PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

E. COMBET

Introduction élémentaire à l'analyse spinorielle

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1986, fascicule 4B
« Séminaire de géométrie », , p. 1-33
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1986___4B_1_0>

VII

*

INTRODUCTION ELEMENTAIRE A L'ANALYSE SPINORIELLE

Exposés de E. COMBET

On se propose dans ces exposés d'expliquer de manière aussi simple que possible les termes qui entrent dans l'écriture de l'opérateur de Dirac : soit M une variété riemannienne ou pseudo-riemannienne de métrique g, $S^+(M)$ et $S^-(M)$ respectivement les fibrés de spineurs "positifs" et "négatifs" au-dessus de M ; alors l'opérateur de Dirac s'écrit localement :

$$(D\,\varphi)^a = \sum_{\mu,\nu} g^{\mu\nu}(\gamma_\mu \nabla_\nu\, \varphi)^a$$

où les γ_μ sont les "matrices γ de Dirac" et ∇ la "dérivation covariante spinorielle" sur $S^+(M)$.

Cet opérateur a été introduit par P.A.M. Dirac en 1928 en vue d'obtenir un modèle "quantique relativiste" de l'électron dans l'espace-temps (M,g) de la relativité restreinte où les matrices γ sont alors astreintes à vérifier les égalités :

$$\gamma_\mu\, \gamma_\nu + \gamma_\nu\, \gamma_\mu = 2\, g_{\mu\nu}$$

de façon que le carré de l'opérateur de Dirac soit le d'Alembertien usuel $\Box = - \Sigma\, g^{\mu\nu}\, \partial_\mu\, \partial_\nu$.

Les formules ci-dessus constituent le point de départ de cet exposé ; elles sont reprises dans le § A qui porte sur l'étude de l'algèbre et des groupes de Clifford réels. D'une manière plus précise, les matrices γ engendrent une représentation de cette algèbre et de ces groupes et ceci est développé au § B qui est consacré aux représentations spinorielles. Ces notions sont adaptées dans le § C au cas où (M,g) est une variété riemannienne ou pseudo-riemannienne et l'opérateur de Dirac est alors introduit. On notera que dans ce contexte de géométrie différentielle cette extension est due essentiellement à A. Lichnérowicz (1963, 1964 : voir la bibliographie du § C).

A. Algèbres et groupes de Clifford réels.

Dans la suite de cet exposé nous ne considérerons théoriquement que le cas des algèbres de Clifford réelles définies par la donnée d'une forme quadratique minkowskienne ou euclidienne sur un espace vectoriel réel de dimension finie. Cependant l'étude des représentations spinorielles nous obligera à passer aux algèbres complexes et il est finalement plus simple de donner les définitions dans un cadre général (n° 1) quitte à revenir ensuite au cas réel pour étudier les structures de Lie (n° 2) . Les propriétés plus "profondes" des algèbres de Clifford seront vues au § B.

1. INTRODUCTION.

On considère un corps commutatif K, un espace vectoriel V de dimension finie sur K , une forme quadratique Q sur V et B la forme bilinéaire associée à Q :

$$Q(\alpha x) = \alpha^2 Q(x) \quad \text{pour } \alpha \in K,\ x \in V,$$

$$B(x,y) = Q(x+y)-Q(x)-Q(y)$$

$$B(x,x) = 2Q(x).$$

Pour éviter toute complication on supposera que K a une caractéristique différente de 2.

DEFINITION 1 : *On note* T(V) *l'algèbre tensorielle de* V *et* I(Q) *l'idéal bilatère engendré dans* T(V) *par les éléments de la forme*

$$x \otimes x - Q(x) \quad , \quad x \in V.$$

L'algèbre quotient C(Q) = T(V)/I(Q) *est appelée l'algèbre de Clifford de* Q *sur* V.

PROPRIETES : Les propriétés qui suivent découlent plus ou moins facilement de ces définitions.

(a) Graduation. $C(Q) = C^+(Q) \oplus C^-(Q)$:

On note σ l'application canonique : $T(V) \to C(Q)$ et on pose $C^{\pm}(Q) = \sigma(T^{\pm}(V))$ où $T^+(V)$ et $T^-(V)$ sont respectivement les sous-espaces des tenseurs de degrés pairs et impairs. Alors $C^+(Q)$ est une sous-algèbre de $C(Q)$ et $C(Q)$ est graduée par la somme directe :

$$C(Q) = C^+(Q) \oplus C^-(Q).$$

(b) Bases de C(Q).

Dans le cas où Q est non dégénérée on voit aisément que σ est injective sur K et V. Ce résultat reste vrai dans le cas général (voir par exemple [1] § 9 n° 3 ou [3] chap. II) et dans toute la suite nous identifierons K et V avec leurs images par σ dans C(Q).

Pour $x,y \in V$ et d'après la définition de C(Q) nous obtenons alors des expressions du type de la formule de Dirac :

$$x^2 = Q(x)e \quad ; \quad xy + yx = B(x,y)e$$

où $e = \sigma(1)$ et $x,y \in V$.

L'algèbre C(Q) est engendrée par V ; soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une base de V alors e et les éléments $e_{i_1} \ldots e_{i_r}$ où $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant m$ constituent une base de C(Q). Ainsi C(Q) est un espace vectoriel de dimension 2^m ; $C^{\pm}(Q)$ sont des sous-espaces de dimension 2^{m-1}.

(c) Le groupe de Clifford.

On note $C_*(Q)$ (resp. $C_*^+(Q)$) le groupe des $\xi \in C(Q)$ (resp. $\xi \in C^+(Q)$) qui sont inversibles. On appelle groupe de Clifford de Q (resp. groupe de Clifford spécial) le groupe Γ (resp. Γ^+) des éléments $s \in C_*(Q)$ (resp. $s \in C_*^+(Q)$) tels que

$$s\, V\, s^{-1} \subset V$$

Pour $x \in V$ et $s \in \Gamma$ on pose $\varphi(s).x = sxs^{-1}$; alors φ est un homomorphisme de Γ dans le groupe orthogonal $O(V,Q)$ de la forme Q sur V.

Nous allons étudier cet homomorphisme avec plus de détails dans le cas où K est le corps des réels.

2. GROUPES DE CLIFFORD DANS LE CAS REEL.

On suppose dans ce numéro que $K = \mathbb{R}$. On reprend la définition des groupes de Clifford et on étudie leurs relations avec le groupe orthogonal dans le cas où Q est non dégénérée .

DEFINITION 2 : *On note* $C_*(Q)$ $(C_*^+(Q))$ *les groupes d'éléments* $\xi \in C(Q)$ (ou $\xi \in C^+(Q)$) *qui sont inversibles.*

On appelle groupe de Clifford de Q *(resp. groupe de Clifford spécial) le groupe* Γ *(resp.* Γ^+*) des éléments inversibles* s *de* $C(Q)$ *(resp. de* $C^+(Q)$ *tels que* $s\,V\,s^{-1} \subset V$.

THEOREME 1 : *Pour* $x \in V$ *et* $s \in \Gamma$ *on pose* $\varphi(s).x = s\,x\,s^{-1}$.

a) φ *est un homomorphisme de* Γ *dans* $O(V,Q)$ *et le noyau de* φ *est l'ensemble* $Z \cap C_*(Q)$ *où* Z *est le centre de* $C(Q)$.

b) $V \cap \Gamma$ *est l'ensemble des vecteurs non isotropes de* V *et, pour* $x \in V \cap \Gamma$, $-\varphi(x)$ *est la symétrie par rapport à l'hyperplan orthogonal à* x .

c) Pour m *pair on a* $\varphi(\Gamma) = O(Q)$, $\varphi(\Gamma^+) = SO(Q)$
Pour m *impair on a* $\varphi(\Gamma) = \varphi(\Gamma^+) = SO(Q)$.

PREUVE :

(a) $Q(\varphi(s).x)e = Q(s\,x\,s^{-1})e = (s\,x\,s^{-1})^2 = Q(x)e$ et donc $\varphi(\Gamma) \subset O(V,Q)$. Il est immédiat que φ est un homomorphisme et enfin si $\varphi(s) = I$ (l'identité du groupe $O(V,Q)$ alors $\forall x \in V$ $x = s\,x\,s^{-1}$ et donc $s \in Z \cap C_*(Q)$; inversement si $s \in Z \cap C_*(Q)$ alors $s \in C_*(Q)$ et $s\,V\,s^{-1} \subset V$ donc $s \in \Gamma$ et manifestement $\varphi(s) = I$.

(b) $x \in V \cap \Gamma \Leftrightarrow x \in V$ et inversible $\Leftrightarrow$ x non isotrope (car $x^2 = Q(x)e$).

Soit $x \in V \cap \Gamma$:

$$\varphi(x).y = x\,y\,x^{-1} = x\,y\,Q^{-1}(x)x = x\,Q(x)^{-1}y\,x$$

$$= \frac{x}{Q(x)}\,(-\,xy + B(x,y)e) = -\,(y - B(x,y)\,\frac{x}{Q(x)}\,)$$

et donc pour x non isotrope, $\varphi(x) = \tau\, S_{x^\perp}$ où τ est la symétrie $x \to -x$ de V et $S_{x^\perp}$ est la symétrie par rapport à l'hyperplan $x^\perp$ orthogonal à x.

(c) On sait que O(Q) est engendré par les symétries par rapport aux hyperplans non isotropes de V. Donc tout $A \in O(Q)$ s'écrit

$$A = S_{x_1^\perp} \ldots S_{x_h^\perp} = \tau^h\,\varphi(x_1 \ldots x_h)$$

et dét $A = (-1)^h$. Ainsi $A \in SO(Q)$ si et seulement si h est pair auquel cas $\tau^h = I$ et alors $A = \varphi(x_1 \ldots x_h)$ avec h pair et donc $\varphi(\Gamma^+) \supset SO(Q)$. On note $(e_1 \ldots e_m)$ une base Q-orthonormée de V. Dans le cas où m est pair on a $\tau = \varphi(e_1 \ldots e_m)$ donc $A = \varphi(e_1 \ldots e_m\, x_1 \ldots x_h)$ pour h impair et alors $\varphi(\Gamma) = O(Q)$ et comme on ne peut avoir $A \in \varphi(\Gamma^+)$ avec dét $A = -1$ on en déduit que l'on a $\varphi(\Gamma^+) = SO(Q)$.

Dans le cas où m est impair on montre que $\tau \in \varphi(\Gamma)$ et donc $A \in \varphi(\Gamma)$ dès que dét$A = -1$, d'où l'on déduit que $\varphi(\Gamma) = \varphi(\Gamma^+) = SO(Q)$ (voir la remarque 1.a ci-dessous).

REMARQUE 1 :

a) Le centre Z de C(Q) se calcule à partir d'une base (e_i) orthonormée en utilisant les applications Λ_i telles que

$$\Lambda_i(\xi) = \frac{1}{2}\,(\xi + Q(e_i)\; e_i\; \xi\; e_i)$$

alors $\xi \in Z$ si et seulement si $\Lambda_i(\xi) = \xi$ pour tout indice i. En calculant Λ_i sur les vecteurs de base $e_{i_1} \ldots e_{i_h}$ on voit facilement que :

(i) Si m est pair tous ces vecteurs de base sont annulés et on a : $Z = \mathbb{R}e$.

(ii) Si m est impair : tous ces vecteurs de base sont annulés sauf $e_1 \ldots e_m$ et on a $Z = \mathbb{R}e + \mathbb{R}e_1 \ldots e_m$.

Ceci montre qu'on ne peut avoir $\tau \in \varphi(\Gamma)$ pour m impair car si $\tau = \varphi(s)$ alors $-x = s\,x\,s^{-1}$ pour $x \in V$ et on trouve $e_1 \ldots e_m = s\, e_1 \ldots e_m\, s^{-1} = -\, e_1 \ldots e_m$ ce qui est absurde.

(b) Le centre Z^+ de $C^+(Q)$ se calcule de façon aussi élémentaire en utilisant les endomorphismes $\Lambda_{ij}(\xi) = \frac{1}{2}\,(\xi - Q(e_i)Q(e_j)e_i e_j\ \xi\ e_i e_j)$; alors en calculant $\Lambda_{ij}(e_{i_1} \ldots e_{i_{2h}})$ on trouve que

(iii) si m est pair, $Z^+ = \mathbb{R}e + \mathbb{R}e_1 \ldots e_m$.

(iv) si m est impair, $Z^+ = \mathbb{R}e$

(c) La démonstration du théorème 1 montre que tout $s \in \Gamma$ s'écrit $s = z\, x_1 \ldots x_h$ avec $z \in Z \cap \Gamma$ et $x_i \in V$ non isotropes et tout $s \in \Gamma^+$ s'écrit $s = x_1 \ldots x_{2h}$ avec $x_i \in V$ non isotropes, car $\mathbb{R}^* e$ est le noyau de $\varphi : \Gamma^+ \to SO(Q)$.

(d) Les noyaux des homomorphismes du théorème 1 peuvent être réduits en restreignant les groupes Γ et Γ^+ ; pour cela on utilise l'antiautomorphisme α de T qui inverse l'ordre des facteurs des tenseurs homogènes : $\alpha(x_1 \otimes \ldots \otimes x_h) = x_h \otimes \ldots \otimes x_1$. Cette application α laisse les éléments de $\mathbb{R}$ et V invariants ainsi que les éléments de la forme $x \otimes x - Q(x)$; il induit donc sur C un anti-automorphisme β , dit principal. On a donc

$\beta^2 = I$, $\beta(\xi\xi') = \beta(\xi')\beta(\xi)$.

THEOREME 2 : *Soit* β *l'anti-automorphisme principal de* $C(Q)$.

a) Pour $s \in \Gamma$ (resp. Γ^+) on a $\beta(s) \in \Gamma$ (resp. Γ^+) et $\beta(s)s \in \mathbb{R}^* e$

b) $s \to \beta(s)s$ *est un homomorphisme de* Γ *(resp.* Γ^+*) dans* $\mathbb{R}^* e$.

PREUVE :

a) Pour $s \in \Gamma$ (resp. Γ^+) on a $\beta(s) \in \Gamma$ (resp. Γ^+) car $\beta(s^{-1})\beta(s) = \beta(ss^{-1}) = \beta(e) = e = \beta(s)\beta(s^{-1})$ et, pour $x \in V$:

$$\beta(s)sx = \beta(s)sxs^{-1}s = \beta(s)\beta(sxs^{-1})s \quad \text{car } sxs^{-1} \in V$$

$$= \beta(s)\beta(s^{-1})\beta(sx)s = \beta(sx)s = x\beta(s)s.$$

Ceci prouve que $\beta(s)s \in Z \cap \Gamma^+ = \mathbb{R}^* e$

b) $\beta(st)st = \beta(t)\beta(s)st = \beta(s)s\ \beta(t)t$ (car $\beta(s)s \in Z$).

REMARQUE 2 : On peut donc restreindre les groupes Γ, Γ^+ en prenant par exemple dans Γ le sous-groupe Γ_o des éléments s tels que $\beta(s)s = \pm e$ et, dans Γ^+ le sous sous-groups Γ_o^+ des éléments s tel que $\beta(s)s = e$.

DEFINITION 3 : *On appelle groupe de Clifford réduit ou groupe spinoriel le noyau noté Γ_o^+ ou spin(Q) de l'homomorphisme $\Gamma^+ \to \mathbb{R}^* e$ défini par $s \to \beta(s)s$ (théorème 2).*

Dans ces conditions φ est un homomorphisme de Γ_o^+ dans SO(Q) et Ker φ est l'ensemble des $z \in \mathbb{R}^* e$ tels que $\beta(z)z = e$ et l'on obtient Ker $\varphi = \pm e$.

3. STRUCTURES DE LIE SUR LES GROUPES DE CLIFFORD REELS.

On suppose dans ce numéro que $K = \mathbb{R}$, V est un espace vectoriel réel de dimension m , Q est une forme quadratique non dégénérée sur V et B est la forme bilinéaire associée à Q.

RAPPELS : $C(Q)$ est l'algèbre réelle engendrée par un élément unité e et par les éléments $(e_1,\ldots,e_m)$ d'une base de V astreints à la condition :

$$e_\alpha e_\beta + e_\beta e_\alpha = B(e_\alpha, e_\beta)e$$

En ce qui concerne le centre Z (resp. Z^+) de $C(Q)$ (resp. $C^+(Q)$) on a vu que, dans le cas où $(e_1,\dots,e_m)$ est orthonormée,

$$Z = \begin{cases} \mathbb{R}\, e \text{ si m est pair} \\ \mathbb{R}e + \mathbb{R}\, e_1\dots e_m \text{ si m est impair.} \end{cases}$$

$$Z^+ = \begin{cases} \mathbb{R}\, e + \mathbb{R}\, e_1\dots e_m \quad \text{si m est pair} \\ \mathbb{R}\, e \quad \text{si m est impair.} \end{cases}$$

On note Γ^+ le groupe des $s \in C^+_*(Q)$ (éléments pairs inversibles) tels que $s\,V\,s^{-1} \subset V$ et pour $x \in V$ on pose $\varphi(s).x = s\,x\,s^{-1}$ alors φ est un homomorphisme de Γ^+ sur le groupe spécial orthogonal $SO(Q)$ sur V et $\text{Ker}\,\varphi = \mathbb{R}^* e$. Puisque, pour $x \in V$ non isotrope, $-\varphi(x)$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à x, alors toute rotation $A \in SO(Q)$ peut s'écrire $\varphi(x_1\dots x_{2h})$ avec des x_i non isotropes et comme $\text{Ker}\,\varphi = \mathbb{R}^* e$, tout $s \in \Gamma^+$ s'écrit sous cette forme $s = x_1\dots x_{2h}$ avec des x_i non isotropes dans V. Pour cet élément $s \in \Gamma^+$ on a $\beta(s)s = Q(x_1)\dots Q(x_{2h})$ et l'on voit que le groupe de Clifford réduit $\Gamma^+_o = \text{Spin}(Q)$ est engendré par les produits xy d'éléments de V tels que

$$Q(x) = Q(y) = \pm\, 1.$$

Alors φ est un homomorphisme de Γ^+_o sur un sous-groupe $\varphi(\Gamma^+_o) = SO_o(Q)$ appelé le <u>groupe orthogonal réduit</u> et $\text{Ker}\,\varphi = \pm\, e$.

Tout ce qui précède peut être obtenu à partir des définitions par des procédés plus ou moins calculatoires mais élémentaires ; la suite de ce n° 3 nécessite quelques résultats de la théorie des groupes de Lie que l'on trouvera, par exemple, dans l'ouvrage [2] de C. Chevalley.

Le but est de décrire des structures de Lie "naturelles" sur les groupes Γ^+ , Γ^+_o et d'étudier en détail l'homomorphisme $\varphi : \Gamma^+_o \to SO_o(Q)$ au moins lorsque Q est euclidienne ou minkowskienne.

On a une représentation linéaire ρ de $C(Q)$ dans elle-même en posant $\rho(\xi).\eta = \xi\eta$ au sens du produit de Clifford pour $\xi, \eta \in C(Q)$. Cette application ρ est un isomorphisme de $C(Q)$ sur une sous-algèbre de $L(C(Q)) \simeq L(\mathbb{R}^{2m})$ (m étant la dimension de V) et ρ induit un isomorphisme de $C_*(Q)$ sur un sous-groupe fermé de $GL(C(Q))$, ce sous-groupe étant l'intersection de $GL(C(Q))$ avec $\rho(C(Q))$.

On utilise ρ^{-1} pour transporter sur $C_*(Q)$ et $C(Q)$ les structures de Lie classiques sur $\rho(C_*(Q))$, $\rho(C(Q))$:

a) $C_*(Q)$ est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $C(Q)$; pour $u \in C_*(Q)$ on note α_u l'automorphisme intérieur $\alpha_u\xi = u\xi u^{-1}$ sur $C_*(Q)$ et $ad(u) = T_e\,\alpha_u$ l'automorphisme $X \to u\,X\,u^{-1}$ sur $C(Q)$.

b) L'application $u \in C_*(Q) \to ad(u) \in GL(C(Q))$ est la représentation adjointe de $C_*(Q)$. Soit $A : C(Q) \to L(C(Q))$ l'application linéaire tangente en e à l'application précédente ; on a :

$$A(X).Y = [X,Y] \quad , X,Y \in C(Q)$$

$$ad(\exp(X)) = \exp(A(X)),\ X \in C(Q).$$

c) On a les mêmes formules pour $C_*^+(Q)$ et son algèbre de Lie $C^+(Q)$.

<u>THEOREME 3</u> : Γ_o^+ *est un sous-groupe de Lie de* $C_*^+(Q)$ *; sa dimension est égale à* $\frac{m(m-1)}{2}$ *et son algèbre de Lie* $\underline{\Gamma_o^+}$ *est engendrée par les produits* $x.y$ *où* x *et* y *décrivent* V *avec la condition* $B(x,y) = 0$.

<u>PREUVE</u> :

a) <u>Etude de Γ^+</u> :

Pour chaque $x \in V$ on désigne par λ_x l'application continue $u \in C_*^+(Q) \to u\,x\,u^{-1} \in C(Q)$; alors on a $\Gamma^+ = \bigcap_{x \in V} \lambda_x^{-1}(V)$ et donc Γ^+ est un sous-groupe fermé de $C_*^+(Q)$ et donc un sous-groupe de Lie de $C_*^+(Q)$ ([2], ch. IV, § XIV).

Soit φ l'homomorphisme de Γ^+ sur $SO(Q)$; on sait que $\mathrm{Ker}\varphi = \mathbb{R}^* e$ et il est connu aussi que l'algèbre de Lie $\underline{SO(Q)}$ est de dimension $\frac{m(m-1)}{2}$. Dans ces conditions l'application tangente $T_e\varphi$ est linéaire surjective de $\underline{\Gamma}^+$ sur $\underline{SO(Q)}$ et son noyau est l'algèbre de Lie $\mathbb{R}e$ de $\mathbb{R}^* e$ ([2] , chap. IV, § IX) et l'on a $\dim \underline{\Gamma}^+ = \frac{m(m-1)}{2} + 1$.

D'autre part, pour $x,y,z \in V$ on a :

$$A(xy).z = [xy,z] = xyz - zxy = x(yz+zy)-(xz+zx)y = x\,B(y,z)-B(x,z)y \in V$$

d'où l'on déduit que $A(xy)\,V \subset V$ et aussi $\exp(A(xy))V \subset V$; par suite on a $\mathrm{ad}(\exp(xy))V \subset V$ c'est-à-dire $\exp(xy)z\,\exp(xy)^{-1} \in V$ pour tout $z \in V$ et donc $xy \in \underline{\Gamma}^+$. Le sous-espace engendré par ces produits xy dans $\underline{\Gamma}^+$ est engendré par e et les produits $\{e_i\, e_j\}_{i<j}$ où $(e_1,\dots,e_m)$ est une base de V et donc il est de dimension $1 + \frac{m(m-1)}{2}$ et par suite il coïncide avec $\underline{\Gamma}^+$.

b) <u>Etude de Γ_o^+</u> :

Γ_o^+ étant défini par la condition $\beta(s)s = e$ est un sous-espace fermé de Γ^+. Un élément $X \in \underline{\Gamma}^+$ appartient à $\underline{\Gamma_o^+}$ si et seulement si, pour $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$1 = \beta(\exp(tX))\,\exp(tX) \; ;$$

mais $\beta(\exp(tX)) = \exp(t\beta(X))$ et donc, pour t assez petit, $t\beta(X) + tX = 0$ c'est-à-dire $\beta(X) + X = 0$ ([2] , chap. IV, § VIII). Ceci montre que $\underline{\Gamma_o^+}$ est le sous-espace de $\underline{\Gamma}^+$ engendré par les produits xy tels que $xy+yx = 0$. Si $(e_1,\dots,e_m)$ est une base orthonormée de V, $\underline{\Gamma_o^+}$ est engendrée par les produits $e_i\, e_j$ avec $i < j$ et $\dim \underline{\Gamma_o^+} = \frac{m(m-1)}{2}$.

<u>COROLLAIRE</u> : $SO_o(Q)$ *est un sous-groupe de Lie de* $SO(Q)$ *et* $\varphi : \Gamma_o^+ \to SO_o(Q)$ *est un revêtement d'ordre 2 de* $SO_o(Q)$ ([2] , chap. IV , § IX).

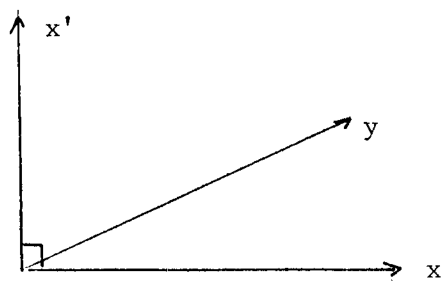
On va étudier le revêtement précédent dans les deux cas fondamentaux qui nous intéressent.

Exemple 1 : Géométrie euclidienne

On suppose que Q est définie-positive dans l'espace vectoriel réel V de dimension m. Alors on sait que $SO(Q)$ est un groupe de Lie connexe de dimension $\frac{m(m-1)}{2}$.

a) Γ_o^+ est connexe.

En effet d'après le rappel du début de ce n° 3, Γ_o^+ est engendré par les produits xy d'éléments x et y de V tels que $Q(x) = Q(y) = 1$.



Etant donné un tel couple (x,y) on note x' un vecteur unitaire dans un plan contenant x,y et perpendiculaire à x. Alors pour chaque $t \in \mathbb{R}$ on a :
$x(x \cos t + x' \sin t) = e \cos t + x' \sin t = \exp(txx')$ et donc est un élément de Γ_o^+ . Ainsi il existe un chemin continu joignant e à xy dans Γ_o^+ , car $x \cos t + x' \sin t = y$ pour une certaine valeur de t.

Ainsi puisque Γ_o^+ et $SO(Q)$ sont connexes de même dimension $\frac{m(m-1)}{2}$ φ est un homomorphisme de Γ_o^+ sur $SO(Q)$ ([2] , chap. IV § IX) dont le noyau est égal à $\pm e$; pour $\dim V \geqslant 3$, $\varphi : \Gamma_o^+ \to SO(Q)$ est un revêtement universel car dans ce cas $\Pi_1(SO(Q)) = Z_2$ ([2] § XI , chap. II).

b) Calcul de $T_e\varphi$:

L'application tangente $T_e\varphi$ définit un isomorphisme $\underline{\Gamma_o^+} \simeq \underline{SO(Q)}$ que nous allons expliciter.

Soit $(e_1 \dots e_m)$ une base orthonormée de V et $X \in \underline{\Gamma_o^+}$. On a :

$$\begin{aligned}\varphi(\exp(tX))e_k &= \mathrm{ad}(\exp(tX)).e_k \quad \text{(définition de } \varphi\text{)}\\ &= \exp(t\, A(X)).e_k \\ &= \exp(t\, T_e\, \varphi.X).e_k \quad \text{([2] , chap. IV, § IX).}\end{aligned}$$

Posons $\mu = T_e\varphi$. $X \in \underline{SO(Q)}$ alors μ est représenté par une matrice antisymétrique (μ^i_j) et l'on obtient :

(2) $\qquad \Sigma\, \mu^i_k\, e_i = X\, e_k - e_k\, X.$

On vérifie immédiatement que cette égalité est satisfaite par $\frac{1}{4}\, \Sigma\, \mu^i_j\, e_i\, e_j$; dans ces conditions, pour toute solution X de (2) on a $X - \frac{1}{4}\, \Sigma\, \mu^i_j\, e_i\, e_j$ qui commute avec chaque e_k et donc qui appartient à $Z \cap \underline{\Gamma^+_o}$ ce qui entraine

$$X = \frac{1}{4}\, \Sigma\, \mu^i_j\, e_i\, e_j.$$

C'est donc cette égalité qui décrit l'isomorphisme

$$\mu \in \underline{SO(Q)} \to X \in \underline{\Gamma^+_o}\ .$$

Exemple 2 : Géométrie minkowskienne.

On suppose que Q est de signature (+,-,-...-) dans l'espace vectoriel réel V de dimension m.

a) Etude de Γ^+_o (Γ^+_o est connexe pour dim V > 2).

On sait que Γ^+_o est engendré par les produits xy d'éléments de V tels que $Q(x) = Q(y) = \pm 1$. Soit donc xy un tel produit et W un plan vectoriel contenant x et y.

Si Q/W est d'indice 0 alors $Q(x) = Q(y) = -1$ et en procèdant comme dans l'exemple (1.a) ci-dessus on peut relier xy à e par un chemin continu dans Γ^+_o.

Si Q/W est d'indice 1 alors le résultat diffère selon la dimension de V :

(i) dim V = 2. Dans ce cas on a W = V. Soit (e_1,e_2) une base orthonormée de W : $Q(e_1) = -Q(e_2) = 1$; alors $e\,\mathrm{ch}\,t + e_1\,e_2\,\mathrm{sh}\,t = e^{te_1e_2} \in \Gamma^+_o$ et l'on a aussi

$-(e \text{ ch } t + e_1 e_2 \text{ sh } t) \in \Gamma_o^+$ et donc xy appartient à l'une de ces deux composantes connexes distinctes de Γ_o^+.

(ii) dim V > 2 : considérons un sous-espace U de dimension 3 contenant W et (e_1,e_2,e_3) une base orthonormée de U telle que $Q(e_1) = -Q(e_2) = -Q(e_3) = 1$. On a $xy = \alpha e + \beta e_2 e_2 + \gamma e_1 e_3 + \delta e_2 e_3$ avec $\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2 = 1$ et tout élément de cette forme appartient à Γ_o^+ ; cet ensemble de points $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ étant connexe dans $\mathbb{R}^4$, on voit que xy peut être relié à e par un chemin continu dans Γ_o^+.

Ainsi Γ_o^+ est connexe pour m > 2.

b) Etude du groupe de Lorentz.

Le groupe de Lorentz $O(Q) = O(1,m-1)$ est le groupe des $A \in GL(V)$ telles que

$$\forall\, x \in V : Q(x) = Q(Ax) \ ;$$

le groupe $SO(Q) = SO(1,m-1)$ des rotations de Lorentz est le groupe des $A \in O(Q)$ telles que dét $A = +1$.

Ce groupe SO(Q) admet un sous-groupe important, que nous noterons $SO_\omega(Q)$ et qui est le sous-groupe des rotations orthochrones de Lorentz. Une rotation A appartient à $SO_\omega(Q)$ si et seulement si on a l'une des conditions équivalentes suivantes :

(i) il existe une base orthonormée $(e_1,\ldots,e_m)$ de V telle que $Q(e_1) = -Q(e_i) = 1$ pour $i = 2,\ldots,m$, où la matrice de A s'écrit (A^i_j) avec la condition $A^1_1 \geqslant 1$;

(ii) on a la condition précédente dans toute base orthonormée du même type ;

(iii) soit $\mathscr{C}$ le cône d'onde de V c'est-à-dire l'ensemble des $x \in V$ tels que $Q(x) > 0$; $\mathscr{C}$ admet deux composantes connexes ; on suppose que A conserve chacune de ces deux composantes.

(On pourra montrer l'équivalence de (i) (ii) (iii) en prouvant que pour $A \in O(Q)$ et $x \in V$, $(Ax)_1$ et x_1 sont de même signe si $A^1_1 \geqslant 1$ et de signes contraires si $A^1_1 \leqslant -1$).

c) $SO_{\omega}(Q)$ est connexe :

Pour dim V = 2 ceci se déduit du fait que $SO_{\omega}(Q)$ est isomorphe au groupe des matrices de Lorentz $\begin{pmatrix} \text{ch } t & \text{sh } t \\ \text{sh } t & \text{ch } t \end{pmatrix}$.

Pour dim V > 2 on considère la nappe positive H^+ $(x_1 \geqslant 1)$ de l'hyperboloïde $(x_1)^2 - (x_2)^2 - \ldots - (x_m)^2 = 1$. Etant donnée $A \in SO_{\omega}(Q)$ on a $A(H^+) \subset H^+$ et, de plus, étant donnés x et $y \in H^+$ il existe une base orthonormée $(e'_1, \ldots, e'_m)$ telle que $x = e'_1$, $y \in \mathbb{R}\, e'_1 + \mathbb{R}\, e'_2$, si bien que l'on peut trouver $A \in SO_{\omega}(Q)$, de la forme $\left(\begin{array}{cc|c} \text{ch } t & \text{sh } t & \\ \text{sh } t & \text{ch } t & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & I \end{array}\right)$ telle que $A(x) = y$.

On voit ainsi que $SO_{\omega}(Q)$ agit transitivement (et effectivement) sur H^+.

Le sous groupe de $SO_{\omega}(Q)$ qui laisse e_1 invariant est isomorphe au groupe des rotations euclidiennes $SO(Q')$ où Q' est la restriction, définie-négative, de Q à l'hyperplan Q-orthogonal à e_1 dans V. Ainsi H^+ est isomorphe à l'espace homogène $SO_{\omega}(Q) / SO(Q')$ et ceci entraîne que $SO_{\omega}(Q')$ est connexe et a le même groupe d'homotopie que $SO(Q')$ (voir par exemple [2]).

Il découle de ceci que $SO_{\omega}(Q) = SO_o(Q)$ est la composante connexe de l'identité dans $SO(Q)$ et, pour $m > 3$, Γ_o^+ est le revêtement universel de $SO_o(Q)$.

L'isomorphisme $T_e\varphi : \underline{\Gamma_o^+ \simeq SO_o(Q)}$ s'exprime par une formule analogue (compte tenu de la forme quadratique) à celle de l'exemple 1 précédent.

REMARQUE : On peut montrer, dans tous les cas, que $\varphi(\Gamma_o^+)$ est connexe sans $SO(Q)$ et, si dim V > 2 et Q d'indice > 0 alors $\varphi(\Gamma_o^+)$ est le groupe des commutateurs de $SO(Q)$ c'est-à-dire le sous-groupe engendré par les éléments $A^{-1}\, B^{-1}\, A\, B$ et $\varphi : \Gamma_o^+ \to SO_o(Q)$ est un revêtement de groupes de Lie.

BIBLIOGRAPHIE DU § A.

[1] N. BOURBAKI, Algèbre, chapitre 9, Hermann 1959.

[2] C. CHEVALLEY , Theory of Lie groups, Princeton 1946.

[3] C. CHEVALLEY, The algebraic theory of Spinors. Columbia U. Press 1954.

B. Représentations spinorielles.

L'étude plus fine de la structure des algèbres de Clifford nécessite de revenir à leur définition générale, afin d'en déterminer les propriétés de représentations.

1. STRUCTURE DES ALGEBRES DE CLIFFORD.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie m sur un corps commutatif K de caractéristique différente de 2, Q une forme quadratique sur V, B la forme bilinéaire associée à Q. On définit l'idéal $I(Q)$ engendré dans l'algèbre tensorielle $T(V)$ par les éléments $x \otimes x - Q(x)$ et on note $C(Q)$ l'algèbre de Clifford $T(V)/I(Q)$. Pour ce n° 1 on se reportera par exemple à [2] § 9 ou à [3] .

EXEMPLE 3 :

Si $Q = 0$ sur V alors $I(Q)$ coïncide avec l'idéal bilatère engendré par les éléments de la forme $x \otimes u \otimes x$ $(x \in V,\ u \in T(V))$, ce que l'on démontre par récurrence sur le degré des tenseurs en écrivant :

$$x \otimes y \otimes u \otimes x = (x+y) \otimes (x+y) \otimes u \otimes x - x \otimes x \otimes u \otimes x - y \otimes x \otimes u \otimes x - y \otimes y \otimes u \otimes x$$

et dans ce cas $C(Q)$ est l'algèbre extérieure ΛV.

THEOREME 4 - (Propriétés d'isomorphismes).

Les propriétés qui suivent peuvent chacune être prouvée de façon élémentaire, par exemple en utilisant des bases, ou être vue comme une expression du fait que $C(Q)$ est solution d'un problème d'application universelle ([2] , §9, n°1)

1) Soit $f \in GL(V)$ et $Q' = Q \circ f$.

On a un homomorphisme h de $T(V)$ dans $C(Q)$ qui prolonge f : $h(x_1 \otimes \dots \otimes x_r) = f(x_1)\dots f(x_r)$, $h(1) = e$ (l'unité de $C(Q)$). On obtient $h(x \otimes x - Q'(x)1) = (f(x))^2 - Q'(x)e = (f(x))^2 - Q(f(x))e = 0$ d'où l'on déduit que h s'annule sur $I(Q')$ et donc induit un homomorphisme, qui est en fait un isomorphisme $\bar{f}$ de $C(Q')$ sur $C(Q)$ et tel que $\bar{f}|V = f$.

2) On suppose que K est un sous-corps d'un corps commutatif K' et on note Q' la forme quadratique obtenue par extension de Q à $V' = K' \otimes_K V$ en posant $Q'(1 \otimes x) = Q(x)$ pour $x \in V$. On a une application linéaire $f : V' \to K' \otimes_K C(Q)$ telle que $f(1 \otimes x) = 1 \otimes x$ et $(f(x'))^2 - Q'(x').1 = 0$ et donc f induit un homomorphisme, qui est en fait un isomorphisme $\bar{f}$ de $C(Q')$ sur $K' \otimes_K C(Q)$, tel que $\bar{f}(1 \otimes x) = 1 \otimes x$ sur $1 \otimes V$.

3) On suppose que $V = V_1 \overset{\perp}{\oplus} V_2$ se décompose en somme directe orthogonale pour la forme quadratique Q et on pose $Q_i = Q/V_i$.

On note $C(Q_1) \hat{\otimes} C(Q_2)$ le produit tensoriel gradué des algèbres graduées $C(Q_1)$ et $C(Q_2)$ c'est-à-dire que l'on définit, sur le produit tensoriel $C(Q_1) \otimes C(Q_2)$ et pour des éléments a_1 , b_1 de $C(Q_1)$, a_2, b_2 de $C(Q_2)$, supposés pairs ou impairs, la loi de composition suivante :

$$(a_1 \otimes a_2)(b_1 \otimes b_2) = \varepsilon(a_1 \; b_1) \otimes (a_2 \quad b_2)$$

avec $\varepsilon = 1$ sauf si b_1 et a_2 sont impairs, auquel cas $\varepsilon = -1$.

C'est-à-dire que l'on a par exemple pour $a_2 \in V_2$ et $b_1 \in V_1$ $(e^{(1)} \otimes a_2)(b_1 \otimes e^{(2)}) = - b_1 \otimes a_2$.

Ceci étant dit on a alors un isomorphisme ψ de l'algèbre graduée $C(Q)$ sur ce produit gradué $C(Q_1) \hat{\otimes} C(Q_2)$ tel que pour $x_i \in V_i$:

$$\psi(x_1 + x_2) = x_1 \otimes e^{(2)} + e^{(1)} \otimes x_2 .$$

<u>REMARQUE 3</u>

Des propriétés précédentes il découle que si l'on connaît les structures de $C(Q_1)$, $C(Q_2)$ on obtiendra celle de $C(Q)$ et que pour les formes quadratiques Q non dégénérées sur un espace vectoriel réel, les algèbres complexifiées $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} C(Q)$ sont isomorphes entre elles.

<u>THEOREME 5</u> <u>(Structures des algèbres de Clifford).</u>

a) On suppose V *de dimension paire* $m = 2r$ *sur* K *et* Q *non dégénérée alors* $C(Q)$ *est une algèbre centrale simple de dimension* 2^m; $C^+(Q)$ *est simple ou composée directe de deux sous-algèbres simples de dimensions* 2^{m-2}.

b) On suppose V *de dimension impaire* $m = 2r+1$ *alors* $C^+(Q)$ *est centrale simple et* $C(Q) \simeq Z \otimes_K C^+(Q)$.

REMARQUE 4

On trouvera par exemple dans [2] § 9 n° 4 les preuves détaillées de ce théorème.

On va reprendre ici à un point de vue élémentaire l'énoncé (a) (cas où dim V est paire) tout en le précisant.

On note K' la clôture algébrique de K, Q' l'extension de Q à $V' = K' \otimes_K V$; alors on a : $C(Q') \simeq K' \otimes_K C(Q)$ (th. 4 (2)). Puisque Q' est non dégénérée sur V' et K' algébriquement clos, on peut trouver une décomposition $V' = W' \oplus W''$ en somme directe de deux sous espaces totalement singuliers de même dimension r : $Q'|W' = Q'|W'' = 0$. De plus à chaque base $(f'_1,\dots,f'_r)$ de W' on peut associer une base $(f''_1,\dots,f''_r)$ de W'' telle que $B'(f'_i, f''_j) = \delta_{ij}$ (voir l'exemple 4 ci-dessous).

On pose $\sigma = f''_1 \dots f''_r$; l'idéal à gauche $C(Q').\sigma$ est engendré par les éléments σ, $f'_{i_1} \dots f'_{i_h}.\sigma$ $(i_1 < \dots < i_h)$ (qui sont indépendants) et donc $C(Q').\sigma$ est isomorphe à $C(Q'|W') = \Lambda W'$. L'algèbre C(Q') admet évidemment une représentation linéaire ρ par produit à gauche sur cet idéal : $\rho(a)(x) = ax$ pour $a \in C(Q')$, $x \in C(Q').\sigma$. On démontre alors que ρ est un isomorphisme de C(Q') sur $L_{K'}(C(Q').\sigma)$ et, par restriction de ρ à $C^+(Q')$ on obtient un isomorphisme ρ^+ de $C^+(Q')$ sur $L_K(C^+(Q').\sigma) \times L_K(C^-(Q').\sigma)$. On déduit de ceci que C(Q') est centrale simple de dimension 2^m et $C^+(Q')$ semi-simple et composée directe de deux sous-algèbres simples ([1] § 5). En utilisant ensuite l'isomorphisme $K' \otimes_K C(Q) \simeq C(Q')$ on en déduit l'énoncé sur C(Q). Nous allons détailler cela dans le cas où $K = \mathbb{R}$, $K' = \mathbb{C}$.

2. REPRESENTATIONS SPINORIELLES DES ALGEBRES DE CLIFFORD REELLES DANS LE CAS OU dim V EST PAIRE.

On suppose que V est un espace vectoriel réel de dimension paire $m = 2r$ et Q une forme quadratique non dégénérée sur V. On note Q' l'extension de Q à $V' = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$.

Les résultats obtenus au n° 1 se présentent de la façon suivante :

(1) Représentations de $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} C(Q)$

Soit W' un sous-espace de dimension r totalement singulier pour Q' dans l'espace V'. On pose $S = \Lambda W'$, $S^{\pm} = \Lambda^{\pm} W'$ on a des isomorphismes $\rho : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} C(Q) \simeq L_{\mathbb{C}}(S)$, $\rho^+ : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} C^+(Q) \simeq L_{\mathbb{C}}(S^+) \times L_{\mathbb{C}}(S^-)$.

Exemple 4 . On suppose dim V = 2 et Q définie-positive sur V.

Etant donnée une base (e_1,e_2) orthonormée de V on rapporte $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ aux vecteurs isotropes $f' = \frac{1}{2}(1 \otimes e_1 - i \otimes e_2)$, $f'' = \frac{1}{2}(1 \otimes e_1 + i \otimes e_2)$.
L'idéal $S = (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} C(Q)).\, f''$ admet pour base $(f'', f'f'')$ et on peut exprimer matriciellement dans cette base la représentation linéaire ρ obtenue en faisant opérer $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} C(Q)$ à gauche sur S. Un calcul élémentaire donne les matrices de Pauli :

$$\rho(1 \otimes e_1) = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(1 \otimes e_2) = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

et ρ est un isomorphisme de $C \otimes_{\mathbb{R}} C(Q)$ sur $L(\mathbb{C}^2)$.

En ce qui concerne $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} C^+(Q)$ on a $S^+ = \mathbb{C}\, f'f''$, $S^- = \mathbb{C}\, f''$ et l'on obtient : $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} C^+(Q) \simeq L_{\mathbb{C}}(S^+) \times L_{\mathbb{C}}(S^-)$.

(2) Représentation de $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} C^+(Q)$

On a vu que $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} C^+(Q)$ est isomorphe à $L_{\mathbb{C}}(S^+) \times L_{\mathbb{C}}(S^-)$ et est donc composée directe de sous-algèbres simples. Ces sous-algèbres se calculent aisément à partir d'une base orthonormée $(e_1,\ldots,e_m)$ de V ; on a en effet $(e_1\ldots e_m)^2 = (-1)^r Q(e_1)\ldots Q(e_m)e$ donc il existe $\varepsilon = 1$ ou i tel que $\tau = \varepsilon\, e_1\ldots e_m$ vérifie $\tau^2 = e$. Alors le centre $\mathbb{C}\, e + \mathbb{C}\, e_1\ldots e_m$ de $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} C^+(Q)$ est composé direct des sous corps $\mathbb{C}(e \pm \tau)$ et l'algèbre $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} C^+(Q)$ est composée directe des sous-algèbres simples $(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} C^+(Q))(e \pm \tau)$ ([1] § 5).

On reprend les isomorphismes $\rho : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} C(Q) \simeq L(S)$, $\rho^+ : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} C^+(Q) \simeq L(S^+) \times L(S^-)$ et l'on a deux cas :

$\rho(\tau) = I$ sur S^+, $\rho(\tau) = -I$ sur S^- ou bien $\rho(\tau) = -I$ sur S^+ , $\rho(\tau) = I$ sur S^-.

(3) Représentations spinorielles

$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} C(Q)$ étant simple n'a qu'une classe de représentations linéaires irréductibles ([1] § 13). C'est la classe des représentations spinorielles de $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} C(Q)$. Soit ρ une telle représentation ; il existe un espace vectoriel complexe S de dimension 2^r tel que $\rho : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} C(Q) \simeq L_{\mathbb{C}}(S)$ et une décomposition de S en somme directe $S = S^+ \oplus S^-$ en deux sous espaces de dimensions 2^{r-1} tels que $\rho : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} C^+(Q) \simeq L(S^+) \times L(S^-)$. On dit que S est un espace de spineurs et $S^\pm$ des espaces de demi-spineurs. Ces sous espaces sont définis à partir de τ en posant $\rho(\tau) = I$ sur S^+ , $\rho(\tau) = -I$ sur S^- (par exemple) .

Soit $(e_1,\ldots,e_m)$ une base orthonormée de V alors ρ est engendrée par les matrices complexes $\gamma_\alpha = \rho(e_\alpha)$ et l'on a donc

$$\gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = 2\eta_{\alpha\beta} I$$

où $2\eta_{\alpha\beta} = B(e_\alpha, e_\beta)$.

(4) Représentations de C(Q) et $C^+(Q)$.

Puisque $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} C(Q)$ est simple et que C(Q) est centrale (§A n° 2), C(Q) est elle même simple ([1] § 7) et une représentation irréductible ρ de $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} C(Q)$ induit une représentation irréductible de C(Q). Par exemple, avec les notations de la section (3) précédente, C(Q) est isomorphe à l'algèbre réelle engendrée par les matrices γ_β de $L(\mathbb{C}^{2^r})$.

On sait que $C^+(Q)$ admet pour centre l'ensemble $Z^+ = \mathbb{R}e + \mathbb{R}e_1\ldots e_m$ (§A n°2). Puisque $(e_1\ldots e_m)^2 = (-1)^r Q(e_1)\ldots Q(e_m)$ on voit que Z^+ est un corps si et seulement si

$$(-1)^r Q(e_1)\ldots Q(e_m) = -1.$$

Puisque $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} C^+(Q)$ est semi-simple, $C^+(Q)$ est elle même semi-simple ; en fait $C^+(Q)$ est simple si Z^+ est un corps, sinon Z^+ est composée des sous corps $\mathbb{R}(e \pm e_1 \ldots e_m)$ et $C^+(Q)$ est composée des sous-algèbres $C^+(Q)(e \pm e_1 \ldots e_m)$ elle admet dans ce cas deux classes inéquivalentes de représentations irréductibles ([1]§ 13). Ces représentations sont induites par la représentation spinorielle ρ de $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} C(Q)$; puisque τ commute avec les éléments de Spin(Q), ce groupe agit irréductiblement sur S^+ et sur S^- respectivement grâce à ρ (il s'agit de représentations complexes de Spin(Q) pour Q réelle).

Exemple 5 : On suppose que Q est minkowskienne sur un espace vectoriel V de dimension 4. Soit (e_0, e_1, e_2, e_3) une base Q-orthonormée de V ; on obtient $(-1)^r Q(e_0)Q(e_1)Q(e_2)Q(e_3) = -1$ et donc C(Q) et $C^+(Q)$ sont simples.

L'algèbre $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} C^+(Q)$ est semi-simple et pourvue de deux classes inéquivalentes de représentations irréductibles par des matrices complexes d'ordre 2. Par restriction à Spin(Q) on voit qu'il existe un revêtement universel de $SO_0(Q)$ constitué d'un groupe de matrices complexes 2×2. Un calcul classique prouve que ce groupe est isomorphe à $SL(2,\mathbb{C})$, qui opère suivant la loi $A\,H\,A^+$ sur les matrices hermitiennes $H = \begin{pmatrix} x_0+x_3 & x_1+ix_2 \\ x_1-ix_2 & x_0-x_3 \end{pmatrix}$.

(5) Constructions explicites des représentations

Les résultats précédents et ceux du n° 1 permettent d'avoir explicitement des représentations spinorielles de C(Q) pour dim V = 2r.

Exemple 6 : On reprend l'exemple 4 où dim V = 2.

Si Q est définie positive C(Q) est isomorphe à l'algèbre réelle engendrée par σ_1, σ_2 dans $L(\mathbb{C})^2$; on a ici $r = 1$ donc $(-1)^r Q(e_1)Q(e_2) = -1$ et donc $C^+(Q)$ est simple ; il est immédiat que $C^+(Q)$ est isomorphe au corps des matrices de la forme $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}$ avec $z \neq 0$.

Par l'homothétie $x \to ix$ dans $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ on passe de Q à la forme définie négative $-Q$ et on a $C(Q) \simeq C(-Q)$ (corps des quaternions) qui s'obtient en remplaçant σ_1, σ_2 par $i\sigma_1$, $i\sigma_2$.

Par l'application $h \in GL(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V)$ tel que $h(1 \otimes e_1) = 1 \otimes e_1$ et $h(1 \otimes e_2) = i \otimes e_2$ on passe de Q à la forme minkowskienne Q_1 et $C(Q_1)$ est engendrée par $\sigma_1, i\sigma_2$.

<u>Exemple 7</u> : On suppose que Q est définie-positive sur un espace vectoriel réel V de dimension $m = 2r$.

Dans le cas où $m = 4$, posons $V = V_1 \overset{\perp}{\oplus} V_2$ avec $\dim V_1 = \dim V_2 = 2$, $Q_i = Q/V_i$, (e_1^i, e_2^i) est une base orthonormée de V_i.

Soit e_o^i l'élément unité de $C(Q_i)$. Les éléments $e_j^1 \otimes e_o^2$ et $e_o^1 \otimes e_j^2$ $(j = 1,2)$ engendrent $(\mathbb{C} \otimes C(Q_2)) \hat{\otimes} (\mathbb{C} \otimes C(Q_2))$ avec la condition :

$$(e_o^1 \otimes e_j^2).(e_k^1 \otimes e_o^2) = -(e_k^1 \otimes e_o^2).(e_o^1 \otimes e_j^2)$$

pour $j \neq k$.

Soit ρ_i la représentation linéaire de $\mathbb{C} \otimes C(Q_i)$ définie par les matrices de Pauli ; en posant $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ on obtient $\sigma_i \sigma_3 = -\sigma_3\sigma_i = \pm\sigma_i (i=1,2)$ et $\sigma_3^2 = I_2$, d'où on déduit que $(\sigma_3 \circ \rho_1) \otimes \rho_2$ est un isomorphisme de l'algèbre $\mathbb{C} \otimes C(Q)$ sur $L_{2^2}(\mathbb{C})$.

Passons au cas général avec un espace vectoriel réel de dimension $m = 2r$ en procédant par récurrence sur r on trouve que $\mathbb{C} \otimes C(Q)$ (Q étant toujours définie positive) est isomorphe à $L_{2^r}(\mathbb{C})$ et que cette représentation ρ peut être engendrée par les matrices $\gamma_j^{(r)} = \rho(1 \otimes e_j)$ telles que l'on ait, pour $1 \leq i \leq r-1$

$$\gamma_i^{(r)} = \overset{i-1}{\otimes} \sigma_3 \otimes \sigma_1 \overset{r-i}{\otimes} I_2$$

$$\gamma_r^{(r)} = \overset{r-1}{\otimes} \sigma_3 \otimes \sigma_1$$

$$\gamma^{(r)}_{r+1} = \overset{i-1}{\otimes}\, \sigma_3 \otimes \sigma_2 \overset{r-i}{\otimes} I_2$$

$$\gamma^{(r)}_{2r} = \overset{r-1}{\otimes}\, \sigma_3 \otimes \sigma_2 \quad ,$$

et l'on voit que ces matrices sont hermitiennes sur ($\mathbb{C}^{2^r}$, canonique).

Comme on l'a expliqué plus haut, l'espace spinoriel $S = \mathbb{C}^{2^r}$ se décompose en somme directe $S = S^+ \oplus S^-$ grâce à l'action de $\rho(\tau)$ où $\tau = i^r\ e_1 \ldots e_m$; on a $\rho(\tau) = I$ sur S^+ et $\rho(\tau) = -I$ sur S^- on a donc $S^+ \perp S^-$ dans $\mathbb{C}^{2^r}$. Enfin ρ définit une représentation irréductible et unitaire de Γ^+_o dans S^+ et S^-.

L'étude présentée dans ces § A et § B suffisent pour aborder les structures spinorielles en Relativité générale (A. Lichnérowicz) ou en théorie de l'indice des opérateurs elliptiques (Atiyah, Bott, Singer ....).

BIBLIOGRAPHIE DU § B.

[1] N. BOURBAKI, Algèbre , Chapitre 8, Hermann 1958.

[2] N. BOURBAKI, Algèbre , Chapitre 9, Hermann 1959.

[3] C. CHEVALLEY, The Algebraic theory of Spinors, Columbia U. Press 1954.

C. L'opérateur de Dirac.

Nous nous proposons dans cet exposé de donner les définitions et quelques propriétés concernant la construction de l'opérateur de Dirac sur les variétés différentiables, telles qu'elles figurent en rappels dans les articles [1,§I] et [3a , §2] . Les rappels concernant les fibrés principaux et les connexions utilisés dans cet exposé peuvent être trouvés par exemple en [2].

Les structures différentielles qui interviennent (variétés différentiables, espaces fibrés, action des groupes de Lie etc) sont supposées C^∞ . On note $\Gamma(E)$ l'espace des sections C^∞ d'une variété fibrée E. Etant données deux variétés M, N et $f \in C^\infty(M,N)$, on note $T_x f$ l'application linéaire : $T_x M \to T_{f(x)} N$ tangente à N. Pour un groupe de Lie G, on note α_a l'automorphisme intérieur $g \to a\, g\, a^{-1}$ de G et $ad : G \to L(\underline{G})$ la représentation linéaire adjointe de G : $ad(a) = T_e\, \alpha_a$, e étant l'élément neutre de G et $\underline{G}$ son algèbre de Lie.

1. FIBRES PRINCIPAUX.

On note (P,M,G) un fibré principal P de base M, de groupe structural G.

Pour $p \in P$ et $g \in G$, l'action à droite de g sur p est notée $p.g$ ou $D_g.p$.

(a) Un homomorphisme d'un fibré principal (P,M,G) dans un fibré principal (P',M',G') est la donnée d'un couple (ϕ,h) où $\phi \in C^\infty(P,P')$, h est un homomorphisme de classe C^∞ de G dans G' tels que :

$$\forall\ p,g \quad : \quad \phi(p.g) = \phi(p).h(g).$$

On déduit de ceci que (ϕ,h) induit une application $f \in C^\infty(M,M')$ telle que $\pi' \circ \Phi = f \circ \pi$, π et π' étant les projections canoniques $P \to M$ et $P' \to M'$.

Par exemple l'action à droite D_g sur le fibré principal (P,M,G) définit l'automorphisme $(D_g, \alpha_{g^{-1}})$.

En théorie de jauge on note $\mathcal{G}(P,M,G)$ et on appelle groupe des transformations de jauge le groupe des automorphismes ϕ de P qui induisent l'identité sur M et G.

(b) Définition d'une réduction :

On suppose que G est un sous-groupe de G' ; on dit qu'un fibré principal (P,M,G) se déduit d'un fibré donné (P',M,G') par réduction de G' à G si (P,M,G) est un sous-fibré de (P',M,G').

(c) Exemples (voir les détails au n° 3 ci-dessous) :

Si M est une variété paracompacte de dimension m, on peut trouver sur M une structure riemannienne g et réduire le fibré principal des repères $(\mathscr{L}, M, GL(m,\mathbb{R}))$ au fibré des repères g-orthonormés $(\mathscr{R}, M, O(m,\mathbb{R}))$. Si de plus M admet un champ C^∞ de directions tangentes alors $(\mathscr{L}, M, GL(m,\mathbb{R}))$ se réduit au fibré des repères orthonormés $(\mathscr{R}', M, O(1,m-1;\mathbb{R}))$ pour une structure lorentzienne sur M. Dans le cas où M est orientable, $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$ peuvent être réduits aux sous-groupes $SO(m,\mathbb{R})$ et $SO(1,m-1;\mathbb{R})$ respectivement et, si M est "orientable dans le temps", alors on peut réduire ce dernier groupe aux rotations de Lorentz orthochrones (§ A, n° 3).

(d) Définition d'une extension :

On considère un homomorphisme $h \in C^\infty(G,G')$; (P,M,G) est appelé une extension d'un fibré donné (P',M,G') s'il existe $\phi \in C^\infty(P,P')$ tel que (ϕ,h) soit un homomorphisme de (P,M,G) dans (P',M,G') qui induise l'identité sur M.

(e) Exemple :

Q étant une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{R}^m$, on suppose donné un fibré de repères $(\mathscr{R}, M, SO_o(Q))$ sur la variété M et on cherche une extension $(\mathscr{S}, M, Spin(Q))$ définie par l'homomorphisme $h : Spin(Q) \to SO_o(Q)$ (§ A, n° 2). On dit que $\mathscr{S}$ est un fibré spinoriel (relativement à la forme quadratique Q)).

On notera que la possiblilité de réduire ou d'étendre un fibré principal fait généralement intervenir la topologie de la variété M. Nous n'aborderons pas ici ce très intéressant aspect du problème.

(f) Définition d'un fibré associé :

Soit (P,M,G) un fibré principal et ρ une action à gauche de G sur une variété différentiable F. Alors G opère à droite sur $P \times F$:

$$(p,y).a = (p.a,\rho(a^{-1})y)$$

et l'espace quotient, noté $P \times_\rho F$ est une variété différentiable fibré de base M, de fibre type F, dite associée à P, par la représentation ρ. On note $C^\infty_\rho(P,F)$ l'espace des applications $f \in C^\infty(P,F)$ de type ρ c'est-à-dire telles que $f(p.g) = \rho(g^{-1})f(p)$. Il existe une bijection $f \in C^\infty_\rho(P,F) \to s \in \Gamma(P \times_\rho F)$ donnée par la formule

$$s(x) = \pi'(\sigma(x),f(\sigma(x))$$

où σ est une section C^∞ locale quelconque de P au-dessus d'un voisinage de x et π' la projection canonique : $P \times F \to P \times_\rho F$.

Par exemple le groupe des transformations de jauge $\mathcal{G}(P,M,G)$ est en bijection avec $\Gamma(P \times_\alpha G)$. Dans le cas où M est compacte et G un sous-groupe fermé de $GL(m,\mathbb{R})$, on peut considérer $\mathcal{G}(P,M,G)$ comme sous-espace du fibré vectoriel $\Gamma(P \times_\alpha L(m,\mathbb{R}))$ et introduire les structures fonctionnelles qui sont à la base des théories quantiques de jauge

2. CONNEXIONS.

(a) Notations :

Soit (P,M,G) un fibré principal. En chaque point p de P on note V_pP le sous-espace de T_pP des vecteurs tangents à la fibre $P_{\pi(p)}$; $V_pP = T_p(P_{\pi(p)})$. Les éléments de V_pP sont les vecteurs verticaux en p.

A chaque élément $A \in \underline{G}$ correspond, par l'action à droite D de G sur P un champ de vecteurs $A^* \in \Gamma(TP)$ tels que :

$$A^*_p = T_e(D_{(.)}.p).A$$

ou encore pour $f \in C^\infty(P)$:

$$A^*_p f = \lim_{t \to o, t\neq o} \frac{1}{t}[f(p.e^{tA})-f(p)] \quad .$$

Alors $A^*_p \in V_pP$, $A \in \underline{G} \to A^*_p \in V_pP$ est un isomorphisme vectoriel et $A \to A^*$ est un isomorphisme de $\underline{G}$ sur une algèbre de Lie de champs de vecteurs verticaux sur P.

Enfin si (ϕ,h) est un homomorphisme de (P,M,G) dans (P',M',G'), étant donné $A \in \underline{G}$ et $A^*_p \in V_pP$ le vecteur correspondant, alors $T_p\phi.A^*_p = A'^*_{\phi(p)} \in V_{\phi(p)}P'$ et l'on trouve que $A' = T_e h.A$ dans $\underline{G}'$. En particulier si l'on prend l'automorphisme $(D_g,\alpha_{g^{-1}})$ associé à l'action à droite de G sur P (n°1), on trouve

$$A' = ad(g^{-1}).A.$$

(b) Définition d'une connexion.

On note $T^*P \otimes (P \times \underline{G})$ le fibré de fibre $T^*_p P \otimes \underline{G}$ au-dessus de P. Une connexion γ sur un fibré principal (P,M,G) est la donnée d'une section $\omega \in \Gamma\ (T^*P \otimes (P \times \underline{G}))$ telle que

$$1)\quad \forall p \in P,\ \forall A \in \underline{G} \ :\quad \omega(A^*_p) = A$$

$$2)\quad \forall g \in G,\quad D^*_g.\omega = (\mathrm{ad}\ g^{-1})\omega \quad .$$

On dit que ω est la 1-forme de la connexion γ.

Une connexion γ peut être aussi définie par la donnée d'un champ C^∞ de sous-espaces vectoriels H_pP de T_pP tels que

$$1)\quad \forall p : T_pP = V_pP \oplus H_pP$$

$$2)\quad \forall p,\ \forall g : H_{pg}P = T_p D_g . H_p \quad .$$

Ce sous-espace est défini comme l'ensemble des vecteurs $\tau \in T_pP$ tels que $\omega(\tau) = 0$. On dit que HP est le champ des sous espaces horizontaux de γ.

(c) Opérateurs différentiels associés à une connexion.

Une forme différentielle f de degré r sur P, à valeurs dans un espace vectoriel F de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est une section du fibré $\Lambda^r T^*P \otimes (P \times F)$.

Soit ρ une représentation linéaire de G dans F. On dit que f est de type ρ si l'on a :

$$\forall\ g \in G : D^*_g.f = \rho(g^{-1})f$$

et l'on écrit $f \in \Gamma_\rho\ (\Lambda^r T^*P \otimes (P \times F))$. Une telle forme f est alors dite horizontale si en chaque point p de P, $f_p(\tau_1,\ldots,\tau_r) = 0$ dès que l'un des vecteurs τ_j est vertical.

L'ensemble de ces r-formes (de type ρ et horizontales) est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des sections du fibré $\Lambda^r T^*M \otimes (P \times_\rho F)$ car ce fibré est le quotient de $\Lambda^r (TP/VP)^* \otimes (P \times F)$ par l'action de G.

Par exemple l'ensemble $\mathscr{C}$ (P,M,G) des 1-formes de connexions de (P,M,G) est une sous-variété affine de $\Gamma(T^*P \otimes P \times G)$ modelée par $\Gamma(T^*M \otimes (P \times_{ad} \underline{G}))$.

Différentielle absolue :

Etant donnée $f \in \Gamma_\rho(\Lambda^r T^*P \otimes (P \times F))$ on a : $df \in \Gamma_\rho(\Lambda^{r+1} T^*P \otimes (P \times F))$; par définition la différentielle absolue ∇f de f est la r+1-forme :

$$\nabla f(\tau_1,\dots,\tau_{r+1}) = df(H\tau_1,\dots,H\tau_{r+1})$$

où $H\tau_j$ est le vecteur de projection sur H_pP dans la décomposition $T_pP = V_pP \oplus H_pP$. On peut noter que ∇f est de type ρ et horizontale et donc définit un élément de $\Gamma(\Lambda^{r+1} T^*M \otimes (P \times_\rho F))$.

Par exemple si ω est la 1-forme de la connexion considérée, alors $\Omega = \nabla\omega \in \Gamma(\Lambda^2 T^*M \otimes (P \times_{ad} \underline{G}))$ est appelée la courbure de γ.

Un cas particulier est obtenu en prenant $f \in \Gamma(P \times_\rho F) \simeq C^\infty_\rho(P,F)$ alors $\nabla f \in \Gamma(T^*M \otimes (P \times_\rho F))$ est appelée la dérivée covariante de f.

Propriétés de la dérivée covariante.

(i) On pose $E = P \times_\rho F$ alors ∇ est un opérateur différentiel du premier ordre $\Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$. On peut l'étendre naturellement aux produits tensoriels $\Gamma(\otimes^r_s E) \to \Gamma(T^*M \otimes (\otimes^r_s E))$.

(ii) Notons $s \to \tilde{s}$ l'isomorphisme $\Gamma(P \times_\rho F) \to C^\infty_\rho(P,F)$; alors étant donnée $f \in \Gamma(P \times_\rho F)$ et $X \in \Gamma(TM)$ on a :

$$(*) \qquad \widetilde{(\nabla_X f)}(p) = d_p \tilde{f}.\ \tau_p + T_e\rho(\omega(\tau_p)).\tilde{f}(p)$$

où $\tau_p \in T_pP$ se projette sur $X_{\pi(p)}$ par TM.

Cette formule donne dans une carte locale (U,φ) de M la formule classique :

$$\nabla f = df + T_e\ \rho(\omega_U(.)).f$$

où ω_U est une 1-forme locale de la connexion donnée.

(iii) D'autre part la formule (*) peut être généralisée au cas où F est une variété différentiable et l'on a par exemple pour $\phi \in \mathcal{G}(P,M,G)$:

$\phi^*\omega = \omega + TL_{\tilde{\phi}^{-1}} \nabla \tilde{\phi}$ (cette formule est utilisée en théorie de jauge pour fibrer $\mathcal{C}$ par $\mathcal{G}$).

(d) Connexions et homomorphismes.

On note (ϕ,h) un homomorphisme de (P,M,G) dans (P',M,G') qui induit l'identité sur M.

(i) Soit γ une connexion sur P, de 1-forme ω, d'espaces horizontaux H. En un point $p' = \phi(p).g'$ de P' on pose $H'_{p'} = TD_{g'} \circ T\phi.H_p$; on obtient ainsi une connexion γ' sur P', d'espaces horizontaux H' et de 1-forme ω' telle que :

$$\phi^*\omega' = T_e h.\omega$$

([2] , prop. 6.1, chap. II).

(ii) Soit γ' une connexion sur P', de 1-forme ω', d'espaces horizontaux H'. On suppose que $T_e h$ soit un isomorphisme de $\underline{G}$ sur $\underline{G}'$. On peut alors définir sur P la 1-forme :

$$\omega = (T_e h)^{-1}. \quad \Phi^*\omega'$$

et l'on vérifie que ω est la 1-forme d'une connexion γ sur P dont les sous-espaces horizontaux sont appliqués par $T\phi$ sur les sous-espaces horizontaux de la connexion γ (voir la preuve de la prop. 6.2 , chap. II de [2]).

3. L'OPERATEUR DE DIRAC.

Dans ce n° 3 on reprend les rappels des n° 1 et 2 à travers la construction de l'opérateur de Dirac.

(a) Fibré des repères.

Soit M une variété différentiable, $\mathcal{L}$ l'ensemble des bases des espaces tangents à M ; on suppose que dim M = m. Etant donnée une carte (U,φ) de M on note $(\partial_1^x,\dots,\partial_m^x)$ le repère naturel de T_xM dans cette carte et, pour une base $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_m)$ de T_xM on note $A(\beta)$ l'unique élément de $GL(m,\mathbb{R})$ tel que

$$(*) \qquad \beta_i = \sum_{j=1}^{m} (A(\beta))_i^j \, \partial_j^x \ .$$

On obtient ainsi sur $\mathscr{L}$ une structure de variété différentiable fibrée par la projection naturelle $\pi : \mathscr{L} \to M$; les cartes de cette structure sont les couples $(\pi^{-1}(U), \varphi \times A)$. De plus $GL(m,\mathbb{R})$ agit à droite sur $\mathscr{L}$ par la formule déduite de (*) et l'on obtient ainsi le fibré principal $(\mathscr{L},M,GL(m,\mathbb{R}))$ des repères de M.

(b) <u>Repères orthonormés et repères spinoriels</u> :

On suppose qu'il existe sur M un champ g de classe C^∞ de formes bilinéaires symétriques non dégénérées dont la signature est égale à celle d'une forme quadratique Q fixée sur $\mathbb{R}^m$. Ainsi (M,g) est une variété pseudo-riemannienne.

Etant donnée la carte (U,φ) de M on obtient une base g_x-orthonormée $(b_1,\dots,b_m)$ de T_xM en appliquant le prodédé de Schmitt à la base naturelle ∂^x. Ceci donne au-dessus de U une section C^∞ de $\mathscr{L}$ constituée de repères orthonormés et l'on en déduit une réduction de $\mathscr{L}$ au fibré principal $(\mathscr{R}_o,M,O(Q))$ des repères orthonormés de M. Si de plus M est orientée, on peut encore réduire $\mathscr{R}_o$ au fibré principal $(\mathscr{R}_{SO},M,SO(Q))$ des repères orthonormés directs.

On supposera dans la suite que $\mathscr{R}_{SO}$ se réduit finalement au fibré $(\mathscr{R},M,SO_o(Q))$ où $SO_o(Q)$ est le groupe réduit orthogonal de la forme quadratique Q et qu'il existe une extension $\mathscr{S}$ de $\mathscr{R}$ associée à l'homomorphisme h de Spin(Q) sur $SO_o(Q)$. On dit que $(\mathscr{S},M,Spin(Q))$ est le fibré des repères spinoriels sur M.

(c) <u>Connexions linéaires</u> :

On appelle connexion linéaire sur M toute connexion sur le fibré $(\mathscr{L},M,GL(m,\mathbb{R}))$. Suivant le n°(2.c) on déduit d'une telle connexion une <u>dérivation covariante</u> $\nabla : \Gamma(\otimes_\ell^k TM) \to \Gamma(\otimes_{\ell+1}^k TM)$ car le fibré tangent peut s'écrire $TM = \mathscr{L} \otimes_{GL(m,\mathbb{R})} \mathbb{R}^m$ et l'on en déduit aussi <u>une différentielle absolue</u>.

$$\nabla : \Gamma_r(\Lambda^k T^* \mathscr{L} \otimes (\mathscr{L} \times F)) \to \Gamma(\Lambda^{k+1} T^*M \otimes (\mathscr{L} \times_r F))$$

où r est une représentation linéaire de $GL(m,\mathbb{R})$ dans l'espace vectoriel F.

La donnée d'une base $u = (u_1,\ldots,u_m) \in \mathscr{L}$ définit un isomorphisme encore noté u de $\mathbb{R}^m$ dans $T_{\pi(u)}M$ et tel que $u(\xi) = \Sigma\ \xi_i\, u_i$.

On appelle forme canonique de $\mathscr{L}$ la 1-forme θ sur $\mathscr{L}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ définie par l'égalité :

$$\theta_u(\tau) = u^{-1}(T_u\pi(\tau)) \quad , \qquad \tau \in T_u\mathscr{L} \quad .$$

On peut montrer que θ est de type $GL(m,\mathbb{R})$ et horizontale ([2] , prop. 2.1, chap. III). Etant donnée une connexion linéaire γ sur $\mathscr{L}$ on appelle forme de torsion de γ la 2-forme $\Theta = \nabla\theta$ sur M.

(d) Connexion de Levi-Civita et connexion spinorielle.

Une connexion linéaire sur la variété pseudo-riemannienne (M,g) est appelée connexion métrique si l'on a $\nabla g = 0$. On montre qu'une connexion linéaire sur M est une connexion métrique si et seulement si elle se déduit, au sens du n° (2.d.i), d'une connexion donnée sur le fibré $(\mathscr{R}_0, M, O(Q))$ ([2] , prop. 2.1, chap. IV). On montre aussi qu'une variété pseudo-riemannienne (M,g) admet une connexion métrique unique dont la forme de torsion Θ est nulle. C'est la connexion de Levi-Civita ou connexion riemannienne de (M,g). Par la méthode du n° (2.d.ii) on en déduit alors une connexion sur les fibrés $(\mathscr{R}_{SO}, M, SO(Q))$, $(\mathscr{R}, M, SO_0(Q))$ et $(\mathscr{S}, M, Spin(Q))$; cette dernière est appelée la connexion spinorielle et notée σ :

$$\sigma = (T_e h)^{-1}\, \Phi^* \omega$$

où ω est la connexion de Levi-Civita, (Φ,h) l'homomorphisme de $(\mathscr{S}, M, Spin(Q))$ sur $(\mathscr{R}, M, SO_0(Q))$.

(e) L'opérateur de Dirac (dim M paire).

On suppose que la dimension m de M est paire : $m = 2r$.

On peut alors trouver un espace vectoriel complexe $S = S^+ \oplus S^-$ tel que $\dim S^{\pm} = 2^{r-1}$ et des représentations spinorielles ρ de Spin(Q) dans S, S^+, S^- (§B). On obtient ainsi les fibrés spinoriels $\mathscr{S} \times_\rho S = \mathscr{S} \times_\rho S^+ \oplus \mathscr{S} \times_\rho S^-$. On a une représentation naturelle r de Spin(Q) dans $\mathbb{R}^m$ suivant les homomorphismes $\mathrm{Spin}(Q) \to SO_o(Q) \to GL(m,\mathbb{R})$. On en déduit une nouvelle écriture du fibré tangent :

$$TM = \mathscr{S} \times_r \mathbb{R}^m = \mathscr{R} \times_{SO_o(Q)} \mathbb{R}^m = \mathscr{L} \times_{GL(m,\mathbb{R})} \mathbb{R}^m$$

ainsi que le fibré associé $TM \otimes (\mathscr{S} \times_\rho S^+) = \mathscr{S} \times_{r \otimes \rho} (\mathbb{R}^m \otimes S^+)$.

On considère $\mathbb{R}^m$ comme espace générateur de C(Q) ; sachant que ρ est en fait une représentation spinorielle de C(Q) et que $\rho(\xi)s \in S^-$ pour $\xi \in \mathbb{R}^m$ et $s \in S^+$, on obtient une application bilinéaire

$$(\xi, s) \in \mathbb{R}^m \times S^+ \to \rho\,(\xi)\, s \in S^-$$

et par suite une application linéaire : $\mathbb{R}^m \otimes S^+ \to S^-$ et finalement un morphisme, noté μ, de $TM \otimes (\mathscr{S} \times_\rho S^+)$ dans $\mathscr{S} \times_\rho S^-$.

On a vu au §B que dans le cas où Q est définie positive, S est munie d'une structure hermitienne. Dans ce cas, $\mathscr{S} \times_\rho S$ est un fibré hermitien, $\mathscr{S} \times_\rho S^{\pm}$ sont des sous-fibrés orthogonaux et ρ peut être prise unitaire sur Spin(Q).

Revenons au cas général et posons pour simplifier $S(M) = \mathscr{S} \times_\rho S$, $S^{\pm}(M) = \mathscr{S} \times_\rho S^{\pm}$. Notoms μ le morphisme : $\Gamma(TM \otimes S^+(M)) \to \Gamma(S^-(M))$ déduit d'une remarque précédente.

La connexion spinorielle de $\mathscr{S}$ induit une dérivation covariante $\nabla : \Gamma(S^+(M)) \to \Gamma(T^*M \otimes S^+(M))$; la métrique g de M définit un isomorphisme $T^*M \simeq TM$ et l'on obtient ainsi un opérateur différentiel du premier ordre, encore noté ∇, de $\Gamma(S^+(M))$ dans $\Gamma(TM \otimes S^+(M))$.

Par définition, l'opérateur de Dirac $D^+ : \Gamma(S^+(M)) \to \Gamma(S^-(M))$ est le composé $\mu \circ \nabla$.

Au-dessus d'une carte (U,χ) de M on choisit une section C^∞ de $\mathcal{S}$ et la section associée de $\mathcal{R}$ dans l'extension $\mathcal{S} \to \mathcal{R}$ au-dessus de M. Dans ces repères le représentant d'une section φ de $S^+(M)$ est une application de classe C^∞ :

$$x \in U \to (\varphi^1, \ldots, \varphi^{2^{r-1}}) \in S^+$$

et le représentant de la dérivée covariante de φ s'écrit :

$$(\nabla_\mu \varphi)^a = \partial_\mu \varphi^a + \frac{1}{4} \sum_{\alpha,\beta} C_{\alpha\beta\mu} (\gamma^\alpha \gamma^\beta \varphi)^a$$

où les $C_{\alpha\beta\mu}$ sont les coefficients de Ricci de la connexion riemannienne dans les repères orthonormés choisis au-dessus de U et $\gamma^\alpha = \rho(e_\alpha)$, $(e_1, \ldots, e_m)$ étant l'élément de $\mathcal{R}$ situé dans la section au-dessus du point considéré. La formule précédente découle du §A, n° 3, exemples (1.b) et 2 dans le cas où Q est euclidienne ou minkowskienne. Dans cette section de $\mathcal{S}$, l'opérateur de Dirac s'écrit :

$$(D^+\varphi)^a = \Sigma\, g^{\mu\nu} (\gamma_\mu \nabla_\nu \varphi)^a$$

et l'on retrouve ainsi la formule introduite au début de ces exposés.

Dans le cas où Q est euclidienne ou minkowskienne, A. Lichnérowicz a trouvé l'égalité fondamentale :

$$D^2 = \Delta = - \nabla^\rho \nabla_\rho + \frac{1}{4} R$$

où D est l'opérateur de Dirac total : $\Gamma(S(M)) \to \Gamma(S(M))$ et R la courbure riemannienne scalaire de la variété. On dit que Δ est le laplacien spinoriel (voir [3]).

Dans le cas où g est hyperbolique normale, Δ est un opérateur hyperbolique ([3.a]) ; dans le cas où g est une métrique riemannienne, Δ et donc aussi D et D^+ sont elliptiques et l'indice de D^+ peut alors être considéré quand M est compacte ([1], [3b]).

BIBLIOGRAPHIE DU § C.

[1] J.M. BISMUT, The Atiyah-Singer theorem I. J. of Funct. Anal. 57, 56-99, 1984.

[2] S. KOBAYASHI, K. NOMIZU, Foundations of differential Geometry I, Interscience 1965.

[3] A. LICHNEROWICZ, a : Champs spinoriels et propagateurs, Bul. SMF 92, 1964 11-100.

b : Spineurs harmoniques, CRAS, 1963, 257, 7-9.