PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

E. COMBET

Physique quantique et formules de localisation

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1985, fascicule 5B
« Séminaire de géométrie », , p. 35-43
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1985___5B_35_0>

PHYSIQUE QUANTIQUE ET FORMULES DE LOCALISATION

par E. COMBET

Journées relativistes - Marseille Luminy - 15, 16, 17 avril 1985

Dans l'article [12] nous indiquions la possibilité de considérer certaines formules classiques de géométrie différentielle (Morse, Poincaré-Hopf, Gauss-Bonnet etc...) comme formules de localisation correspondant à certains phénomènes "physiques" asymptotiques. Ce point de vue est devenu beaucoup plus clair à la suite de la publication d'articles ([1] à [5]) essentiellement écrits par des physiciens et portant sur les liens qui existent entre les formules de l'indice et le développement récent de la physique quantique.

Nous nous proposons dans cet exposé de rappeler en quoi consiste cette approche et de donner des indications sur quelques travaux récents ([6] à [14]) où le point de vue en question est repris d'une façon rigoureuse.

1. Physique quantique

En "théorie continue" de la physique quantique, le problème fondamental consiste, en première approximation, à *quantifier un système géométrique lagrangien.*

Un système géométrique lagrangien est une famille $\{E;N,G;M,P;L\}$ où E est une variété fibrée au-dessus de M, de fibre-type N ; P est un groupe de Lie qui opère sur M et G opère sur les sections de E (via par exemple une action sur N), L est une fonction (un "lagrangien") qui dépend (entre autres) des sections de E et de leurs différentielles.

Il s'agit d'associer à ce système géométrique lagrangien un *système quantique* $\{\mathscr{H}, \Omega, H, U, W_k \ldots\}$ susceptible d'en représenter les "effets quantiques" ; $\mathscr{H}$ est l'espace de Hilbert des "états", Ω est un vecteur unitaire qui représente le "vide" ; H est "l'hamiltonien" ; U est une représentation unitaire du groupe P (en particulier on a $U(t) = e^{itH}$ pour les translations temporelles) ; les W_k sont les "distributions de Green-Wightman" etc. Les composantes d'un système quantique doivent vérifier des propriétés et axiomes dont l'énoncé ne peut être donné ici - de toute façon la quantification semble encore un art difficile à axiomatiser.

Il y a essentiellement deux cas :

(A) Système mécanique : $M = \mathbf{R}_t$ (la droite temporelle), P est le groupe des translations de $\mathbf{R}$, N est une variété riemannienne, G un groupe de symétries de N, $E = \mathbf{R} \times N$. Le modèle élémentaire est donné par le lagrangien

$$L(\varphi) = \Sigma\, g_{ij}\, \dot{\varphi}^i\, \dot{\varphi}^j - V(\varphi).$$

(B) Système de champs : $M = \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^d$ est l'espace-temps de dimension 1 + d , P est le groupe de Poincaré ; E est un fibré de tenseurs-spineurs au-dessus de M (champs ordinaires) ou un fibré vectoriel associé à un fibré principal de groupe structural G (champs de Yang et Mills) ou encore le produit $M \times N$ de la base M par une variété riemannienne N (σ-modèles) etc. Le lagrangien L est fonction des sections de E, de leur différentielle et éventuellement d'une connexion etc. Le modèle élémentaire est ici donné par le champ scalaire $E = M \times \mathbf{R}$ avec

$$L(\varphi) = (\varphi'_t)^2 - (\varphi'_{x_1})^2 - \ldots - (\varphi'_{x_d})^2 - V(\varphi).$$

Remarques :

(1) On peut aussi considérer diverses généralisations de l'espace de base M : espace-temps courbe, extensions sypersymétriques etc.

(2) Dans la pratique, il existe une approche générale du problème de la quantification : c'est la méthode d'intégration fonctionnelle qui fait intervenir des principes supplémentaires (Feynman) :

- les grandeurs "physiques" et en particulier les distributions W_k s'expriment à l'aide d'une "mesure"

$$\exp(i \int_M L) \, d\varphi$$

définie sur les sections de E ;

- on impose à cette "mesure" des règles de calcul ad hoc ou bien on passe à une formulation rigoureuse en changeant t en it c'est-à-dire en passant à une mesure euclidienne :

$$\exp(- \int_M L_{\text{euclidien}}) \, d\varphi \, .$$

(3) Cette méthode d'intégration fonctionnelle ou d'autres méthodes spécifiques peuvent être utilisées pour l'étude des *phénomènes asymptotiques*.

Les phénomènes asymptotiques en physique quantique concernent par exemple :

- les propriétés spectrales de H : asymptotiques quasi-classiques et effet tunnel par exemple (ceci se rattache aux systèmes de type (A)).

- les propriétés des W_k : perturbations, troncature, régularisation, ruptures de symétries, anomalies etc. (ceci se rattache aux systèmes de type (B)).

(4) Les formules de l'indice entrent sous ces deux aspects dans l'étude de phénomènes asymptotiques :

- d'une part dans le calcul de l'indice (de Witten) des états de base en *mécanique quantique supersymétrique* sur la variété N (ce point de vue sera développé dans le prochain paragraphe - intervient ici la cohomologie de N).

- d'autre part dans le calcul régularisé des anomalies gravitationnelles en *théorie euclidienne des champs de jauge* au-dessus d'une variété riemannienne compacte M (ce point de vue est exposé en particulier dans les articles de L. BONORA et P. COTTA-RAMUSINO [1], M.F. ATIYAH et I.M. SINGER [2] - intervient ici la cohomologie de l'algèbre de Lie du groupe $\mathcal{G}$ (de dimension infinie) des transformations de jauge (c'est le groupe des automorphismes du fibré principal $P \to M$ qui induisent l'identité sur M)).

2. Formules de localisation et formules intégrales.

L'approche "quantique" de ces formules est brièvement rappelée ci-dessous (section (a)) d'après E. Witten. On donne ensuite (section (b)) quelques remarques sur les problèmes posés par la formalisation mathématique de cette approche.

(a) Mécanique quantique supersymétrique, d'après E. WITTEN [3] [4] .

- Aspects classiques :

Le système de départ est constitué de la droite temporelle $\mathbf{R}$, d'une variété riemannienne compacte (N,g) (dont on note v la mesure riemannienne canonique). On prend $E = \mathbf{R} \times N$, on pose

$$L_0(\varphi) = \Sigma\, g_{ij}\, \dot{\varphi}^i \dot{\varphi}^j .$$

La quantification de ce système conduirait à prendre :

$$\mathcal{H}_0 = L^2(N,v) \ , \ H_0 = d^* d.$$

Cependant on impose à ce champ $\varphi : \mathbf{R} \to N$ une interaction "supersymétrique" avec un champ spinoriel $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$. En appliquant les règles de calcul "supersymétriques" on trouve que L_0 est remplacé par l'expression

$$L = L_0 + L_1 + L_2$$

où L_1 contient $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ (et dont l'écriture explicite n'importe pas ici) et où

$$L_2 = \frac{1}{6} \Sigma \ R_{ijk\ell} \ \bar{\psi}^i \ \psi^k \ \bar{\psi}^j \ \psi^\ell$$

($\bar{\psi}^i \ \psi^k = -2i \ \psi_1^i \ \psi_2^k = 2i \ \psi_2^k \ \psi_1^i$; le tenseur de courbure apparait par suite du développement à l'ordre 2 en θ de g_{ij} $(\Phi(t,\theta))$ où θ décrit W, l'espace des spineurs d'ordre 2 où se représente le groupe de Lorentz via $SL(2,\mathbb{C})$, ψ étant le coefficient de θ dans le développement du "superchamp" $\Phi(t,\theta)$).

Si l'on impose en plus à ce système une interaction avec un "champ magnétique" sdh où $s \in \mathbb{R}$ et $h \in C^\infty(N,\mathbb{R})$, on trouve que L est remplacé par :

$$L_s = L - s^2 || dh ||^2 - s \sum_{i,j} \bar{\psi}^i \ \psi^j \ \nabla_i \ \nabla_j h.$$

- <u>Aspects quantiques</u> :

Le système de départ (L_0, $\mathcal{H}_0$, H_0) est généralisé de façon à ce que les fonctions d'onde suivent les règles d'antisymétrie. Pour cela on prend les champs de formes alternées sur N :

$$\mathcal{H} = L^2(\overset{*}{\Lambda} T^* N)$$

$$H = dd^* + d^*d \text{ pour le lagrangien } L$$

$$H_s = d_s d_s^* + d_s^* d_s \text{ pour } L_s \text{ , avec } d_s = d + sdh \wedge .$$

On considère l'opérateur noté $(-1)^F$ qui vaut 1 sur les formes de degrés pairs ("bosons") et -1 sur les formes de degrés impairs ("fermions") ainsi que l'indice des états de base (E. Witten [3]) :

$$\begin{aligned} I &= \operatorname{Tr}_{H=0} (-1)^F \\ &= \chi(N), \text{ la caractéristique d'Euler - Poincaré de N} \\ &= \operatorname{Tr}(-1)^F \ e^{-\beta H} \quad ,\beta > 0 \\ &= \operatorname{Tr}(-1)^F \ e^{-H_s} \quad , s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

D'après le "principe" de Feynman, on peut calculer I à l'aide des mesures $\exp(-(\int \beta L_{eucl.})\, d\varphi d\psi$ et $\exp(-\int L_{s,eucl.}) d\varphi d\psi$.

Si l'on applique à cette étude les "règles de calcul ad hoc" on trouve deux formules classiques :

1) pour $s = 0$ et $\beta \to 0^+$, le terme prépondérant est L_2 et le calcul asymptotique conduit à une intégration sur N d'une forme dépendant de la courbure (N étant orientée) ; on obtient ainsi la formule de Gauss-Bonnet (voir l'article [5] de L. ALVAREZ-GAUME).

2) Pour $\beta = 1$ et $s \to +\infty$, le terme prépondérant est $- L_0 - s^2 \| dh \|^2$ (comme dans les formules analogues de mécanique quantique) ; alors en supposant que h soit une fonction de Morse sur N on trouve que $\chi(N)$ se concentre aux singularités de h ; ceci donne, après quelques calculs, la formule de Morse :

$$\chi(N) = \sum_{p=o}^{\dim N} (-1)^p \, m_p(h)$$

où $m_p(h)$ est le nombre de points critiques de h dont l'indice de Morse égale p. On notera que l'article [4] de E. WITTEN contient une étude beaucoup plus profonde des *inégalités de Morse* en termes "d'effet tunnel en asymptotiques quasi-classiques" ; on a en particulier le fait que les inégalités faibles

$$b_p(N) \leqslant m_p(h)$$

(où $b_p(N)$ est le p-ième nombre de Betti) correspondent au phénomène de dégénérescence asymptotique de la première valeur propre ; de plus l'effet tunnel de propagation des fonctions d'onde entre les points critiques de h fait intervenir les lignes de plus grande pente $\dot{x} = \pm$ grad h sur N.

(b) Quelques remarques sur cette approche.

La méthode précédente, sous son aspect "intégration fonctionnelle" est traitée rigoureusement dans l'article [6] de J.M. BISMUT ; son aspect "supersymétrique" est effleuré dans l'article [7] de E. GETZLER (qui utilise en fait une adaptation au cas spinoriel de la méthode du symbole complet) ; le cas "équivariant" est traité dans l'article [8] de N. BERLINE et M. VERGNE. Les formules de localisation sont démontrées dans les articles [9] [10] de B. SIMON, [11] de B. HELFFER, J. SJÖSTRAND et obtenues dans les articles [12] par adaptation à une situation fibrée de la méthode classique d'encadrement spectral de Dirichlet-Neumann. L'article [4] et E. WITTEN est exposé en partie dans les articles [13] et [14].

Le point de départ de toutes ces méthodes est assez simple et se présente de la façon suivante :

(1) Indice :

Soient E, F deux fibrés vectoriels hermitiens de même rang, basés sur une variété riemannienne compacte (N,g) et A un opérateur différentiel elliptique : $\Gamma(E) \to \Gamma(F)$ que l'on prend du premier ordre pour simplifier.

Alors on a :

$$\begin{aligned} \text{ind } A &= \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Coker} A \\ &= \dim \operatorname{Ker} A^* A - \dim \operatorname{Ker} A\, A^* \end{aligned}$$

et le calcul asymptotique de cet indice s'obtient de deux façons différentes :

(2) Perturbations singulières et formules de localisation :

L'indice de A ne changeant pas par l'adjonction d'un opérateur d'ordre 0, on considère sur N un champ C^∞, noté σ, d'endomorphismes linéaires $\sigma(x) \in L(E_x, F_x)$. On a donc pour $s \in \mathbf{R}$

$$\text{ind } A = \text{ind } (A + s\sigma).$$

La méthode des perturbations singulières consiste à exprimer l'indice de A quand $s \to +\infty$: on obtient une localisation de l'indice de A sur les singularités de σ, c'est-à-dire sur les points x où dét $\sigma(x) = 0$. On trouvera dans l'article [12] une étude de ce problème dans quelques cas particuliers. Les exemples considérés par E. WITTEN [4] portent sur le cas où $E = \oplus \Lambda^{2k} T^* N$,

$F = \oplus \Lambda^{2k+1} T^* N$, $A = d^* + d$ et consistent à prendre $\sigma(x)(\omega) = dh(x) \wedge \omega(x)$ (avec $h \in C^\infty(N,\mathbb{R})$) ou bien $\sigma(x)(\omega) = i_{v(x)}\omega(x)$ (avec $v \in \Gamma TN$) ; quand $s \to +\infty$ on obtient de cette façon l'égalité de Morse ou bien celle de Poincaré-Hopf.

(3) Equation de la chaleur et formules intégrales :

Pour $\beta > 0$ on note $e^{-\beta A^* A}(x,y)$ le noyau de l'équation de la chaleur associée à $A^* A$:

$$e^{-\beta A^* A}(x,y) = \sum_k e^{-\beta\lambda_k} s_k(x) \otimes s_k(y)$$

où la somme est prise sur les valeurs propres λ_k de $A^* A$ et sur les sections propres s_k correspondantes.

Pour $\beta > 0$, on pose :

$$\operatorname{Tr} e^{-\beta A^* A} = \int \operatorname{tr}_E(e^{-\beta A^* A}(x,x))v$$
$$= \sum_k e^{-\beta\lambda_k} .$$

Sachant que pour chaque $\lambda > 0$, A définit un isomorphisme

$$\operatorname{Ker}(A^* A - \lambda I) \simeq \operatorname{Ker}(AA^* - \lambda I),$$

on obtient :

$$\operatorname{ind} A = \operatorname{Tr} e^{-\beta A^* A} - \operatorname{Tr} e^{-\beta AA^*} , \quad \beta > 0.$$

La méthode de l'équation de la chaleur consiste à exprimer le second nombre ci-dessus quand $\beta \to 0^+$. On obtient de cette façon une formule intégrale pour l'indice de A [6] , [7] , [8] , [15] .

****

Références

[1] L. BONORA et P. COTTA-RAMUSINO : *Some remarks on BRS Transformations ...* Commun. Math. Phys. 87, 589-603 (1983).

[2] M.F. ATIYAH and I.M. SINGER : *Dirac operators coupled to vector potential.* Proc. Natl. Acad. Sci. USA Vol. 81, pp. 2597-2600, April 1984.

[3] E. WITTEN : *Constraints on Supersymetry breaking.* Nuclear Physics B 202 (1982) 253-316.

[4] E. WITTEN : *Supersymmetry and Morse Theory.* J. Differential Geometry 17 (1982) 661-692.

[5] L. ALVAREZ-GAUME : *Supersymmetry and the Atiyah-Singer Index Theorem.* Commun. Math. Phys. 90, 161-173 (1983).

[6] J.M. BISMUT : *The Aityah-Singer Theorems : A probabilistic approach I.* Journal of Functional Analysis 57, 56-99 (1984).

[7] E. GETZLER : *Pseudodifferential Operators on Supermanifolds.* Commun. Math. Phys. 92, 1983, 163-178.

[8] N. BERLINE and M. VERGNE : *A computation of the equivariant index.* Preprint 1984-1985. Ecole Polytechnique.

[9] B. SIMON : *Semiclassical analysis of low lying Eigenvalues I.* Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A, Vol. 38 n° 3, 1983, 295-307.

[10] B. SIMON : *Semiclassical analysis of low lying Eigenvalues II.* Annals of Mathematics 120 (1984) 89-118.

[11] B. HELFFER and J. SJOSTRAND : *Multiple wells in the semi-classical limit I.* Comm. in P.D.E. t.9 n° 4, 1984, p. 337-408.

[12] E. COMBET : *Perturbations singulières et formules de localisation.* CRAS (I) 297 (1983) 59-61 et article à paraître.

[13] E. COMBET : *Séminaire de Géométrie 1983-1984.* Université Lyon I.

[14] G. HENNIART : *Séminaire Bourbaki n° 617, Novembre 1983.*

[15] M.F. ATIYAH, R. BOTT, V.K. PATODI : *On the heat equation and the index theorem.* Invent. Math. 19, 279-330 (1973).

****

E. COMBET
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
Université Claude Bernard
43, bd du 11 nov. 1918
69622 VILLEURBANNE CEDEX