PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

DRISS ZHANI

Problème des moments matriciels sur la droite : construction d’une famille de solutions et questions d’unicité

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1984, fascicule 1D
« Problème des moments matriciels sur la droite : construction d’une famille de solutions et questions d’unicité », , p. 1-67
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1984___1D_A1_0>

CHAPITRE 1

PROBLÈME DES MOMENTS MATRICIELS SUR $\mathbb{R}$ ET SOLUTIONS N-EXTRÊMALES

*

INTRODUCTION.

On fixe m un entier supérieur ou égal à 1.

Ce chapitre est divisé en deux paragraphes. Dans le premier, après avoir défini le problème des moments matriciels sur $\mathbb{R}$, on donne essentiellement deux résultats de M.G. KREIN ([3]) sans démonstration. Le premier donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de matrices $m \times m$ soit suite de moments sur $\mathbb{R}$. Le deuxième donne la forme générale des solutions du problème.

Dans le deuxième paragraphe on va introduire les solutions N-extrêmales et les caractériser complètement par un résultat qui généralise celui du cas m=1 (voir AKHIEZER [1], th. 2.3.3., page 45 et th. 4.1.4., page 144), et qui n'est démontré dans [3] que dans un cas particulier.

1.1. FORME GENERALE DES SOLUTIONS.

Tout d'abord on donne les définitions suivantes.

(1.1.1) DEFINITION (Mesures quasi-spectrales et spectrales).

Soit H *un espace de Hilbert.*

(a) On appelle mesure quasi-spectrales sur H *la donnée d'un espace mesurable* (Ω,Σ) *et d'une application*

$$E : \Sigma \to L(H)$$

possèdant les propriétés suivantes :

(1) $E(\emptyset) = 0$ *et* $E(\Omega) = \mathbb{1}$.

(2) $E(A) \geq 0$ *pour tout* $A \in \Sigma$.

(3) L'application $E(.)$ *est dénombrablement additive pour la topologie simple-forte sur* $L(H)$, *c'est-à-dire :*
Pour toute suite disjointe (A_n) *dans* Σ *et tout* $x \in H$, *on a*

$$E(\bigcup_n A_n)x = \sum_n E(A_n)x$$

au sens de la topologie de H.

(b) Soit $E(.)$ *une mesure quasi-spectrale sur* H, *on dit que* $E(.)$ *est une mesure spectrale si on a*

$$E(A \cap B) = E(A)E(B) \qquad \textit{pour tous} \qquad A,B \in \Sigma.$$

L'espace $L(H)$ est l'espace des opérateurs bornés de H. On pose $M = \mathbb{C}^m$ et on désigne par $e_1, e_2, \ldots, e_m$ la base canonique de $\mathbb{C}^m$.

(1.1.2) <u>DEFINITION</u>. - *Soit* $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *une suite de matrices* $m \times m$ *hermitiennes avec* $S_o = I$ *la matrice identité.*
On dit que $(S_k)_k$ *est une suite de moments matriciels sur* $\mathbb{R}$ *s'il existe une mesure* $\mu(.)$ *quasi-spectrale sur* $M = \mathbb{C}^m$ *telle que :* $S_k = \int \lambda^k d\mu(\lambda)$ *pour chaque entier* k.

Le problème des moments matriciels est le suivant :

Etant donnée une suite $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices $m \times m$ hermitiennes, est-ce que c'est une suite de moments matriciels sur $\mathbb{R}$? Quand c'est le cas, est-ce qu'il n'existe qu'une seule mesure quasi-spectrale $\mu(.)$ telle que $S_k = \int \lambda^k d\mu(\lambda)$ $(k \in \mathbb{N})$? Le problème est dit déterminé s'il y a unicité de $\mu(.)$, dans le cas contraire on dit qu'il est indéterminé.

(1.1.3) <u>DEFINITION</u>. - *Soit* $(S_k)_k$ *une suite de matrices* $m \times m$ *hermitiennes. On dit que la suite* $(S_k)_k$ *est de type positif si on a :*
Pour chaque entier n *et tous* $y_o, \ldots, y_n$ *dans* M *on a*

$$\sum_{i,j=o}^{n} < S_{i+j}y_i, y_j > \geqslant 0.$$

Si en plus l'égalité n'est possible que si tous les y_i *sont nuls alors on dit que* $(S_k)_k$ *est de type défini positif.*

G. KREIN a démontré dans ([1], prop. (A), p. 127) l'équivalence entre la suite de moments matriciels sur $\mathbb{R}$ et la suite de type positif. On obtient le résultat suivant :

(1.1.4) <u>THEOREME</u>. - *Soit* $(S_k)_k$ *une suite de matrices* m×m *hermitiennes avec* $S_o = I$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) La suite $(S_k)_k$ *est une suite de moments matriciels sur* $\mathbb{R}$.

(b) La suite $(S_k)_k$ *est de type positif.*

(c) Pour chaque entier n *et tout choix de* $\alpha_o,\dots,\alpha_n$ *des matrices* m×m *on a :*

$$\sum_{i,j=o}^{n} \alpha_i \, S_{i+j} \, \alpha_j^* \geqslant 0.$$

(d) Pour chaque entier n *et tout choix de* $\alpha_o,\dots,\alpha_n$ *des matrices* m×m *on a :*

$$\mathrm{tr}\Big(\sum_{i,j=o}^{n} \alpha_i \, S_{i+j} \, \alpha_j^*\Big) \geqslant 0$$

Preuve. - Reste à prouver que (b), (c) et (d) sont équivalentes.

(b) $\Rightarrow$ (c) Pour chaque $x \in M$ on a :

$$< \sum_{i,j=o}^{n} \alpha_i \, S_{i+j} \, \alpha_j^* \, x, x > = \sum_{i,j=o}^{n} < S_{i+j} \, \alpha_j^* x, \, \alpha_i^* x > \geqslant 0.$$

(c) $\Rightarrow$ (d) Evident.

(d) $\Rightarrow$ (b) Soit n entier et soient $y_o,\dots,y_n$ dans M. Pour chaque $j=0,\dots,n$ on définit α_j^* par :

$$\alpha_j^* \, e_1 = y_j \qquad \text{et} \qquad \alpha_j^* e_k = 0 \qquad \text{si} \quad k \neq 1.$$

Donc $$\sum_{i,j=o}^{n} < S_{i+j} \, y_i, y_j > = \sum_{i,j=o}^{n} < S_{i+j} \, \alpha_i^* e_1, \, \alpha_j^* e_1 >$$

$$= \sum_{i,j=o}^{n} <\alpha_j S_{i+j}\ \alpha_i^* e_1, e_1 > = tr(\sum_{i,j=o}^{n} \alpha_j S_{i+j}\ \alpha_i^*) \geqslant 0. \quad \square$$

Dans toute la suite on fixe une suite $(S_k)_k$ de matrices m×m hermitiennes avec $S_o=I$ et on suppose que c'est une suite de moments sur $\mathbb{R}$.

On désigne par $\mathcal{L}$ l'espace des polynômes à coefficients dans M. On définit $[.,.] : \mathcal{L}\times\mathcal{L} \to \mathbb{C}$ par

$$[f,g] = \sum_{k=o}^{n} \sum_{j=o}^{N} < S_{k+j}\ x_k, y_j > \qquad \text{si}$$

$$f(\lambda) = \sum_{k=o}^{n} \lambda^k x_k \qquad \text{et} \qquad g(\lambda) = \sum_{j=o}^{N} \lambda^j y_j \qquad x_k, y_j \in M.$$

Avec le théorème (1.1.4) on a $[f,f] \geqslant 0$ pour chaque $f \in \mathcal{L}$, donc $[.,.]$ est un semi-produit scalaire sur $\mathcal{L}$.

Soit $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L} \ : [f,f] = 0\}$. On pose $\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}/_{\mathcal{N}}$.

Sur $\hat{\mathcal{L}}$, $[.,.]$ est un produit scalaire. Soit H le complété de $\hat{\mathcal{L}}$, H est un espace de Hilbert muni de $[.,.]$.

Sur $\mathcal{L}$ on définit l'opérateur A_o par :

$$(A_o f)(t) = tf(t) \qquad f \in \mathcal{L}.$$

Sur $\hat{\mathcal{L}}$ on pose $\hat{A}_o \hat{f} = \widehat{A_o f}$ si $f \in \mathcal{L}$.

Cette définition a un sens puisque si $\hat{f}=0$ alors $\widehat{A_o f} = 0$.

Si $f,g \in \mathcal{L}$ on a $[A_o f,g] = [f,A_o g]$ car

si $f(\lambda) = \sum_{k=o}^{n} \lambda^k x_k$ et $g(\lambda) = \sum_{j=o}^{N} \lambda^j y_j$ alors on a :

$$[A_o f,g] = [\sum_{k=o}^{n} \lambda^{k+1} x_k, \sum_{j=o}^{N} \lambda^j y_j] = \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{j=o}^{N} < S_{k+j} x_{k-1}, y_j >$$

$$= \sum_{k=o}^{n} \sum_{j=o}^{N} < S_{k+j+1} x_k, y_j > = \sum_{k=o}^{n} \sum_{j=1}^{N+1} < S_{k+j} x_k, y_{j-1} > =$$

$$= [f,A_o g].$$

On désigne par A la fermeture de $\hat{A}_o$. Donc

$A : \mathscr{D}_A \subset H \rightarrow H$ est un opérateur symétrique fermé de domaine $\mathscr{D}_A$ dense dans H puisque $\mathscr{D}_A$ contient $\hat{\mathcal{L}}$.

On pose :

$$\dim \operatorname{Ker}(A^* - zI) = \begin{cases} m_+ & \text{si} \quad \operatorname{Im} z > 0 \\ m_- & \text{si} \quad \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

On a le résultat suivant d'après G. KREIN ([3], p. 129) :

(1.1.5) PROPOSITION. - *On a les propriétés suivantes :*

(a) $0 \leq m_+ \leq m$ *et* $0 \leq m_- \leq m$.

(b) Si $m_+ = m$ *ou* $m_- = m$ *alors* $[.,.]$ *est un produit scalaire sur* $\mathcal{L}$.

On va introduire la définition suivante qui va servir à donner la forme générale des solutions.

(1.1.6) DEFINITION. - *Soit* E(.) *une mesure quasi-spectrale sur* H. *On dit que* E(.) *est une fonction spectrale de l'opérateur* A *si pour chaque* $f \in \mathscr{D}_A$ *on a :*

$$Af = \int \lambda \, dE(\lambda) f \quad \textit{et} \quad [Af, Af] = \int \lambda^2 d[E(\lambda) f, f].$$

Cette définition n'a de sens que si on montre l'existence d'une telle mesure E(.) associée à l'opérateur A.

Dans STRAUS ([6], p. 187) on démontre qu'il existe un espace de Hilbert $\tilde{H}$ qui contient H comme sous-espace hilbertien, et il existe un opérateur $\tilde{A}$ sur $\tilde{H}$ auto-adjoint qui prolonge A. Soit $\tilde{E}(.)$ la mesure spectrale de $\tilde{A}$ on a $\tilde{A} = \int \lambda \, d\tilde{E}(\lambda)$. Soit P la projection orthogonale de $\tilde{H}$ sur H. On pose $E(.) = P\tilde{E}(.)P$. Ainsi E(.) est une mesure quasi-spectrale sur H et c'est une fonction spectrale de A puisque si $f \in \mathscr{D}_A$ et $g \in H$ alors on a :

$$[Af, g] = [\tilde{A}f, g] = \int \lambda \, d[\tilde{E}(\lambda) f, g] = \int \lambda \, d[E(\lambda) f, g] \quad \text{et}$$

$$[Af, Af] = [A^2 f, f] = [\tilde{A}^2 f, f] = \int \lambda^2 d[\tilde{E}(\lambda) f, f] = \int \lambda^2 d[E(\lambda) f, f].$$

Donc toute extension auto-adjointe de A sur un espace de Hilbert $\widetilde{H} \supseteq H$, détermine une fonction spectrale de A.

La réciproque est aussi vraie, en effet, si E(.) est une fonction spectrale de A alors par le lemme de Naimark (NAGY [7], théorème 1, p. 442) il existe un espace de Hilbert $\widetilde{H} \supseteq H$ et une mesure spectrale $\widetilde{E}(.)$ sur $\widetilde{H}$ telle que $E(.) = P\widetilde{E}(.)P$ où P est la projection orthogonale de $\widetilde{H}$ sur H. Si on pose $\widetilde{A} = \int \lambda \, d\widetilde{E}(\lambda)$ alors $\widetilde{A}$ est une extension de A puisque E(.) est une fonction spectrale de A.

Par un résultat de G. KREIN ([3], p. 126, formule (9.9) et p. 129) et avec la notation : si $x \in M$ alors $\hat{x}$ désigne la classe de x comme polynôme constant, on obtient le résultat suivant :

(1.1.7) THEOREME. - *Relativement à la suite initiale* $(S_k)_k$ *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) La mesure quasi-spectrale T(.) *sur* M *est une solution du problème.*

(b) Il existe E(.) *une fonction spectrale de* A, *telle que pour* $j,k=1,\dots,m$ *et* $B \in \Sigma$ *on a :*

$$< T(B)e_j, e_k > \quad = \quad [E(B)\hat{e}_j, \hat{e}_k].$$

Si E(.) est une mesure quasi-spectrale sur H, on pose

$$I_E(z) = \int \frac{1}{z-t} \, dE(t) \qquad \text{pour} \qquad \operatorname{Im} z \neq 0.$$

La fonction $I_E(.)$ détermine complètement E(.).

L'ensemble de toutes les fonctions spectrales de A est décrit à l'aide des transformations de Stieltjes $I_E(.)$ par le théorème suivant (STRAUS [6], théorème 12 avec la remarque que $\mathcal{D}_A$ est dense dans H).

(1.1.8) THEOREME. - *Soit* $\lambda_o \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *et soit* π *le demi-plan qui contient* λ_o. *Il existe une bijection entre la classe des fonctions* $I_E(.)$ *définies sur* $\{z, \operatorname{Im} z \neq 0\}$ *et associées aux fonctions spectrales* E(.) *de* A *et la classe* $K(\pi,\lambda_o,A)$ *des fonctions* *analytiques* $F(.)$ *définies sur* π, *à valeurs opérateurs telle que* $F(z)$ *est une contraction de l'espace* $\mathrm{Ker}(A^* - \bar{\lambda}_o I)$ *dans l'espace* $\mathrm{Ker}(A^* - \lambda_o I)$.

Si $m_+ = 0$ ou $m_- = 0$ alors l'un des deux espaces $\mathrm{Ker}(A^* - \lambda_o I)$ ou $\mathrm{Ker}(A^* - \bar{\lambda}_o I)$ est réduit à (0). Donc il n'y a dans ce cas qu'une seule contraction entre les deux espaces, d'où A possède une seule fonction spectrale. Avec le théorème (1.1.7) on obtient alors :

(1.1.9) COROLLAIRE. - *Si* $m_+ = 0$ *ou* $m_- = 0$ *alors :*

(a) L'opérateur A *possède une seule fonction spectrale.*

(b) Le problème des moments matriciels est déterminé.

1.2. SOLUTIONS N-EXTREMALES.

Dans le cas m=1 on caractérise les solutions $\mu(.)$ N-extrêmales par le fait que l'espace des polynômes à coefficients complexes est dense dans $\mathcal{L}^2(\mu)$ (AKHIEZER [1], théorème 2.3.3., p. 45). Pour le cas général on obtient un résultat analogue. Mais avant de le donner, on va définir un espace $\mathcal{L}_2(T)$ associé à une solution $T(.)$ du problème.

Soit $T(.)$ une solution du problème. Pour chaque $B \in \Sigma$, $T(B)$ est une matrice positive hermitienne. Pour chaque $j,i=1,\dots,m$, $T(.)(i,i)$ est donc une mesure positive sur $\mathbb{R}$ et $T(.)(i,j)$ une mesure complexe sur $\mathbb{R}$. On pose alors pour chaque $B \in \Sigma$

$$\sigma(B) = \sigma_T(B) = \mathrm{tr}\, T(B) = \sum_{i=1}^{m} T(B)(i,i).$$

La mesure $\sigma(.)$ est une mesure positive sur $\mathbb{R}$.

Puisque on a $0 \leqslant T(B) \leqslant \mathrm{tr}\, T(B).I = \sigma(B).I$ pour chaque $B \in \Sigma$, alors chaque $T(.)(i,i)$ $i=1,\dots,m$, est absolument continue par rapport à $\sigma(.)$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on tire que $T(.)(i,j)$ est absolument continue par rapport à $\sigma(.)$ pour chaque $i,j=1,\dots,m$. Par le théorème de Radon-Nikodym, il existe pour chaque $i,j=1,\dots,m$ une fonction $\rho_{i,j}(.)$ σ-intégrable telle que $dT(.)(i,j) = \rho_{i,j}(.)d\sigma(.)$.

On pose $\langle T'(\lambda)e_i, e_j \rangle = \rho_{i,j}(\lambda)$ $\quad i,j=1,\dots,m, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

On a $T'(\lambda) \geqslant 0$ σ-p.p. mais on peut changer la matrice $T'(.)$ sur un ensemble négligeable pour obtenir $T'(\lambda) > 0$ pour tout λ réel.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^m$, on dit que $f(.) = \sum_{i=1}^{m} f_i(.)e_i$ est σ-mesurable si chaque $f_i(.)$ est σ-mesurable $i=1,\dots,m$. On pose :

$$\mathcal{L}_2(T) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^m, \ f \text{ est } \sigma\text{-mesurable et } \int < T'(\lambda)f(\lambda), f(\lambda) > d\sigma(\lambda) < +\infty\}.$$

Pour $f,g \in \mathcal{L}_2(T)$ on pose :

$$(f,g)_T = \int < T'(\lambda)f(\lambda), g(\lambda) > d\sigma(\lambda).$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la positivité de $T'(\lambda)$ on tire : pour $f,g \in \mathcal{L}_2(T)$

$$|(f,g)_T|^2 \leq (f,f)_T(g,g)_T.$$

On a $(.,.)$, est un semi-produit scalaire sur $\mathcal{L}_2(T)$.

On pose $\mathcal{N}' = \{f \in \mathcal{L}_2(T) : (f,f)_T = 0\}$ et $L_2(T) = \mathcal{L}_2(T)/\mathcal{N}'$.

L'espace $L_2(T)$ est un espace de Hilbert ([3], p. 91).

On a noté par $\hat{}$ l'homomorphisme naturel entre $\mathcal{L}$ et $\hat{\mathcal{L}}$.

On note par $\hat{\hat{}}$ l'homomorphisme naturel entre $\mathcal{L}_2(T)$ et $L_2(T)$.

On a $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_2(T)$ et pour $f,g \in \mathcal{L}$ (voir [3], formule (10.6)), on a $[f,g] = (f,g)_T$.

$$\text{Soit } \varphi : \hat{\mathcal{L}} \to L_2(T)$$
$$\hat{f} \to \hat{\hat{f}}.$$

Si $f,g \in \mathcal{L}$ on a $[\hat{f},\hat{g}] = (\varphi\hat{f}, \varphi\hat{g})_T$ car

$$(\varphi\hat{f}, \varphi\hat{g})_T = (\hat{\hat{f}},\hat{\hat{g}})_T = (f,g)_T = [f,g] = [\hat{f},\hat{g}].$$

Donc on peut prolonger φ à une isométrie de H sur un sous-espace de $L_2(T)$ qu'on note par $H' = \varphi H$.

Soit $\tilde{E}(.) : L_2(T) \to L_2(T)$ définie par :

$$\tilde{E}(B)\hat{\hat{f}} = \widehat{\widehat{1_B f}} \quad \text{si } f \in \mathcal{L}_2(T) \text{ et } B \in \Sigma.$$

La mesure $\widetilde{E}(.)$ est une mesure spectrale sur $L_2(T)$.

Soit $P : L_2(T) \to H'$ la projection orthogonale.

On pose $E(.) = \varphi^{-1} P \widetilde{E}(.) P \varphi$.

Avec ces notations on obtient :

(1.2.1) PROPOSITION. - *On a :*

(a) Pour $f,g \in \mathcal{L}$ *et* $B \in \Sigma$ *:*

$$[E(B)\hat{f},\hat{g}] = \int_B < T'(\lambda)f(\lambda),\ g(\lambda) > d\sigma(\lambda).$$

(b) La mesure quasi-spectrale $E(.)$ *est une fonction spectrale de* A.

(c) Pour $i,j=1,\dots,m$ *et* $B \in \Sigma$ *:*

$$< T(B)e_i, e_j > = [E(B)\hat{e}_i, \hat{e}_j].$$

Preuve :

(a) Soit $B \in \Sigma$ pour $f,g \in \mathcal{L}_2(T)$ on a :

$$(*) \quad (\widetilde{E}(B)\hat{\hat{f}},\hat{\hat{g}})_T = (\widehat{\widehat{1_B f}},\hat{\hat{g}})_T = (1_B f,g)_T = \int_B < T'(\lambda)f(\lambda),g(\lambda) > d\sigma(\lambda).$$

Donc pour $f,g \in \mathcal{L}$ et $B \in \Sigma$ on a :

$$[E(B)\hat{f},\hat{g}] = [\varphi^{-1}P\widetilde{E}(B)P\varphi\hat{f},\hat{g}] = (P\widetilde{E}(B)P\ \hat{\hat{f}},\hat{\hat{g}})_T$$

$$= (\widetilde{E}(B)\hat{\hat{f}},\hat{\hat{g}})_T = \int_B < T'(\lambda)f(\lambda),g(\lambda) > d\sigma(\lambda).$$

(b) On pose $\widetilde{A} = \int \lambda\, d\widetilde{E}(\lambda)$, pour $f \in \mathcal{D}_{\widetilde{A}}$ et $g \in L_2(T)$ par (*) on obtient : $(\widetilde{A}f,g)_T = \int \lambda\ d(\widetilde{E}(\lambda)f,g)_T = \int \lambda < T'(\lambda)f(\lambda),g(\lambda) > d\sigma(\lambda)$

$$= \int < T'(\lambda)\lambda f(\lambda),g(\lambda) > d\sigma(\lambda) = (\lambda f,g)_T.$$

Donc si $f \in \mathcal{D}_{\widetilde{A}}$ alors $(\widetilde{A}\, f)(\lambda) = \lambda f(\lambda)$.

On remarque que si $f \in \mathcal{D}_A$ alors $\varphi f \in \mathcal{D}_{\widetilde{A}}$ car par (*) :

$$\int \lambda^2 d(\widetilde{E}(\lambda)\,\varphi f, \varphi f)_T = \int \lambda^2 < T'(\lambda)f(\lambda),f(\lambda) > d\sigma(\lambda)$$

$$= (\lambda f,\ \lambda f)_T < +\infty \quad \text{car} \quad \lambda f \in H.$$

Par suite, l'opérateur $\varphi^{-1}\ \widetilde{A}\ \varphi$ prolonge A, en effet :

si $f \in \mathscr{D}_A$ on a $\varphi f \in \mathscr{D}_{\tilde{A}}$ et, avec $g(\lambda) = \lambda f(\lambda)$, on obtient : $\tilde{A}\varphi f = \varphi g$ donc $\varphi^{-1}\tilde{A}\varphi f = g = Af$.

La mesure quasi-spectrale $E(.)$ est une fonction spectrale de A, en effet : si $f \in \mathscr{D}_A$ et $g \in H$, alors on a :

$$
\begin{aligned}
[Af,g] &= [\varphi^{-1}\tilde{A}\varphi f,g] = (\tilde{A}\varphi f, \varphi g)_T = \int \lambda\, d(\tilde{E}(\lambda)\varphi f, \varphi g)_T \\
&= \int \lambda\, d(P\tilde{E}(\lambda)P\varphi f, \varphi g)_T = \int \lambda\, d(E(\lambda)f,g)_T \\
&= \int \lambda\, d[E(\lambda)f,g] \qquad \text{et}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[Af,Af] &= [\varphi^{-1}\tilde{A}\varphi f, \varphi^{-1}\tilde{A}\varphi f] = (\tilde{A}\varphi f, \tilde{A}\varphi f)_T \\
&= (\tilde{A}^2\varphi f, \varphi f)_T = \int \lambda^2 d(\tilde{E}(\lambda)\varphi f, \varphi f)_T \\
&= \int \lambda^2 d(E(\lambda)f,f)_T = \int \lambda^2 d[E(\lambda)f,f].
\end{aligned}
$$

(c) Pour $B \in \Sigma$ et $i,j=1,\dots,m$ par (a) on obtient :

$$[E(B)\hat{e}_i,\hat{e}_j] = \int_B \langle T'(\lambda)e_i,e_j\rangle d\sigma(\lambda) = \langle T(B)e_i,e_j\rangle . \quad \square$$

(1.2.2) DEFINITION. - *Soit* $T(.)$ *une solution du problème. On dit que* $T(.)$ *est une solution* N-*extrêmale si la mesure quasi-spectrale* $E(.)$ *de la proposition (1.2.1) est une mesure spectrale sur* H.

Remarque. - Le terme "N-extrêmale" provient de la théorie scalaire m=1 (AKHIEZER [1], voir théorème 4.1.4, p. 144).

On a un résultat qui caractérise les solutions N-extrêmales et qui n'est donné dans [3] que dans le cas où $m_+ = m_- = m$.

(1.2.3) THEOREME. - *Soit* $T(.)$ *une solution du problème. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) L'espace $\mathcal{L}$ *est dense dans* $\mathcal{L}_2(T)$.

(b) La solution $T(.)$ *est* N-*extrêmale.*

(c) Pour chaque $i=1,\dots,m$ *et chaque* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *on a :*

$$\hat{\hat{f}}_{i,z} \in H' \quad \text{où} \quad f_{i,z}(\lambda) = \frac{1}{\lambda - z} e_i .$$

Preuve. - Pour faciliter seulement les notations, on suppose que $[.,.]$ est un produit scalaire sur $\mathcal{L}$, c'est-à-dire $\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$.

(a) $\Rightarrow$ (b) On a $H' = \varphi H$. Comme l'espace $\mathcal{L}$ est dense dans l'espace $\mathcal{L}_2(T)$ alors $\varphi\mathcal{L}$ est dense dans $L_2(T)$. Mais on a

$$\varphi\mathcal{L} \subset H' \subset L_2(T) \text{ d'où } L_2(T) = H'.$$

On en tire que $P = \mathbb{I}$ l'opérateur identité de $L_2(T)$. On obtient

$$E(.) = \varphi^{-1} P\, \tilde{E}(.) P \varphi = \varphi^{-1} \tilde{E}(.) \varphi.$$

Comme $\tilde{E}(.)$ est une mesure spectrale sur $L_2(T) = H' = \varphi H$, il en est de même pour $E(.)$ sur H. Donc $T(.)$ est une solution N-extrêmale.

(b) $\Rightarrow$ (c) Soit $T(.)$ une solution N-extrêmale. Ainsi $E(.)$ est une mesure spectrale sur H et on a :

$$< T(.)e_i, e_j > = [E(.)e_i, e_j] \qquad i,j=1,\dots,m.$$

On pose $K = \int \lambda \, dE(\lambda)$.

L'opérateur $K : \mathscr{D}_K \subset H \to H$ est auto-adjoint et c'est une extension de A puisque $E(.)$ est une fonction spectrale de A.

On pose $R_z = (K - z\mathbb{I})^{-1}$ pour $\operatorname{Im} z \neq 0$.

Avec la proposition (1.2.1), pour $f,g \in \mathcal{L}$ et $\operatorname{Im} z \neq 0$ on obtient :

$$[R_z f, g] = \int \frac{1}{\lambda - z} \, d[E(\lambda)f, g] = \int \frac{1}{\lambda - z} < T'(\lambda) f(\lambda), g(\lambda) > d\sigma(\lambda)$$

$$= \int < T'(\lambda) \frac{f(\lambda)}{\lambda - z}, g(\lambda) > d\sigma(\lambda) = \left(\frac{f}{\lambda - z}, g\right)_T. \text{ Donc}$$

(*) $\qquad [R_z f, g] = \left(\frac{f}{\lambda - z}, g\right)_T$ pour $f,g \in \mathcal{L}$ et $\operatorname{Im} z \neq 0$.

Pour $z, \zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ on a $R_z = R_\zeta + (z-\zeta) R_\zeta R_z$ donc pour $f \in \mathcal{L}$, avec (*), on obtient :

$$[R_z f, R_z f] = [R_{\bar{z}} R_z f, f] = \frac{1}{z - \bar{z}} \{[R_z f, f] - [R_{\bar{z}} f, f]\}$$

$$= \frac{1}{z - \bar{z}} \left\{ \left(\frac{f}{\lambda - z}, f\right)_T - \left(\frac{f}{\lambda - \bar{z}}, f\right)_T \right\}$$

$$= \left(\frac{1}{|\lambda-z|^2} f,f\right)_T = \int \frac{1}{|\lambda-z|^2} < T'(\lambda)f(\lambda),f(\lambda) > d\sigma(\lambda)$$

$$= \int < T'(\lambda) \frac{f(\lambda)}{\lambda-z} , \frac{f(\lambda)}{\lambda-z} > d\sigma(\lambda) = \left(\frac{f}{\lambda-z} , \frac{f}{\lambda-z}\right)_T$$. D'où pour $f \in \mathcal{L}$ et $\operatorname{Im} z \neq 0$ on a $[R_z f, R_z f] = \left(\frac{f}{\lambda-z}, \frac{f}{\lambda-z}\right)_T$. Avec cette égalité et (*) on obtient pour $f,g \in \mathcal{L}$ et $\operatorname{Im} z \neq 0$:

$$(**) \quad [R_z f-g, R_z f-g] = \left(\frac{f}{\lambda-z} - g, \frac{f}{\lambda-z} - g\right)_T = \left(\frac{\hat{\hat{f}}}{\lambda-z} - \hat{\hat{g}}, \frac{\hat{\hat{f}}}{\lambda-z} - \hat{\hat{g}}\right)_T$$

car $\qquad [g,g] = (g,g)_T \qquad$ si $\quad g \in \mathcal{L}$.

Comme $\mathcal{L}$ est dense dans H et que $R_z f \in H$ pour chaque $f \in \mathcal{L}$, il existe, pour toute $f \in \mathcal{L}$, tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$, une fonction $g \in \mathcal{L}$ telle que $[R_z f-g, R_z f - g] < \varepsilon$.
Ce qui montre, avec (**) et la remarque que la fermeture de $\hat{\mathcal{L}} = \{\hat{g} : g \in \mathcal{L}\}$ dans $L_2(T)$ est H', que la fonction $\frac{\hat{\hat{f}}}{\lambda-z}$ est un élément de H', pour chaque $f \in \mathcal{L}$. En particulier pour $f=e_i$, $i=1,\dots,m$, on obtient $\hat{\hat{f}}_{i,z} \in H'$.

(c) $\Rightarrow$ (a) On remarque que la densité de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{L}_2(T)$ équivaut à la densité de $\varphi\mathcal{L}$ dans $L_2(T)$, ou encore à l'égalité $H' = L_2(T)$.

Pour montrer que $H' = L_2(T)$, il suffit de prouver ceci :
Si $g \in \mathcal{L}_2(T)$ est telle que $(\hat{\hat{g}},f)_T = 0$ pour tout $f \in H'$, alors $(g,g)_T = 0$. Soit $g(.) = \sum_{i=1}^{m} g_i(.)e_i$ un tel élément. Puisque $\hat{\hat{f}}_{i,z} \in H'$ alors $(f_{i,z},g)_T = (\hat{\hat{f}}_{i,z},\hat{\hat{g}})_T = 0$ pour $i=1,\dots,m$ et $\operatorname{Im} z \neq 0$. Donc

$$0 = (f_{i,z},g)_T = \int < T'(\lambda)f_{i,z}(\lambda), g(\lambda) > d\sigma(\lambda)$$

$$= \int < T'(\lambda) \frac{e_i}{\lambda-z} , g(\lambda) > d\sigma(\lambda)$$

$$= \int \frac{1}{\lambda-z} < T'(\lambda)e_i,g(\lambda) > d\sigma(\lambda) .$$

Par la formule d'inversion de Stieltjes-Perron, on voit que la mesure $d\nu_i(\lambda) = \langle T'(\lambda)e_i, g(\lambda)\rangle d\sigma(\lambda)$ est nulle. Ce qui implique :

$$
\begin{aligned}
(g,g)_T &= \int \langle T'(\lambda)g(\lambda), g(\lambda)\rangle d\sigma(\lambda) \\
&= \int \sum_{i=1}^{m} g_i(\lambda) \langle T'(\lambda)e_i, g(\lambda)\rangle d\sigma(\lambda) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \int g_i(\lambda) \langle T'(\lambda)e_i, g(\lambda)\rangle d\sigma(\lambda) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \int g_i(\lambda) d\nu_i(\lambda) = 0. \qquad \square
\end{aligned}
$$

*

CHAPITRE 2

CONSTRUCTION D'UNE FAMILLE DE SOLUTIONS

*

INTRODUCTION.

Ce chapitre est divisé en quatre paragraphes. Dans le premier, on va introduire une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients matriciels, puis on lui associe deux suites de polynômes du même genre $(Q_n)_n$ et $(E_n)_n$. On donne ensuite les propriétés de ces trois suites. Dans le deuxième paragraphe, on va définir les λ-matrices simples, ensuite démontrer que sous certaines conditions $E_n^{\lambda_o}$ est une λ-matrice simple. On applique à $E_n^{\lambda_o}$ un théorème de LANCASTER ([5], th. 4.3) qui est la généralisation de la formule d'interpolation de Lagrange.

Dans le troisième paragraphe, on introduit le problème tronqué d'ordre n, puis étant donné un réel λ_o avec $\det P_n(\lambda_o) \neq 0$, on construit une solution de ce problème qui prend au point λ_o la plus grande masse que peut prendre une solution de ce problème en ce point.

Dans le quatrième paragraphe, pour chaque réel λ_o, avec $\lambda_o \notin \mathscr{E}$, où $\mathscr{E}$ est un certain ensemble au plus dénombrable, on construit une solution du problème tout entier, qui prend au point λ_o la plus grande masse possible que peut prendre une solution en ce point.

2.1. LES POLYNÔMES P_n, Q_n^λ ET E_n.

La fonction θ. - On désigne par $\mathscr{M}$ l'espace des matrices m×m, et par $\mathscr{P}_n$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n, à coefficients éléments de $\mathcal{M}$. Soit $\mathcal{P} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n$.

Dans tout ce chapitre on fixe une suite $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices $m\times m$, hermitiennes, avec $S_o=I$, et on suppose que c'est une suite de type défini positif.

On définit l'application $\theta : \mathcal{P}\times\mathcal{P} \to \mathcal{M}$ par :

$$\theta(P,R) = \sum_{k=o}^{n} \sum_{j=o}^{N} \alpha_k S_{k+j} \beta_j^* \quad \text{si}$$

$$P(t) = \sum_{k=o}^{n} \alpha_k t^k \quad \text{et} \quad R(t) = \sum_{j=o}^{N} \beta_j t^j \quad \text{avec} \quad P,R \in \mathcal{P}.$$

On a les propriétés suivantes :

(2.1.1) <u>PROPOSITION</u>. - *Pour* P,Q *et* R *éléments de* $\mathcal{P}$, *et* $U \in \mathcal{M}$ *on a :*

(*a*) $\theta(t^k I, t^j I) = S_{k+j}$ $\quad k,j \in \mathbb{N}$

(*b*) $\theta(P+Q, R) = \theta(P,R) + \theta(Q,R)$

(*c*) $\theta(UP,R) = U\theta(P,R)$.

(*d*) $\theta(P,R)^* = \theta(R,P)$

(*e*) $\theta(tP,R) = \theta(P,tR)$.

Preuve. - Les propriétés de (a) à (d) sont évidentes. Soient $P(t) = \sum_{k=o}^{n} \alpha_k t^k$ et $R(t) = \sum_{j=o}^{N} \beta_j t^j$, $P,R \in \mathcal{P}$, on a :

$$\theta(tP,R) = \theta\Big(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{i-1} t^i, \sum_{j=o}^{N} \beta_j t^j\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=o}^{N} \alpha_{i-1} S_{i+j} \beta_j^* = \sum_{i=o}^{n} \sum_{j=o}^{N} \alpha_i S_{i+j+1} \beta_j^*$$

$$= \sum_{i=o}^{n} \sum_{j=1}^{N+1} \alpha_i S_{i+j} \beta_{j-1}^* = \theta\Big(\sum_{i=o}^{n} \alpha_i t^i, \sum_{j=1}^{N+1} \beta_{j-1} t^j\Big)$$

$$= \theta(P,tR). \quad \square$$

Puisque la suite $(S_k)_k$ est de type défini positif, alors par le théorème (1.1.4) c'est une suite de moments matriciels sur $\mathbb{R}$, et pour chaque $P \in \mathscr{P}$ on a $\theta(P,P) \geq 0$.

(2.1.2) DEFINITION. - *Soit* $P \in \mathscr{P}$, *on dit que* P *est pseudo-inversible si* $\theta(P,P)$ *est inversible.*

(2.1.3) PROPOSITION. - *Si* $P \in \mathscr{P}$ *avec* $P(t) = \sum_{i=o}^{n} \alpha_i t^i$ *alors on a :*

(a) $\operatorname{Ker} \theta(P,P) = \sum_{i=o}^{n} \operatorname{Ker} \alpha_i^*$.

(b) En particulier si l'un des α_i *est inversible alors* P *est pseudo-inversible.*

Preuve. - Si $P \in \mathscr{P}$, $P(t) = \sum_{i=o}^{n} t^i \alpha_i$ et si $x \in M$ alors on a

$$< \theta(P,P)x,x > = \sum_{i,j=o}^{n} < S_{i+j}\, \alpha_i^* x,\ \alpha_j^* x >.$$

Avec cette égalité et l'hypothèse que $(S_k)_k$ est de type défini positif, on obtient (a).

θ-orthogonalisation. - On pose $v_o(t) = I$ et pour $n \geq 1$ $v_n(t) = t^n I$. On va orthogonaliser la suite v_n par rapport à θ. On pose $R_o(t) = I$ et pour n entier ≥ 1 :

$$R_n(t) = v_n(t) - \sum_{k=o}^{n-1} \theta(v_n,R_k)\theta(R_k,R_k)^{-1}R_k(t).$$

Puisque R_o est pseudo-inversible on peut définir R_1 par cette formule. Supposons que R_k est pseudo-inversible pour k=0,...,n-1, on peut alors définir R_n par cette formule, or $d°R_k = k$, donc d'après (2.1.3) (b) le polynôme R_n est pseudo-inversible. Ce qui montre que R_n est pseudo-inversible pour tout entier n.

(2.1.4) PROPOSITION. - *On a les propriétés suivantes :*

(a) Si $P \in \mathscr{P}$, $d°P = n$, *alors il existe* $\alpha_o,\dots,\alpha_n$ *éléments de* $\mathscr{M}$ *tels que :*

$$P(t) = \sum_{i=o}^{n} \alpha_i R_i(t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

(b) $\theta(R_n,R_k) = 0$ *si* $n \neq k$ $(n,k \in \mathbb{N})$.

(c) $\theta(P,R_n) = 0$ *si* $d°P \leqslant n-1$, $P \in \mathscr{P}$.

De plus (b) et (c) sont équivalentes.

Preuve. - D'après la définition des R_n, la propriété (a) est évidente. On a $\theta(R_1,R_o) = \theta(v_1,R_o) - \theta(v_1,R_o)\theta(R_o,R_o)^{-1}\theta(R_o,R_o) = 0$.

Supposons qu'on a $\theta(R_i,R_j) = 0$ si $0 \leqslant i, j \leqslant n-1$, $i \neq j$.

Soit k avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on a :

$$\theta(R_n,R_k) = \theta(v_n,R_k) - \sum_{i=o}^{n-1} \theta(v_n,R_i)\theta(R_i,R_i)^{-1}\theta(R_i,R_k)$$

$$= \theta(v_n,R_k) - \theta(v_n,R_k)\theta(R_k,R_k)^{-1}\theta(R_k,R_k) = 0.$$

Donc $\theta(R_n,R_k) = 0$ si $n \neq k$.

On a (b) équivalente à (c) car :

(c) $\Rightarrow$ (b) évident.

(b) $\Rightarrow$ (c) Soit $P \in \mathscr{P}_{n-1}$, d'après (a) on a $P = \sum_{i=o}^{n-1} \alpha_i R_i$ d'où

$$\theta(P,R_n) = \sum_{i=o}^{n-1} \alpha_i \, \theta(R_i,R_n) = 0. \quad \square$$

On pose $P_o(t) = I$ et pour $n \geqslant 1$: $P_n = \theta(R_n,R_n)^{-\frac{1}{2}} R_n$.

On obtient $\theta(P_n,P_k) = \theta(R_n,R_n)^{-\frac{1}{2}}\theta(R_n,R_k)\theta(R_k,R_k)^{-\frac{1}{2}}$. D'où

$$\theta(P_n,P_k) = \delta_{nk} I.$$

On remarque que le coefficient de t^n dans $P_n(t)$ est égal à $\theta(R_n,R_n)^{-\frac{1}{2}}$, donc il est positif et inversible.

<u>Relation de récurrence entre les P_n</u>. - Le polynôme $tP_n(t)$ est de degré n+1, d'où d'après la proposition (2.1.4) et la définition des P_k, il existe $\alpha_o,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}$ éléments de $\mathscr{M}$, tel que :

$tP_n(t) = \sum_{i=o}^{n+1} \alpha_i P_i(t)$. On a $\alpha_i = \theta(tP_n,P_i)$.

Par la proposition (2.1.1) (e) et la proposition (2.1.4) (c) on a :

$$\theta(tP_n,P_i) = \theta(P_n,tP_i) = 0 \quad \text{si } i+1 < n-1,$$

donc $\alpha_i = 0$ si $i < n-2$, ce qui donne :

$$tP_n(t) = \alpha_{n-1}P_{n-1}(t) + \alpha_n P_n(t) + \alpha_{n+1}P_{n+1}(t)$$

On pose pour chaque entier n :

$$a_n = \theta(tP_n,P_n) \quad \text{et} \quad b_n = \theta(tP_n,P_{n+1}).$$

On a $\alpha_{n-1} = \theta(tP_n,P_{n-1}) = \theta(P_n,tP_{n-1}) = \theta(tP_{n-1},P_n)^* = b^*_{n-1}$.

Donc on obtient, pour chaque entier n, la relation :

$$tP_n(t) = b^*_{n-1}\, P_{n-1}(t) + a_n P_n(t) + b_n\, P_{n+1}(t).$$

On a $a^*_n = a_n$ et b_n inversible pour tout entier n :

En effet, $a^*_n = (tP_n,P_n)^* = \theta(P_n,tP_n) = \theta(tP_n,P_n) = a_n$.

Puisque $d°(R_{n+1}(t) - tR_n(t)) < n$, on a d'après la proposition (2.1.4)(c) : $\theta(R_{n+1} - tR_n, R_{n+1}) = 0$, d'où $\theta(tR_n,R_{n+1}) = \theta(R_{n+1},R_{n+1})$.

$$b_n = \theta(tP_n,P_{n+1}) = \theta(R_n,R_n)^{-\frac{1}{2}}\,\theta(tR_n,R_{n+1})\theta(R_{n+1},R_{n+1})^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \theta(R_n,R_n)^{-\frac{1}{2}}\,\theta(R_{n+1},R_{n+1})^{\frac{1}{2}}.$$

Donc $b_n = \theta(R_n,R_n)^{-\frac{1}{2}}\,\theta(R_{n+1},R_{n+1})^{\frac{1}{2}}$ qui est inversible.

On a prouvé le résultat suivant :

(2.1.5) <u>PROPOSITION</u>. - *Pour chaque entier* n, *on a avec* $b_{-1} = 0$ *:*

$$tP_n(t) = b^*_{n-1}P_{n-1}(t) + a_n P_n(t) + b_n P_{n+1}(t)$$

où $a_n = \theta(tP_n,P_n)$ *et* $b_n = \theta(tP_n,P_{n+1})$.

On a $a^*_n = a_n$ *et* b_n *inversible.*

On a ainsi associé à la suite $(P_n)_n$ une matrice bloc de Jacobi $(A_{i,j})_{i,j}$ où $A_{i,j} = 0$ si $|i-j| > 1$, $A_{i,i} = a_i$, $A_{i,i+1} = b_i$ et

$$A_{i+1,i} = b_i^* \qquad i,j \text{ entiers.}$$

Remarque 1. - Si on a $S_n S_k = S_k S_n$ pour chaque k, n entiers, alors les R_n commutent entre eux, les $\theta(R_n,R_n)$ commutent entre eux et avec les R_n. Or $b_n = \theta(R_n,R_n)^{-1/2}\,\theta(R_{n+1},R_{n+1})^{1/2}$, donc dans ce cas, b_n est un opérateur positif. Ce qui généralise le cas m=1 où les a_n sont réels et b_n positifs.

Remarque 2. - Le coefficients de t^n dans $P_n(t)$ est égal à $(b_o b_1 \dots b_{n-1})^{-1}$. En effet, on a $b_k = \theta(R_k,R_k)^{-1/2}\,\theta(R_{k+1},R_{k+1})^{1/2}$ pour tout k. Donc

$$\begin{aligned}\theta(R_n,R_n)^{-\frac{1}{2}} &= b_{n-1}^{-1}\,\theta(R_{n-1},R_{n-1})^{-\frac{1}{2}} \\ &= b_{n-1}^{-1}\,b_{n-2}^{-1}\,\theta(R_{n-2},R_{n-2})^{-\frac{1}{2}} \\ &= b_{n-1}^{-1}\,b_{n-2}^{-1}\dots b_1^{-1}\,b_o^{-1}\end{aligned}$$

car $\theta(R_o,R_o) = I$.

<u>Les polynômes Q_n et E_n^λ</u>. - Avant de définir les polynômes Q_n, on donne ce lemme.

(2.1.6) <u>LEMME</u>. - *Si* $P \in \mathscr{P}$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$, *alors il existe* $S \in \mathscr{P}$ *tel que :*
$P(t) = (t-\lambda)S(t) + P(\lambda)$.
En particulier si $P(\lambda) = 0$, *alors* $P(t) = (t-\lambda)S(t)$.

Preuve. - On pose $P(t) = \sum_{k=o}^{n} t^k \alpha_k$ on a

$$P(t) - P(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} (t^k-\lambda^k)\alpha_k = (t-\lambda)\sum_{k=1}^{n} (t^{k-1}+t^{k-2}\lambda+\dots+\lambda^{k-1})\alpha_k .$$

Avec $S(t) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=o}^{k-1} t^i\,\lambda^{k-1-i}\,\alpha_k$ on obtient le résultat. □

D'après ce lemme, si $P \in \mathscr{P}$, d°P = n, alors $\dfrac{P(t)-P(\lambda)}{t-\lambda}$ est un polynôme de degré n-1.

(2.1.7) DEFINITION. - *Pour* n *entier on pose :*

$$Q_n(\lambda) = \theta\left(\frac{P_n(t)-P_n(\lambda)}{t-\lambda}, I\right)_t .$$

(2.1.8) PROPOSITION. - *La suite* $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *vérifie la relation de récurrence, pour* $n \geqslant 1$ *:*

$$tQ_n(t) = b^*_{n-1}\, Q_{n-1}(t) + a_n Q_n(t) + b_n\, Q_{n+1}(t)$$

et on a : $\quad Q_o(t) = 0, \quad Q_1(t) = b_o^{-1}.$

Preuve. - On a $\lambda Q_n(\lambda) = \lambda\theta\left(\frac{P_n(t)-P_n(\lambda)}{t-\lambda}, I\right) = \theta\left(\frac{\lambda P_n(t)-\lambda P_n(\lambda)}{t-\lambda}, I\right)$

Or d'après la proposition (2.1.5) on a :

$$\begin{aligned}\frac{\lambda P_n(t)-\lambda P_n(\lambda)}{t-\lambda} &= \frac{tP_n(t)-\lambda P_n(\lambda)}{t-\lambda} - P_n(t)\\ &= b^*_{n-1}\frac{P_{n-1}(t)-P_{n-1}(\lambda)}{t-\lambda} + a_n \frac{P_n(t)-P_n(\lambda)}{t-\lambda} + \\ &\quad + b_n \frac{P_{n+1}(t)-P_{n+1}(\lambda)}{t-\lambda} - P_n(t).\end{aligned}$$

Donc $\lambda Q_n(\lambda) = b^*_{n-1}\, Q_{n-1}(\lambda) + a_n Q_n(\lambda) + b_n Q_{n+1}(\lambda) - \theta(P_n, I).$

Mais $\theta(P_n, I) = \theta(P_n, P_o) = 0$ si $n \geqslant 1$, d'où le résultat.

On a $Q_o(\lambda) = 0$ car $P_o(\lambda) = I.$

On a $Q_1(\lambda) = b_o^{-1}$ car $P_1(\lambda) = b_o^{-1}(\lambda I - a_o)$. □

(2.1.9) DEFINITION. - *Pour* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$, *on pose :*

$$E_n^\lambda(t) = \sum_{k=o}^{n} P_k(\lambda)^* P_k(t).$$

(2.1.10) PROPOSITION. - *On a les propriétés suivantes :*

(a) Pour tout $S \in \mathcal{P}_n$, $\theta(S, E_n^\lambda) = S(\lambda)$.

(b) La propriété (a) caractérise complètement E_n^λ *dans* $\mathcal{P}_n$.

(c) Le polynôme E_n^λ *est pseudo-inversible.*

Preuve. (a) Soit $S \in \mathcal{P}_n$ on pose $S = \sum_{k=o}^{n} a_k P_k$ on a :

$$\theta(S,E_n^\lambda) = \theta(\sum_{k=o}^{n} a_k P_k, \sum_{i=o}^{n} P_i(\lambda)^* P_i)$$

$$= \sum_{k,i=o}^{n} a_k \; \theta(P_k,P_i)P_i(\lambda) = \sum_{k=o}^{n} a_k P_k(\lambda) = S(\lambda).$$

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et soit $Q \in \mathscr{P}_n$ tels que $\theta(S,Q) = S(\lambda)$ pour chaque $S \in \mathscr{P}_n$, alors on a :

$$Q(t) = \sum_{k=o}^{n} \theta(Q,P_k)P_k(t) = \sum_{k=o}^{n} \theta(P_k,Q)^* P_k(t)$$

$$= \sum_{k=o}^{n} P_k(\lambda)^* \; P_k(t) = E_n^\lambda(t).$$

(c) Si $x \in \mathbb{C}^m$ est telle que $\theta(E_n^\lambda,E_n^\lambda)x = 0$ alors

$$0 = \langle \theta(E_n^\lambda,E_n^\lambda)x,x \rangle = \sum_{k=o}^{n} \|P_k(\lambda)x\|^2, \text{ d'où}$$

$$P_k(\lambda)x = 0 \qquad k=0,\dots,n, \text{ mais } P_o(\lambda) = I \qquad \text{donc } x=0. \quad \square$$

Dans la suite, on aura besoin de certaines relations entre P_n et P_{n+1}, puis entre les $(P_n)_n$ et les $(Q_n)_n$. Tout d'abord on donne la formule dite de Darboux-Christoffel.

(2.1.11) <u>PROPOSITION</u>. - *Pour* n *entier et* $\lambda,\lambda_o \in \mathbb{C}$, *on a :*

$$P_n(\lambda_o)^* b_n P_{n+1}(\lambda) - P_{n+1}(\lambda_o)^* b_n^* P_n(\lambda) = (\lambda-\overline{\lambda}_o) \sum_{k=o}^{n} P_k(\lambda_o)^* P_k(\lambda).$$

En particulier si $\lambda = \lambda_o \in \mathbb{R}$, *alors on obtient :*

$$P_n(\lambda_o)^* b_n P_{n+1}(\lambda_o) - P_{n+1}(\lambda_o)^* b_n^* \; P_n(\lambda_o) = 0.$$

Preuve. - Pour n=0, c'est vrai puisque $P_1(t) = b_o^{-1}(tI - a_o)$. Supposons que c'est vrai pour n-1, d'après la proposition (2.1.5), on a :

$$P_n(\lambda_o)^* b_n P_{n+1}(\lambda) - P_{n+1}(\lambda_o)^* b_n^* P_n(\lambda) =$$

$$P_n(\lambda_o)^*((\lambda I-a_n)P_n(\lambda) - b_{n-1}^* P_{n-1}(\lambda))$$

$$- ((\lambda_o I-a_n)P_n(\lambda_o) - b_{n-1}^* P_{n-1}(\lambda_o))^* P_n(\lambda)$$

$$= (\lambda-\overline{\lambda}_o)P_n(\lambda_o)^*P_n(\lambda) + P_{n-1}(\lambda_o)^*b_{n-1}P_n(\lambda) - P_n(\lambda_o)^*b_{n-1}^*P_{n-1}(\lambda)$$

$$= (\lambda-\overline{\lambda}_o)P_n(\lambda_o)^*P_n(\lambda) + (\lambda-\overline{\lambda}_o)\sum_{k=o}^{n-1} P_k(\lambda_o)^*P_k(\lambda)$$

$$= (\lambda-\overline{\lambda}_o)\sum_{k=o}^{n} P_k(\lambda_o)^*P_k(\lambda). \qquad \square$$

(2.1.12) PROPOSITION. - *Pour* n *entier et* $\lambda,\lambda_o \in \mathbb{C}$, *on a :*

$$P_n(\lambda_o)^*b_nQ_{n+1}(\lambda) - P_{n+1}(\lambda_o)^*b_n^*Q_n(\lambda) = I + (\lambda-\overline{\lambda}_o)\sum_{k=o}^{n} P_k(\lambda_o)^*Q_k(\lambda).$$

En particulier si $\lambda = \lambda_o \in \mathbb{R}$ *alors on obtient :*

$$P_n(\lambda_o)^*b_nQ_{n+1}(\lambda_o) - P_{n+1}(\lambda_o)^*b_n^*Q_n(\lambda_o) = I.$$

Preuve. - Pour n=0 c'est vrai puisque $Q_1(\lambda) = b_o^{-1}$ et $Q_o(\lambda) = 0$.
Supposons que c'est vrai pour n-1.
D'après les propositions (2.1.8) et (2.1.5) on obtient :

$$P_n(\lambda_o)^*b_nQ_{n+1}(\lambda) - P_{n+1}(\lambda_o)^*b_n^*Q_n(\lambda) =$$

$$P_n(\lambda_o)^*((\lambda I-a_n)Q_n(\lambda) - b_{n-1}^*Q_{n-1}(\lambda))$$

$$- ((\lambda_o I - a_n)P_n(\lambda_o) - b_{n-1}^*P_{n-1}(\lambda_o))^*Q_n(\lambda)$$

$$= (\lambda-\overline{\lambda}_o)P_n(\lambda_o)^*Q_n(\lambda) + P_{n-1}(\lambda_o)^*b_{n-1}Q_n(\lambda) - P_n(\lambda_o)^*b_{n-1}^*Q_{n-1}(\lambda)$$

$$= (\lambda-\overline{\lambda}_o)P_n(\lambda_o)^*Q_n(\lambda) + I + (\lambda-\overline{\lambda}_o)\sum_{k=o}^{n-1} P_k(\lambda_o)^*Q_k(\lambda)$$

$$= (\lambda-\overline{\lambda}_o)\sum_{k=o}^{n} P_k(\lambda_o)^*Q_k(\lambda) + I. \qquad \square$$

On a défini la fonction θ à l'aide de la suite fixée $(S_k)_k$ mais on peut la définir aussi à partir d'une solution quelconque du problème associé à cette suite $(S_k)_k$. On a le résultat :

(2.1.13) LEMME. - *On a :*

(a) Si $\mu(.)$ *est une solution du problème alors*

$$\theta(P,R) = \int P(t)d\mu(t)R(t)^* \quad \textit{pour } P,R \in \mathscr{P}.$$

(b) Pour $P,R \in \mathscr{P}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *on a :*

$$\theta\left(\frac{P(t)-P(\lambda)}{t-\lambda}, R(t)-R(\lambda)\right) = \theta\left(P(t)-P(\lambda), \frac{R(t)-R(\lambda)}{t-\lambda}\right).$$

Preuve. (a) Soit $\mu(.)$ une solution du problème, on a :

$$S_k = \int t^k d\mu(t) \quad \text{pour tout entier } k.$$

Si $P,R \in \mathscr{P}$, on pose $P(t) = \sum_{k=o}^{n} t^k \alpha_k$ et $R(t) = \sum_{j=o}^{N} t^j \beta_j$, alors

$$\theta(P,R) = \sum_{k=o}^{n} \sum_{j=o}^{N} \alpha_k S_{k+j} \beta_j^* = \sum_k \sum_j \alpha_k \int t^{k+j} d\mu(t)\beta_j^*$$

$$= \int \sum_{k=o}^{n} \alpha_k t^k d\mu(t) \sum_{j=o}^{N} t^j \beta_j^* = \int P(t)d\mu(t)R(t)^*.$$

(b) Si $P,R \in \mathscr{P}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, avec (a) on obtient :

$$\theta\left(P(t)-P(\lambda), \frac{R(t)-R(\lambda)}{t-\lambda}\right) = \int (P(t)-P(\lambda))d\mu(t)\left(\frac{R(t)-R(\lambda)}{t-\lambda}\right)^*$$

$$= \theta\left(\frac{P(t)-P(\lambda)}{t-\lambda}, R(t)-R(\lambda)\right). \quad \square$$

La propriété (b) du lemme précédent va être utile dans la preuve du résultat suivant.

(2.1.14) <u>PROPOSITION</u>. - *Pour* n *entier et* λ *réel on a :*

(a) La matrice $P_n(\lambda)Q_n(\lambda)^*$ *est hermitienne.*

(b) $Q_{n+1}(\lambda)P_n(\lambda)^* - P_{n+1}(\lambda)Q_n(\lambda)^* = b_n^{-1}$.

Preuve. (a) Avec le lemme (2.1.13) on obtient :

$$P_n(\lambda)Q_n(\lambda)^* = P_n(\lambda)\theta\left(I, \frac{P_n(t)-P_n(\lambda)}{t-\lambda}\right)_t = \theta\left(P_n(\lambda), \frac{P_n(t)-P_n(\lambda)}{t-\lambda}\right)_t$$

$$= -\,\theta\left(P_n(t) - P_n(\lambda), \frac{P_n(t)-P_n(\lambda)}{t-\lambda}\right)_t$$

$$= -\theta\left(\frac{P_n(t)-P_n(\lambda)}{t-\lambda}, P_n(t)-P_n(\lambda)\right)_t$$

$$= -\theta\left(\frac{P_n(t)-P_n(\lambda)}{t-\lambda}, P_n(t)-P_n(\lambda)\right)_t$$

$$= \theta\left(\frac{P_n(t)-P_n(\lambda)}{t-\lambda}, P_n(\lambda)\right)_t = Q_n(\lambda)P_n(\lambda)^* \qquad \text{car}$$

$$\theta\left(P_n(t), \frac{P_n(t)-P_n(\lambda)}{t-\lambda}\right)_t = 0.$$

(b) Par récurrence sur n : pour n=0 on a

$$Q_1(\lambda)P_o(\lambda)^* - P_1(\lambda)Q_o(\lambda)^* = Q_1(\lambda) = b_o^{-1}.$$

Supposons que c'est vrai pour n-1. Par la propriété (a) et les propositions (2.1.5) et (2.1.8) on obtient :

$$Q_{n+1}(\lambda)P_n(\lambda)^* - P_{n+1}(\lambda)Q_n(\lambda)^* = b_n^{-1}((\lambda I-a_n)Q_n(\lambda)-b_{n-1}^*Q_{n-1}(\lambda))P_n(\lambda)^*$$
$$- b_n^{-1}((\lambda I-a_n)P_n(\lambda)-b_{n-1}^*P_{n-1}(\lambda))Q_n(\lambda)^*$$

$$= b_n^{-1}(\lambda I-a_n)(Q_n(\lambda)P_n(\lambda)^* - P_n(\lambda)Q_n(\lambda)^*)$$
$$-b_n^{-1}\, b_{n-1}^*(Q_{n-1}(\lambda)P_n(\lambda)^* - P_{n-1}(\lambda)Q_n(\lambda)^*)$$

$$= b_n^{-1}b_{n-1}^*(Q_n(\lambda)P_{n-1}(\lambda)^* - P_n(\lambda)Q_{n-1}(\lambda)^*)^* = b_n^{-1}b_{n-1}^*(b_{n-1}^{-1})^* = b_n^{-1}. \ \square$$

2.2. LES λ-MATRICES SIMPLES.

(2.2.1) DEFINITION. - *Soit* $R \in \mathscr{P}$ *avec*

$R(t) = \alpha_o t^n + \alpha_1 t^{n-1} + \ldots + \alpha_n$.

On dit que R *est régulier si* $\det \alpha_o \neq 0$.

On dit que R *est une* λ*-matrice simple si* R *est régulier et si on a la propriété suivante :*

Si λ_1 *est un zéro quelconque de* $\det R(t) = 0$, *de multiplicité* r, *alors le rang de la matrice* $R(\lambda_1)$ *est égal à* m-r.

Soit $R \in \mathscr{P}$, $d°R = n$, $R(t) = \alpha_o t^n + \alpha_1 t^{n-1} + \ldots + \alpha_n$.

On remarque que det $R(t)$ est un polynôme à coefficients complexes de degré au plus égal à nm, on peut avoir det $R(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{C}$. Mais si le polynôme R est régulier alors det $R(t)$ est un polynôme de degré nm, puisque le coefficient de t^{nm} dans det $R(t)$ est égal à det $\alpha_o \neq 0$.

Si $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ désignent les zéros de det $R(t) = 0$, de multiplicité respectivement égale à $r_1,\dots,r_p$, alors on a :

$$\Delta(t) = \det R(t) = \det \alpha_o . \prod_{i=1}^{p} (t-\lambda_i)^{r_i}.$$

Soit $B(t)$ la matrice des cofacteurs de la matrice $R(t)$.

On a $B \in \mathscr{P}$ et $R(t).B(t) = B(t).R(t) = \Delta(t).I.$

Donc pour $t \neq \lambda_i$, $i=1,\dots,p$ on a

$$R(t)^{-1} = \frac{1}{\det \alpha_o . \prod_{i=1}^{p} (t-\lambda_i)^{r_i}} B(t).$$

On remarque que la fonction $t \to R(t)^{-1}$ est analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_1,\dots,\lambda_p\}$. Pour chaque $i=1,\dots,p$, il y a un développement de Laurent au voisinage de λ_i :

$$R(t)^{-1} = \sum_{i=1}^{\ell} (t-\lambda_i)^{-q} \beta_q + S(t) \qquad \beta_q \in \mathscr{M}$$

On a $\ell < r_i$. Si $\beta_\ell \neq 0$ alors on dit que λ_i est un pôle de $R(t)^{-1}$ d'ordre ℓ. Si $\ell=1$ alors λ_i est dit pôle simple de $R(t)^{-1}$.

On remarque si R est une λ-matrice simple alors det $R(t) = 0$ possède au moins n zéros distincts. On va maintenant caractériser les λ-matrices par les pôles.

(2.2.2) PROPOSITION. - *Soit* $R \in \mathscr{P}$ *régulier. Si les pôles de* $R(t)^{-1}$ *sont simples alors* R *est une* λ*-matrice simple.*

Preuve. - Puisque R est régulier, on applique le théorème 3.1. de LANCASTER ([5], p. 45), et on utilise les calculs qui sont faits après ce théorème (p. 45 et p. 46), on obtient :

Il existe $D,F \in \mathscr{P}$ avec $\det D(\lambda) \neq 0$, indépendant de λ, et $\det F(\lambda) \neq 0$, indépendant de λ, telles que si $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ désignent les zéros de $\det R(\lambda) = 0$, alors on a :

$$D(\lambda)R(\lambda)F(\lambda) = \begin{bmatrix} d_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2(\lambda) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & dm(\lambda) \end{bmatrix} = S(\lambda), \text{ où}$$

$d_i(\lambda) = \prod_{j=1}^{p} (\lambda-\lambda_j)^{r_{i,j}}$ avec $r_{i,j} \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{p} r_{i,j} = 1$ et

$0 \leqslant r_{1,j} \leqslant r_{2,j} \leqslant \ldots \leqslant r_{m,j}$ pour chaque $j = 1,\ldots,p$.

On a $D(\lambda)R(\lambda)F(\lambda) = S(\lambda)$, donc $S(\lambda)^{-1} = F(\lambda)^{-1}R(\lambda)^{-1}D(\lambda)^{-1}$.

On note par $e_1,\ldots,e_m$ la base canonique de $\mathbb{C}^m$, on a :

$$dm(\lambda)^{-1} = < S(\lambda)^{-1}e_m, e_m > = < F(\lambda)^{-1}R(\lambda)^{-1}D(\lambda)^{-1}e_m, e_m >$$

Mais puisque $\det F(\lambda)$ (respectivement $\det D(\lambda)$) est non nul et est indépendant de λ, on a $\lambda \to F(\lambda)^{-1}$ (respectivement $\lambda \to D(\lambda)^{-1}$) est analytique sur $\mathbb{C}$. Par suite puisque λ_j est un pôle simple de $R(\lambda)^{-1}$ alors λ_j est un pôle simple de $dm(\lambda)^{-1}$ donc $r_{m,j} = 1$, pour chaque $j=1,\ldots,m$. Or par le corollaire 1 de ([5], p. 46) on a : le polynôme R est une λ-matrice simple si et seulement si $r_{m,j} = 1$, $j=1,\ldots,m$. Ce qui prouve que R est bien une λ-matrice simple. □

<u>Etude de $P_{n+1} + HP_n$</u>, où $H \in \mathscr{M}$ telle que b_nH soit hermitienne.

Dans le cas $m=1$, il y a un résultat de M. Riesz (voir par exemple AKHIEZER [1] , théorème (1.2.2)) qui assure que pour tout h réel le polynôme $P_{n+1} + hP_n$ a toutes ses racines réelles et simples. Pour $m > 1$, ce résultat se généralise pour les pôles de $(P_{n+1} + HP_n)^{-1}$ avec H telle que la matrice b_nH soit hermitienne. Avant de donner ce résultat on étudie $\det(P_{n+1} + HP_n)$.

(2.2.3) PROPOSITION. - *Soient* n *entier et* $H \in \mathcal{M}$ *telle que* $b_n H$ *soit hermitienne. On pose* $\Delta(\lambda) = \det(P_{n+1}(\lambda) + HP_n(\lambda))$.
Les racines de l'équation $\Delta(\lambda) = 0$ *sont réelles.*
En particulier les racines de $\det P_n(\lambda) = 0$ *sont réelles.*

Preuve. - On note par J_H la matrice de Jacobi d'ordre n associée à $(P_k)_k$, perturbé par $b_n H$, c'est-à-dire :

$$J_H = \begin{bmatrix} a_o & b_o & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ b_o^* & a_1 & b_1 & & \vdots \\ 0 & & & b_{n-2} & 0 \\ \vdots & & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & b_{n-1}^* & a_n - b_n H \end{bmatrix}$$

En utilisant la proposition (2.1.5) on obtient pour $y \in \mathbb{C}^m$ et $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$J_H \begin{bmatrix} P_o(\lambda)y \\ P_1(\lambda)y \\ \vdots \\ P_n(\lambda)y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda P_o(\lambda)y \\ \vdots \\ \lambda P_{n-1}(\lambda)y \\ \lambda P_n(\lambda)y - b_n(P_{n+1}(\lambda)+H\, P_n(\lambda))y \end{bmatrix}$$

Maintenant soit $\lambda_o \in \mathbb{C}$ tel que $\Delta(\lambda_o) = 0$, alors il existe $x \in \mathbb{C}^m$, $x \neq 0$, tel que $(P_{n+1}(\lambda_o) + H\, P_n(\lambda_o))x = 0$.

D'où on obtient $J_H \omega = \lambda_o \omega$ si on pose $\omega = \begin{bmatrix} P_o(\lambda_o)x \\ \vdots \\ P_n(\lambda_o)x \end{bmatrix}$

On a $\omega \neq 0$ car $P_o(\lambda_o)x = x \neq 0$, donc λ_o est une valeur propre de J_H qui est hermitienne d'après la condition sur H. Donc λ_o est réel. □

Remarque. - Si $A \in \mathcal{M}$, on pose $\mathrm{Im}\, A = \frac{1}{2i}(A-A^*)$. On a les deux propriétés évidentes suivantes :

(a) $B(\mathrm{Im}\ A)B^* = \mathrm{Im}(BAB^*)$ pour $A,B \in \mathcal{M}$

(b) Si $A_1 \geqslant A_2$ avec $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$, alors $BA_1B^* \geqslant BA_2B^*$ pour chaque $B \in \mathcal{M}$.

(2.2.4) PROPOSITION. - *Soit* n *entier, si* $H \in \mathcal{M}$ *est telle que* b_nH *est hermitienne, alors :*
les pôles de $(P_{n+1}(\lambda) + H\ P_n(\lambda))^{-1}$ *sont réels et simples.*

Preuve. - Avec le fait que b_nH est hermitienne, et la formule de Darboux-Christoffel (proposition (2.1.11)) on obtient :

$$(P_{n+1}(\lambda) + HP_n(\lambda))^* b_n^* P_n(\lambda) - P_n(\lambda)^* b_n (P_{n+1}(\lambda) + HP_n(\lambda))$$

$$= P_{n+1}(\lambda)^* b_n^* P_n(\lambda) - P_n(\lambda)^* b_n P_{n+1}(\lambda) = -2i(\mathrm{Im}\ \lambda)E_n^\lambda(\lambda).$$

On pose $K(\lambda) = P_{n+1}(\lambda) + HP_n(\lambda)$, et pour les λ tels que $\det K(\lambda) \neq 0$ on pose $\phi(\lambda) = K(\lambda)^{-1}$.

Avec ces notations on a :

$$K(\lambda)^* b_n^* P_n(\lambda) - P_n(\lambda)^* b_n K(\lambda) = -2i(\mathrm{Im}\ \lambda)E_n^\lambda(\lambda), \text{ d'où}$$

$$\mathrm{Im}(P_n(\lambda)^* b_n K(\lambda)) = (\mathrm{Im}\ \lambda)E_n^\lambda(\lambda).$$

Maintenant soit λ_o un pôle de $K(\lambda)^{-1}$, d'après la proposition (2.2.3) λ_o est réel. On pose $\lambda = \lambda_o + i\beta$ avec $\beta > 0$.

Puisque $E_n^\lambda(\lambda) \geqslant I$ on obtient :

$$\mathrm{Im}(P_n(\lambda)^* b_n K(\lambda)) \geqslant \beta I \quad \text{d'où}$$

$$\phi(\lambda)^*\ \mathrm{Im}(P_n(\lambda)^* b_n K(\lambda))\phi(\lambda) \geqslant \beta\ \phi(\lambda)^*\phi(\lambda) \quad \text{donc}$$

$$\mathrm{Im}(\phi(\lambda)^* P_n(\lambda)^* b_n) \geqslant \beta\ \phi(\lambda)^*\phi(\lambda).$$

On remarque maintenant que pour tout opérateur B on a $\|B\|^2 = \|B^*B\|$. Donc par majoration on obtient :
$\beta\|\phi(\lambda)\|^2 = \beta\|\phi(\lambda)^*\phi(\lambda)\| \leqslant \|\phi(\lambda)^*\|.\|P_n(\lambda)\|c$, où c est une constante positive. D'où :

$$\|\phi(\lambda)\| \leq \frac{c}{\beta} \|P_n(\lambda)\| \quad \text{ou encore}$$

$$\|\phi(\lambda_o+i\beta)\| \leq \frac{c}{\beta} \|P_n(\lambda_o+i\beta)\|$$

Soit $\phi(t) = R(t) + \sum_{p=1}^{N} (t-\lambda_o)^{-p} \omega_p$ le développement de Laurent au voisinage de λ_o. Pour tout $x,y \in M$ on obtient :

$$\left| < R(\lambda_o+i\beta)x,y > + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{\beta^p} < \omega_p x,y > \right| \leq \frac{c}{\beta} \|P_n(\lambda_o+i\beta)\| . \|x\| . \|y\| .$$

Donc nécessairement $N=1$, ce qui prouve que λ_o est un pôle simple de $K(t)^{-1}$. □

<u>Racine commune de $\det P_n(\lambda) = 0$ et $\det P_{n+1}(\lambda) = 0$.</u>

Dans le cas scalaire $m=1$, les polynômes $P_n(\lambda)$ et $P_{n+1}(\lambda)$ n'ont pas de racines en commun (voir AKHIEZER [1], théorème (1.2.2)). Pour $m > 1$, ce n'est pas nécessairement vrai que les polynômes $\det P_n(\lambda)$ et $\det P_{n+1}(\lambda)$ n'ont pas de racines en commun, mais on a le résultat suivant :

(2.2.5) <u>PROPOSITION.</u> - *Pour* n *entier, on a :*

(a) Si λ_o *est réel alors on a :*

$$P_n(\lambda_o)^* b_n P'_{n+1}(\lambda_o) - P_{n+1}(\lambda_o)^* b_n^* P'_n(\lambda_o) = E_n^{\lambda_o}(\lambda_o).$$

(b) Pour chaque $x \in M$ *fixé,* $x \neq 0$, *les polynômes* $P_n(\lambda)x$ *et* $P_{n+1}(\lambda)x$ *n'ont pas de racines en commun.*

Preuve. (a) D'après la proposition (2.1.11) et puisque λ_o est réel, on obtient :

$$E_n^{\lambda_o}(\lambda) = P_n(\lambda_o)^* b_n \frac{P_{n+1}(\lambda)-P_{n+1}(\lambda)}{\lambda-\lambda_o} - P_{n+1}(\lambda_o)^* b_n^* \frac{P_n(\lambda)-P_n(\lambda_o)}{\lambda-\lambda_o} .$$

Donc :

$$E_n^{\lambda_o}(\lambda_o) = P_n(\lambda_o)^* b_n P'_{n+1}(\lambda_o) - P_{n+1}(\lambda_o)^* b_n^* P'_n(\lambda_o).$$

(b) Soit $x \in M$, $x \neq 0$, fixé.

Soit λ_o un zéro de $P_n(\lambda)x$ et de $P_{n+1}(\lambda)x$, on a alors $\det P_n(\lambda_o) = 0$, d'où d'après la proposition (2.2.3) λ_o est réel. De (a) et puisque $E_n^{\lambda_o}(\lambda_o) \geqslant I$ on tire l'inégalité :

$$P_n(\lambda_o)^* b_n P'_{n+1}(\lambda_o) - P_{n+1}(\lambda_o)^* b_n^* P'_n(\lambda_o) \geqslant I.$$

D'où $\|x\|^2 \leqslant \langle b_n P'_{n+1}(\lambda_o), P_n(\lambda_o)x \rangle - \langle b_n^* P'_n(\lambda_o)x, P_{n+1}(\lambda_o)x \rangle = 0$.

Donc $x=0$, ce qui est absurde. □

Conséquence. - On tire de l'étude de $P_{n+1} + HP_n$, un résultat important, pour $E_n^{\lambda_o}$:

(2.2.6) THEOREME. - *Soient* n *entier et* λ_o *réel tels que* $\det P_n(\lambda_o) \neq 0$, *alors*

(a) Les pôles de $E_n^{\lambda_o}(\lambda)^{-1}$ *sont réels et simples.*

(b) La matrice $E_n^{\lambda_o}(\lambda)$ *est une* λ*-matrice simple.*

Preuve. (a) Soit $H = - b_n^{-1} P_n(\lambda_o)^{*-1} P_{n+1}(\lambda_o)^* b_n^*$.

On a $b_n H = - P_n(\lambda_o)^{*\,-1} P_{n+1}(\lambda_o)^* b_n^*$.

Or par la proposition (2.1.11) et puisque λ_o est réel, on a :

$$P_{n+1}(\lambda_o)^* b_n^* P_n(\lambda_o) = P_n(\lambda_o)^* b_n P_{n+1}(\lambda_o). \text{ Donc}$$

$$P_n(\lambda_o)^{*\,-1} P_{n+1}(\lambda_o)^* b_n^* = b_n P_{n+1}(\lambda_o) P_n(\lambda_o)^{-1} = (P_n(\lambda_o)^{*\,-1} P_{n+1}(\lambda_o)^* b_n^*)^*$$

ce qui prouve que $b_n H$ est hermitienne.

Maintenant par la proposition (2.1.11) on a :

$$(\lambda-\lambda_o) E_n^{\lambda_o}(\lambda) = P_n(\lambda_o)^* b_n (P_{n+1}(\lambda) + HP_n(\lambda)).$$

Comme $\det P_n(\lambda_o) \neq 0$, et les pôles de $(P_{n+1}(\lambda) + HP_n(\lambda))^{-1}$ sont réels et simples par la proposition (2.2.4) ; on tire que les pôles de $E_n^{\lambda_o}(\lambda)^{-1}$ sont réels et simples.

(b) On a $E_n^{\lambda_o}(\lambda) = \sum_{k=o}^{n} P_k(\lambda_o)^* P_k(\lambda)$, donc le coefficient de λ^n dans $E_n^{\lambda_o}(\lambda)$ est égal à $P_n(\lambda_o)^*(b_o b_1 \ldots b_{n-1})^{-1}$ qui est inversible puisque det $P_n(\lambda_o) \neq 0$. Donc $E_n^{\lambda_o}$ est un polynôme régulier, avec (a) et la proposition (2.2.2) on tire que $E_n^{\lambda_o}$ est une λ-matrice simple. □

2.3. PROBLEME DES MOMENTS TRONQUE.

(2.3.1) DEFINITION. - *On dit qu'une mesure quasi-spectrale* $\mu(.)$ *sur* M *est une solution du problème tronqué d'ordre* n *quand on a :*

$$S_k = \int t^k d\mu(t) \qquad pour \qquad k=0,1,\ldots,2n.$$

On a un résultat qui généralise celui du cas m=1 (LANDAU [4], proposition 6).

(2.3.2) PROPOSITION. - *Soit* λ_o *réel et soit* $\mu(.)$ *une solution du problème tronqué d'ordre* n. *Alors la plus grande masse possible que peut prendre* $\mu(.)$ *au point* λ_o *est égale à* $E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)^{-1}$.

Preuve. - Soit B la masse de $\mu(.)$ au point λ_o, on a $B \geq 0$. D'après lemme (2.1.13) on a :

$$E_n^{\lambda_o}(\lambda_o) = \theta(E_n^{\lambda_o}, E_n^{\lambda_o}) = \int E_n^{\lambda_o}(t) d\mu(t) E_n^{\lambda_o}(t)^*$$

$$= \int_{\mathbb{R} \setminus \{\lambda_o\}} E_n^{\lambda_o}(t) d\mu(t) E_n^{\lambda_o}(t)^* + E_n^{\lambda_o}(\lambda_o) B \, E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)^*.$$

Mais comme le premier terme est positif, on tire :

$$E_n^{\lambda_o}(\lambda_o) \geq E_n^{\lambda_o}(\lambda_o) B \, E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)^*,$$

ou encore puisque $E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)$ est inversible et hermitienne, on a :

$$E_n^{\lambda_o}(\lambda_o) \; (E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)^{-1} - B) E_n^{\lambda_o}(\lambda_o) \geq 0$$

ce qui prouve que $E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)^{-1} \geq B$. □

Le but de ce paragraphe est de construire une solution du problème tronqué d'ordre n, associée à un point λ_o réel fixé, telle que la masse de cette mesure au point λ_o soit égale à $E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)^{-1}$.

<u>Propriétés de $E_n^{\lambda_o}$ lorsque det $P_n(\lambda_o) \neq 0$.</u> - Dans toute la suite, on fixe n entier et λ_o réel, tels que det $P_n(\lambda_o) \neq 0$. Cette hypothèse assure d'après le théorème (2.2.6), que $E_n^{\lambda_o}$ est une λ-matrice simple, et les zéros $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ de det $E_n^{\lambda_o}(\lambda) = 0$, sont réels, on a $p > n$.
Puisque λ_o est fixé, on pose $E_n(\lambda) = E_n^{\lambda_o}(\lambda)$.
On remarque que le coefficient de λ^n dans $E_n(\lambda)$ est égal à $P_n(\lambda_o)^*(b_o b_1 \ldots b_{n-1})^{-1}$.

On applique à E_n le théorème (4.3) de LANCASTER ([5], p. 60) et la remarque qui est après ce théorème (page 62), on obtient le résultat suivant :

(2.3.3) <u>THEOREME.</u> - *Pour chaque* $i=1,\ldots,p$, *il existe* $H_i \in \mathcal{M}$, *tels que :*

(a) $E_n(\lambda_i)H_i = H_i\, E_n(\lambda_i) = 0.$

(b) $\lambda^r E_n(\lambda)^{-1} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i^r}{\lambda-\lambda_i} H_i$ *pour* $r = 0,1,\ldots,n-1.$

(c) $\lambda^n E_n(\lambda)^{-1} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i^n}{\lambda-\lambda_i} H_i + \alpha_o^{-1}$

où $\alpha_o = P_n(\lambda_o)^*(b_o b_1 \ \ldots \ b_{n-1})^{-1}.$

De ce résultat, on tire deux corollaires importants :

(2.3.4) <u>COROLLAIRE</u>. - *On a :*

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^r H_i = 0 \qquad \textit{si} \qquad r < n-2.$$

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^{n-1} H_i = (b_o b_1 \ \ldots \ b_{n-1}) P_n(\lambda_o)^{*\,-1}.$$

Preuve. - Si $r < n-2$, on a d'une part :

$$\lambda^{r+1}E_n(\lambda)^{-1} = \lambda.\lambda^r E_n(\lambda)^{-1} = \lambda.\sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i^r}{\lambda-\lambda_i} H_i \; .$$

D'autre part : $\lambda^{r+1}E_n(\lambda)^{-1} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i^{r+1}}{\lambda-\lambda_i} H_i$.

Donc avec $\lambda = \lambda-\lambda_i+\lambda_i$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i^{r+1}}{\lambda-\lambda_i} H_i = \lambda \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i^{r}}{\lambda-\lambda_i} H_i = \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i^{r+1}}{\lambda-\lambda_i} H_i + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^r H_i,$$

ce qui donne $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^r H_i = 0$ pour $r \leqslant n-2$.

Si $r = n-1$, on obtient par la même méthode :

$$\lambda^n E_n(\lambda)^{-1} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i^n}{\lambda-\lambda_i} H_i + (b_o b_1 \dots b_{n-1})P_n(\lambda_o)^{*-1}$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i^{n-1}}{\lambda-\lambda_i} H_i = \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i^{n}}{\lambda-\lambda_i} + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^{n-1} H_i$$

ce qui donne

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^{n-1} H_i = (b_o \dots b_{n-1})P_n(\lambda_o)^{*\,-1}. \qquad \square$$

(2.3.5) <u>COROLLAIRE</u>. - *Si* $S(\lambda) = \lambda^n Q(\lambda) + R(\lambda)$, *où* $Q,R \in \mathscr{P}$ *et* $d°R < n-1$, *alors on a :*

$$S(\lambda)E_n(\lambda)^{-1} = \sum_{i=1}^{p} \frac{S(\lambda_i)}{\lambda-\lambda_i} H_i + \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda Q(\lambda)-\lambda_i Q(\lambda_i)}{\lambda-\lambda_i} \lambda_i^{n-1} H_i .$$

Preuve. - Si $Q=0$, c'est le théorème (2.3.3).

Il suffit de prouver le résultat pour $Q(\lambda) = \lambda^r$, $r \in \mathbb{N}$. Donc soit $S(\lambda) = \lambda^{n+r} + R(\lambda)$ avec $d°R < n-1$

$$S(\lambda)E_n(\lambda)^{-1} = \lambda^{n+r}E_n(\lambda)^{-1} + R(\lambda)E_n(\lambda)^{-1}.$$

Or $R(\lambda)E_n(\lambda)^{-1} = \sum_{i=1}^{p} \frac{R(\lambda_i)}{\lambda-\lambda_i} H_i$ puisque $d°R < n-1$.

Il suffit alors de montrer la relation :

$$\lambda^{n+r}E_n(\lambda)^{-1} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda^{r+1} - \lambda_i^{r+1}}{\lambda-\lambda_i} \lambda_i^{n-1} H_i + \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i^{n+r}}{\lambda-\lambda_i} H_i .$$

Pour r=0 : on a le résultat par le théorème (2.3.3) et le corollaire (2.3.4).

Supposons que la formule est vérifiée pour r-1.

Avec $\lambda = \lambda - \lambda_i + \lambda_i$ on obtient :

$$\lambda^{r+n}E_n(\lambda)^{-1} = \lambda.\lambda^{n+r-1}E_n(\lambda)^{-1}$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda^{r}-\lambda_i^{r}}{\lambda-\lambda_i} \lambda_i^{n-1} H_i + \lambda \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i^{n+r-1}}{\lambda-\lambda_i} H_i$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda^{r+1}-\lambda_i^{r+1}}{\lambda-\lambda_i} \lambda_i^{n-1} H_i - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^{n+r-1} H_i$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i^{n+r}}{\lambda-\lambda_i} H_i + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^{n+r-1} H_i$$

ce qui termine la preuve. □

(2.3.6) PROPOSITION. - *Soit* $D \in \mathcal{P}_n$ *avec* $d = d°D < n$ *et* $D(\lambda_o) = 0$.

On lui associe le polynôme $F_D(\lambda) = \theta(\frac{E_n(t)-E_n(\lambda)}{t - \lambda}, D(t))_t$.

On a alors :

(a) Pour tout $S \in \mathcal{P}$, $d°S < 2n-d$, *on a :*

$$\theta(S,D) = \sum_{i=1}^{p} S(\lambda_i)B_i$$

(b) Pour tout $S,R \in \mathcal{P}$, $d°S+d°R < 2n-d$, *on a :*

$$\theta(S,RD) = \sum_{i=1}^{p} S(\lambda_i)B_i\ R(\lambda_i)^*$$

où $B_i = H_i\ F_D(\lambda_i)$, $i=1,\ldots,p$.

Preuve. (a) Soit $S \in \mathcal{P}$, $d°S < 2n-d$, il existe $Q,R \in \mathcal{P}$ avec $d°R < n-1$ et $d°Q < n-d$, tels que $S(\lambda) = \lambda^n Q(\lambda) + R(\lambda)$. Par le corollaire (2.3.5) on a :

$$S(\lambda)E_n(\lambda)^{-1} = \sum_{i=1}^{p} \frac{S(\lambda_i)}{\lambda-\lambda_i} H_i + \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda Q(\lambda)-\lambda_i Q(\lambda_i)}{\lambda-\lambda_i} \lambda_i^{n-1} H_i .$$

D'où avec $H_i\, E_n(\lambda_i) = 0$ (théorème (2.3.3)) on obtient :

$$S(\lambda) = \sum_{i=1}^{p} \frac{S(\lambda_i)}{\lambda-\lambda_i} H_i(E_n(\lambda)-E_n(\lambda_i)) + \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda Q(\lambda)-\lambda_i Q(\lambda_i)}{\lambda-\lambda_i} \lambda_i^{n-1} H_i E_n(\lambda)$$

$$\theta(S,D) = \sum_{i=1}^{p} S(\lambda_i)H_i F_D(\lambda_i) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^{n-1}\, \theta\Big(\frac{\lambda Q(\lambda)-\lambda_i Q(\lambda_i)}{\lambda-\lambda_i} H_i E_n(\lambda),\, D(\lambda)\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} S(\lambda_i)B_i \qquad \text{car en posant :}$$

$$\frac{\lambda Q(\lambda)-\lambda_i Q(\lambda_i)}{\lambda-\lambda_i} = \sum_{k=o}^{q} \lambda^k \alpha_k \qquad q < n-d, \text{ on obtient :}$$

$$\theta\Big(\frac{\lambda Q(\lambda)-\lambda_i Q(\lambda_i)}{\lambda-\lambda_i} H_i E_n(\lambda),\, D(\lambda)\Big) = \sum_{k=o}^{q} \alpha_k H_i\, \theta(\lambda^k E_n(\lambda),\, D(\lambda))$$

$$= \sum_{k=o}^{q} \alpha_k H_i\, \theta(E_n(\lambda),\, \lambda^k D(\lambda)) = \sum_{k=o}^{q} \alpha_k H_i \lambda_o^k D(\lambda_o)^* = 0.$$

(b) On pose $R(\lambda) = \sum_{k=o}^{q} \lambda^k \alpha_k$ où $q+d°S < 2n-d$. Avec (a) on obtient :

$$\theta(S,RD) = \sum_{k=o}^{q} \theta(S,\lambda^k D)\alpha_k^* = \sum_{k=o}^{q} \theta(\lambda^k S,D)\alpha_k^*$$
$$= \sum_{k=o}^{q} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^k S(\lambda_i)B_i \alpha_k^* = \sum_{i=1}^{p} S(\lambda_i)B_i R(\lambda_i)^*$$

car λ_i est réel et $q+d°S < 2n-d$. □

Définition de B_k, $k=1,\ldots,p$, et propriétés.

(2.3.7) DEFINITION. - *On pose :*

(a) $D(t) = (t-\lambda_o)^2 I$

(b) $F(\lambda) = F_D(\lambda) = \theta\Big(\frac{E_n(t)-E_n(\lambda)}{t-\lambda},\, (t-\lambda_o)^2 I\Big)_t .$

(c) $B_k = H_k F(\lambda_k) \qquad k=1,2,\ldots,p.$

Avec ces définitions et la proposition (2.3.6) on obtient :

(2.3.8) COROLLAIRE. - *On a :*

(a) Si $R \in \mathcal{P}$, $d°R < 2n-2$, *alors :*

$$\theta(R,D) = \sum_{i=1}^{p} R(\lambda_i)B_i$$

(b) Si $R,S \in \mathcal{P}$, $d°R < n-1$ *et* $d°S < n-1$, *alors*

$$\theta(S,RD) = \sum_{i=1}^{p} S(\lambda_i)B_i\, R(\lambda_i)^*.$$

(2.3.9) PROPOSITION. - *On a les propriétés suivantes :*

(a) Pour λ *réel*, $\lambda \neq \lambda_i$, $i=1,\ldots,p$, *on a :*

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{B_i}{\lambda-\lambda_i} = (\lambda-\lambda_o)E_n(\lambda)^{-1}(I+(\lambda-\lambda_o)G_n(\lambda)) + (2\lambda_o-\lambda)I-S_1$$

où $G_n(\lambda) = \theta(\dfrac{E_n(t)-E_n(\lambda)}{t-\lambda}, I) = \sum_{k=o}^{n} P_k(\lambda_o)^* Q_k(\lambda)$

(b) $I = E_n(\lambda_o)^{-1} + \sum_{i=1}^{p} \dfrac{B_i}{(\lambda_i-\lambda_o)^2}$.

Preuve.

(a) On a $\sum_{i=1}^{p} \dfrac{B_i}{\lambda-\lambda_i} = \sum_{i=1}^{p} \dfrac{1}{\lambda-\lambda_i} H_i\, F(\lambda_i) = E_n(\lambda)^{-1}F(\lambda)$.

Avec $t-\lambda_o = t-\lambda + \lambda-\lambda_o$, on obtient :

$$F(\lambda) = \theta(\frac{E_n(t)-E_n(\lambda)}{t-\lambda}, (t-\lambda_o)^2 I) = \theta(\frac{E_n(t)-E_n(\lambda)}{t-\lambda}, (t-\lambda)^2 I)$$
$$+ G_n(\lambda)(\lambda-\lambda_o)^2 + \theta(\frac{E_n(t)-E_n(\lambda)}{t-\lambda}, 2(\lambda-\lambda_o)(t-\lambda)I).$$

Or avec le lemme (2.1.13)(b), et puisque λ est réel, on obtient :

$$\theta(\frac{E_n(t)-E_n(\lambda)}{t-\lambda}, (t-\lambda)^2 I) = \theta(E_n(t)-E_n(\lambda), (t-\lambda)I)$$
$$= (\lambda_o-\lambda)I - E_n(\lambda)\theta(I, (t-\lambda)I)$$
$$= (\lambda_o-\lambda)I - E_n(\lambda)(S_1 - \lambda I) \qquad \text{et}$$

$$\theta\left(\frac{E_n(t)-E_n(\lambda)}{t-\lambda}, (t-\lambda)I\right) = \theta(E_n(t)-E_n(\lambda), I)$$

$$= I - E_n(\lambda). \quad \text{Donc,}$$

$$F(\lambda) = (\lambda_o-\lambda)I - E_n(\lambda)(S_1-\lambda I) + G_n(\lambda)(\lambda-\lambda_o)^2 + 2(\lambda-\lambda_o)(I-E_n(\lambda)).$$

D'où :

$$E_n(\lambda)^{-1}F(\lambda) = (\lambda_o-\lambda)E_n(\lambda)^{-1} - (S_1-\lambda I) + E_n(\lambda)^{-1}G_n(\lambda)(\lambda-\lambda_o)^2 +$$

$$+ 2(\lambda-\lambda_o)(E_n(\lambda)^{-1} - I)$$

$$= E_n(\lambda)^{-1}G_n(\lambda)(\lambda-\lambda_o)^2 + (\lambda-\lambda_o)E_n(\lambda)^{-1} + (2\lambda_o-\lambda)I-S_1$$

ce qui donne le résultat.

(b) On a $\lambda_o \neq \lambda_i$ pour $i=1,\ldots,p$, puisque $E_n(\lambda_o)$ est inversible. On dérive la formule obtenue en (a), au point λ_o, on obtient :

$$-\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(\lambda_o-\lambda_i)^2} B_i = E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)^{-1} - I. \quad \text{Donc}$$

$$I = E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)^{-1} + \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(\lambda_o-\lambda_i)^2} B_i. \quad \square$$

<u>La positivité des opérateurs B_k</u>. - Avant de montrer que $B_k > 0$ pour chaque $k=1,\ldots,p$, on a besoin du résultat suivant :

(2.3.10) <u>PROPOSITION</u>. - *Pour λ réel, $\lambda \neq \lambda_i$, $i=1,\ldots,p$, la matrice $E_n(\lambda)^{-1}F(\lambda)$ est hermitienne.*

Preuve. - Pour $\lambda \neq \lambda_i$, $i=1,\ldots,p$, on a $E_n(\lambda)^{-1}F(\lambda) = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda-\lambda_i} B_i$.

Donc d'après la proposition (2.3.9)(a) il suffit de prouver que $(\lambda-\lambda_o)E_n(\lambda)^{-1}(I + (\lambda-\lambda_o)G_n(\lambda))$ est hermitienne, ou encore que $(I+(\lambda-\lambda_o)G_n(\lambda))(\lambda-\lambda_o)E_n(\lambda)^*$ est hermitienne. Or par la proposition (2.1.11) on a :

$$(\lambda-\lambda_o)E_n(\lambda)^* = P_{n+1}(\lambda)^*b_n^*P_n(\lambda_o) - P_n(\lambda)^*b_nP_{n+1}(\lambda_o).$$

Par la proposition (2.1.12) on a :

$$I + (\lambda-\lambda_o)G_n(\lambda) = I + (\lambda-\lambda_o)\sum_{k=o}^{n} P_k(\lambda_o)^* Q_k(\lambda)$$

$$= P_k(\lambda_o)^* b_n Q_{n+1}(\lambda) - P_{n+1}(\lambda_o)^* b_n^* Q_n(\lambda).$$

Donc on obtient :

$$(I + (\lambda-\lambda_o)G_n(\lambda))(\lambda-\lambda_o)E_n(\lambda)^* =$$

$$P_n(\lambda_o)^* b_n Q_{n+1}(\lambda) P_{n+1}(\lambda)^* b_n^* P_n(\lambda_o) + P_{n+1}(\lambda_o)^* b_n^* Q_n(\lambda) P_n(\lambda)^* b_n P_{n+1}(\lambda_o)$$

$$- P_n(\lambda_o)^* b_n Q_{n+1}(\lambda) P_n(\lambda)^* b_n P_{n+1}(\lambda_o) - P_{n+1}(\lambda_o)^* b_n^* Q_n(\lambda) P_{n+1}(\lambda)^* b_n^* P_n(\lambda_o).$$

Le premier terme et le deuxième sont hermitiens puisque $Q_{n+1}(\lambda)P_{n+1}(\lambda)^*$ et $Q_n(\lambda)P_n(\lambda)^*$ le sont par la proposition (2.1.14)(a). Or par la proposition (2.1.14)(b) on a : $Q_{n+1}(\lambda)P_n(\lambda)^* = P_{n+1}(\lambda)Q_n(\lambda)^* + b_n^{-1}$.

Donc le reste de la formule devient :

$$- P_n(\lambda_o)^* b_n P_{n+1}(\lambda_o) - P_n(\lambda_o)^* b_n P_{n+1}(\lambda) Q_n(\lambda)^* b_n P_{n+1}(\lambda_o)$$

$$- P_{n+1}(\lambda_o)^* b_n^* Q_n(\lambda) P_{n+1}(\lambda)^* b_n^* P_n(\lambda_o).$$

Dans cette formule, on remarque que le deuxième terme est l'adjoint du troisième terme. Donc tout se réduit à prouver que $P_n(\lambda_o)^* b_n P_{n+1}(\lambda_o)$ est hermitienne, or ceci est donné par la proposition (2.1.11) puisque λ_o est réel. □

(2.3.11) <u>PROPOSITION</u>. - *Pour chaque* k=1,...,p, *on a :*

$$B_k \succ 0$$

c'est-à-dire $< B_k x, x > \geqslant 0$ *pour chaque* $x \in M$.

Preuve. - Tout d'abord on va montrer que B_k est hermitienne. D'après la proposition (2.3.10) on a :

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda-\lambda_i} B_i = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda-\lambda_i} B_i^* \quad \text{pour tout réel } \lambda \neq \lambda_i, \ i=1,\dots,p.$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{p} \prod_{j\neq i} (\lambda-\lambda_j)B_i = \sum_{i=1}^{p} \prod_{j\neq i} (\lambda-\lambda_j)B_i^*.$$

On a cette égalité pour les $\lambda \neq \lambda_i$, $i=1,\dots,p$, mais comme les deux termes à droite et à gauche sont des polynômes, on a l'égalité pour tout λ, en particulier pour $\lambda = \lambda_k$, on obtient :

$$\prod_{j\neq k} (\lambda_k-\lambda_j)B_k = \prod_{j\neq k} (\lambda_k-\lambda_j)B_k^*.$$

Ce qui prouve que $B_k^* = B_k$, $k=1,\dots,p$.

On pose $R(\lambda) = H_k \dfrac{E_n(\lambda)-E_n(\lambda_k)}{\lambda-\lambda_k}$.

Pour $i=k$, et avec le fait que $H_kE_n(\lambda_k) = 0 = H_iE_n(\lambda_i)$, on obtient :

$$R(\lambda_i) = H_k \frac{E_n(\lambda_i)}{\lambda_i-\lambda_k} \quad \text{et}$$

$$R(\lambda_i)B_i = H_k \frac{E_n(\lambda_i)}{\lambda_i-\lambda_k} B_i = 0.$$

D'autre part par définition de $R(\lambda)$ et de $F(\lambda_k)$, on obtient :

$$\theta(R,D) = H_k\, \theta\left(\frac{E_n(t)-E_n(\lambda_k)}{t-\lambda_k}, D(t)\right) = H_kF(\lambda_k) = B_k.$$

Avec le corollaire (2.3.8)(a), on obtient alors :

$$B_k = \theta(R,D) = \sum_{i=1}^{p} R(\lambda_i)B_i = R(\lambda_k)B_k \qquad \text{car } d°R < n-1.$$

Donc $B_k = R(\lambda_k)B_k = B_k\ R(\lambda_k)^*$ car B_k est hermitienne. Par le corollaire (2.3.8)(b) on a :

$$\theta(R,RD) = \sum_{i=1}^{p} R(\lambda_i)B_iR(\lambda_i)^* = R(\lambda_k)B_k\ R(\lambda_k)^*$$

$$= B_k\ R(\lambda_k)^* = B_k.\ \text{Donc}$$

$$B_k = \theta((\lambda-\lambda_o)R(\lambda),\ (\lambda-\lambda_o)R(\lambda)) \geq 0. \qquad \square$$

<u>Construction d'une solution du problème tronqué</u>. - Soit $\gamma_n(.)$ la mesure (p+1)-discrète, qui prend la masse $\frac{1}{(\lambda_i-\lambda_o)^2} B_i$ au point λ_i pour i=1,...,p, et qui prend la masse $E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)^{-1}$ au point λ_o. Alors on a :

(2.3.12) <u>PROPOSITION</u>. - *La mesure* $\gamma_n(.)$ *ainsi construite est une solution du problème tronqué d'ordre* n *:*

$$S_k = \int \lambda^k d\gamma_n(\lambda) \quad \textit{pour} \quad k=0,1,\dots,2n.$$

Preuve. - Soit $\mu(.)$ une solution quelconque du problème tout entier. Avec le lemme (2.1.13) et le corollaire (2.3.8)(a), on obtient : si $R \in \mathscr{P}$, $d°R \leq 2n-2$, alors :

$$\begin{aligned}\int R(\lambda)(\lambda-\lambda_o)^2 d\gamma_n(\lambda) &= \sum_{i=1}^{p} R(\lambda_i)B_i \\ &= \theta(R,D) = \int R(\lambda)(\lambda-\lambda_o)^2 d\mu(\lambda).\end{aligned}$$

Si $S \in \mathscr{P}$, $d°S \leq 2n$, alors il existe $R \in \mathscr{P}_{2n-2}$ et $\alpha,\beta \in \mathscr{M}$ tels que : $S(\lambda) = (\lambda-\lambda_o)^2R(\lambda) + \alpha(\lambda-\lambda_o) + \beta$. On a :

$$\begin{aligned}\int S(\lambda)d\gamma_n(\lambda) &= \int(\lambda-\lambda_o)^2R(\lambda)d\gamma_n(\lambda) + \alpha\int(\lambda-\lambda_o)d\gamma_n(\lambda) + \beta\int d\gamma_n(\lambda) \\ &= \int(\lambda-\lambda_o)^2R(\lambda)d\mu(\lambda) + \alpha\int(\lambda-\lambda_o)d\gamma_n(\lambda) + \beta\int d\gamma_n(\lambda).\end{aligned}$$

Par la proposition (2.3.9)(b) on obtient :

$$\int d\gamma_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(\lambda_i-\lambda_o)^2} B_i + E_n(\lambda_o)^{-1} = I = \int d\mu(\lambda).$$

Reste seulement à prouver : $\int(\lambda-\lambda_o)d\gamma_n(\lambda) = \int(\lambda-\lambda_o)d\mu(\lambda)$.

Par la proposition (2.3.9)(a), on obtient :

$$\int (\lambda-\lambda_o)d\gamma_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i-\lambda_o} B_i = -(\lambda_o I - S_1) = S_1-\lambda_o I = \int (\lambda-\lambda_o)d\mu(\lambda).$$

Donc on obtient $\int S(\lambda)d\gamma_n(\lambda) = \int S(\lambda)d\mu(\lambda)$ pour tout $S \in \mathscr{P}_{2n}$. □

2.4. CONSTRUCTION D'UNE FAMILLE DE SOLUTIONS DU PROBLEME.

Pour chaque entier n, on désigne par $\mathscr{E}_n$ l'ensemble des zéros de det $P_n(\lambda)$.

Par les propositions (2.2.2) et (2.2.4) on a P_n est une λ-matrice simple, donc $n \leq \text{card } \mathscr{E}_n \leq nm$.

On pose $\mathscr{E} = \bigcup_{N=1}^{+\infty} \bigcap_{n \geq N} \mathscr{E}_n$.

$\mathscr{E}$ est au plus dénombrable.

Soit λ_o réel avec $\lambda_o \notin \mathscr{E}$, il existe alors une suite $(n_k)_k$ d'entiers, strictement croissante, telle que det $P_{n_k}(\lambda_o) \neq 0$ pour chaque entier k.

D'après ce qui précède, pour chaque k, il existe une mesure $\gamma_{n_k}(.)$ solution du problème tronqué d'ordre n_k telle que la masse de $\gamma_{n_k}(.)$ au point λ_o est égale à $E_{n_k}^{\lambda_o}(\lambda_o)^{-1}$.

On applique le théorème de Helly-Bray pour les matrices (ATKINSON [2], théorème I.8.2, Appendice I, p. 432) on obtient une mesure quasi-spectrale sur M, $\gamma(.)$, solution du problème tout entier :

$S_k = \int \lambda^k d\gamma(\lambda)$ pour chaque $k \in \mathbb{N}$. De plus, la masse de $d\gamma(.)$ au point λ_o est égale à $\Gamma(\lambda_o) = \lim\limits_{k \to +\infty} E_{n_k}^{\lambda_o}(\lambda_o)^{-1}$.

On remarque que $\Gamma(\lambda_o)$ existe toujours comme opérateur positif puisque $0 \leq E_{n+1}^{\lambda_o}(\lambda_o)^{-1} \leq E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)^{-1}$.

$$\Gamma(\lambda_o) = \lim_{n \to +\infty} E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)^{-1}.$$

Mais la matrice $\Gamma(\lambda_o)$ peut être identiquement nulle.

On a prouvé le résultat suivant :

(2.4.1) <u>THEOREME.</u> - *Pour chaque* λ_o *réel avec* $\lambda_o \notin \mathscr{E}$, *il existe une mesure* $\gamma_{\lambda_o}(.)$ *solution du problème qui prend au point* λ_o la masse

$$\Gamma(\lambda_o) = \lim_{n \to +\infty} E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)^{-1}.$$

$\Gamma(\lambda_o)$ *est la plus grande masse que peut prendre une solution au point* λ_o.

La dernière affirmation vient de la proposition (2.3.2).

<u>*Exemple et remarque.*</u>

Dans le cas scalaire m=1, l'ensemble $\mathscr{E}$ est vide, mais dans le cas général $m > 1$, $\mathscr{E}$ n'est pas nécessairement vide. On a le résultat suivant :

(2.4.2) <u>PROPOSITION.</u> - *Si* $m > 1$, *alors il existe une suite de moments matriciels, dont l'ensemble* $\mathscr{E}$ *associé est tel que* card $\mathscr{E} > q$, *où* $q = \frac{m}{2}$ *ou* $\frac{m-1}{2}$ *suivant que* m *est pair ou impair.*

Preuve. - Dans le cas scalaire, il y a une bijection entre les suites de moments sur $\mathbb{R}$, et les matrices de Jacobi ([1], p. 6) $(a_{i,j})_{i,j}$ avec $a_{i,j} = 0$ si $|i-j| > 1$, $a_{n,n} = a_n$ réel et $b_n = a_{n,n+1} = a_{n+1,n} > 0$.

Soit λ_o un réel fixé.

Soit $(\alpha_n)_n$ la suite scalaire de moments sur $\mathbb{R}$, associée à la matrice de Jacobi suivante :

$a_n = \lambda_o$ pour tout entier n, $b_n > 0$ quelconque fixé.

On note par $(f_n(\lambda))_n$ la suite des polynômes $(P_n)_n$ associés. Pour chaque entier n, on a :

$(-a_n+\lambda)f_n(\lambda) = b_{n-1}f_{n-1}(\lambda) + b_n f_{n+1}(\lambda)$. Donc

$$0 = (\lambda_o - a_n)f_n(\lambda_o) = b_{n-1}f_{n-1}(\lambda_o) + b_n\, f_{n+1}(\lambda_o).$$

Comme $f_1(\lambda_o) = b_o^{-1}(\lambda_o - a_o) = 0$ et les $b_k > 0$, on tire qu'on a $f_{2n+1}(\lambda_o) = 0$ pour chaque entier n.

Maintenant soit $(\beta_n)_n$ la suite scalaire des moments sur $\mathbb{R}$ associée à la matrice de Jacobi suivante :

$$a'_n = \lambda_o \quad \text{pour} \quad n \geq 2, \quad b'_n > 0 \text{ quelconque pour } n \geq 2, \text{ et}$$

$$\lambda_o - a'_o = b'_o = \lambda_o - a'_1 \quad \text{avec} \quad a'_o, a'_1 \text{ réel}, \quad b'_o > 0.$$

Soit $(g_k(\lambda))_k$ la suite des polynômes $(P_n)_n$ associée. On a

$$\lambda\, g_n(\lambda) = b'_{n-1} g_{n-1}(\lambda) + a'_n g_n(\lambda) + b'_n g_{n+1}(\lambda), \text{ d'où}$$

$$(\lambda_o - a'_n) g_n(\lambda_o) = b'_{n-1} g_{n-1}(\lambda_o) + b'_n\, g_{n+1}(\lambda_o).$$

On a $g_{2n}(\lambda_o) = 0$ pour chaque entier $n \geq 1$ car pour $k \geq 2$, on a $b'_{k-1}\, g_{k-1}(\lambda_o) = b'_k\, g_{k+1}(\lambda_o)$ et $b'_1 g_2(\lambda_o) = (\lambda_o - a'_1) g_1(\lambda_o) - b'_o$

$$= (\lambda_o - a'_1) b'^{-1}_o (\lambda_o - a'_o) - b'_o = 0$$

donc $g_2(\lambda_o) = 0$. En conclusion on a :

$(\alpha_n)_n$ suite scalaire de moments avec $f_{2n+1}(\lambda_o) = 0, \quad n \geq 0$

$(\beta_n)_n$ suite scalaire de moment avec $g_{2n}(\lambda_o) = 0, \ n \geq 1.$

On pose

$$S_n = \begin{bmatrix} \alpha_n & 0 \\ 0 & \beta_n \end{bmatrix} \qquad \text{pour tout entier n.}$$

On peut montrer que la suite des polynômes $(P_n(\lambda))_n$ construite dans le paragraphe (2.1) associée à $(S_n)_n$ est donnée par :

$$P_n(\lambda) = \begin{bmatrix} f_n(\lambda) & 0 \\ 0 & g_n(\lambda) \end{bmatrix}$$

Donc $\det P_n(\lambda) = f_n(\lambda).g_n(\lambda)$.

On obtient alors det $P_n(\lambda_o) = 0$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
Ce qui prouve que $\lambda_o \in \mathscr{E}$.

Maintenant si $m > 2$, par exemple m pair, $m = 2q$.
On note par $(\alpha_n(\lambda_o))_n$ et $(\beta_n(\lambda_o))_n$ les deux suites scalaires précédentes associée à λ_o.

Soient $\lambda_o,\lambda_1,\dots,\lambda_{q-1}$ des nombres réels arbitraires. On va construire une suite $(S_k)_k$ de moments matriciels, dont l'ensemble $\mathscr{E}$ associé contient $\{\lambda_o,\lambda_1,\dots,\lambda_{q-1}\}$. On pose

$$< S_n e_{2i}, e_{2i} > \; = \; \beta_n(\lambda_{i-1}) \qquad i=1,\dots,q$$

$$< S_n e_{2i+1}, e_{2i+1} > \; = \; \alpha_n(\lambda_i) \qquad i=0,\dots,q-1, \quad \text{et}$$

$$< S_n e_i, e_j > \; = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j.$$

La suite $(S_n)_n$ est une suite de moments matriciels sur $\mathbb{R}$.

Pour chaque $k=0,\dots,q-1$, on note par $f_n^{(k)}(\lambda))_n$ la suite des polynômes scalaires associée à la suite $(\alpha_n(\lambda_k))_k$. Et on note par $(g_n^{(k)}(\lambda))_n$ la suite des polynômes, associée à $(\beta_n(\lambda_k))_n$. La suite $(P_n(\lambda))_n$ des polynômes θ-orthonormale, associée à $(S_n)_n$ est donnée par :

$$< P_n(\lambda) e_i, e_j > \; = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j.$$

$$< P_n(\lambda) e_{2i}, e_{2i} > \; = g_n^{(i-1)}(\lambda) \qquad i=1,\dots,q$$

$$< P_n(\lambda)\, e_{2i+1}, e_{2i+1} > = f_n^{(i)}(\lambda) \qquad i=0,\dots,q-1.$$

Donc $\quad \det P_n(\lambda) = \prod_{k=o}^{q-1} f_n^{(k)}(\lambda) g_n^{(k)}(\lambda).$

Comme $f_{2n+1}^{(k)}(\lambda_k) = g_{2n}^{(k)}(\lambda_k) = 0$, donc $\det P_n(\lambda_k) = 0$ pour $k=0,1,\dots,q-1$, et tout entier $n \geqslant 1$. Donc card $\mathscr{E} \geqslant q$. $\square$

Le but de ce chapitre était d'arriver au théorème (2.4.1). Mais si on veut seulement construire une solution du problème, alors on peut le faire par une méthode plus simple, qui consiste à appliquer les résultats de LANCASTER à $P_{n+1}(\lambda) + HP_n(\lambda)$ au lieu de $E_n^{\lambda_o}(\lambda)$.

On fixe n entier et $H \in \mathscr{M}$ tels que $b_n H$ soit hermitienne (on peut prendre H=0). On pose $K(\lambda) = P_{n+1}(\lambda) + HP_n(\lambda)$. Par la proposition (2.2.2) et (2.2.4), on a $K(\lambda)$ est une λ-matrice simple, et les pôles de $K(\lambda)^{-1}$ sont réels. On les note par $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$. Par le théorème (3.4) de LANCASTER ([5], p. 60-62), il existe pour chaque $k = 1,\ldots,p$, une matrice $H_k \in \mathscr{M}$, tels que :

$$K(\lambda_k)H_k = H_k K(\lambda_k) = 0 \qquad k=1,\ldots,p$$

$$\lambda^r K(\lambda)^{-1} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i^r}{\lambda-\lambda_i} H_i \quad \text{pour } r=0,1,\ldots,n, \quad \text{et}$$

$$\lambda^{n+1} K(\lambda)^{-1} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i^{n+1}}{\lambda-\lambda_i} H_i + b_o b_1 \ldots b_n.$$

Pour chaque $k = 1,2,\ldots,p$, on pose

$$B_k = H_k \quad \theta\left(\frac{K(t)-K(\lambda_k)}{t-\lambda_k}, I\right) = H_k(Q_{n+1}(\lambda_k) + HQ_n(\lambda_k)).$$

On montre facilement les propriétés suivantes :

(a) Si $d^\circ R < 2n$, $R \in \mathscr{P}$, alors $\theta(R,I) = \sum_{i=1}^{p} R(\lambda_i)B_i$

(b) Si $R,S \in \mathscr{P}_n$, alors $\theta(S,R) = \sum_{i=1}^{p} S(\lambda_i)B_i R(\lambda_i)^*$.

(c) $\sum_{i=1}^{p} B_i = I$.

(d) $\beta_k > 0$ pour $k=1,\ldots,p$.

Soit $\gamma_n(.)$ la mesure p-discrète, qui prend la masse B_k au point λ_k pour $k=1,\ldots,p$.

Par la propriété (a), on obtient pour $k=0,1,\ldots,2n$:

$$S_k = \theta(t^k I, I) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^k B_i = \int \lambda^k d\gamma_n(\lambda).$$

Ce qui prouve que $\gamma_n(.)$ est une solution du problème tronqué d'ordre n.

Par le théorème de HELLY-BRAY ([2] théorème 1.8.1), page 432), on obtient une solution du problème tout entier.

*

CHAPITRE 3

PROBLÈME D'UNICITÉ

*

INTRODUCTION.

Dans tout ce chapitre, on fixe une suite $(S_k)_k$ de matrices m×m hermitiennes, avec $S_o=I$, qui soit de type défini positif. Dans le premier paragraphe, on va étudier les indices de défaut m_+ et m_- de l'opérateur A, introduit dans le chapitre 1.

Dans le deuxième paragraphe, on va donner une condition nécessaire et suffisante, à l'aide des indices de défaut, pour que le problème soit déterminé, puis une autre à l'aide de la matrice $\Gamma(\lambda_o)$, Im $\lambda_o \neq 0$, introduite dans le chapitre 2.

On va ensuite tirer le résultat : si le problème est indéterminé, alors $\Gamma(\lambda_o) \nequiv 0$, pour tout λ_o réel.

A l'aide de ceci et du théorème (2.4.1) on obtient un résultat analogue au théorème B de LANDAU ([4], p. 256) fait dans le cas scalaire m=1.

3.1. ETUDE DES INDICES DE DEFAUT DE A.

On rappelle que $\mathcal{L}$ (chapitre 1) désigne l'espace des polynômes à coefficients éléments de $M = \mathbb{C}^m$. Et $\mathcal{P}$ (chapitre 2) désigne l'espace des polynômes à coefficients éléments de $\mathcal{M}$, espaces des matrices m×m.

Si $P \in \mathcal{P}$, on note par $P(\lambda)$ (i,.) l'élément de $\mathcal{L}$ défini par

$$P(\lambda)(i,.) = \sum_{j=1}^{m} P(\lambda)(i,j)e_j .$$

On a défini $[.,.]$ sur $\mathcal{L}\times\mathcal{L}$ dans le chapitre 1, et $\theta(.,.)$ sur $\mathcal{P}\times\mathcal{P}$ dans le chapitre 2, il y a une relation entre les deux : si $P,R \in \mathcal{P}$ alors $\theta(P,R)(i,j) = [\overline{R(j,.)},\overline{P(i,.)}]$

où $$\overline{P(\lambda)(i,.)} = \sum_{j=1}^{m} \overline{P(\lambda)(i,j)}e_j .$$

Il suffit de le prouver pour $P(\lambda) = \lambda^p x$ et $R(\lambda) = \lambda^q \beta$, avec $\alpha, \beta \in \mathcal{M}$. On a :

$$\theta(P,R)(i,j) = (\alpha S_{p+q}\, \beta^*)(i,j) = \sum_{\ell,k=1}^{m} \alpha(i,k)S_{p+q}(k,\ell)\beta^*(\ell,j)$$

$$= \sum_{\ell,k=1}^{m} \alpha(i,k)S_{p+q}(k,\ell)\overline{\beta(j,\ell)}, \text{ et}$$

$$[\overline{R(j,.)},\overline{P(i,.)}] = [\lambda^q\, \overline{\beta(j,.)},\ \lambda^p\overline{\alpha(i,.)}] = < S_{p+q}\overline{\beta(j,.)},\ \overline{\alpha(i,.)} >$$

$$= \sum_{\ell,k=1}^{m} \overline{\beta(j,\ell)}\alpha(i,k)S_{p+q}(k,\ell), \text{ d'où le résultat.}$$

Soit $(P_k(\ ))_{k\in\mathbb{N}}$, la suite θ-orthonormée définie dans le chapitre 2 : on pose pour $k \in \mathbb{N}$ et $i=1,\dots,m$:

$$d_{km+i}(\lambda) = \overline{P_k(\lambda)(i,.)} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Si $P_k(\lambda) = \sum_{p=o}^{k} \lambda^p\, \alpha_p$ alors $d_{km+i}(\lambda) = \sum_{p=o}^{k} \sum_{j=1}^{m} \overline{\lambda^p\, \alpha_p(i,j)}e_j$ donc

$$d_{km+i}(\lambda) = \sum_{p=o}^{k} \Big(\sum_{j=1}^{m} \overline{\alpha_p(i,j)}e_j\Big)\lambda^p \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Donc pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $d_{km+i}(\lambda) = \overline{P_k(\overline{\lambda})(i,.)}$ $\quad k \in \mathbb{N},\ i=1,\dots,m$.

On a $d_n \in \mathcal{L}$ pour tout entier $n \geq 1$.

A l'aide de la proposition (2.1.5) qui introduit les coefficients matriciels de Jacobi a_n et b_n, on obtient le résultat :

(3.1.1) PROPOSITION. - *On a les propriétés suivantes :*

(a) $[d_i,d_j] = \delta_{ij}$ *(Indice de Kronecker)* i,j *entiers* ≥ 1.

(b) La suite (d_n) $n\geq 1$, *engendre l'espace* $\mathcal{L}$, *plus précisément, si* $f \in \mathcal{L}$, $f(\lambda) = \sum\limits_{k=o}^{n} \lambda^k x_k$, *alors il existe* $\zeta_i \in \mathbb{C}$, $i=1,\dots,(n+1)m$, tels que :

$$f = \sum_{i=1}^{(n+1)m} \zeta_i d_i .$$

(c) La suite (d_n) $n \geq 1$ *est une base orthonormale de l'espace de Hilbert* H.

(d) Pour tout entier n *et* $i=1,\dots,m$, *on a, pour* $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\lambda d_{nm+i}(\lambda) = \sum_{p=1}^{m} \{b_{n-1}(p,i)d_{(n-1)m+p}(\lambda) + a_n(p,i)d_{nm+p}(\lambda)\} + b_n^*(p,i)d_{(n+1)m+p}(\lambda) .$$

Preuve. (a) On a $[d_{km+i},d_{\ell m+j}] = [\overline{P_k(\lambda)(i,.)}, \overline{P_\ell(\lambda)(j,.)}]$

$$= \theta(P_\ell,P_k)(j,i).$$

Donc $[d_{km+i},d_{\ell m+j}] = 0$ si $k\neq\ell$, et $[d_{km+i},d_{km+j}] = \theta(P_k,P_k)(j,i) = \delta_{ji}$.

Donc $[d_n,d_p] = \delta_{np}$ n,p entiers ≥ 1.

(b) Il suffit de supposer $f(\lambda) = \lambda^p x$ où $x = (x_i) \in M$. On définit la matrice B par $B(1,j) = \overline{x}_j$ et $B(k,j) = 0$ si $k\neq 1$, $k,j=1,\dots,m$. On pose $R(\lambda) = \lambda^p B$. Par la proposition (2.1.4), il existe $\alpha_o,\alpha_1,\dots,\alpha_p \in \mathcal{M}$, telles que :

$$\lambda^p B = \sum_{k=o}^{p} \alpha_k P_k(\lambda).$$ Donc pour λ réel on a :

$$\lambda^p \overline{B(1,i)} = \sum_{k=o}^{p} \overline{(\alpha_k P_k(\lambda))(1,i)} = \sum_{k=o}^{p} \sum_{j=1}^{m} \overline{\alpha_k(1,j)}\,\overline{P_k(\lambda)(j,i)}$$

$$= \sum_{k=o}^{p} \sum_{j=1}^{m} \overline{\alpha_k(1,j)}\, d_{km+j}^{(i)}(\lambda)$$ avec la notation

$$d_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} d_n^{(i)}(\lambda)e_i .$$ Donc

$$\lambda^p x = \sum_{i=1}^{p} \lambda^p \overline{B(1,i)} e_i = \sum_{k=o}^{p} \sum_{j=1}^{m} \overline{\alpha_k(1,j)} \sum_{i=1}^{p} d_{km+j}^{(i)}(\lambda) e_i$$

$$= \sum_{k=o}^{p} \sum_{j=1}^{m} \overline{\alpha_k(1,j)}\, d_{km+j}(\lambda) = \sum_{i=1}^{(p+1)m} \zeta_i d_i(\lambda)$$

où $\zeta_{km+j} = \overline{\alpha_k(1,j)}$ $k=0,\dots,p$ et $j=1,\dots,m$.

On a l'égalité pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, mais les deux termes sont des polynômes donc l'égalité est vérifiée pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

(c) Par (a) et (b), et le fait que l'espace $\mathcal{L}$ est dense dans H, on obtient (c).

(d) D'après la proposition (2.1.5), pour chaque entier n, on a :

$\lambda P_n(\lambda) = b^*_{n-1} P_{n-1}(\lambda) + a_n P_n(\lambda) + b_n P_{n+1}(\lambda)$. Donc pour $i=1,\dots,m$ on a :

$$\lambda P_n(\lambda)(i,.) = \sum_{p=1}^{m} \{b^*_{n-1}(i,p) P_{n-1}(\lambda)(p,.) + a_n(i,p) P_n(\lambda)(p,.)\} + b_n(i,p) P_{n+1}(\lambda)(p,.) \;.$$

Donc pour λ réel, n entier, et $i=1,\dots,m$ on obtient :

$$\lambda d_{nm+i}(\lambda) = \lambda \overline{P_n(\lambda)(i,.)} = \overline{\lambda P_n(\lambda)(i,.)} =$$

$$\sum_{p=1}^{m} \{b_{n-1}(p,i) \overline{P_{n-1}(\lambda)(p,.)} + a_n(p,i) \overline{P_n(\lambda)(p,.)} + b^*_n(p,i) \overline{P_{n+1}(\lambda)(p,.)}\}$$

$$= \sum_{p=1}^{m} \{b_{n-1}(p,i) d_{(n-1)m+p}(\lambda) + a_n(p,i) d_{nm+p}(\lambda) + b^*_n(p,i) d_{(n+1)m+p}(\lambda)\}.$$

On a la relation de (d) pour λ réel, mais puisque les deux termes à droite et à gauche sont des polynômes, la relation est vraie pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. □

On veut maintenant caractériser les éléments de $\mathrm{Ker}(A^* - \lambda_o I)$, $\mathrm{Im}\,\lambda_o \neq 0$.

Soit $f \in \mathrm{Ker}(A^* - \lambda_o I)$ alors on a $A^* f = \lambda_o f$.

Par la proposition (3.1.1)(c), il existe une suite $(\zeta_n)_{n \geq 1}$ avec $\zeta_n \in \mathbb{C}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} |\zeta_n|^2 < +\infty$, telle que $f(\lambda) = \sum_{n=1}^{+\infty} \zeta_n d_n(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{C})$.

Donc l'égalité $A^* f = \lambda_o f$ est équivalente à :

$$[A^* f, d_{km+j}] = \lambda_o [f, d_{km+j}], \quad k \in \mathbb{N},\ j=1,\dots,m$$

ou encore à : $[f, Ad_{km+j}] = \lambda_o [f, d_{km+j}]$, $k \in \mathbb{N}$, $j=1,\dots,m$.

Mais par la proposition (3.1.1) (d) on obtient :

$$(Ad_{km+j})(\lambda) = \lambda d_{km+j}(\lambda) =$$

$$\sum_{p=1}^{m} \{b_{k-1}(p,j) d_{(k-1)m+p}(\lambda) + a_k(p,j) d_{km+p}(\lambda) + b_k^*(p,j) d_{(k+1)m+p}(\lambda)\}.$$

Donc $A^* f = \lambda_o f$ équivaut à l'ensemble des égalités :

$$\lambda_o \zeta_{km+j} = \lambda_o [f, d_{km+j}] = \sum_{p=1}^{m} \{\overline{b_{k-1}(p,j)} \zeta_{(k-1)m+p} + \overline{a_k(p,j)} \zeta_{km+p}$$

$$+ b_k^*(p,j) \zeta_{(k+1)m+p}\}$$

pour k entier et $j=1,\dots,m$.

On tire que $f = \sum_{n=1}^{+\infty} \zeta_n d_n \in \mathrm{Ker}(A^* - \lambda_o I)$ si et seulement si on a :

$$(*) \qquad \lambda_o \zeta_{km+j} = \sum_{p=1}^{m} \{b_{k-1}^*(j,p) \zeta_{(k-1)m+p} + a_k(j,p) \zeta_{km+p}$$

$$+ b_k(j,p) \zeta_{(k+1)m+p}\} \quad \text{pour } k \text{ entier et } j=1,\dots,m.$$

On pose $\eta_k = \sum_{i=1}^{m} \zeta_{km+i} e_i$ k entier.

La relation (*) est équivalente à la relation :

$$(**) \qquad \lambda_o \eta_k = b_{k-1}^* \eta_{k-1} + a_k \eta_k + b_k \eta_{k+1}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

En effet,

$$(b^*_{k-1}\ \eta_{k-1})_j = \sum_{p=1}^{m} b^*_{k-1}(j,p)\eta^{(p)}_{k-1} = \sum_{p=1}^{m} b^*_{k-1}(j,p)\zeta_{(k-1)m+p},$$

et de même pour les autres termes. D'où (*) s'écrit :

$$(\lambda_o\eta_k)_j = (b^*_{k-1}\ \eta_{k-1})_j + (a_k\ \eta_k)_j + (b_k\ \eta_{k+1})_j,\ k \in \mathbb{N},\ j=1,\dots,m.$$

Ce qui donne la relation (**).

On remarque que puisque b_k est inversible pour chaque entier k, alors la suite $(\eta_n)_{n \geq o}$ est déterminée d'une manière unique par la relation (**) et le choix de $\eta_o = \sum_{i=1}^{m} \zeta_i e_i$.

Par suite si $g_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \zeta_n d_n$ et $g_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \zeta'_n\ d_n$, appartiennent à $\mathrm{Ker}(A^*-\lambda_o I)$ et si $\zeta_i = \zeta'_i$ pour $i=1,2,\dots,m$, alors $\zeta_n = \zeta'_n$ pour tout entier $n \geq 1$, d'où $g_1 = g_2$.

Avec cette propriété, on va montrer que si $f = \sum_{n=1}^{+\infty} \zeta_n d_n$ est un élément de $\mathrm{Ker}(A^* - \lambda_o I)$ alors pour tout entier $n \geq 1$ on a $\zeta_n = \sum_{p=1}^{m} \zeta_p\ \overline{d^{(p)}_n(\overline{\lambda}_o)}$.

En effet, on pose $\beta_n = \sum_{p=1}^{m} \zeta_p \overline{d^{(p)}_n(\overline{\lambda}_o)}$.

Puisque $P_o(\lambda) = I$, on a $d_i(\lambda) = e_i$ pour $i=1,\dots,m$, donc $\zeta_i = \beta_i$ pour $i=1,\dots,m$. Pour conclure que $\zeta_n = \beta_n$ pour tout entier $n \geq 1$, il suffit alors de prouver que les β_n vérifient la relation (*).

Or on a $\lambda_o\ \beta_{km+j} = \sum_{q=1}^{m} \zeta_q\ \lambda_o\ \overline{d^{(q)}_{km+j}(\overline{\lambda}_o)} = \sum_{q=1}^{m} \zeta_q\ \overline{\overline{\lambda}_o d^{(q)}_{km+j}(\overline{\lambda}_o)}$.

Par la proposition (3.1.1) on obtient alors :

$$\lambda_o\ \beta_{km+j} = \sum_{q=1}^{m} \zeta_q \sum_{p=1}^{m} \{\overline{b_{k-1}(p,j)}\overline{d^{(q)}_{(k-1)m+p}(\overline{\lambda}_o)} + \overline{a_k(p,j)}\overline{d^{(q)}_{km+p}(\overline{\lambda}_o)}$$

$$+ \overline{b^*_k(p,j)}\ \overline{d^{(q)}_{(k+1)m+p}(\overline{\lambda}_o)}\}$$

$$= \sum_{p=1}^{m} \{b^*_{k-1}(j,p)\beta_{(k-1)m+p} + a_k(j,p)\beta_{km+p} + b_k(j,p)\beta_{(k+1)m+p}\}.$$

C'est la relation (*), donc $\zeta_n = \beta_n$ pour tout entier $n \geq 1$.
On a obtenu le résultat suivant :

(3.1.2) THEOREME. - *Soit* $\lambda_o \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *et soit* $f = \sum_{k=1}^{+\infty} \zeta_k d_k$ *avec* $\sum_{k=1}^{+\infty} |\zeta_k|^2 < +\infty$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) $f \in \mathrm{Ker}(A^* - \lambda_o I)$.

(b) Pour chaque entier k *et tout* $j=1,\dots,m$, *on a :*

$$\lambda_o \zeta_{km+j} = \sum_{i=1}^{m} \{b^*_{k-1}(j,i)\zeta_{(k-1)m+i} + a_k(j,i)\zeta_{km+i}$$

$$+ b_k(j,i)\zeta_{(k+1)m+i}\}.$$

(c) Pour chaque entier n, *on a :*

$$\zeta_n = \sum_{p=1}^{m} \zeta_p \overline{d_n^{(p)}(\bar{\lambda}_o)}.$$

Lien entre $\Gamma(\lambda_o)$ et les indices de défaut. - On va établir un lien entre m_+ et m_-, et la dimension de Im $\Gamma(\lambda_o)$, Im $\lambda_o \neq 0$.

(3.1.3) PROPOSITION. - *Soit* $\lambda_o \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. *On désigne par* $\mathscr{C}_{\lambda_o}$ *l'espace vectoriel des* $y \in M$, *tels que la suite* $< E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)y,y >$ *soit convergente (ou bornée). Alors on a :*

$$\dim \mathscr{C}_{\lambda_o} = \dim \mathrm{Ker}(A^* - \lambda_o I).$$

Preuve. - Si $x,y \in M$, alors on a :

$$< E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)x,y > = \sum_{k=o}^{n} < P_k(\lambda_o)x,\ P_k(\lambda_o)y >, \quad \text{donc}$$

$$|< E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)x,y >|^2 \leq \Big(\sum_{k=o}^{n} \|P_k(\lambda_o)x\|^2\Big)\Big(\sum_{k=o}^{n} \|P_k(\lambda_o)y\|^2\Big)$$

$$= < E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)x,x > \ < E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)y,y >.$$

Avec cette inégalité, on voit que $\mathscr{C}_{\lambda_o}$ est un espace vectoriel.
On définit $\varphi : \mathscr{C}_{\lambda_o} \to \mathrm{Ker}(A^* - \lambda_o I)$ par :

si $y = \sum_{p=1}^{m} \zeta_p e_p \in \mathscr{C}_{\lambda_o}$ alors $\varphi(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \zeta_n d_n$ où

$$\zeta_n = \sum_{p=1}^{m} \zeta_p \overline{d_n^{(p)}(\overline{\lambda}_o)} \qquad n \text{ entier } \geq 1.$$

Pour montrer que $\varphi(y) \in \mathrm{Ker}(A^* - \lambda_o I)$ il suffit d'après le théorème (3.1.2) de montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} |\zeta_k|^2 < +\infty$. On a

$$\sum_{k=1}^{(n+1)m} |\zeta_k|^2 = \sum_{k=1}^{(n+1)m} \sum_{i,j=1}^{m} \zeta_i \overline{d_k^{(i)}(\overline{\lambda}_o)} \overline{\zeta}_j d_k^{(j)}(\overline{\lambda}_o)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} \zeta_i \overline{\zeta}_j \sum_{k=1}^{(n+1)m} \overline{d_k^{(i)}(\overline{\lambda}_o)}\, d_k^{(j)}(\overline{\lambda}_o) = \sum_{i,j=1}^{m} \zeta_i \overline{\zeta}_j E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)(j,i)$$

Car $E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)(j,i) = \sum_{k=o}^{n} (P_k(\lambda_o)^* P_k(\lambda_o))(j,i)$

$$= \sum_{k=o}^{n} \sum_{p=1}^{m} P_k(\lambda_o)^*(j,p) P_k(\lambda_o)(p,i)$$

$$= \sum_{k=o}^{n} \sum_{p=1}^{m} \overline{P_k(\lambda_o)(p,j)} P_k(\lambda_o)(p,i) = \sum_{k=o}^{n} \sum_{p=1}^{m} d_{km+p}^{(j)}(\overline{\lambda}_o) \overline{d_{km+p}^{(i)}(\overline{\lambda}_o)}$$

$$= \sum_{k=1}^{(n+1)m} d_k^{(j)}(\overline{\lambda}_o) \overline{d_k^{(i)}(\overline{\lambda}_o)}.$$ Donc

$$\sum_{k=1}^{(n+1)m} |\zeta_k|^2 = \langle E_n^{\lambda_o}(\lambda_o) y, y \rangle.$$ D'où

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\zeta_k|^2 = \lim_{n \to +\infty} \langle E_n^{\lambda_o}(\lambda_o) y, y \rangle < +\infty.$$

L'application φ est linéaire et injective. Elle est aussi surjective par le théorème (3.1.2)(c). Donc

$$\dim \mathscr{C}_{\lambda_o} = \dim \mathrm{Ker}(A^* - \lambda_o I). \qquad \square$$

On rappelle que $\Gamma(\lambda_o) = \lim_{n \to +\infty} E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)^{-1} \qquad (\lambda_o \in \mathbb{C}).$

On a le résultat :

(3.1.4) PROPOSITION. - *Soit* $\lambda_o \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, *on a*

$$\operatorname{Im} \Gamma(\lambda_o) = \mathscr{C}_{\lambda_o}.$$

Preuve. - On a $\operatorname{Im} \Gamma(\lambda_o) \subset \mathscr{C}_{\lambda_o}$.

En effet, soit $y = \Gamma(\lambda_o)x \in \operatorname{Im} \Gamma(\lambda_o)$, $x \in M$.

On pose pour tout entier n : $T_n = E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)$.

Puisque $0 < T_p < T_q$ si $p < q$, et T_n est inversible pour tout entier n, alors on a :

$$\| T_p^{1/2} \, T_q^{-1/2} \| < 1.$$

Donc on obtient, avec le fait que $T_q^{-1} < I$:

$$\| T_p^{1/2} T_q^{-1} \, x \|^2 = \| T_p^{1/2} T_q^{-1/2} \, . \, T_q^{-1/2} x \|^2 < \| T_q^{-1/2} x \|^2 = < T_q^{-1} x, x > < \|x\|^2.$$

Donc $< T_p \, T_q^{-1} x, \, T_q^{-1} x > < \|x\|^2$ si $p < q$.

On fait tendre q vers $+ \infty$, on obtient à la limite :

$$< T_p \, \Gamma(\lambda_o)x, \, \Gamma(\lambda_o)x > < \|x\|^2 \qquad \text{pour tout entier p.}$$

Ce qui prouve que la suite croissante $< T_p y, y >$ est bornée, donc $y \in \mathscr{C}_{\lambda_o}$.

On a $\operatorname{Im} \Gamma(\lambda_o) = \mathscr{C}_{\lambda_o}$.

En effet, si $y \in \mathscr{C}_{\lambda_o}$ avec $< y, \Gamma(\lambda_o)x > = 0$ pour tout $x \in M$, alors en particulier $< y, \Gamma(\lambda_o)y > = 0$.

Donc puisque $y \in \mathscr{C}_{\lambda_o}$ on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} < T_n^{-1} y, y > < T_n y, y > = 0$.

Or, pour chaque entier n, on a :

$$\|y\|^2 = < y, y > = < T_n^{-1/2} T_n^{1/2} y, y > = < T_n^{1/2} y, \, T_n^{-1/2} y > < \| T_n^{1/2} y \| . \| T_n^{-1/2} y \|.$$

Donc $\|y\|^4 \leqslant \langle T_n y, y \rangle \langle T_n^{-1} y, y \rangle$.

Le terme à droite converge vers 0 quand $n \to +\infty$, d'où $y=0$, ce qui termine la preuve. □

Par les propositions (3.1.3) et (3.1.4) on obtient le résultat suivant, qui est énoncé dans ([3], p. 133) sans démonstration.

(3.1.5) THEOREME. - *On a :*

(a) Si $\lambda_o \in \Pi_+$ *alors* $\dim \operatorname{Im} \Gamma(\lambda_o) = m_+$.

(b) Si $\lambda_o \in \Pi_-$ *alors* $\dim \operatorname{Im} \Gamma(\lambda_o) = m_-$.

On tire un corollaire important :

(3.1.6) COROLLAIRE. - *Si* $\lambda_o \in \Pi_+$ *(respectivement* $\lambda_o \in \Pi_-$*) alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) $m_+ = 0$ *(respectivement* $m_- = 0$*).*

(b) $\Gamma(\lambda_o) \equiv 0$.

(3.1.7) PROPOSITION. - *Pour tout entier* $n \geqslant 1$, *et tout* $\lambda_o \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *on a :*

$$\operatorname{Im} \Gamma(\lambda_o) = \operatorname{Im} \Gamma(\lambda_o)^n.$$

Preuve. - Il suffit de montrer qu'on a $\operatorname{Im}\Gamma(\lambda_o) = \operatorname{Im}\Gamma(\lambda_o)^2$. On a déjà $\operatorname{Im}\Gamma(\lambda_o)^2 \subset \operatorname{Im}\Gamma(\lambda_o)$.

Soit $y = \Gamma(\lambda_o)x$, $x \in M$, avec $\langle y, \Gamma(\lambda_o)^2 u \rangle = 0$, pour tout $u \in M$.
Alors pour $u=x$ on obtient $\langle y, \Gamma(\lambda_o) y \rangle = 0$.

Or par la proposition (3.1.4) on a $y \in \mathscr{C}_{\lambda_o} = \operatorname{Im}\Gamma(\lambda_o)$, donc

$$\lim_{n \to +\infty} \langle E_n^{\lambda_o}(\lambda_o) y, y) \rangle \langle E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)^{-1} y, y \rangle = 0.$$

Mais on a pour tout entier n :

$$\|y\|^4 = \langle E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)^{-1/2} E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)^{1/2} y, y \rangle^2 = \langle E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)^{1/2} y, E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)^{-1/2} y \rangle^2$$

$$\leqslant \|E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)^{1/2} y\|^2 \, \|E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)^{-1/2} y\|^2 = \langle E_n^{\lambda_o}(\lambda_o) y, y \rangle \langle E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)^{-1} y, y \rangle.$$

On tire que y=0. Ce qui termine la preuve. □

Cas où $m_+=m$, ou $m_-=m$. - On va maintenant caractériser le cas $m_+=m$ (respectivement $m_-=m$).

(3.1.8) PROPOSITION. - *Soit* $\lambda_o \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) $m_+=m$ *si* $\lambda_o \in \Pi_+$ *(respectivement* $m_-=m$ *si* $\lambda_o \in \Pi_-$*).*

(b) La suite des matrices $E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)$ *converge quand* $n \to +\infty$.

(c) La matrice $\Gamma(\lambda_o)$ *est inversible.*

(d) On a $\sum_{k=1}^{+\infty} \|d_k(\overline{\lambda}_o)\|^2 < +\infty$.

Preuve. - Par le théorème (3.1.5) on a (a) est équivalente à (c). Par la proposition (3.1.3) on a (a) est équivalente à (b). Reste seulement à prouver l'équivalence entre (b) et (d). Soit $\lambda_o \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, d'une part on a :

$$\sum_{k=1}^{(n+1)m} \|d_k(\overline{\lambda}_o)\|^2 = \sum_{k=1}^{(n+1)m} \sum_{p=1}^{m} |d_k^{(p)}(\overline{\lambda}_o)|^2 = \sum_{p=1}^{m} \sum_{k=1}^{(n+1)m} |d_k^{(p)}(\overline{\lambda}_o)|^2 .$$

D'autre part, on a :

$$< E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)e_p, e_p > = \sum_{k=o}^{n} (P_k(\lambda_o)^* P_k(\lambda_o))(p,p)$$

$$= \sum_{k=o}^{n} \sum_{q=1}^{m} \overline{P_k(\lambda_o)(q,p)}\; P_k(\lambda_o)(q,p)$$

$$= \sum_{k=o}^{n} \sum_{q=1}^{m} d_{km+q}^{(p)}(\overline{\lambda}_o)\; \overline{d_{km+q}^{(p)}(\overline{\lambda}_o)} = \sum_{k=1}^{(n+1)m} |d_k^{(p)}(\overline{\lambda}_o)|^2 . \text{ Donc}$$

$$\sum_{k=1}^{(n+1)m} \|d_k(\overline{\lambda}_o)\|^2 = \sum_{p=1}^{m} < E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)e_p, e_p > .$$

Avec cette égalité on a (b) ⇒ (d).

Pour la réciproque, on remarque que puisque $E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)$ est une matrice hermitienne positive, alors pour chaque $y \in M$, on a :

$$0 \leq \langle E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)y,y\rangle \leq \|y\|^2 \operatorname{tr} E_n^{\lambda_o}(\lambda_o) = \|y\|^2 \sum_{p=1}^{m} \langle E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)e_p,e_p\rangle$$

Donc $0 \leq \langle E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)y,y\rangle \leq \|y\|^2 \sum_{k=1}^{(n+1)m} \|d_k(\overline{\lambda}_o)\|^2.$

D'où (d) $\Rightarrow$ (b). □

Cas où $m_+ = m_-$. - Dans le cas scalaire $m=1$, on a $m_+ = m_-$ toujours. Dans le cas général $m > 1$, on a une condition suffisante pour que $m_+ = m_-$.

(3.1.9) PROPOSITION. - *Si pour chaque entier* k, *la matrice* S_k *est réelle, alors* $m_+ = m_-$.

Preuve. - On définit $V : \mathcal{L} \to \mathcal{L} \subset H$ par

$$(Vf)(\lambda) = \sum_{k=o}^{n} \lambda^k \overline{x}_k \quad \text{si} \quad f(\lambda) = \sum_{k=o}^{n} \lambda^k x_k.$$

On a $V^2=I$, V est trivialement une isométrie, on la prolonge à H, et on la note par V.

L'isométrie V est une conjugaison. En effet, si $f,g \in \mathcal{L}$,

$f(\lambda) = \sum_{k=o}^{n} \lambda^k \overline{x}_k$ et $g(\lambda) = \sum_{j=o}^{N} \lambda^j y_j$, alors on a :

$$[Vf,Vg] = [\sum_k \lambda^k x_k, \sum_j \lambda^j \overline{y}_j] = \sum_{k=o}^{n} \sum_{j=o}^{N} \langle S_{k+j}\, \overline{x}_k,\overline{y}_j\rangle$$

$$= \sum_{k=o}^{n} \sum_{j=o}^{N} \langle S_{k+j}y_j,x_k\rangle = [g,f]$$, avec la remarque que si S est une matrice hermitienne réelle, alors $\langle S\overline{x},\overline{y}\rangle = \langle Sy,x\rangle$ puisque

si $x = \sum_{i=1}^{m} \zeta_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{m} \zeta_j' e_j$ alors

$$\langle S\overline{x},\overline{y}\rangle = \sum_{i,j=1}^{m} S(i,j)\overline{\zeta}_j\, \zeta_i' = \sum_{i,j=1}^{m} S(j,i)\overline{\zeta}_j\, \zeta_i' = \langle Sy,x\rangle$$

à cause de l'égalité $S(i,j) = S(j,i)$.

La conjugaison V commute avec A car si $f \in \mathcal{L}$ avec $f(\lambda) = \sum_{k=o}^{n} \lambda^k x_k$, on pose $g(\lambda) = \lambda f(\lambda)$, alors on obtient :

$$(AVf)(\lambda) = \lambda(Vf)(\lambda) = \lambda \sum_{k=o}^{n} \lambda^k \overline{x_k} = (Vg)(\lambda) = (VAf)(\lambda).$$

On tire alors que $m_+ = m_-$. □

Remarque. - Il y a une autre démonstration de cette proposition qui consiste à prouver que si les S_k sont réelles, alors la suite θ-orthonormée $(P_n(\lambda))_n$ vérifie $P_n(\overline{\lambda}) = \overline{P_n(\lambda)}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout entier n.

Puis on utilise le théorème (3.1.2) pour conclure que $m_+ = m_-$. Dans le cas m=1, on a $m_+ = m_-$ justement parce qu'on a toujours $P_n(\overline{\lambda}) = \overline{P_n(\lambda)}$.

Exemple où $m_+ = m_- = p$, avec $1 < p < m$. - On a un résultat qui montre que m_+ (respectivement m_-) prend toutes les valeurs comprises entre 1 et m. De plus ce résultat montre que la réciproque de la proposition (1.1.5) (b) est fausse.

(3.1.10) PROPOSITION. - *Pour chaque entier* p=1,2,...,m, *il existe une suite* $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$, *de moments matriciels, sur* $\mathbb{R}$, *telle que les indices de défaut associés soient* $m_+ = m_- = p$. *De plus, on peut choisir* $(S_k)_k$ *telle qu'elle soit de type défini positif (respectivement* $(S_k)_k$ *n'est pas de type défini positif si* $p < m$*).*

Preuve. - Soit p fixé, p=1,...,m.
Soit $(\alpha_n)_n$ une suite scalaire de moments sur $\mathbb{R}$, déterminée, $\alpha_o = 1$.
Soit $(\beta_n)_n$ une suite scalaire de moments sur $\mathbb{R}$, indéterminée, $\beta_o = 1$.
On désigne par $(f_k(\lambda))_{k \in \mathbb{N}}$, la suite des polynômes scalaires $(P_k(\lambda))_k$ associée à $(\alpha_n)_n$, et par $(g_k(\lambda))_k$ celle associée à $(\beta_n)_n$.
On pose

$$S_n = \begin{bmatrix} \beta_n & 0 \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \beta_n & \vdots \\ \vdots & \alpha_n & 0 \\ 0 \cdots\cdots & 0 & \alpha_n \end{bmatrix} \updownarrow p \qquad \text{matrice } m \times m$$

c'est-à-dire : $< S_n e_i, e_j > = 0$ si $i \neq j$

$$< S_n e_i, e_i > = \beta_n \quad \text{si} \quad i=1,\dots,p \quad \text{et}$$

$$< S_n e_i, e_i > = \alpha_n \quad \text{si} \quad i=p+1,\dots,m.$$

Il existe deux mesures positives scalaires $\alpha(.)$ et $\beta(.)$, telles que :

$$\alpha_n = \int t^n d\alpha(t) \quad \text{et} \quad \beta_n = \int t^n d\beta(t) \quad \text{pour tout entier } n.$$

Soit $T(.)$ la mesure quasi-spectrale sur H, définie par :

$$T(.) = \beta(.)\Pi_p + \alpha(.)(I-\Pi_p) \quad \text{où}$$

$$\Pi_p : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$$

$$(\zeta_1,\dots,\zeta_m) \to (\zeta_1,\dots,\zeta_p,0,\dots,0).$$

On obtient $S_n = \int \lambda^n dT(\lambda)$ pour tout entier n.

On va montrer que les indices de défaut associés à cette suite $(S_n)_n$ sont $m_+ = m_- = p$. On pose

$$P_n(\lambda) = \begin{bmatrix} g_n(\lambda) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & g_n(\lambda) & & & \vdots \\ \vdots & & f_n(\lambda) & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & f_n(\lambda) \end{bmatrix} \begin{array}{l} \Big\updownarrow p \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \qquad \text{matrice } m \times m$$

c'est-à-dire $P_n(\lambda) = g_n(\lambda)\Pi_p + f_n(\lambda)(I-\Pi_p)$.

On a $P_o(\lambda) = I$ car $g_o(\lambda) = f_o(\lambda) = 1$.

On remarque que si $h(t) = \sum_{i=1}^{m} h_i(t)e_i$ et $\ell(t) = \sum_{j=1}^{m} \ell_j(t)e_j$ sont deux éléments de $\mathcal{L}$, alors :

$$[h,\ell] = \sum_{i=1}^{m} \int h_i(t)\overline{\ell_i(t)}\, d< T(t)e_i, e_i >$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \int h_i(t)\overline{\ell_i(t)} d\beta(t) + \sum_{j=p+1}^{m} \int h_j(t)\overline{\ell_j(t)} d\alpha(t)$$

On a $\theta(P_n,P_k) = \delta_{nk}I$. En effet :

Pour i,j=1,...,m, on a :

Si i≠j, $[\overline{P_n(i,.)}, \overline{P_k(j,.)}] = \sum_{q=1}^{m} \int \overline{P_n(t)(i,q)}P_k(t)(j,q)d<T(t)e_q,e_q> = 0.$

Si i=j ≤ p, alors

$$[\overline{P_n(i,.)}, \overline{P_k(j,.)}] = \int \overline{g_n(t)}g_k(t)d\beta(t) = \delta_{kn},$$

et si i=j ≥ p+1, alors :

$$[\overline{P_n(i,.)}, \overline{P_k(j,.)}] = \int \overline{f_n(t)}f_k(t)d\alpha(t) = \delta_{kn}.$$

On obtient $\theta(P_n,P_k) = \delta_{nk} I$.

On a $E_n^{\lambda_o}(t) = \sum_{k=o}^{n} P_k(\lambda_o)^* P_k(t)$ donc pour $x = \sum_{i=1}^{m} \zeta_i e_i \in M$, on a :

$$< E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)x,x > = \sum_{i,j=1}^{m} \zeta_i \overline{\zeta_j} < E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)e_i,e_j >$$

$$= \sum_{i=1}^{m} |\zeta_i|^2 \sum_{k=o}^{n} |g_k(\lambda_o)|^2 + \sum_{j=p+1}^{m} |\zeta_j|^2 \sum_{k=o}^{n} |f_k(\lambda_o)|^2.$$

Or pour chaque $\lambda_o \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on a $\sum_{k=1}^{+\infty} |g_k(\lambda_o)|^2 < +\infty$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k(\lambda_o)|^2 = +\infty$ (AKHIEZER [1], théorème (2.1.2) page 34 et le corollaire (2.2.4) page 41).

Soit $\mathscr{C}_{\lambda_o}$ l'espace vectoriel défini dans la proposition (3.1.3) on a alors $e_1,\dots,e_p \in \mathscr{C}_{\lambda_o}$, mais si $< x,e_j > = 0$ pour j=1,...,p alors $x \notin \mathscr{C}_{\lambda_o}$, d'où dim $\mathscr{C}_{\lambda_o} = p$, pour chaque $\lambda_o \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Ce qui montre, d'après la proposition (3.1.3), que $m_+ = m_- = p$.

Si $h \in \mathcal{L}$, $h(t) = \sum_{i=1}^{m} h_i(t)e_i$, alors on a :

$$[h,h] = \sum_{i=1}^{p} \int |h_i(t)|^2 d\beta(t) + \sum_{i=p+1}^{m} \int |h_i(t)|^2 d\alpha(t).$$

Donc $[h,h] = 0$ est équivalent à :

$$\int |h_i(t)|^2 d\beta(t) = \int |h_j(t)|^2 d\alpha(t) = 0, \quad \text{pour } i=1,\dots,p \text{ et } j = p+1,\dots,m.$$

Si on choisit $\beta(.)$ et $\alpha(.)$ à support infini, alors on obtient $[h,h] = 0$ si et seulement si $h_i \equiv 0$ $i=1,\dots,m$, c'est-à-dire $h \equiv 0$. Donc la suite $(S_k)_k$ est de type défini positif. D'autre part si $p < m$, si on prend $\alpha(.)$ à support fini alors il va exister un polynôme $\ell(t)$ à coefficients complexes, non nul, tel que :

$$\int |\ell(t)|^2 d\alpha(t) = 0.$$

On pose $f(t) = \ell(t)e_m$, on a alors

$[f,f] = \int |\ell(t)|^2 d\alpha(t) = 0$, avec $f \not\equiv 0$, donc dans ce cas, la suite $(S_k)_k$ n'est pas de type défini positif. □

3.2. PROBLEME D'UNICITE ET LA MATRICE $\Gamma(\lambda)$.

Avec le corollaire (3.1.6) on obtient :

(3.2.1) COROLLAIRE. - *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) $m_+ \neq 0$ *(respectivement* $m_- \neq 0$*).*
(b) Il existe $\lambda_o \in \Pi_+$ *(respectivement à* Π_-*) tel que* $\Gamma(\lambda_o) \not\equiv 0$.
(c) Pour tout $\lambda_o \in \Pi_+$ *(respectivement à* Π_-*) on a* $\Gamma(\lambda_o) \not\equiv 0$.

Ce résultat ne fait intervenir que les $\lambda_o \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, mais dans la suite on aura besoin d'une propriété entre les indices de défaut et la matrice $\Gamma(\lambda_o)$ avec λ_o réel. On a le résultat suivant :

(3.2.2) PROPOSITION. - *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) $m_+ \neq 0$ *(respectivement* $m_- \neq 0$*).*
(b) Pour tout λ_o, $\mathrm{Im}\,\lambda_o > 0$ *(respectivement* $\mathrm{Im}\,\lambda_o < 0$*) on a* $\Gamma(\lambda_o) \not\equiv 0$.

Preuve. - Il suffit d'appliquer le corollaire (3.2.1) et de prouver ceci :

(*) Si pour tout $\lambda \in \Pi_+$ on a $\Gamma(\lambda) \not\equiv 0$ alors $\Gamma(\lambda_o) \not\equiv 0$ pour tout λ_o réel.

Pour montrer (*) il suffit de montrer qu'on a :

$$\Gamma(\lambda_o + i\beta) < \Gamma(\lambda_o) \quad \text{pour tout } \beta > 0, \text{ et tout réel } \lambda_o.$$

Soit λ_o réel et $\beta > 0$, pour tout entier n on a :

$$(**) \qquad E_n^{\lambda_o}(\lambda_o) < E_n^{\lambda_o+i\beta}(\lambda_o+i\beta).$$

Si (**) est montré, alors on obtient :

$$0 < \Gamma(\lambda_o+i\beta) < E_n^{\lambda_o+i\beta}(\lambda_o+i\beta)^{-1} < E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)^{-1}.$$

Donc $\Gamma(\lambda_o+i\beta) < E_n^{\lambda_o}(\lambda_o)^{-1}$ pour tout entier n, d'où à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient $\Gamma(\lambda_o+i\beta) < \Gamma(\lambda_o)$. Reste seulement à prouver (**), pour cela il suffit de montrer

$$P_k(\lambda_o)^* P_k(\lambda_o) < P_k(\lambda_o+i\beta)^* P_k(\lambda_o+i\beta)$$

pour chaque entier k.
Soit $x \in M$, $x \neq 0$, on pose $R(\lambda) = \|P_k(\lambda)x\|^2 = < P_k(\lambda)^* P_k(\lambda)x, x >$.
On veut montrer que $R(\lambda_o) < R(\lambda_o+i\beta)$.
On remarque que $R(\lambda)$ est un polynôme à coefficients complexes et que ses racines sont réelles. En effet, si $R(\tau_o) = 0$, alors $P_k(\tau_o)x = 0$, d'où τ_o est un zéro de $\det P_k(\lambda) = 0$, donc par la proposition (2.2.3) on a τ_o est réel.
On note par $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les zéros de $R(\lambda)$, avec leur multiplicité on a alors : $R(\lambda) = \alpha \prod_{j=1}^{p} (\lambda-\lambda_j)$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Donc

$$|R(\lambda_o+i\beta)|^2 = |\alpha|^2 \prod_{j=1}^{p} (\lambda_o-\lambda_j+i\beta)(\lambda_o-\lambda_j-i\beta)$$

$$= |\alpha|^2 \prod_{j=1}^{p} ((\lambda_o-\lambda_j)^2 + \beta^2) > |\alpha|^2 \prod_{j=1}^{p} (\lambda_o-\lambda_j)^2 = | R(\lambda_o)|^2$$

Donc $R(\lambda_o+i\beta) > R(\lambda_o)$, d'où

$$P_k(\lambda_o)^* P_k(\lambda_o) < P_k(\lambda_o+i\beta)^* P_k(\lambda_o+i\beta)$$

ce qui termine la preuve. □

On tire un corollaire important.

(3.2.3) COROLLAIRE. - *Si* $m_+ \neq 0$ *ou* $m_- \neq 0$, *alors pour tout* λ_o *réel, on a* $\Gamma(\lambda_o) \neq 0$.

Première condition nécessaire et suffisante, pour que le problème soit déterminé.

(3.2.4) THEOREME. - *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) $m_+ = 0$ *ou* $m_- = 0$.

(b) Le problème est déterminé.

(c) $m_+ = m_- = 0$.

Preuve. - On a (a) $\Rightarrow$ (b) par le corollaire (1.1.9).

(b) $\Rightarrow$ (c).

Si le problème est déterminé, alors $m_+ = m_- = 0$, car sinon $m_+ \neq 0$ ou $m_- \neq 0$, d'où d'après le corollaire (3.2.3) on a $\Gamma(\lambda_o) \neq 0$, pour tout λ_o réel.

Donc avec le théorème (2.4.1), pour chaque $\lambda_o \in \mathbb{R} \setminus \mathscr{E}$, où $\mathscr{E}$ est un ensemble au plus dénombrable, il existe une solution $\mu_{\lambda_o}(.)$, qui prend la masse $\Gamma(\lambda_o) \neq 0$, au point λ_o. Puisque le problème est déterminé, alors l'unique solution $\mu(.)$ prend une masse non nulle en chaque point $\lambda_o \in \mathbb{R} \setminus \mathscr{E}$, ce qui est absurde puisque $\mathbb{R} \setminus \mathscr{E}$ n'est pas dénombrable.

(c) $\Rightarrow$ (a) Evident. □

Deuxième condition nécessaire et suffisante, pour que le problème soit déterminé.

Dans le cas scalaire m=1, on a $\Gamma(\lambda_o) = \left(\sum_{k=o}^{+\infty} |P_k(\lambda_o)|^2 \right)^{-1}$ et on a le résultat : le problème est indéterminé si et seulement si $\sum_{k=o}^{+\infty} |P_k(\lambda_o)|^2 < +\infty$, pour tout $\lambda_o \in \mathbb{C}$ (AKHIEZER [1], th. (2.1.2) page 34, et corollaire (2.2.4) page 41). Par le théorème (3.2.4) et la proposition (3.2.2) on a un résultat analogue pour $m > 1$.

(3.2.5) THEOREME. - *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) Le problème est indéterminé.

(b) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ *on a* $\Gamma(\lambda) \not\equiv 0$.

Un corollaire immédiat du théorème précédent est :

(3.2.6) COROLLAIRE. - *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) Le problème est déterminé.

(b) Il existe $\lambda_o \in \mathbb{C}$, *tel que* $\Gamma(\lambda_o) \equiv 0$.

Avec le théorème (2.4.1) et le théorème (3.2.5), on obtient le résultat suivant, pour m entier $\geqslant 1$, qui est la généralisation du théorème B de LANDAU ([4], page 256) fait dans le cas m=1.

(3.2.7) THEOREME. - *Soit* $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$, *une suite de matrices* m×m *hermitiennes, avec* $S_o=I$. *On suppose que c'est une suite de type défini positif.*

Si le problème est indéterminé, alors pour chaque $\lambda_o \in \mathbb{R} \setminus \mathscr{E}$, *il existe une solution* $\mu_{\lambda_o}(.)$ *du problème, qui prend la masse* $\Gamma(\lambda_o) \not\equiv 0$ *au point* λ_o. *La matrice* $\Gamma(\lambda_o)$ *est la plus grande masse que peut prendre une solution du problème au point* λ_o.

Remarque. - Par le théorème précédent, on voit que la classe des solutions du problème est ou bien réduite à un seul élément, ou bien elle est de cardinal non dénombrable.

*

BIBLIOGRAPHIE

[1] N.I. AKHIEZER : *The classical moment problem*, Oliver and Boyd Edinburgh (1965).

[2] F.V. ATKINSON : *Discrete and continuous boundary value problems*, New-York, London, Academic Press (1964).

[3] M.G. KREIN : *Fundamental aspects of the representation theory of hermitian operators with dificiency index* (m,m), Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. 97 (1970), p. 75-143.

[4] H.J. LANDAU : *The classical moment problem : Hilbertian proofs*, Journal of Functional Analysis, 38, p. 255-272 (1980).

[5] P. LANCASTER : *Lambda matrices and vibrating systems*, Pergamon Press, New-York, (1966).

[6] A.V. STRAUS : *Extensions and generalized resolvents of a symmetric operator which is not densely defined*, Math. USSR, Izvestija, Vol. 4, n° 1, p; 179-208 (1970).

[7] B. SZ-NAGY : *Prolongements des transformations de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace*, Appendice du livre : F. Riesz et B. Sz-NAGY : Leçons d'analyse fonctionnelle. Académie des Sciences de Hongrie, Budapest (1952).

*

THÈSE de L'UNIVERSITÉ DE LYON I (SCIENCES)

NOM : ZHANI (avec précision du nom de jeune fille, le cas échéant) Prénoms : Driss	DATE de SOUTENANCE 28 JUIN 1983

TITRE : "PROBLEME DES MOMENTS MATRICIELS SUR LA DROITE : CONSTRUCTION D'UNE FAMILLE DE SOLUTIONS ET QUESTIONS D'UNICITE".

NATURE : Numéro d'ordre : 1296

DOCT. d'UNIV.	DOCTEUR-INGENIEUR	DOCTORAT D'ETAT	DOCTORAT de 3e CYCLE	Spécialité : MATHEMATIQUES
☐	☐	☐	☒	

 CLASSE :

RÉSUMÉ :

Dans le chapitre 1, on définit les solutions N-extrémales et on les caractérise complètement. Cette caractérisation n'est donnée dans [3] par M.G. KREIN que dans un cas particulier.

Dans le chapitre 2, on introduit une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, à coefficients matriciels orthonormés vis-à-vis d'une certaine application bilinéaire sur l'espace des matrices. Puis on construit une famille de solutions du problème des moments matriciels.

Dans le chapitre 3, on donne deux conditions nécessaires et suffisantes équivalentes pour que le problème soit déterminé. Pour terminer on obtient le résultat suivant : Si le problème est indéterminé alors pour chaque $\lambda_o \in \mathbb{R} \setminus \mathscr{E}$, où $\mathscr{E}$ est un certain ensemble au plus dénombrable, il existe une solution $\mu(.)$ du problème qui prend au point λ_o une masse non nulle égale à la plus grande masse que peut prendre une solution du problème en ce point.

MOTS-CLES : Problème des moments matriciels et problème tronqué - Mesures quasi-spectrales et spectrales - Fonction spectrale d'un opérateur symétrique fermé - Suite de type positif - Solution N-extrémale - Les λ-matrices régulières et les λ-matrices simples.

Laboratoire (s) de recherches :

ANALYSE FONCTIONNELLE

Directeur de recherches : H. BUCHWALTER

Président de jury : J. BRACONNIER, Professeur (Lyon 1)

Composition du jury : H. BUCHWALTER, Professeur (Lyon 1)

A. GOLDMAN, Maître-Assistant (Lyon 1)