Gamma^2$ est un morphisme de groupoïdes symplectiques il induit un morphisme de Poisson f_0 de Γ_0^1 dans Γ_0^2 . On peut se demander à quelle condition on peut relever un morphisme de Poisson de Γ_0^1 dans Γ_0^2 en un morphisme de

groupoïdes symplectiques. On va voir qu'en fait cette situation est très rigide ce qui, pour partie, traduit le fait bien connu qu'un morphisme f_0 de variétés ne s'étend en un morphisme des fibrés cotangents le relevant, que si f_0 est un difféomorphisme ; il suffit pour s'en convaincre de considérer les cotangents Γ^1 et Γ^2 de deux groupoïdes Γ_0^1 et Γ_0^2 .

THEOREME 1.3 : Soit $\Gamma^i \xrightarrow[\alpha_i]{\beta_i} \Gamma_0^i$ deux groupoïdes locaux symplectiques - que l'on

peut toujours supposer α_i et β_i connexes. Soit $f_0 : \Gamma_0^1 \rightarrow \Gamma_0^2$ un morphisme

de Poisson et $K_\alpha = \{(x_2, x_1) \mid (\alpha_2(x_2), \alpha_1(x_1)) \in G_0\}$ (resp.

$K_\beta = \{(x_2, x_1) \mid (\beta_2(x_2), \beta_1(x_1)) \in G_0\}$ où G_0 est le graphe de f_0 . Il existe une

unique immersion lagrangienne maximale G_α contenant G_0 et contenue dans K_α .

G_α est également contenue dans K_β et G_α est un groupoïde local d'espace

d'unités .

Si G_α est un graphe d'un voisinage ouvert de Γ_0^1 dans Γ^1 ,

nécessairement Γ^1 et Γ^2 sont de même dimension et f_0 est un difféomorphisme local de Γ_0^1 dans Γ_0^2 .

Si f_0 est un difféomorphisme de Poisson de Γ_0^1 sur Γ_0^2 , il existe un morphisme unique de groupoïdes locaux symplectiques de Γ^1 dans Γ^2 relevant f_0 .

COROLLAIRE : Si $\Gamma^i \xrightarrow[\alpha_i]{\beta_i} \Gamma_0^i$ sont deux groupoïdes symplectiques α_i -connexes de

même dimension, si $f_0 : \Gamma_0^1 \rightarrow \Gamma_0^2$ est un difféomorphisme de Poisson de Γ_0^1

sur Γ_0^2 , et si pour tout $x \in \Gamma_0^1$, $\bar{\alpha}_1(x)$ est simplement connexe, il existe un

unique morphisme de groupoïdes symplectiques f qui relève f_0 . De plus

$f : \Gamma^1 \rightarrow \Gamma^2$ est un difféomorphisme local.

En particulier si Γ^2 est α_2 -simplement connexe, f est un isomorphisme.

Ce corollaire peut se traduire en disant que si Γ_0 possède une réalisation stricte Γ qui est α -simplement connexe, Γ est unique à isomorphisme de groupoïdes symplectiques près, analogue pour les algèbres de Lie de dimension infinie du résultat bien connu reliant algèbres et groupes de Lie de dimension finie.

DEMONSTRATION : K_α étant coïso trope et $G_0 \subset K_\alpha$ la méthode des caractéristiques permet de construire G_α . Comme (α_i, β_i) est une paire duale les caractéristiques de K_α issues de $G_0 \subset K_\alpha \cap K_\beta$ sont contenues dans K_β . Si G_β est l'unique immersion lagrangienne associée au couple (G_0, K_β) et $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow \Gamma_2 \times -\Gamma_1$, on pose

$i_\alpha^{-1} G_\beta = G_{\alpha\beta}$. $G_{\alpha\beta}$ est un voisinage ouvert de G_0 . On va se contenter de prouver que l'on peut munir G_α d'une loi de produit local faisant de i_α un homomorphisme.

Comme $G_\alpha = \bigsqcup_{z \in G_0} F_z^\alpha$ où F_z^α est la caractéristique de K_α issue de z , on définit

$\alpha : G_\alpha \rightarrow G_0$ par $\alpha(F_z^\alpha) = z$. Comme le feuilletage défini par les caractéristiques de K_β , \mathcal{F}^β , est transverse à G_0 on peut (Lemme 1) réduire $G_{\alpha\beta}$ à un voisinage ouvert de G_0 sur lequel \mathcal{F}^β est défini par une submersion β et on peut imposer que

$G_{\alpha\beta} \xrightarrow[\beta]{\alpha} G_0$ soit α et β -connexe. Alors si (y_2, y_1) et $(x_2, x_1) \in F_z^\alpha \cap G_{\alpha\beta}$ et si existent $y_2 \cdot x_2$ et $y_1 \cdot x_1$ ((i.e. $(y_2, x_2) \in U_{\alpha_2 \beta_2}^2$ et $(y_1, x_1) \in U_{\alpha_1 \beta_1}^1$ avec

les notations du théorème 1.1)

$$y_2 \cdot x_2 = \phi^{\alpha_2}(y_2) \quad y_1 \cdot x_1 = \phi^{\alpha_1}(y_1)$$

où $x_2 = \phi^{\alpha_2}(f_0(u))$, $x_1 = \phi^{\alpha_1}(u)$ $u \in \Gamma_0$ ($f_0(u), u = z$ puisque $(x_2, x_1) \in G_\alpha$, ϕ^{α_2} et ϕ^{α_1} étant respectivement des produits de flots de hamiltoniens $\alpha_2^* h, \alpha_1^* f_0^* h$ $h \in C^\infty(\Gamma_0^2, \mathbb{R})$ pris dans le même ordre.

On peut écrire de même $y_2 = \tilde{\phi}^{\alpha_2}(f_0(v)) y_1 = \tilde{\phi}^{\alpha_1}(v)$ puisque $(y_2, y_1) \in G_\alpha$.

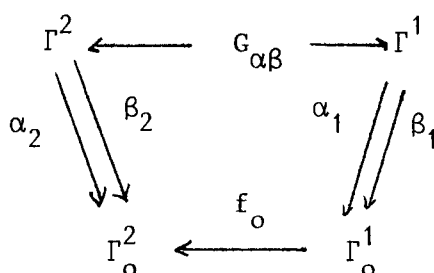
Tout ceci assure que $y_2 \cdot x_2 = \phi^{\alpha_2} \tilde{\phi}^{\alpha_2}(f_0(v))$

$$y_1 \cdot x_1 = \phi^{\alpha_1} \tilde{\phi}^{\alpha_1}(v)$$

ce qui implique que $(y_2 \cdot x_2, y_1 \cdot x_1) \in G_\alpha$.

La deuxième partie du théorème résulte de ce que la dimension de G_α est $n_1 + n_2$ d'une part, et de ce que $p_1 : \Gamma_2 \times \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1$ induit une application $p_1 : G_\alpha \rightarrow \Gamma_1$ telle que F_z^α , où $z = (f_0(u), u)$, se projette sur la partie de $\alpha_1^{-1}(u)$ obtenue par les flots des hamiltoniens $(f_0^* h)$ ($h \in C^\infty(\Gamma_2, \mathbb{R})$). Ceux-ci n'engendrent $\alpha_1^{-1}(u)$ que si f_0 est une immersion.

Enfin si $n_1 = n_2$ et si f_0 est un difféomorphisme,



par application du théorème des fonctions implicites on construit pour tout $u_o \in \Gamma_o^1$, un voisinage ouvert α_1 -distingué de u_o , W_{u_o} et un voisinage ouvert V_{u_o} de u_o tels que

$$(I) \quad \alpha_1 : W_{u_o} \rightarrow V_{u_o}$$

$$(II) \quad \text{il existe une section } s_1 \text{ de } p_1 \text{ au-dessus de } W_{u_o} \text{ telle que } s_1(V_{u_o}) = W_{u_o}.$$

$f_{u_o} = p_2 \circ s_1$ est alors un difféomorphisme symplectique - et donc un isomorphisme local de groupoïdes symplectiques - de W_{u_o} dans Γ^2 .

Γ_o^1 étant paracompacte on peut extraire du recouvrement $(V_{u_o})_{u_o \in \Gamma_o^1}$ un sous recouvrement ouvert localement fini (V_i) ; on note $f_i : W_i \rightarrow \Gamma_o^2$ les isomorphismes locaux de groupoïdes symplectiques associés. On pose :

$$W = \{x \in \cup W_i \mid \text{si } x \in W_i \cap W_j \quad f_i(x) = f_j(x)\}$$

tout revient à prouver que W est un voisinage de Γ_o .

Or si $u_0 \in \Gamma_0$, on peut trouver $(W_{u_0}, V_{u_0}, f_{u_0})$ tels que si $(V_j)_{1 \leq j \leq k}$ désigne l'ensemble des V_i tels que $u_0 \in V_i$,

$$V_{u_0} \subset \bigcap_i^k V_j \quad W_{u_0} \subset \bigcap_i^k W_j$$

Il reste à voir que $f_j|_{W_{u_0}}$ et $f_i|_{V_{u_0}}$ coïncident sur un voisinage de V_{u_0} dans W_{u_0}

ce qui résulte du lemme suivant :

LEMME Si $\Gamma^2 \xrightarrow{f} \Gamma^1$ et $\Gamma^2 \xrightarrow{g} \Gamma^1$ sont deux isomorphismes de groupoïdes locaux symplectiques au-dessus de f_0 , f et g ont même germe le long de Γ_0 .

En effet $\bar{g}_0^{-1} \circ f$ relève l'identité de Γ_0 .

DEMONSTRATION DU COROLLAIRE. On considère

$$\begin{array}{ccc} G_\alpha & \xrightarrow{p_1} & \Gamma_1 \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha_1 \\ G_0 & \longrightarrow & \Gamma_0 \end{array}$$

et sa restriction $p_1: \bar{\alpha}_1^{-1}(u) \longrightarrow \bar{\alpha}_1^{-1}(u)$

Soit $x \in \bar{\alpha}_1^{-1}(u)$ et ϕ^{α_1} un produit de flots hamiltoniens de (f^*h)

($h \in C^\infty(\Gamma_0^2, \mathbf{R})$) reliant u à x . ϕ^{α_1} fournit également un chemin de u à x . Soit ϕ^{α_2}

le chemin de Γ^2 issu de $f_0(u)$ et obtenu par le produit des flots hamiltoniens des mêmes $h \in C^\infty(\Gamma_0^2, \mathbf{R})$ pris dans le même ordre. Comme f_0 est un difféomorphisme de Poisson et que Γ^2 est un groupoïde le chemin $(\phi^{\alpha_2}, \phi^{\alpha_1})$ relève ϕ^{α_1} dans $\bar{\alpha}_1^{-1}(u)$

Comme p_1 est un difféomorphisme et que tout chemin de $\bar{\alpha}_1^{-1}(u)$ peut être approché

par des chemins du type ϕ^{α_1} , $\bar{\alpha}^1(u) \rightarrow \bar{\alpha}_1^1(u)$ est un revêtement. Si de plus $\bar{\alpha}^1(u)$ est simplement connexe, c'est un isomorphisme ce qui assure que $G \xrightarrow{p_1} \Gamma_1$ est un difféomorphisme.

C.Q.F.D.

On est maintenant en mesure de prouver le principal résultat de ce chapitre.

THEOREME 1.4 : Pour toute variété paracompacte de Poisson (Γ_0, Λ_0) il existe un groupoïde symplectique local séparé (Γ, σ) ayant (Γ_0, Λ_0) comme ensemble d'unités. De plus Γ_0 est fermée dans Γ .

DEMONSTRATION : Γ_0 étant paracompacte, le théorème de réalisation locale [W. 1983] et le théorème 1.2 permettent de construire :

- . un recouvrement ouvert localement fini $(V_i)_{i \in I}$ de Γ_0 .
- . pour tout i un groupoïde symplectique local séparé $W_i \xrightarrow[\alpha_i]{\beta_i} V_i$ qui est une réalisation stricte de $(V_i, \Lambda_0|_{V_i})$ (α_i, β_i) -connexe.

Soit W la somme disjointe des W_i et $\alpha : W \rightarrow \Gamma_0$ défini par $\alpha|_{W_i} = \alpha_i$.

Pour tout $x \in W$ on note (V_j^x) l'ensemble fini des V_j contenant $\alpha(x)$ et $V^x = \cap V_j^x$. V^x est un voisinage ouvert de $\alpha(x)$ et $W^x \rightarrow V^x$ un groupoïde local symplectique réalisant V^x . Compte tenu du théorème 1.3 on construit pour chaque j tel que $x \in V_j$, un isomorphisme local de groupoïdes symplectiques

$$\begin{array}{ccc}
 W^x & \xrightarrow{\rho_j^x} & W_j^x \\
 \downarrow & & \downarrow \alpha_j \\
 V^x & \hookrightarrow & V_j^x
 \end{array}$$

et on peut supposer que W^x est la source commune de tous les ρ_j^x .

Soit $\tilde{\Gamma}$ l'ensemble des x ainsi constitué : si $\tilde{x} \in W^i$, $\exists x \in W^u$ (où $u = \alpha(x)$) tel que $\tilde{x} = \rho_i^u(x)$.

Sur $\tilde{\Gamma}$ on considère la relation d'équivalence $\tilde{x}_i \sim \tilde{x}_j$ ($\tilde{x}_i \in W^i$, $\tilde{x}_j \in W^j$) si $\alpha_i(\tilde{x}_i) = \alpha_j(\tilde{x}_j) = u$ et si $\exists x \in W^u$, $\tilde{x}_i = \rho_i^u(x)$, $\tilde{x}_j = \rho_j^u(x)$.

On note Γ le quotient. Compte tenu des résultats antérieurs, tout revient à prouver que $\tilde{\Gamma}$ est un voisinage de $\bigsqcup V_i$ ce qui résulte de ce que $\forall u \in V_i$ $\Gamma \supset \rho_i^u(W^u)$ qui est ouvert.

C.Q.F.D.

2. ALGÈBRE DE LIE D'UNE VARIÉTÉ DE POISSON ET TROISIÈME THÉORÈME DE LIE LOCAL.

Soit (Γ_0, Λ_0) une variété de Poisson (paracompacte) et $(\Gamma, \sigma) \xrightarrow{\pi} \Gamma_0$ le groupoïde local symplectique associé. Tout se passe comme si Γ_0 était l'espace des unités d'un groupoïde symplectique. La proposition II.2.1 entraîne :

PROPOSITION 2.1 : si (Γ_0, Λ_0) est une variété de Poisson $T^*\Gamma_0 \rightarrow \Gamma_0$ est canoniquement munie d'une structure d'algèbre de Lie dont la parenthèse est donnée par

$$\omega_i \in \text{Sect}(\Gamma_0, T^*\Gamma_0) \quad (i = 1, 2)$$

$$(**) \quad \{\omega_1, \omega_2\} = \iota_{\Lambda_0 \# \omega_1} d\omega_2 - \iota_{\Lambda_0 \# \omega_2} d\omega_1 + d(\iota_{\Lambda_0}(\omega_1 \wedge \omega_2))$$

et de morphisme de $T^*\Gamma_0$ dans $T\Gamma_0 \quad \Lambda_0 \#$.

En particulier $d : (C^\infty(\Gamma_0), \{ \}) \rightarrow (\text{Sect}(\Gamma_0, T^*\Gamma_0), \{, \})$ est un morphisme d'algèbres de Lie et si $\mathcal{Z}(\Gamma_0, T^*\Gamma_0)$ désigne l'espace des 1-formes fermées, $\mathcal{Z}(\Gamma_0, T^*\Gamma_0)$ est un sous-algèbre de Lie de $\text{Sect}(\Gamma_0, T^*\Gamma_0)$, dont l'idéal dérivé est contenu dans les 1-formes exactes.

REMARQUE : L'existence d'une structure d'algèbre de Lie sur $\text{Sect}(\Gamma_0, T^*\Gamma_0)$ était connu dans le cas d'une variété symplectique. (cf. [A.M. 1978] par ex.).

Inversement considérons une structure d'algèbroïde de Lie sur $T^*\Gamma_0$. On note $[|,|]$ le crochet sur $\text{Sect}(\Gamma_0, T^*\Gamma_0)$ et $\Lambda_0^\#$ le morphisme de $T^*\Gamma_0$ dans $T\Gamma_0$. A $\Lambda_0^\#$ est associé canoniquement un 2-tenseur contravariant Λ_0 défini par $\iota_{\Lambda_0}(\omega_1 \otimes \omega_2) = \langle \Lambda_0^\# \omega_1, \omega_2 \rangle$. On suppose que

(I) Λ_0 est antisymétrique.

(II) $\mathcal{L}(\Gamma_0, T^*\Gamma_0)$ est une sous-algèbre de Lie de $(\text{Sect}(\Gamma_0, T^*\Gamma_0), [|, |])$.

Soit $\{\omega_1, \omega_2\}$ l'application \mathbf{R} -bilinéaire définie sur $\text{Sect}(\Gamma_0, T^*\Gamma_0)$ par la formule (**). La condition (I) ci-dessus assure que c'est une forme alternée. On vérifie que

$$(\omega_1, \omega_2) \rightarrow [|\omega_1, \omega_2|] - \{\omega_1, \omega_2\}$$

est $C^\infty(\Gamma_0, \mathbf{R})$ -bilinéaire. Ceci entraîne l'existence d'un tenseur

$$T \in \text{Sect}(\Gamma_0, T^*\Gamma_0 \otimes \Lambda_0^2 T\Gamma_0) \text{ tel que } [|\omega_1, \omega_2|] - \{\omega_1, \omega_2\} = \iota(T)(\omega_1 \wedge \omega_2).$$

Soit $U = (x^i)$ un ouvert, connexe et simplement connexe, de coordonnées locales et $T^{ij} = \iota(T)(dx^i \wedge dx^j)$.

La condition (II) implique que T^{ij} est une 1-forme fermée. Comme pour tout couple (f, g) d'applications C^∞ sur Γ_0 $d(T(df, dg)) = 0$, on peut, au-dessus de U ,

$$\text{écrire } \forall (f, g) \in C^\infty(\Gamma_0, \mathbf{R}) \quad \sum_{i < j} T^{ij} \wedge d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial g}{\partial x^j} - \frac{\partial f}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial g}{\partial x^i}\right) = 0$$

on prend successivement $f = x^{i_0}$ $g = (x^{j_0})^2$, puis $f = (x^{i_0})^2$ $g = x^{j_0}$ où $i_0 < j_0$.

Il en résulte que $T^{i_0 j_0} \wedge dx^{j_0} = 0 = T^{i_0 j_0} \wedge dx^{i_0}$ ce qui implique que $T^{i_0 j_0} = 0$.

On a prouvé :

PROPOSITION 2.1 : *Un algèbroïde de Lie sur $T^*\Gamma_0 \rightarrow \Gamma_0$ de crochet $[|, |]$ sur*

$\text{Sect}(\Gamma_0, T^\Gamma_0)$, de morphisme $\Lambda_0^\# : T^*\Gamma_0 \rightarrow T\Gamma_0$ est l'algèbroïde de*

Lie d'une structure de Poisson sur M de 2-tenseur Λ_0 ssi

(I) Λ_0 est antisymétrique

(II) $\mathcal{L}(\Gamma_0, T^*\Gamma_0)$ est une sous-algèbre de Lie de $\text{Sect}(\Gamma_0, T^*\Gamma_0), [[\cdot, \cdot]]$.

Un tel algébroïde de Lie sera appelé algébroïde symplectique. Le théorème 1.4 s'interprète alors ainsi : un algébroïde symplectique est l'algébroïde d'un groupoïde local symplectique. Le théorème 1.4 apparaît comme l'extension à certains algébroïdes du 3° théorème de Lie sur la réalisation d'une algèbre de Lie de dimension m finie par un groupe (local) de Lie. Autrement dit encore la borne généralisation en dimension infinie de la notion d'algèbre de Lie duale est celle de variété de Poisson. Il est donc légitime d'appeler "3° théorème de Lie local" pour les variétés de Poisson le théorème 1.4 ou sa forme équivalente :

THEOREME 2.1 : "Troisième théorème de Lie local"

Un algébroïde de Lie sur $T^*\Gamma_0 \rightarrow \Gamma_0$ est l'algébroïde de Lie d'un groupoïde local symplectique d'unités Γ_0 si et seulement si c'est un algébroïde symplectique.

REMARQUE 1 : J. PRADINES [Pr. 1968] a prouvé pour tout algébroïde de Lie l'existence d'un groupoïde local dont il est l'algébroïde. Le résultat ici énoncé est plus fin : à tout algébroïde symplectique est associé un groupoïde local symplectique.

REMARQUE 2 : Soit M une variété de dimension 2n munie d'un 2-forme σ de rang maximum non fermée. $T^*M \rightarrow M$ est muni d'une structure d'algébroïde de Lie qui n'est pas symplectique, de crochet défini par $[[\omega_1, \omega_2]] = -1 \frac{\sigma}{[X_1, X_2]}$ où $-1 \frac{\sigma}{X_i} = \omega_i$ et de morphisme $\Lambda^\#$ défini par $\Lambda^\# \omega_i = X_i$. La condition (II) ci-dessus équivaut dans ce cas à $d\sigma = 0$.

§ 3. REALISATIONS SYMPLECTIQUES ET QUANTIFICATION

3.1. Resssemblances formelles :

On peut établir une espèce de dictionnaire entre la théorie des groupoïdes symplectiques d'une part et celle des \mathbb{C}^* -algèbres d'autre part :

Sous-variété lagrangiennes	Eléments de l'algèbre
L'inversion i	La conjugaison
Le produit	Le produit tensoriel
La réunion	La somme
Les bisections lagrangiennes	Les éléments unitaires
Sous-groupeïdes lagrangiens	Projecteurs auto-adjoints
	etc...

Si par exemple $\Lambda : \Gamma' \rightarrow \Gamma$ est un homomorphisme de groupeïdes, en l'appliquant à Γ'_0 on obtient une réunion de sous-groupeïdes lagrangiens (i.e. une somme de projecteurs auto-adjoints). Si $\Gamma' = -M \times M$ (ou $\Pi(M)$), on obtient l'analogie d'une représentation et $\Lambda \circ \Gamma'_0$ peut alors être considéré comme la trace de la représentation (en fait la trace est une fonctionnelle linéaire plutôt qu'un élément de l'algèbre, mais la structure symplectique donne une espèce de produit scalaire sur les éléments). La "trace" de la représentation triviale est Γ_0 .

3.2 Qu'en est-il si l'on peut vraiment quantifier ?

Supposons que, en tant que variété symplectique Γ soit préquantifiable de sorte que l'on puisse construire les sections d'un fibré en droites, polarisations, etc.... bref que l'on ait associé à un espace de Hilbert \mathcal{H} de façon que la multiplication du groupeïde définisse un élément de $\mathcal{H}^* \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ et donc une opération de $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ vérifiant les propriétés formelles d'une algèbre. L'identification de certaines bisections lagrangiennes avec les fonctions sur Γ_0 permettrait d'introduire, via la multiplication des opérateurs, un produit associatif sur $C^\infty(\Gamma_0)$. Tout ceci ne peut être attendu, en général, qu'au niveau asymptotique.

3.3. Groupeïdes et Star-produit.

Etant donné un groupeïde symplectique (Γ, Γ_0) , la géométrie symplectique de Γ est, près de Γ_0 , identique à celle d'un voisinage de la section nulle dans $T^*(\Gamma_0)$; on a donc, au moins dans un voisinage de la section nulle, un morphisme de Poisson $\alpha^* : C^\infty(\Gamma_0) \rightarrow C^\infty(T^*\Gamma_0)$.

A chaque fonction sur Γ_0 on peut associer une série formelle sur $T^*(\Gamma_0)$ (le jet d'ordre ∞ de α^*f sur Γ_0). Si on place une métrique riemannienne sur Γ_0 on

peut associer à chaque série formelle un opérateur différentiel "formel" d'ordre infini (calcul symbolique "total") ; ceci donne un produit associatif sur les séries formelles qu'on peut tenter de rattachier dans $\alpha^*(C^\infty(\Gamma_0))$ et donc dans $C^\infty(\Gamma_0)$. Ce produit associatif sera une espèce d' "algèbre enveloppante" pour le crochet de Poisson sur $C^\infty(\Gamma_0)$. Une telle algèbre enveloppante pour des structures de Poisson, autres que les structures de Lie-Poisson, ont été considérées en connexion avec les équations de Yang-Baxter par DRINFELD [Dr. 1983] KARASEV [K. 1987] La structure globale du groupoïde est certainement utile pour comprendre cette notion d'algèbre enveloppante.

3.4. CONCLUSION : L'étude géométrique développé dans cet article a clarifié en quoi une variété de Poisson est la bonne généralisation en dimension infini de la notion de dual d'algèbre de Lie. Un troisième théorème de Lie local a été établi grâce à l'introduction de la notion de groupoïde symplectique. Le programme esquissé dans les lignes précédentes visant par le moyen des groupoïdes symplectiques à unifier différents aspects de la quantification notamment avec les *-produits de Lichnerowicz est ambitieux. Il rejoint les préoccupations de Karasev et Maslov. Des avancées dans cette direction dépendraient finalement l'intérêt de la notion de groupoïde symplectique, surtout s'il apparaît que le cadre "linéaire" des variétés de Lie-Poisson est trop étroit et que l'on a besoin de la catégorie de toutes les variétés de Poisson.

APPENDICE

§ 1. REDUCTIONS SYMPLECTIQUES

1. Le cas linéaire : Soit E un espace vectoriel symplectique, $W \subset E$ un sous-espace coïsothrope (i.e. $W^\perp \subset W$) alors le quotient $E_W = W/W^\perp$ est un espace symplectique.

PROPOSITION A1 : Pour tout sous-espace lagrangien λ de E , $\lambda_W = \lambda \cap W$, $\lambda \cap W^\perp$ est un sous-espace lagrangien de E_W .

Si, pour chaque $k = 0, 1, \dots$, on note $\Lambda_{k,W}(E)$ l'ensemble des sous-espaces lagrangiens λ de E tels que $\dim(\lambda \cap W) = k$, c'est une sous-variété de la grassmannienne lagrangienne $\Lambda(E)$ et l'application $\lambda \rightarrow \lambda_W$ est différentiable de $\Lambda_{k,W}(E)$ dans $\Lambda(E_W)$; (mais elle n'est même pas continue sur $\Lambda(E)$).

2. Le cas non-linéaire :

Si (S, ω) est une variété symplectique, M une sous-variété coïsothrope de S . le feuilletage caractéristique \mathcal{M}^\perp est transversalement symplectique et si l'espace des feuilles est une variété c'est une variété symplectique.

PROPOSITION A2 : Pour chaque sous-variété lagrangienne L de S qui coupe proprement M , $L_M = L \cap M/L \cap \mathcal{M}^\perp$ est une immersion lagrangienne dans M .

§ 2. RELATIONS CANONIQUES :

1. Le cas linéaire : E et F étant deux espaces vectoriels symplectiques, $-F$ l'espace F munit de la structure symplectique opposée à celle de F , un sous-espace lagrangien de $\text{Ex}(-F)$ s'appelle une relation canonique de E à F . Etant donnés trois espaces symplectiques E, F, G , notons Δ_F la diagonale de $F \times F$; $E \times \Delta_F \times (-G)$ est un sous-espace coïsothrope de $\text{Ex}(-F) \times F \times (-G)$ dont l'orthogonal est $\{0\} \times \Delta_F \times \{0\}$. Le quotient est donc naturellement isomorphe à $\text{Ex}(-G)$. Donc, pour des relations canoniques L_1 de E à F et L_2 de F à G on peut réduire $L_1 \times L_2$ pour obtenir un sous-espace lagrangien $L_1 \circ L_2$ de $\text{Ex}(-G)$.

Les espaces vectoriels symplectiques, avec les relations canoniques comme morphismes, constituent ainsi une catégorie.

2. Le cas non-linéaire : On peut, avec quelques restrictions, étendre les constructions précédentes aux sous-variétés lagrangiennes d'une variété symplectique. De façon précise, si M_1, M_2, M_3 sont trois variétés symplectiques, K (resp. L) une sous-variété lagrangienne de $M_1 \times (-M_2)$ (resp. de $M_2 \times (-M_3)$) et si $K \times L$ coupe proprement $M_1 \times \Delta \ M_2 \times M_3$ alors $K.L$ est une sous-variété (immergée) lagrangienne de $M_1 \times (-M_3)$.

On dit que deux sous-variétés se coupent proprement si leur intersection est une sous-variété et si le fibré tangent à l'intersection est l'intersection des fibrés tangents.

REMARQUE : Dans les applications que l'on fait ici de ce résultat on sait par ailleurs que $K.L$ est une sous-variété plongée.

CAS PARTICULIER : Si M_1 est réduite à un point, une sous-variété lagrangienne de $M_1 \times (-M_2)$ est simplement une sous-variété lagrangienne de M_2 et la construction précédente nous permet de parler de l'image par une relation canonique d'une sous-variété lagrangienne.

§ 3. METHODE DES CARACTERISTIQUES

Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension $2n$, W une sous-variété coisotrope de dimension $2n - k$, \mathcal{F} l'orthogonal symplectique du fibré tangent à W et J une sous-variété isotrope de dimension $n-k$ de M ; on suppose que, en chaque x de J , $T_x J \cap \mathcal{F}_x = \{0\}$, alors si $L = \coprod_{x \in J} F_x$ où F_x est la famille de \mathcal{F} passant par x et si $j : L \rightarrow W$ est l'inclusion canonique, il existe sur L une structure de variété différentielle de dimension n qui fait de j une immersion lagrangienne et L est maximale pour J fixée. Cette structure est définie ainsi si $y_0 \in F_{x_0}$, il existe un produit ϕ de flots de hamiltoniens, constants sur W , tels que $y_0 = \phi(x_0)$. Il existe d'autre part un voisinage ouvert distingué W_{x_0} de \mathcal{F} en x_0 et une sous-variété V_{x_0} de W_{x_0} transverse à \mathcal{F} tels que

$$(I) \ W_{x_0} \cap J = V_{x_0} \cap J$$

$$(II) \text{ les plaques de } \mathcal{F} \text{ dans } W_{x_0} \text{ sont les fibres d'une submersion } p : W_{x_0} \rightarrow V_{x_0}.$$

$p^{-1}(V_x \cap J)$ est une sous-variété lagrangienne et il existe une injection ψ (ensembliste) canonique de $p^{-1}(V_{x_0} \cap J)$ dans L . On décide

- 1) que $\psi(p^{-1}(V_{x_0} \cap J))$ est une carte de L en x_0 .
- 2) Que ϕ qui est défini au voisinage de x_0 dans $V_{x_0} \cap J$ est un difféomorphisme local de L ,

et on vérifie que l'on a ainsi défini sur L une structure de variété pour laquelle l'application canonique donnée par l'inclusion est une immersion lagrangienne non injective en général.

BIBLIOGRAPHIE

- [A. M. 1978] R. ABRAHAM et J.E. MARSDEN, Foundations of Mechanics, Benjamin Ed. 1978.
- [Al. Mo 1985] R. ALMEIDA et P. MOLINO, Suites d'Atiyah et feuilletages transversalement complets. C.R. Acad. Sc. Paris Ser. I (300) 13-15.
- [B.F.F.L.S. 1978] F. BAYEN, M. FLATO, C. FRONSDAL, A. LICHNEROWICZ and D. STERNHAIMER, Deformation theory and quantization, Ann. Phys. 111 (1978), 61-151.
- [C. 1982] A. CONNES, A survey of foliations and operator algebras, in operator Algebras and Applications (Kadison ed.) Proc. Symp. Pure Math. , Vol. 38, Amer. Math. Soc. Providence, R.I. (1982), 521-628.
- [D. 1985] P. DAZORD, Feuilletages à singularités, Indag. Math. Volumen 47 (1) (1985) 21-39.
- [DO. LA. 1966] A. DOUADY et M. LAZARD, Espaces fibrés en algèbres de Lie et en groupes, Invent. Math. 1 (1966), 133-151.
- [Dr. 1983] V.G. DRINFEL'D , Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bi-algebras and the geometrical meaning of the classical Yang-Baxter equations. Soviet Math. Dokl Vol. 27 (1983) n° 1.
- [Du. He. 1982] J.J. DUISTERMAAT and H.J. HECKMAN, On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space, Invent. Math. 69 (1982), 259-268.
- [E.] C. EHRESMANN, Oeuvres complètes.
- [V.E. 1984)] W.T. van EST, Rapport sur les S-atlas, Structure transverse des feuilletages, Astérisque 116 (1984) 235-292.
- [V.E. 1987] W.T. van EST, Une démonstration de E. Cartan du 3ème théorème de Lie. A paraître dans "Actions hamiltoniennes de groupes. Troisième théorème de Lie ". Travaux en Cours. Hermann Editeur.
- [V.E.K. 1964] W.T. van EST et T.J. KORTKAGEN, Non enlargible Lie algebra, Indag. Math. 26 (1964), 15-31.
- [V.E. VL. 1987] W.T. van EST et M. van der LEE, On the enlargibility criteria for local groups due to Malov and Cartan. A paraître dans "Actions hamiltoniennes de groupes. Troisième théorème de Lie". Coll. Travaux en Cours. Hermann Editeur.
- [G. 1958] R. GODEMENT, Théorie des faisceaux , Actualités Scientifiques et Industrielles, 1252. Hermann Ed. Paris.

- [H. 1984] A. HAEFLIGER, Groupoïdes d'holonomie et classifiants, Structure transverse des Feuilletages, Astérisque 116 (1984), 70-97.
- [K. 1985] M.V. KARASEV, Quantization of non linear Lie-Poisson brackets in quasi-classical approximation, Preprint ITF Akad. Nauk SSR, ITF - 85 - 72 R, KIEV (1985).
- [K. 1986] M.V. KARASEV, Poisson symmetry algebras and the asymptotics of spectral series, Functional Anal. Appl. 20 (1986), 17-26.
- [K. M. 1981] M.V. KARASEV and V.P. MASLOV, Operators with general commutation relations and their applications I, Unitary- non linear operator equations, J. Soviet Math. 15 (1981), 273-368.
- [K. M. 1984] M.V. KARASEV and V.P. MASLOV, Asymptotic and geometric quantization Russian Math. Surveys 39 - 6 (1984), 133-205.
- [Ki. 1976] A.A. KIRILLOV, Local Lie algebra. Russ. Math. Surveys (31) 55-75 1976.
- [Lib. 1972] P. LIBERMANN, Sur les groupoïdes différentiables et le "presque parallélisme", Symposia Math. 10 (1972), 59-93.
- [Lib. 1983] P. LIBERMANN, Problèmes d'équivalence et géométrie symplectique, Astérisque 107-108 (1983), 43-69.
- [Lic. 1955] A. LICHNEROWICZ, Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie, Ed. Cremonese Rome 1955.
- [Lic. 1977] A. LICHNEROWICZ, Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées, J. Diff. Geom. 12, (1977), 253-300.
- [Lic. 1982] A. LICHNEROWICZ, Variétés de Poisson et feuilletages. Ann. Fac. Sc. Toulouse, Vol. IV 1982. 195-262.
- [M. W.] K. MIKAMI and A. WEINSTEIN, en préparation.
- [Pl. 1980] M. PLAISANT, Q-variétés banachiques. Application à l'intégrabilité des algèbres de Lie, C.R. Acad. Sc. Paris 290 A (1980), 185-188.
- [Pr. 1966] J. PRADINES, C.R. Acad. Sc. Paris 263 (1966), 907-910.
- [Pr. 1967] J. PRADINES, Théorie de Lie par les groupoïdes différentiables, C.R. Acad. Sc. Paris 264 A (1967), 245-248.
- [Pr. 1968] J. PRADINES, Troisième théorème de Lie sur les groupoïdes différentiables C.R. Acad. Sc. Paris 267 (1968), 21-23.
- [Pr. 1984] J. PRADINES, Holonomie et grapes locaux, C.R. Acad. Sc. Paris 298 A (1984), 297-300.
- [Pr. 1985] J. PRADINES,

- [R. 1980] J. RENAULT, A groupoid approach to C^* -algebras, Lecture Notes in Math., Vol. 793, Springer-Verlag 1980.
- [S. 1977] STERNBERG, On minimal coupling and the symplectic mechanics of a classical particle in the presence of a Yang-Mills field. Proc. Nat. Acad. Sc. 74 (1977) - 5253-5254.
- [S.T.S. 1983] M.A. SEMENOV-TYAN-SHANSKII, What is a classical R-matrix ? Functional Anal. Appl. 17 (1983), 259-272.
- [St. 1974] P. STEFAN, Accessibility and foliations with singularities, Bull. Amer. Math. Soc., 80 (1974), 1142-1145.
- [Su. 1973] H.J. SUSSMANN, Orbits of families of vector fields and integrability of distributions, Trans. of Amer. Math. Soc., 180 (1973), 171-188.
- [W. 1978] A. WEINSTEIN, A universal phase space for particles in Yang-Mills fields, Lett. Math. Phys. 2 (1978), 417-420.
- [W. 1979] A. WEINSTEIN, Lectures on symplectic manifolds Regional Conferences series in Math. n° 29, Amer. Math. Soc.
- [W. 1981] A. WEINSTEIN, Symplectic geometry, Bull. Amer. Math. Soc. 5 (1981) 1-13.
- [W. 1983] A. WEINSTEIN, The local Structure of Poisson manifolds, J. Diff. Geom. 18 (1983), 523-557.
- [W. 1987] A. WEINSTEIN, Symplectic groupoids and Poisson manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. 16 (1987), 101-103.
- [W. 1987 b] A. WEINSTEIN, Poisson geometry of the principal series and non linearizable structure, preprint.