GILLES CASSIER

Problème des moments n-dimensionnel ; mesures quasi-spectrales et semi-groupes

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1983, fascicule 1D
« Problème des moments n-dimensionnel ; mesures quasi-spectrales et semi-groupes », ,
p. 3-118
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1983___1D_A1_0>

CHAPITRE 1. LE PROBLEME DES MOMENTS SUR [O,1]

Dans ce chapitre nous n'entreprendrons pas une nouvelle description "exhaustive" du problème des moments sur [o,1] , dit de Hausdorff. Nous comptons simplement en rappeler les grandes lignes, redonnant l'expression des deux conditions nécessaires et suffisantes connues. Néanmoins nous espérons apporter quelques éléments nouveaux dans cette question bien étudiée, en situant notre contribution sur trois points principaux.

- amélioration de l'expression donnant la seconde condition nécessaire et suffisante, préparant l'extension à des cas plus généraux.
- obtention d'un lemme élémentaire, permettant de prouver l'équivalence de ces deux conditions nécessaires et suffisantes.
- exposé et résolution du problème des semi-groupes associé.

(1.1). LE THEOREME CLASSIQUE DE HAUSDORFF.

Le problème est simple à poser. Il s'agit de caractériser toutes les suites (α_n) , $n \geqslant o$, qui sont des suites de moments

$$\alpha_n = \int_o^1 t^n \, d\mu(t)$$

d'une mesure positive (unique) sur l'intervalle [o,1]. La première solution de ce problème a été obtenue par HAUSDORFF [5]. Elle est bien exposée dans le livre de WIDDER [12] ; elle est exposée différemment dans celui de AKHIEZER [1] , suivant en cela les méthodes de HILDEBRANDT et SCHOENBERG [6] .

(1.1.1) THEOREME (HAUSDORFF). - *Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite (α_n) soit une suite de moments sur [o,1] est que l'on ait les inégalités*

$$\sum_{k=o}^{q} (-1)^k C_q^k \alpha_{p+k} \geqslant 0$$

pour tous les entiers $p,q \geqslant 0$.

On peut exprimer ce résultat d'une autre façon :

(1.1.2) THEOREME. - *Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite* (α_n) *soit une suite de moments sur* $[o,1]$ *est que la forme linéaire* L *, définie sur l'espace vectoriel* $\mathbb{R}[X]$ *des polynômes réels par les égalités* $L(X^n) = \alpha_n$, soit telle que

$$L(X^p(1-X)^q) \geqslant 0$$

pour tous les entiers $p,q \geqslant 0$.

(1.2). LA SECONDE CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE.

Cette seconde condition, exposée rapidement dans l'ouvrage cité de AKHIEZER, p. 74, est basée sur un résultat bien connu relatif aux polynômes P de degré m qui sont positifs sur l'intervalle $[o,1]$. Ces polynômes peuvent être représentés sous la forme

$$P = XA^2 + (1-X)B^2 \quad \text{si } m \text{ est impair}$$
$$P = A^2 + X(1-X)B^2 \quad \text{si } m \text{ est pair.}$$

On peut alors, en suivant AKHIEZER, reformuler une solution au problème des moments sur $[o,1]$, en introduisant la notion de matrice (infinie) de type positif.

On dit que la matrice réelle $M = [m_{ij}]$ est de type positif lorsque, pour toute suite finie (ξ_i) de réels, on a la condition

$$\sum_{i,j} m_{ij}\, \xi_i\, \xi_j \geqslant 0$$

Cela étant on a :

(1.2.1) THEOREME (AKHIEZER). - *Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite* (α_n) *soit une suite de moments sur* $[o,1]$ *est que les quatre matrices*

$$M_1 = [\alpha_{i+j}]$$

$$M_2 = [\alpha_{i+j+1}]$$

$$M_3 = [\alpha_{i+j} - \alpha_{i+j+1}]$$

$$M_4 = [\alpha_{i+j+1} - \alpha_{i+j+2}]$$

soient de type positif.

Nous allons montrer ici que ces conditions sont manifestement redondantes et peuvent être simplifiées. Il suffit pour cela de simplifier l'énoncé donnant la représentation des polynômes réels qui sont positifs sur l'intervalle $[o,1]$.

(1.2.2) PROPOSITION. - *Tout polynôme* $P \in \mathbb{R}[X]$ *qui est tel que* $P(x) \geqslant o$ *pour tout* $x \in [o,1]$ *peut se mettre sous la forme*

$$P = A^2 + X(1-X)B^2$$

où A *et* B *sont des polynômes réels convenables.*

PREUVE. La condition est évidemment nécessaire. Pour voir qu'elle est suffisante il faut opérer en plusieurs temps.

a) Les polynômes de la forme $P = A^2 + X(1-X)B^2$ sont stables par produit. Posons formellement $J = \sqrt{X(1-X)}$ et supposons $P = A^2 + J^2B^2 = (A+iJB)(A-iJB)$ et $Q = C^2 + J^2D^2 = (C+iJD)(C-iJD)$.

On a alors

$$PQ = (R + iJS)(R - iJS) = R^2 + X(1-X)S^2$$

avec $R + iJS = (A+iJB)(C+iJD)$, ce qui permet de choisir $R = AC - J^2BD = AC - X(1-X)BD$ et $S = AD + BC$.

b) Par décomposition de P en facteurs premiers on se ramène donc à deux cas simples :

- ou bien P a deux racines imaginaires conjuguées, soit $P = (X-a)^2+b^2$ avec $b > o$. On cherche alors u,v réels et $k > o$ pour que

$$(X-a)^2 + b^2 = (uX-v)^2 + X(1-X)k$$

ce qui fournit le système

$$\begin{cases} u^2 - k = 1 \\ -2uv + k = -2a \\ v^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$$

Un calcul élémentaire donne la solution suivante

$$\begin{cases} u = \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{(a-1)^2+b^2} \\ v = \sqrt{a^2+b^2} \\ k = 2[\sqrt{b^2+c^2} + c] \quad \text{avec } c = a(a-1)+b^2 \end{cases}$$

- ou bien P a une racine réelle a, soit $P = \pm(X-a)^\alpha$.

Alors si $a \in]o,1[$, α est nécessairement pair et $P = A^2$, et si $a \notin]o,1[$ on se ramène à $P = X-a$ pour $a \leqslant o$ et $P = a-X$ pour $a \geqslant 1$.

Pour $a \leqslant o$ on cherche u,v réels et $k > o$ pour que

$$X-a = (uX-v)^2 + X(1-X)k$$

d'où le système

$$\begin{cases} u^2 - k = o \\ -2uv + k = 1 \\ v^2 = -a \end{cases}$$

qui a pour solution (non unique)

$$\begin{cases} u = \sqrt{-a} + \sqrt{1-a} \\ v = \sqrt{-a} \\ k = 1-2a + 2\sqrt{a(a-1)} \end{cases}$$

et on procède de même sans difficulté pour $a > 1$. □

<u>REMARQUE</u>. La proposition n'est pas nouvelle puisqu'elle figure dans le livre classique de POLYA-SZEGÖ pour l'intervalle $[-1,+1]$ (Part. VI, n° 46). Par ailleurs G. CHOQUET nous a aimablement communiqué le fait qu'on pouvait établir une preuve plus directe, mais moins "élémentaire", en adaptant la preuve du lemme classique de Fejer qu'il donne dans l'exposé n° 4 du Séminaire d'Initiation à l'Analyse de 1962.

On tire de là immédiatement l'amélioration annoncée de (1.2.1) :

(1.2.3) <u>THEOREME</u>. - *Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite* (α_n) *soit une suite de moments sur* $[o,1]$ *est que les deux matrices*

$$M = [\alpha_{i+j}]$$
$$N = [\alpha_{i+j+1} - \alpha_{i+j+2}]$$

soient de type positif.

<u>PREUVE</u>. Soit L la forme linéaire définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $L(X^n) = \alpha_n$. Pour tout polynôme $Q = \Sigma\lambda_i X^i \in \mathbb{R}[X]$ on a évidemment

$$L(Q^2) = \sum_{i,j} \alpha_{i+j}\, \lambda_i\lambda_j \geqslant o$$

$$L(X(1-X)Q^2) = \sum_{i,j} (\alpha_{i+j+1} - \alpha_{i+j+2})\lambda_i\lambda_j \geqslant o$$

grâce aux hypothèses sur les matrices M et N. Il suit de là avec (1.2.2) que la condition $P \geqslant 0$ sur $[o,1]$ implique $L(P) \geqslant 0$. On en déduit aisément l'inégalité

$$|L(P)| \leqslant \|P\|_{[o,1]} L(1)$$

qui permet de prolonger la forme L à l'espace de Banach $C[o,1]$ en une mesure positive μ . Ainsi $L(P) = \int P d\mu$ et $\alpha_n = \int_o^1 t^n \, d\mu$. Par ailleurs la condition sur les matrices M et N était trivialement nécessaire . □

Par un changement de variable affine on ramène l'intervalle $[o,1]$ à l'intervalle $[a,b]$, ce qui permet d'énoncer :

(1.2.4) COROLLAIRE. - *Pour qu'une suite* (α_n) *soit la suite des moments d'une (unique) mesure positive sur l'intervalle* $[a,b]$ *il faut et il suffit que les matrices* $M = [\alpha_{i+j}]$ *et* $N = [(a+b)\alpha_{i+j+1} - \alpha_{i+j+2} - ab\alpha_{i+j}]$ *soient de type positif.*

PREUVE. Car tout polynôme P positif sur $[a,b]$ s'écrit selon $P = A^2 + (X-a)(b-X)B^2$.□

(1.3) LE LEMME DE LIAISON

Les deux énoncés (1.1.2) et (1.2.3) fournissent deux solutions au problème des moments sur $[o,1]$, obtenues par deux méthodes différentes. Il ne paraît pas aisé, à première vue, de les relier entre elles, c'est-à-dire de démontrer leur équivalence sans passer par la mesure μ solution du problème. Il est clair cependant que la condition de (1.2.3) implique celle de (1.1.2), d'après la proposition (1.2.2), puisque $P = X^p(1-X)^q$ est un polynôme positif sur $[o,1]$. La difficulté réside dans le passage de (1.1.2) à (1.2.3), et plus précisément dans le fait qu'un polynôme $P \geqslant 0$ sur $[o,1]$ n'est pas en général combinaison linéaire à coefficients positifs de polynômes $X^p(1-X)^q$; en effet ces polynômes $X^p(1-X)^q$ ont la propriété supplémentaire d'être *strictement* positifs sur l'intervalle ouvert $]o,1[$.

En fait le lemme de liaison s'énonce ainsi :

(1.3.1) LEMME. - *Pour qu'un polynôme* $P \in \mathbb{R}[X]$ *soit tel que* $P(x) > 0$ *pour tout* $x \in]o,1[$, *il faut et il suffit qu'il soit combinaison linéaire finie à coefficients positifs de polynômes* $X^p(1-X)^q$.

PREUVE. On se ramène à supposer $P(x) > 0$ pour tout $x \in [o,1]$ en commençant par diviser P par un polynôme $X^\alpha(1-X)^\beta$ où α et β sont les ordres des racines éventuelles $x = o$ et $x = 1$ de P. On utilise alors les polynômes de Bernstein

$$B_{n,k} = C_n^k \, X^k(1-X)^{n-k}$$

et la relation classique, valable pour $q \leqslant n$.

(1)
$$X^q = \sum_{k=o}^{n} \frac{k(k-1)\ldots\ldots(k-q+1)}{n(n-1)\ldots\ldots(n-q+1)} B_{n,k}$$

Fixons $P = \sum_{q=o}^{p} a_q X^q$ avec $p = d°P$. On peut supposer $p \geqslant 2$ car pour $p = 1$, P s'écrit $P(o)(1-X)+P(1)X$ et a la représentation voulue. Fixons maintenant $n \geqslant p$ et utilisons l'égalité (1) pour écrire

$$P = \sum_{k=o}^{n} b_k(n)B_{n,k} \qquad \text{avec} \qquad b_k(n) = \sum_{q=o}^{p} a_q \frac{k(k-1)\ldots(k-q+1)}{n(n-1)\ldots(n-q+1)}$$

On va montrer que l'on a $b_k(n) \geqslant 0$ pour tout k, à condition de choisir n assez grand. Pour cela on utilise l'inégalité évidente, démontrée par exemple par récurrence

$$y_o y_1 \ldots y_{q-1} - x_o x_1 \ldots x_{q-1} \leqslant \sum_{j=o}^{q-1} (y_j - x_j)$$

valable pour $0 \leqslant x_j \leqslant y_j \leqslant 1$, pour obtenir les inégalités suivantes lorsque $q \leqslant k+1$, avec $q \leqslant p \leqslant n$.

$$0 \leqslant (\frac{k}{n})^q - \frac{k(k-1)\dots(k-q+1)}{n(n-1)\dots(n-q+1)} \leqslant \sum_{j=o}^{q-1} (\frac{k}{n} - \frac{k-j}{n-j})$$

$$\leqslant \frac{n-k}{n} \sum_{j=o}^{q-1} \frac{j}{n-j} \leqslant \sum_{j=o}^{q-1} \frac{j}{n-j} \leqslant \frac{1}{n-p+1} \quad \frac{q(q-1)}{2} \quad .$$

Pour voir que la majoration reste valable pour $q \geqslant k+2$, il reste à vérifier $(\frac{k}{n})^q \leqslant \frac{q(q-1)}{2(n-p+1)}$. Or on a, puisque $2 \leqslant q \leqslant n$:

$$(\frac{k}{n})^q \leqslant (\frac{q-2}{n})^q \leqslant \frac{q-1}{n} \ (\frac{q-1}{n})^{q-1} \leqslant \frac{q-1}{n-p+1} \leqslant \frac{(q-1)}{n-p+1} \frac{q}{2} \ .$$

On tire de là, à partir de l'égalité

(2)
$$P(\frac{k}{n}) - b_k(n) = \sum_{q=o}^{p} a_q \left[(\frac{k}{n})^q - \frac{k(k-1)\dots(k-q+1}{n(n-1)\dots(n-q+1)} \right]$$

et compte tenu du fait que l'expression entre crochets [....] est positive, l'inégalité

$$P(\frac{k}{n}) - b_k(n) \leqslant \sum_{q=o}^{p} a_q^+ \ [\dots] \leqslant \frac{1}{n-p+1} \sum_{q=o}^{p} \frac{q(q-1)}{2} a_q^+$$

où l'on a pose $a_q^+ = \mathrm{Max}(a_q, o)$. Posons alors pour $P = \sum_{q=o}^{p} a_q X^q$

(3)
$$\lambda(P) = \frac{1}{2} \sum_{q=2}^{p} q(q-1) \ a_q^+$$

de sorte que l'on a

$$b_k(n) \geqslant P(\frac{k}{n}) - \frac{\lambda(P)}{n-p+1} \geqslant \operatorname*{Inf}_{[o,1]} P - \frac{\lambda(P)}{n-p+1} \quad .$$

En remarquant que $\operatorname*{Inf}_{[o,1]} P = || \frac{1}{P} ||^{-1}_{[o,1]}$, on voit qu'en choisissant

$$N = N(P) = d°P + E\left[\lambda(P) || \frac{1}{P} ||_{[o,1]}\right]$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x, on obtient $b_k(n) \geqslant 0$ pour tout k dès que $n \geqslant N$, ce qui termine la preuve. □

REMARQUE. L'intérêt de la démonstration est aussi de donner une minoration $N(P)$ du degré n des polynômes de Bernstein $B_{n,k}$ intervenant dans la décomposition "positive" de P. Il est clair que si P s'annule sur $]o,1[$ la décomposition est impossible, ce qui explique que $N(P)$ doit nécessairement augmenter quand $\mathrm{Inf}\, P$ se rapproche de zéro. On peut voir aussi que si P est tel que $\lambda(P) < \mathrm{Inf}\, P$, alors $N(P) = d^\circ P$. C'est par exemple le cas si l'on a $a_q \leqslant 0$ pour $q \geqslant 2$, ce qui implique d'ailleurs $P'' \leqslant 0$ sur $[o,1]$ et la concavité de P sur $[o,1]$. En fait le véritable problème (mais il est mineur) qui est posé dans cette remarque est l'obtention d'une valeur minimum de l'entier $N = N(P)$ à comparer au degré de P.

Il est maintenant clair que ce lemme (1.3.1) permet aisément le passage de la condition (1.1.2) à la condition (1.2.3). En effet avec (1.1.2) et (1.3.1) on obtient la condition $L(P) \geqslant 0$ pour tout polynôme $P > 0$ sur $]o,1[$, et par passage à la limite évident, on atteint la condition $L(P) \geqslant 0$ pour tout polynôme $P \geqslant 0$ sur $[o,1]$. En particulier on aura donc $L(A^2) \geqslant 0$ et $L(X(1-X)B^2) \geqslant 0$, ce qui n'est qu'une traduction de (1.2.3).

(1.4) LE PROBLEME DES SEMI-GROUPES

L'intervalle $[o,1]$ est évidemment stable par le produit $(x,y) \to xy$, ce qui permet la définition sur l'espace $M[o,1]$ des mesures (réelles signées) d'un produit de convolution "multiplicatif" $\mu\Box\nu$. Il suffit de définir $\mu\Box\nu$ comme l'image de $\mu\otimes\nu$ par l'application $(x,y) \to xy$. Il est alors évident que $\mu\Box\nu$ est positive lorsque μ et ν le sont, et que

$$\int t^n\, d(\mu_\Box\nu) = \iint (uv)^n d\mu(u)d\nu(v)$$

$$= \int u^n d\mu(u) . \int v^n d\nu(v)$$

On peut traduire cela autrement en disant que si (α_n) et (β_n) sont deux suites de moments sur $[o,1]$, il en est de même de la suite produit $(\alpha_n\beta_n)$. En particulier les suites (α_n^k) sont encore des suites de moments pour tout entier $k \geqslant 1$.

Par ailleurs un raisonnement de compacité évident, relatif à la boule unité faible de $M[o,1]$, garantit que si $(\alpha_n^{(k)})$ est une suite indexée par k, de suites de moments, telle que pour chaque n

$$\lim_{k \to \infty} \alpha_n^{(k)} = \beta_n$$

alors (β_n) est elle-même une suite de moments.

Ainsi en écrivant

$$e^{s\alpha_n} = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{s^k \alpha_n^k}{k!} \qquad s \geqslant 0$$

on voit encore que la suite exponentielle $(e^{s\alpha_n})$ est une suite de moments.

Mais si l'on considère la suite (e^{-sn}), on voit que c'est aussi la suite des moments de la mesure de Dirac $\mu = \delta_a$, avec $a = e^{-s} \in [o,1]$. Or la suite $(\alpha_n = -n)$, qui n'est ni bornée ni positive, ne saurait être une suite de moments sur $[o,1]$.

Par ces réflexions on est donc peu à peu amené à poser le problème suivant, dit des semi-groupes associé.

PROBLEME. *Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur la suite réelle* (α_n) *pour qu'elle engendre un semi-groupe de suites de moments, c'est-à-dire pour que toutes les suites* $(e^{s\alpha_n})$, $s \geqslant 0$, *soient des suites de moments sur* $[o,1]$.

La réponse, sans être très difficile à donner, n'est tout de même pas complètement évidente. Elle passe par l'introduction de la notion de matrice de type quasi-positif, généralisant celle de matrice de type positif.

(1.4.1) DEFINITION. - *On dit qu'une matrice réelle* $M = [m_{ij}]$ *est de type quasi-positif lorsque l'on a la condition*

$$\sum_{i,j} m_{ij} \xi_i \xi_j \geqslant 0$$

pour toute suite finie (ξ_i) *de réels telle que* $\Sigma \xi_i = 0$.

On a alors l'énoncé suivant, apportant toute la lumière sur la question :

(1.4.2) THEOREME. - *Soit* (α_n) *une suite réelle quelconque. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) La suite (α_n) *engendre un semi-groupe de suites de moments, c'est-à-dire que toutes les suites* $(e^{s\alpha_n})$, $s \geqslant 0$ *sont des suites de moments sur* $[o,1]$.

b) La matrice $M = [\alpha_{i+j}]$ *est de type quasi-positif et la matrice* $N = [\alpha_{i+j+1} - \alpha_{i+j+2}]$ *est de type positif.*

c) La suite $\beta_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}$ *est une suite de moments sur* $[o,1]$.

PREUVE.

a ⇒ b : A partir de a) on écrit les conditions, pour $s \geqslant 0$

$$(1) \qquad \sum_{i,j} e^{s\alpha_{i+j}} \xi_i \xi_j \geqslant 0$$

$$(2) \qquad \sum_{i,j} [e^{s\alpha_{i+j+1}} - e^{s\alpha_{i+j+2}}] \xi_i \xi_j \geqslant 0$$

pour toute suite réelle finie (ξ_i) . En supposant $\Sigma\xi_i = 0$ on peut récrire (1) sous la forme

$$\sum_{i,j} \frac{e^{s\alpha_{i+j}} - 1}{s} \xi_i \xi_j \geqslant 0$$

pour $s > 0$. Le passage à la limite $s \downarrow 0$ donne le fait que $M = [\alpha_{i+j}]$ est de type quasi-positif. En revenant à une suite (ξ_i) quelconque, on voit que (2) s'écrit encore

$$\sum_{i,j} \left[\frac{e^{s\alpha_{i+j+1}} - 1}{s} - \frac{e^{s\alpha_{i+j+2}} - 1}{s}\right] \xi_i \xi_j \geqslant 0$$

et le même passage à la limite montre que N est de type positif.

$b \Rightarrow c$: Fixons une suite finie (ξ_i) , $i = 0,\dots,p$ et un entier $N \geqslant 2p+4$. Il est facile de voir qu'il existe (au moins) une mesure <u>signée</u> $\mu \in M[o,1]$ telle que $\alpha_n = \int t^n d\mu$ pour tout $n \leqslant N$. La condition b) implique les deux conditions

(1) $$\int_o^1 x(1-x)\, B^2\, d\mu \geqslant 0 \quad \text{si} \quad B \in \mathbb{R}[X] \quad \text{et} \quad d°B \leqslant p+1$$

(2) $$\int_o^1 A^2\, d\mu \geqslant 0 \quad \text{si} \quad A \in \mathbb{R}[X],\ d°A \leqslant p+2 \quad \text{et}\ A(1) = 0\ .$$

Cette dernière condition peut encore s'écrire

(3) $$\int_o^1 (1-x)^2\, C^2\, d\mu \geqslant 0 \quad \text{si} \quad C \in \mathbb{R}[X] \quad \text{et}\ d°C \leqslant p+1$$

Posons alors $\nu = (1-x).\mu$, de sorte que $\int t^n d\nu = \alpha_n - \alpha_{n+1}$ pour tout $n \leqslant N-1$. En remarquant que $1 = x + (1-x)$ et que $x(1-x) = x(1-x)^2 + (1-x)x^2$, on aboutit facilement avec (1) et (3) aux inégalités

(4) $$\int_o^1 (1-x)B^2\, d\mu = \int_o^1 B^2\, d\nu \geqslant 0 \quad \text{si} \quad d°B \leqslant p+1$$

$$(5) \qquad \int_0^1 x(1-x)^2B^2d\mu = \int_0^1 x(1-x)B^2d\nu \geqslant 0 \quad \text{si} \quad d°B \leqslant p \quad .$$

Par exemple (4) s'obtient en ajoutant (1) et (3) après avoir fait C = B et (5) s'obtient de la même façon en remplaçant B par (1-X)B et C par XB dans (1) et (3). En posant enfin

$$B = \sum_{i=o}^{p} \xi_i X^i$$

on obtient exactement les conditions

$$\sum_{i,j} \beta_{i+j} \xi_i \xi_j \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i,j} (\beta_{i+j+1} - \beta_{i+j+2}) \xi_i \xi_j \geqslant 0$$

lorsqu'on a posé $\beta_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}$, ce qui n'est autre que l'assertion c).

c ⇒ a : Grâce à c) on sait qu'il existe une mesure positive ν sur $[o,1]$ telle que $\beta_n = \int t^n d\nu$ pour tout $n \geqslant 0$. On en déduit facilement l'égalité

$$\alpha_n = \alpha_o - \int (1+t+\ldots+t^{n-1})d\nu$$

$$\alpha_n = \alpha_o - \int \frac{1-t^n}{1-t} d\nu(t)$$

ce qui permet de distinguer deux cas.

- Le premier est celui où $\int \frac{d\nu(t)}{1-t} < +\infty$. On peut alors introduire la mesure $\mu = \frac{1}{1-t} \cdot \nu$ sur $[o,1]$ et écrire

$$\alpha_n = a + \int t^n d\mu$$

avec $a = \alpha_o - \int d\mu \in \mathbb{R}$. En posant $\gamma_n = \int t^n d\mu$, on obtient

$$e^{s\alpha_n} = e^{sa} e^{s\gamma_n}$$

ce qui suffit pour voir que $(e^{s\alpha_n})$ est bien une suite de moments pour tout $s \geqslant 0$.

- Le deuxième cas est celui où $\int \frac{d\nu(t)}{1-t} = +\infty$. On procède alors par approximation en introduisant la fonction g_p, indicatrice de l'intervalle $[o,1-\frac{1}{p}]$, de sorte que $g_p \uparrow 1_{[o,1[}$.

Posons maintenant $\nu_p = g_p.\nu$, ce qui assure que $\int \frac{d\nu_p(t)}{1-t} < +\infty$, puis

$$\alpha_n(p) = \alpha_o - \int \frac{1-t^n}{1-t} \, d\nu_p(t) .$$

En vertu de ce qui précède la suite $(\alpha_n(p))$ engendre un semi-groupe de suites de moments $(e^{s\alpha_n(p)})$. Par passage à la limite $p \to \infty$ on obtient, avec le théorème de Lebesgue

$$\alpha_n(p) \to \alpha_n + n\,\nu(\{1\}) = \gamma_n$$

donc $e^{s\alpha_n(p)} \to e^{s\alpha_n} e^{n\nu(\{1\})} = e^{s\gamma_n}$, et cette dernière suite est une suite de moments. En définitive on obtient

$$e^{s\alpha_n} = e^{s\gamma_n} e^{-n\nu(\{1\})s}$$

Or la suite $e^{-n\nu(\{1\})s}$ est de la forme a^n avec $0 < a \leqslant 1$, donc est une suite de moments. Par produit on obtient donc l'assertion a), ce qui termine la preuve du théorème. □

REMARQUE. On peut, en se basant sur le critère (1.1.2), obtenir une preuve de l'implication c $\Rightarrow$ a un peu plus simple. L'avantage de celle qui est ici proposée est qu'elle se transportera, presque mot pour mot, au cas du problème des semi-groupes de moments sur la droite $\mathbb{R}$, ou sur le cube I^n , avec $I = [o,1]$.

EXEMPLES.

EX.1. La suite $m_n(s) = \dfrac{1}{(n+1)^s}$, $s \geqslant 0$, est évidemment une suite de moments pour tout s, associée à la mesure $\mu_s = \dfrac{1}{\Gamma(s)}\,(\mathrm{Log}\,\frac{1}{t})^{s-1}dt$ pour $s > 0$ et $\mu_o = \delta_o$, mesure de Dirac à l'origine pour $s = 0$. On a donc ici $\alpha_n = -\,\mathrm{Log}(n+1)$ ce qui prouve que la suite

$$\beta_n = \alpha_n - \alpha_{n+1} = \mathrm{Log}\,\frac{n+2}{n+1} = \mathrm{Log}(1+\frac{1}{n+1})$$

est une suite de moments sur $[o,1]$.

EX. 2. Avec $\alpha_o = 0$, $\alpha_n = -\,(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n})$ pour $n \geqslant 1$, on obtient $\beta_n = \alpha_n - \alpha_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$. Or (β_n) est une suite de moments et par conséquent la suite

$$m_o(s) = 1 \qquad m_n(s) = e^{-s(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n})} \quad n \geqslant 1 \quad , s \geqslant 0$$

détermine un semi-groupe de suites de moments.

Les mesures $\square$-indéfiniment divisibles sur $[o,1]$. Par analogie avec la théorie des mesures indéfiniment divisibles sur la droite $\mathbb{R}$, on peut ici considérer les mesures indéfiniment divisibles sur $[o,1]$, relativement au produit de convolution multiplicatif $\square$ introduit plus haut. D'une façon précise, on peut proposer la définition suivante :

(1.4.3) DEFINITION. - *On dit qu'une mesure positive* μ *sur* $[o,1]$ *est* $\square$*-indéfiniment divisible lorsqu'il existe un semi-groupe* μ_s *de mesures positives (pour l'opération* $\square$*) tel que* $\mu = \mu_1$ *et* $\mu_s \to \delta_1$ *quand* $s \downarrow 0$.

Il suit facilement de là que les suites $m_n(s) = \int t^n d\mu_s$ sont telles que $m_n(s+t) = m_n(s)m_n(t)$ et $m_n(s) \to 1$ quand $s \downarrow 0$. On obtient des suites de la forme $m_n(s) = e^{s\alpha_n}$. La théorie précédente, faite par exemple avec $\alpha_o = 0$, de manière que toutes les μ_s soient des probabilités, fournit donc un résultat, du type Lévy-Khintchine :

(1.4.4) THEOREME. - *Pour qu'une probabilité* μ *sur* $[o,1]$ *soit* $\square$*-indéfiniment divisible, il faut et il suffit qu'il existe une mesure positive* ν *sur* $[o,1]$ *telle que*

$$\int_o^1 t^n d\mu(t) = \exp\left[-\int_o^1 \frac{1-t^n}{1-t}\, d\nu(t)\right]$$

pour tout entier $n \geqslant 0$.

CHAPITRE 2. LE PROBLEME DES MOMENTS SUR UN CONVEXE COMPACT DE R^n

Dès que l'on dépasse le cas de la dimension 1, le problème des moments n'est plus considéré dans toute sa généralité. L'article de HILDEBRANDT et SCHOENBERG [6] donne toutefois la solution du problème pour le cube I^n avec $I = [o,1]$, en mettant en évidence une condition nécessaire et suffisante du type (1.1.2).

Dans tout ce chapitre le point de départ est la donnée d'un convexe compact $K \subset \mathbb{R}^n$, supposé d'intérieur non vide. Si l'on avait d'ailleurs $\overset{\circ}{K} = \emptyset$, on remplacerait $\mathbb{R}^n$ par le sous-espace engendré par K après s'être ramené par translation à supposer $0 \in K$.

On désigne par $A(K) = \mathbb{R}_1[X_1,\ldots,X_n]$ l'espace des formes affines sur $\mathbb{R}^n$, identifié à l'espace des polynômes de degré au plus égal à 1, par $A_+(K)$ le cône convexe saillant de A(K) formé des éléments T qui restent positifs sur K, et enfin par G(K) l'ensemble des éléments $T \in A_+(K)$ qui sont non nuls et engendrent une génératrice extrêmale dans le cône $A_+(K)$. Cela étant dit, l'ensemble fondamental qui va jouer le rôle prédominant dans la théorie est défini par

$$G_1(K) = \{T \in G(K) \ , \ \|T\|_K = 1\}$$

<u>EXEMPLE</u>. Avec $n = 1$ et $K = [o,1]$ il est facile de voir que $G_1(K)$ est formé des deux polynômes X et 1-X.

Il suit de là que l'ensemble des polynômes $X^p(1-X)^q$, $p,q \geqslant 0$, du cas $K = [o,1]$ doit être naturellement remplacé, dans le cas général, par l'ensemble $\Delta = \Delta(K)$ des polynômes T qui sont des produits finis d'éléments de $G_1(K)$, la constante 1 correspondant au produit "vide" . Enfin comme Δ n'a qu'une structure multiplicative unitaire, introduisons encore le cône convexe $\Gamma = \Gamma(K)$ formé des sommes finies à coefficients positifs d'éléments de Δ.

Rassemblons toutes ces définitions sous forme d'un tableau qui servira souvent de référence pour les notations.

$A(K) = \mathbb{R}_1[X_1,\dots,X_n]$

$A_+(K) = \{T \in A(K) \ , \ T \geqslant 0 \text{ sur } K\}$

$G(K) = \{T \in A_+(K) \ , \ \mathbb{R}T \text{ est génératrice extrêmale de } A_+(K)\}$

$G_1(K) = \{T \in G(K) \ , \ \|T\|_K = 1\}$

$\Delta(K) = \{T = T_1 T_2 \dots T_p \ , \ p \geqslant 1 \ , \ T_k \in G_1(K)\} \cup \{1\}$

$\Gamma(K) =$ cône convexe engendré par $\Delta(K)$.

(2.1) <u>LE CONVEXE COMPACT P(K)</u>.

On peut canoniquement plonger les ensembles $A_+(K)$, $G(K)$, $G_1(K)$ dans l'espace $\mathbb{R}_1[X_1,\dots,X_n]$, identifié à $\mathbb{R}^{n+1}$. Dans cet esprit le théorème de Krein-Milman donne immédiatement l'énoncé

(2.1.1) <u>PROPOSITION</u>. - *Le cône convexe* $A_+(K)$ *est fermé dans l'espace* $\mathbb{R}_1[X_1,\dots,X_n]$ *et égal à l'enveloppe conique convexe fermée de l'ensemble* $G_1(K)$.

On tire de là trois conséquences importantes.

(2.1.2) <u>COROLLAIRE 1</u>. - *On a l'égalité dans* $\mathbb{R}^n$

$$K = \bigcap_{T \in G_1(K)} \{T \geqslant 0\}$$

PREUVE. Car si $x \notin K$, il existe d'après le théorème de Hahn-Banach appliqué dans $\mathbb{R}^n$, un élément $T \in A_+(K)$ tel que $T(x) = -1$. Il existe donc nécessairement, d'après (2.1.1), un élément $T \in G_1(K)$ tel que $T(x) < 0$. □

(2.1.3) COROLLAIRE 2. - *Le cône convexe* $\Gamma(K)$ *est générateur dans l'espace vectoriel* $E = \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$, *autrement dit* $E = \Gamma - \Gamma$.

PREUVE. L'espace vectoriel $\Gamma - \Gamma$ étant en fait une algèbre unitaire il suffit de prouver qu'il contient le sous-espace $\mathbb{R}_1[X_1,\ldots,X_n]$, identifié à $\mathbb{R}^{n+1}$. Par translation on peut supposer $0 \in K$. Considérons alors l'espace vectoriel engendré dans $\mathbb{R}_1[X_1,\ldots,X_n]$ par 1 et l'ensemble $G_1(K)$. Si cet espace n'est pas $\mathbb{R}_1[X_1,\ldots,X_n]$, il existe dans $\mathbb{R}^{n+1}$ un vecteur $b = (b_o,b_1,\ldots,b_n)$ qui lui est orthogonal. Comme le polynôme 1 correspond dans $\mathbb{R}^{n+1}$ au vecteur $(1,0,0\ldots,0)$, on a nécessairement $b_o = 0$; Soit alors $x = (b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit $T = a_o+a_1X_1+\ldots+a_nX_n$ un élément quelconque de $G_1(K)$. Comme b est orthogonal à T dans $\mathbb{R}^{n+1}$ on a l'égalité $a_1b_1+\ldots+a_nb_n = 0$, ce qui implique $T(\lambda x) = a_o = T(0)$. L'hypothèse $0 \in K$ garantit alors la condition $a_o \geqslant 0$, d'où $T(\lambda x) \geqslant 0$ et $\lambda x \in K$ par (2.1.2), contrairement à la compacité de K.□

(2.1.4) COROLLAIRE 3. - *L'ensemble* $G_1(K)$ *sépare les points de* K.

PREUVE. Fixons $x,y \in K$ tels que $T(x) = T(y)$ pour tout $T \in G_1(K)$. On a alors $T(x) = T(y)$ pour tout $T \in \Gamma(K)$ et par conséquent, avec (2.1.3), $T(x) = T(y)$ pour tout $T \in \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$. Ainsi $x_k = y_k$ avec $T = X_k$ et $x = y$. □

Enfin, et toujours à la suite de (2.1.1), on peut donner un énoncé qui, bien qu'il ne serve pas explicitement à résoudre le problème des moments, éclaire toutefois l'aspect géométrique de la question, en rendant plus facile la détermination des génératrices extrêmales de $A_+(K)$.

(2.1.5) PROPOSITION

a) Pour tout $T \in G_1(K)$ *l'ensemble des* $x \in K$ *tels que* $T(x) = 0$ *est une face convexe de* K. *En particulier il n'est pas vide et contient au moins un point extrêmal.*

b) Réciproquement pour tout $x \in \partial K$, *frontière de* K, *il existe (au moins) un élément* $T \in G_1(K)$ *tel que* $T(x) = 0$.

PREUVE. Pour prouver a) fixons $T \in G_1(K)$ et montrons d'abord qu'il existe $x \in K$ tel que $T(x) = 0$. Sinon on aurait $T \geqslant a > 0$ sur K, donc $T = S + a$ avec $S = T-a \geqslant 0$ sur K, contrairement à l'extrêmalité de T. Soit alors y et z dans K tels que $]y,z[\cap F \neq \emptyset$. Il existe $x = \alpha y + (1-\alpha)z$, avec $0 < \alpha < 1$, tel que $x \in F$, donc tel que $T(x) = \alpha T(y) + (1-\alpha)\, T(z) = 0$. Comme a priori on a $T(y) \geqslant 0$ et $T(z) \geqslant 0$ alors en fait $T(y) = T(z) = 0$ et $y,z \in F$. Ainsi F est une face. Il est ensuite clair que F est convexe compact dans K et que tout point extrêmal de F est extrêmal dans K, d'après le fait que F est une face. Réciproquement pour prouver b), fixonx $x \in \partial K$ et soit $\{S = 0\}$ l'équation d'un hyperplan d'appui de K au point x. On peut supposer $S(x) = 0$ et $S \geqslant 0$ sur K, de sorte que $S \in A_+(K)$ et $S \neq 0$. On déduit de là, par une forme faible du théorème de Choquet, l'existence d'un élément $T_\circ \in G(K)$ tel que $T_\circ(x) = 0$ et l'on passe ensuite à $T \in G_1(K)$ en posant $T = T_\circ / \|T_\circ\|_K$. □

REMARQUE. On prendra garde à ne pas confondre les éléments $T \in G(K)$ et les hyperplans d'appui de K. L'examen de quelques cas particuliers dans $\mathbb{R}^2$

(simplexes, carrés, disques ...) montre aisément que les éléments $T \in G(K)$ correspondent à des hyperplans d'appui ayant un contact "maximum" avec K, sans que l'on cherche à mieux préciser le sens intuitif de ce terme .

Le convexe compact P(K). On en arrive maintenant au point important de la théorie en introduisant, associé à K, un ensemble particulier de formes linéaires sur l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$, choisi naturellement convexe. L'idée essentielle étant de généraliser le critère (1.1.2) du problème des moments sur $[o,1]$, le fait intéressant à prendre en compte est que l'ensemble des polynômes $X^p(1-X)^q$ doit être remplacé, dans le cas général, par l'ensemble $\Delta = \Delta(K)$. Ainsi la définition suivante s'impose :

(2.1.6) DEFINITION. - *On désigne par* P(K) *l'ensemble convexe des formes linéaires* L *sur* $E = \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$, *telles que* $L(1) = 1$ *et* $L(T) \geqslant 0$ *pour tout* $T \in \Delta(K)$.

REMARQUE. La notation P(K) peut prêter à confusion a priori, car elle fait clairement allusion à la notion de probabilité sur K. Il est de fait que toute probabilité μ sur K définit un élément $L_\mu \in P(K)$ par la condition $L_\mu(T) = \int T\, d\mu$. De plus l'application $\mu \to L_\mu$ est injective puisque L_μ détermine μ sur l'ensemble de tous les polynômes, donc sur l'espace de Banach C(K) par le théorème de Stone-Weierstrass. En particulier la transformation de Dirac $x \to \delta_x$ permet ici d'injecter le compact K dans le convexe P(K). En réalité, et c'est toute la question, on verra a posteriori que toute $L \in P(K)$ correspond exactement à une (et une seule) probabilité sur K, de sorte que la confusion sera levée après l'étude qui va suivre.

Les deux résultats que nous donnons maintenant constituent la clé du travail et justifient la méthode employée.

(2.1.7) THEOREME. - *Fixons un élément* $L \in P(K)$. *On a alors* $L(T) \geqslant 0$ *pour tout polynôme* T *qui est un produit fini d'éléments de* $A_+(K)$.

PREUVE. Soit $T = T_1 T_2 \ldots T_p$, avec $T_k \in A_+(K)$. Avec (2.1.1), on voit qu'il existe, pour chaque k, une suite $S_{k,m}$ telle que $T_k = \lim_{m \to \infty} S_{k,m}$, chaque élément $S_{k,m}$ appartenant au cône convexe engendré par $G_1(K)$. On a donc $T = \lim_{m \to \infty} S_m$, avec $S_m = S_{1,m} \ldots S_{p,m}$, où la limite est prise au sens de la convergence simple sur K ou sur $\mathbb{R}^n$. Comme $G_1(K) \subset \Gamma(K)$ et que $\Gamma(K)$ est un cône convexe stable par multiplication, on a $S_m \in \Gamma(K)$ et par conséquent $L(S_m) \geqslant 0$ puisque $\Gamma(K)$ est le cône convexe engendré par $\Delta(K)$. Par ailleurs tous les polynômes S_m appartiennent à un sous-espace de dimension finie $p(n+1)$ de l'espace $E = \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$ puisque $d^\circ S_{k,m} = 1$ pour tout k. Comme la forme linéaire L est évidemment continue sur ce sous-espace on obtient $L(T) \geqslant 0$ à la limite.□

(2.1.8) THEOREME. - *Pour tout polynôme* $T \in \Delta(K)$ *, on peut écrire le polynôme* $1-T$ *comme somme finie de polynômes eux-mêmes produits finis d'éléments de* $A_+(K)$.

PREUVE. Soit $T = T_1 T_2 \ldots T_p$ avec $T_k \in G_1(K)$. Alors $\|T_k\|_K = 1$, donc $1-T_k \in A_+(K)$. Il ne reste plus alors qu'à écrire

$$1 - T = \prod_{k=1}^{p} (1-T_k + T_k) - T_1 T_2 \ldots T_p$$

et de développer le produit en remarquant que le terme $T_1 T_2 \ldots T_p$ s'élimine.□

Les conséquences sont immédiates

(2.1.9) COROLLAIRE 1. - *Pour toute* $L \in P(K)$ *et tout polynôme* $T \in \Delta(K)$ *on a* $0 \leqslant L(T) \leqslant 1$.

PREUVE. On a évidemment $L(T) \geqslant 0$ par (2.1.6) et $(L(1-T) \geqslant 0$ par (2.1.8) et (2.1.7). Alors $L(T) \leqslant L(1) = 1$. □

On va maintenant placer sur le convexe $P(K)$ la topologie de la convergence simple sur $\Delta(K)$, qui est aussi celle de la convergence simple sur $\Gamma(K)$ et sur $E = \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$ d'après (2.1.3). Cette topologie induit évidemment sur K, considéré comme plongé dans $P(K)$ par l'injection de Dirac, la propre topologie de K d'après (2.1.4). Cela étant on a :

(2.1.10) THEOREME. - *La topologie faible* $\sigma(P(K),\Delta(K))$ *fait de* $P(K)$ *un convexe compact contenant* K *comme sous-espace topologique compact.*

PREUVE. Avec (2.1.9) on voit que $P(K)$ s'identifie topologiquement à une partie du compact I^{Δ}, où $I = [o,1]$. Mais cette partie est fermée car si $L_i \to L$, avec $L_i \in P(K)$, alors L est linéaire sur E et positive sur Δ, et bien entendu on a $L(1) = 1$, donc $L \in P(K)$. □

REMARQUE. On prendra garde que la structure convexe de $P(K)$ n'induit pas sur K la structure convexe de K, car évidemment la mesure $\frac{1}{2}(\delta_x + \delta_y)$ ne coïncide pas avec δ_z pour $z = \frac{x+y}{2}$.

Le convexe $P(K)$ étant maintenant structuré en convexe compact, un pas important va être franchi avec la détermination de ses points extrêmaux.

(2.1.11) LEMME. - *Soit* L *un moint extrêmal de* $P(K)$. *Alors* L *est multiplicative sur* $E = \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$.

PREUVE. Il suffit de vérifier l'égalité $L(ST) = L(S)L(T)$ pour S et T éléments de $\Delta(K)$ et d'utiliser ensuite (2.1.3) qui exprime que E est l'espace vectoriel engendré par $\Delta(K)$. Distinguons trois cas suivant la valeur de $\alpha = L(S)$, telle a priori que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ d'après (2.1.9).

a) Si $0 < \alpha < 1$. On voit alors aisément, grâce à (2.1.7) et (2.1.8) que les formes linéaires L_1 et L_2 sur E, définies par

$$L_1(R) = \frac{1}{\alpha} L(SR) \quad \text{et} \quad L_2(R) = \frac{1}{1-\alpha} L((1-S)R)$$

sont des éléments de $P(K)$ tels que $L = \alpha L_1 + (1-\alpha)L_2$. Par extrêmalité de L on a donc $L = L_1$, d'où la formule $L(SR) = L(S)L(R)$ pour tout $R \in E$.

b) Si $\alpha = 0$. On introduit alors la forme linéaire $\tilde{L}$ selon $\tilde{L}(R) = L(SR)$ pour $R \in E$. Alors $\tilde{L}$ est positive sur $\Delta(K)$ puisque $R \in \Delta(K)$ implique $RS \in \Delta(K)$, et telle que $\tilde{L}(1) = 0$. Pour $T \in \Delta(K)$ on a $0 \leqslant T \leqslant 1$ donc $\tilde{L}(T) = 0$ et par suite $L(ST) = 0$. Ainsi $L(ST) = L(S)L(T)$ aussi dans ce cas.

c) Si $\alpha = 1$. On introduit cette fois $\tilde{L}$ selon $\tilde{L}(R) = L((1-S)R)$ pour $R \in E$. D'après (2.1.7) et (2.1.8) on voit que $\tilde{L}$ est positive sur $\Delta(K)$ et telle que $\tilde{L}(1) = 0$ ce qui permet de terminer comme en b). □

On déduit du lemme l'énoncé clé :

(2.1.12) THEOREME. - *Soit* L *un point extrêmal de* P(K). *Alors il existe un point* $x \in K$ *unique tel que* $L(T) = T(x)$ *pour tout* $T \in E$.

PREUVE. La forme L étant linéaire multiplicative et unitaire sur E, on a immédiatement $L(T) = T(x)$, avec $x = (x_k)$ et $x_k = L(X_k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$. Pour tout $T \in \Delta(K)$ on a donc $T(x) = L(T) \geqslant 0$, donc a fortiori on a $T(x) \geqslant 0$ pour tout $T \in G_1(K)$. Alors avec (2.1.2) on a nécessairement $x \in K$, et x est évidemment unique puisque $x_k = L(X_k)$. □

On en arrive maintenant aux énoncés de la conclusion de cette étude, où l'on aura pu remarquer l'intérêt des théorèmes (2.1.7) et (2.1.8).

(2.1.13) THEOREME. - *Pour toute* $L \in P(K)$ *et tout polynôme* $T \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$ *on a* $|L(T)| \leqslant \|T\|_K$.

PREUVE. Puisque la topologie sur P(K) est celle de la convergence simple sur $E = \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$, on voit que l'application $L \to |L(T)|$, où $T \in E$ est fixé, est convexe et continue sur P(K). Or P(K) étant convexe compact, son maximum est atteint, d'après le principe de Bauer (voir par exemple PHELPS [9]), en un point extrêmal L, et pour L extrêmal l'inégalité est acquise d'après (2.1.12). □

(2.1.14) THEOREME. - *Pour toute* $L \in P(K)$ *il existe une probabilité unique* μ *sur* K, *telle que* $L(T) = \int T d\mu$ *pour tout polynôme* $T \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$.

PREUVE. Elle est évidente avec (2.1.13) et la densité de E dans l'espace de Banach C(K) des fonctions continues sur le compact K. □

A partir de là on peut encore rajouter une dernière précision relativement aux points extrêmaux du compact convexe $P(K)$. Comme on vient de voir que $P(K)$ n'est en fait pas autre chose que le convexe des probabilités sur K, et que l'ensemble des points extrêmaux de ce dernier convexe est bien connu, et égal à l'ensemble des mesures de Dirac, on obtient une réciproque évidente, a posteriori, à l'énoncé (2.1.12), réciproque qu'il n'est pas utile d'expliciter.

(2.2) APPLICATION AU PROBLEME DES MOMENTS SUR K.

Nous utiliserons ici d'une façon systématique la notation contractée multi-indicielle en désignant pour tout multi-indice $k = (k_1,k_2,\dots,k_n)$ par X^k le monôme $X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}$. Pour mesurer les degrés on introduira la longueur de k soit $|k| = k_1+\dots+k_n$.

Cela étant, à chaque mesure positive μ sur K, on associe la suite de ses moments, indexée sur $\mathbb{N}^n$.

$$\alpha_k = \int_K X^k d\mu = \int_K t^k d\mu(t)$$

Le problème des moments sur K consiste à caractériser les suites (α_k) ainsi obtenues. On pourra, si l'on veut, se ramener souvent au cas d'une probabilité μ en supposant de prime abord $\alpha_o = 1$. De la sorte le théorème (2.1.14) fournit très exactement la solution, en donnant la généralisation de la première condition nécessaire et suffisante (1.1.2) du cas $K = [o,1]$.

(2.2.1) THEOREME (Résolution du problème des moments). - *Soit* K *un convexe compact de* $\mathbb{R}^n$. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite* (α_k), $k \in \mathbb{N}^n$, *soit une suite de moments sur* K *est que la forme linéaire* L, *définie sur l'espace* $R[X_1,\dots,X_n]$ *par* $L(X^k) = \alpha_k$, *vérifie la condition* $L(T) \geqslant 0$ *pour tout polynôme* $T \in \Delta(K)$.

Passage à la seconde condition. De même que pour le cas de l'intervalle $K = [o,1]$ on peut formuler différemment la solution du problème des moments, obtenant ainsi une seconde condition nécessaire et suffisante en terme de matrices de type positif. La suite (α_k) étant supposée fixée on peut en effet associer à tout polynôme $T = \Sigma\, u_r X^r \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$ la matrice infinie

$$M_T(\alpha) = M_T = [m_{i,j}] \quad \text{avec} \quad m_{i,j} = \sum_r u_r\, \alpha_{i+j+r}$$

On a alors :

(2.2.2) LEMME. - *Soit* (α_k) *une suite quelconque et soit* L *la forme linéaire sur* $\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$, *associée par les conditions* $L(X^k) = \alpha_k$. *Pour tout polynôme* $T = \Sigma\, u_r X^r$ *on a l'équivalence des assertions :*

a) La matrice $M_T(\alpha)$ *est de type positif*

b) On a $L(TR^2) \geqslant 0$ *pour tout* $R \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$.

PREUVE. Il suffit de poser $R = \Sigma\, \xi_i X^i$ et de vérifier l'égalité évidente $L(TR^2) = \sum_{i,j} m_{i,j}\, \xi_i \xi_j$.□

L'intérêt d'une telle formulation est qu'elle permet d'éliminer tous les carrés et par conséquent aussi toutes les répétitions qui pourraient se produire dans l'écriture d'un polynôme $T \in \Delta(K)$. Plus clairement on a :

(2.2.3) THEOREME (Seconde résolution du problème des moments).
Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite (α_k) *soit une suite de moments sur* K *est que toutes les matrices* $M_T(\alpha)$ *soient de type positif quand* T *décrit l'ensemble des produits finis de polynômes* $T = T_1T_2\dots T_p$, *avec* $T_k \in G_1(K)$, *les* T_k *étant de plus deux à deux*

distincts , et le polynôme 1 correspond au produit "vide".

PREUVE. La condition est nécessaire car si $L(T) = \int T d\mu$ pour tout $T \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$ on a $L(TR^2) = \int TR^2 d\mu \geqslant 0$ pour tout $T \in \Delta(K)$, de sorte que $M_T(\alpha)$ est de type positif. Réciproquement tout $S \in \Delta(K)$ se met, lorsqu'on explicite les répétitions sous la forme

$$S = T_1^{q_1} T_2^{q_2} \dots T_s^{q_s}$$

où les $T_k \in G_1(K)$ sont deux à deux distincts. En écrivant $q_k = 2p_k + \varepsilon_k$ avec $\varepsilon_k = 0$ ou 1, on obtient S sous la forme

$$S = T_1^{\varepsilon_1} T_2^{\varepsilon_2} \dots T_s^{\varepsilon_s} R^2$$

et la condition de (2.2.3), sans oublier celle portant sur le produit "vide" correspondant ici au cas $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_s = 0$, donne la condition $L(S) \geqslant 0$, ce qui nous ramène bien à (2.2.1). □

REMARQUE. Lorsque $K = [o,1]$ on a déjà vu que $G_1(K)$ est formé des deux polynômes X et (1-X). Les polynômes T, produits distincts, sont donc au nombre de quatre : 1, X, (1-X), X(1-X). et l'énoncé (2.2.3) redonne exactement l'énoncé (1.2.1) de Akhiezer. Or on a vu que cet énoncé (1.2.1) pouvait se réduire à un énoncé plus simple (1.2.3) ne faisant plus intervenir que les polynômes 1 et X(1-X). On peut alors se demander si ce fait est exceptionnel ou s'il est de portée plus générale. On va voir qu'il est en fait lié à l'existence d'un centre de symétrie du compact $K = [o,1]$.

Cas de réduction des compacts symétriques. Supposons que le convexe compact K admette un centre de symétrie. Par translation, et au moins pour la théorie, on peut supposer que l'origine 0 est ce centre de symétrie. On a alors :

(2.2.4) LEMME. - *Soit* K *un convexe compact admettant un centre de symétrie. Alors pour tout* $T \in G_1(K)$ *on a* $(1-T) \in G_1(K)$.

PREUVE. Soit $T = u_o + u_1X_1 + \ldots + u_nX_n$. On suppose que K est symétrique par rapport à l'origine et on introduit le vecteur $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ de sorte que $T(x) = u_o + (u|x)$. Maintenant on sait que $0 \leqslant T \leqslant 1$ sur K et que la valeur 1 est atteinte puisque $||T||_K = 1$. La valeur 0 est, elle aussi, atteinte d'après (2.1.5), de sorte que sur K on a Min T = 0 et Max T = 1. Posons $S(x) = (u|x)$; alors S est une fonction impaire sur K, donc par symétrie, il existe $s \geqslant 0$ tel que Max S = s et Min S = -s sur K. On en déduit en revenant à T que $0 = u_o - s$ et $1 = u_o + s$, d'où l'on tire $u_o = s = \frac{1}{2}$ et ainsi $T(x) = \frac{1}{2} + (u|x)$. Mais alors $1-T = \frac{1}{2} - (u|x) = \frac{1}{2} + (u|-x)$ et la symétrie de K garantit que $1-T \in G_1(K)$. □

On tire de là la réduction cherchée du critère (2.2.3) :

(2.2.5) THEOREME (Troisième résolution du problème des moments).

Soit K *un convexe compact de* $\mathbb{R}^n$ *admettant un centre de symétrie. Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite* (α_k) *soit une suite de moments sur* K *est que toutes les matrices* $M_T(\alpha)$ *soient de type positif quand* T *décrit l'ensemble des polynômes de la forme*

(*) $$T = T_1(1-T_1)\ T_2(1-T_2)\ \ldots\ T_p(1-T_p)$$

avec $T_k \in G_1(K)$, *les* T_k *étant de plus deux à deux distincts et le polynôme 1 correspondant au produit "vide".*

PREUVE. Un polynôme de la forme (2.2.3) peut s'écrire en rassemblant les polynômes R et (1-R) qui interviennent

$$T = T_1(1-T_1) \ldots T_p(1-T_p)\ T_{p+1} \ldots T_q$$

où les T_k , $1 \leqslant k \leqslant q$, sont distincts. En écrivant $T_r = T_r(1-T_r) + T_r^2$ pour tout r tel que $p+1 \leqslant r \leqslant q$ et en développant, on voit que T est une somme finie de polynômes de la forme SR^2 , où S admet une décomposition du type (*) Le résultat est donc acquis avec (2.2.2) car si $M_S(\alpha)$ est de type positif il en est de même de $M_{SR^2}(\alpha)$ puisque $L(SR^2P^2) = L(S(RP)^2) \geqslant 0$. □

Il est clair que lorsque K n'est pas un polyèdre dans $\mathbb{R}^n$, l'ensemble $G_1(K)$ est formé d'une infinité d'éléments et la symétrie éventuelle de K n'apporte qu'assez peu de consolation quant aux vérifications "pratiques" à faire en terme de matrices de type positif. Lorsque K est un polyèdre, $G_1(K)$ est alors un ensemble fini égal au nombre de faces de K de dimension (n-1). Si ce nombre est égal à r, il y aura de fait 2^r vérifications à assurer, ce qu'on voit en comptant le nombre de polynômes ayant successivement 0,1,2,...,r facteurs. Si le polyèdre est symétrique, alors r est évidemment pair et les regroupements T(1-T) ramènent le problème à $2^{r/2}$ vérifications de positivité matricielle ; le gain est alors assez considérable pour être signalé.

EXEMPLES.

EX.1 K est le disque unité de R^2.

Les élements de $G_1(K)$ sont les polynômes

$$T_\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(X \cos\theta + Y \sin\theta) \qquad 0 \leqslant \theta < 2\pi$$

La symétrie par rapport à l'origine ramène toutefois la question aux produits finis distincts de polynômes

$$S_\theta = T_\theta(1-T_\theta) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(X\cos\theta + Y\sin\theta)^2 \qquad 0 \leqslant \theta < \pi$$

EX.2. K est le simplexe S_n de $\mathbb{R}^n$

Les éléments de $G_1(K)$ sont les $(n+1)$ polynômes

$$X_1,\ X_2, \ldots, X_n\ ,\ Z = 1-(X_1+\ldots+X_n)$$

et il y aura donc 2^{n+1} vérifications de positivité matricielle à faire pour résoudre le problème des moments.

EX.3. K est le cube I^n de $\mathbb{R}^n$.

Les éléments de $G_1(K)$ sont les 2n polynômes

$$X_1,\ X_2, \ldots, X_n, 1-X_1, \ldots\ldots, 1-X_n$$

mais la symétrie de I^n ramène la question à 2^n vérifications de positivité matricielle. Pour n=1 on retrouve bien les deux conditions de (1.2.3). Pour n=2 il y aura 4 conditions.

EX.4. K est le cube I^2 de $\mathbb{R}^2$.

Pour voir plus clairement ce qui se passe dans le cas I^n, supposons ici n = 2 et remplaçons la notation multi-indicielle par la notation habituelle à double indice. Les polynômes de $G_1(K)$ sont les 4 polynômes $X, Y, (1-X), (1-Y)$ et l'énoncé (2.2.1) peut se mettre sous une forme semblable à l'énoncé de Hausdorff (1.1.1). En effet les produits finis avec répétition sont les polynômes $X^p(1-X)^q Y^r (1-Y)^s$, d'où :

(2.2.6) THEOREME (HILDEBRANDT et SCHOENBERG [6]). - *Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite double* $(\alpha_{k,\ell})$ *soit une suite de moments* *sur le carré* $[o,1] \times [o,1]$ *est que l'on ait les inégalités*

$$\sum_{k=o}^{q} \sum_{\ell=o}^{s} (-1)^{k+\ell} C_q^k C_s^\ell \alpha_{p+k,r+\ell} \geqslant 0$$

pour tous les entiers $p,q,r,s \geqslant 0$.

Pour donner une autre condition, issue de (2.2.5) et prolongeant l'énoncé (1.2.3), il vaut mieux revenir à la notation multi-indicielle pour simplifier les notations, soit :

(2.2.7) THEOREME. - *Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite* (α_k), $k \in \mathbb{N}^2$ *, soit une suite de moments sur le carré* $[o,1] \times [o,1]$ *, est que les quatre matrices*

$M = [\alpha_{i+j}]$

$N_1 = M_P(\alpha)$

$N_2 = M_Q(\alpha)$

$N_3 = M_{PQ}(\alpha)$

soient de type positif, où P *et* Q *sont les polynômes* $X(1-X)$ *et* $Y(1-Y)$ *respectivement.*

EX.5. K est l'hexagone inscrit dans le cercle unité, de sommet 1.

Les sommets de K sont en fait les 6 points

$A_1=(1,o)$; $A_2=(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $A_3=(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $A_4=(-1,o)$, $A_5=(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $A_6=(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

et ici les éléments de $G_1(K)$ sont les 6 polynômes $T_1, T_2, T_3, 1-T_1, 1-T_2, 1-T_3$ où

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{2} - \frac{X}{2} - \frac{Y}{2\sqrt{3}} \\ T_2 = \frac{1}{2} - \frac{Y}{\sqrt{3}} \\ T_3 = \frac{1}{2} + \frac{X}{2} - \frac{Y}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

La résolution du problème des moments pour cet hexagone est donc, en vertu du théorème (2.2.1), la suivante :

(2.2.8) THEOREME. - *Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite double* $(\alpha_{k,\ell})$ *soit une suite de moments sur l'hexagone* K *est que la forme linéaire* L, *définie sur l'espace* $\mathbb{R}[X,Y]$ *par les égalités* $L(X^k Y^\ell) = \alpha_{k,\ell}$ *soit telle que*

$$L[T_1^m(1-T_1)^n \; T_2^p(1-T_2)^q \; T_3^r(1-T_3)^s] \geqslant 0$$

pour tous les entiers $m,n,p,q,r,s \geqslant 0$.

En utilisant maintenant (2.2.5), et en revenant à la notation multi-indicielle, mieux adaptée à l'énoncé, on a aussi :

(2.2.9) THEOREME. - *Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite* (α_k), $k \in \mathbb{N}^2$, *soit une suite de moments sur l'hexagone* K *est que les huit matrices suivantes soient de type positif*

$$M = [\alpha_{i+j}]$$

$$N_1 = M_{P_1}(\alpha) \;;\; N_2 = M_{P_2}(\alpha) \;;\; N_3 = M_{P_3}(\alpha)$$

$$N_4 = M_{P_1P_2}(\alpha) \;;\; N_5 = M_{P_2P_3}(\alpha) \;;\; N_6 = M_{P_3P_1}(\alpha)$$

$$N_7 = M_{P_1P_2P_3}(\alpha)$$

où P_1, P_2, P_3 *sont respectivement les polynômes*

$P_1 = T_1(1-T_1)$, $P_2 = T_2(1-T_2)$ *et* $P_3 = T_3(1-T_3)$.

(2.3) LE PROBLEME DES SEMI-GROUPES SUR I^n.

Les mêmes raisonnements qu'en (1.4), justifiés par la stabilité du compact $K = I^n$ par le produit $(x,y) \to xy$ avec $(xy)_k = x_k y_k$, montrent que pour toute suite de moments (α_k) sur I^n, la suite exponentielle $(e^{s\alpha_k})$ est encore une suite de moments sur I^n pour tout $s \geqslant 0$. Il se pose donc, de la même façon qu'en (1.4), le problème de la caractérisation de toutes les suites (α_k) ayant la propriété d'engendrer un semi-groupe de moments sur I^n par exponentiation.

Si l'on remarque que la suite $\beta_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}$, qui apparaît dans (1.4.2.c), peut s'écrire comme l'opposée de la "dérivée" $\alpha_{n+1} - \alpha_n$ (ou la différence première si l'on préfère), on est amené dans le cas $\mathbb{R}^n$ à introduire la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{N}^n$, de façon à expliciter la translation unité $k \to k+e_m$ dans la direction de la m-ième coordonnée et la "dérivation partielle"

$$D_m(\alpha) = (\alpha_{k+e_m} - \alpha_k)_k$$

qui lui est associée. Cela étant on a le résultat suivant, qui généralise convenablement (1.4.2) et résout le problème des semi-groupes sur le cube I^n.

(2.3.1) THEOREME. - *Soit* (α_k), $k \in \mathbb{N}^n$, *une suite quelconque de réels. Les conditions suivantes sont équivalentes*

a) Toutes les suites $(e^{s\alpha_k})$, $s \geqslant 0$, *sont des suites de moments sur le cube* $K = I^n$.

b) La matrice $M = [\alpha_{i+j}]$ *est de type quasi-positif et les* 2^n-1 *matrices*

$$N_A(\alpha) = M_{T_A}(\alpha)$$

associées aux parties non vides A de l'ensemble $\{1,2,\dots,n\}$ *par le choix du polynôme*

$$T_A = \prod_{m \in A} X_m(1-X_m)$$

sont de type positif.

c) Toutes les suites $-D_m(\alpha) = (\alpha_k - \alpha_{k+e_m})$, $1 \leqslant m \leqslant n$, *sont des suites de moments sur* I^n.

PREUVE.

$a \Rightarrow b$: La même preuve qu'en (1.4.2) donne la quasi-positivité de $M = [\alpha_{i+j}]$. Fixons maintenant le polynôme $T = T_A$, explicité selon $T = \Sigma\, u_r X^r$. D'après (2.2.5) les matrices $M_T(e^{s\alpha})$ sont de type positif, c'est-à-dire que pour toute suite finie (ξ_i) on a

(1)
$$\sum_{i,j} \sum_r u_r\, e^{s\alpha_{i+j+r}}\, \xi_i\, \xi_j \geqslant 0$$

Par ailleurs $T(\mathbb{1}) = 0$, où $\mathbb{1} = (1,1,\dots,1) \in I^n$, ce qui conduit à $\Sigma\, u_r = 0$, de sorte que (1) peut être remplacée par

(2)
$$\sum_{i,j} \sum_r u_r \frac{e^{s\alpha_{i+j+r}} - 1}{s}\, \xi_i\, \xi_i \geqslant 0 \qquad s > 0 .$$

et le passage à la limite $s \downarrow 0$ donne le résultat de positivité de la matrice $M_T(\alpha)$.

$b \Rightarrow c$: Fixons une suite finie (ξ_i) de réels avec $|i| \leqslant p$ et un entier $N \geqslant 2n+2p+4$. Il est facile de voir qu'il existe (au moins) une mesure signée

μ sur I^n telle que $\alpha_k = \int t^k \, d\mu$ pour $|k| \leqslant N$. Avec b) on obtient les inégalités

(3) $$\int T_A B^2 \, d\mu \geqslant 0 \quad \text{si } d^\circ B \leqslant p+2 \quad \text{et} \quad A \text{ non vide}$$

(4) $$\int B^2 \, d\mu \geqslant 0 \quad \text{si} \quad d^\circ B \leqslant p+2 \quad \text{et} \quad B(\mathbb{1}) = 0$$

Fixons maintenant m, de sorte que

(5) $$\int (1-x_m)^2 \, B^2 \, d\mu \geqslant 0 \quad \text{si} \quad d^\circ B \leqslant p+1$$

Introduisons la mesure $d\nu = (1-x_m)d\mu$. On obtient successivement les inégalités

(6) $$\int x_m \, T_A B^2 \, d\nu \geqslant 0 \qquad \text{si } d^\circ B \leqslant p+2 \text{ et } m \notin A \text{ (même si } A = \emptyset)$$

(7) $$\int (1-x_m) \, B^2 \, d\nu \geqslant 0 \qquad \text{si } d^\circ B \leqslant p+1$$

(8) $$\int (1-x_m) \, T_A B^2 \, d\nu \geqslant 0 \text{ si } d^\circ B \leqslant p+1 \qquad A \text{ non vide .}$$

Par exemple (6) s'obtient à partir de (3) en remplaçant A par $A \cup \{m\}$, et le reste est évident. En rassemblant (7) et (8) on obtient encore

(6) $$\int x_m \, T_A \, B^2 \, d\nu \geqslant 0 \qquad \text{si } d^\circ B \leqslant p+1 \qquad \text{et } m \notin A$$

(9) $$\int (1-x_m) \, T_A \, B^2 \, d\nu \geqslant 0 \quad \text{si } d^\circ B \leqslant p+1 \quad \text{et A quelconque.}$$

En ajoutant (6) et (9) on obtient

(10) $$\int T_A \, B^2 \, d\nu \geqslant 0 \quad \text{si} \quad d^\circ B \leqslant p \quad \text{et} \quad m \notin A.$$

En ajoutant (6) et (9) après avoir changé B en $(1-X_m)B$ dans (6) et en $X_m B$ dans (9), on obtient

(11) $$\int x_m(1-x_m) \, T_A \, B^2 \, d\nu \geqslant 0 \quad \text{si} \quad d^\circ B \leqslant p \text{ et } \quad m \notin A \text{ .}$$

Avec (10) et (11) on aboutit en fait au résultat suivant

(12) $$\int T_A \, B^2 \, d\nu \geqslant 0 \quad \text{si} \quad d^\circ B \leqslant p \quad \text{et A quelconque.}$$

Mais en posant $\beta = - D_m(\alpha)$, on voit que $\beta_k = \int t^k d\nu$ pour $|k| \leqslant N-1$ et l'inégalité (12) traduit exactement le fait que la matrice $M_{T_A}(\beta)$ agit sur le vecteur $x = (\xi_i)$ selon $(M_{T_A}(\beta)x|x) \geqslant 0$.

En résumé les matrices $M_{T_A}(\beta)$ sont toutes de type positif quand A est une partie quelconque, même vide, de $\{1,2,\dots,n\}$, et cela signifie, grâce à (2.2.5), que $\beta = -D_m(\alpha)$ est une suite de moments sur I^n.

c $\Rightarrow$ a : Nous raisonnerons ici avec n = 2 pour simplifier les écritures, le cas général n'étant pas fondalement différent. La méthode suivie est celle de la preuve de l'implication c $\Rightarrow$ a de (1.4.2) . Pour y voir clair reprenons la notation à double indice en notant $\alpha_{k,\ell}$ la suite de départ. L'hypothèse c) signifie que les suites

$$\beta_{k,\ell} = \alpha_{k,\ell} - \alpha_{k+1,\ell}$$

$$\gamma_{k,\ell} = \alpha_{k,\ell} - \alpha_{k,\ell+1}$$

sont des suites de moments sur le carré I^2. Il existe donc deux mesures positives λ et μ sur I^2 telles que

$$\beta_{k,\ell} = \int u^k v^\ell \, d\lambda(u,v)$$

$$\gamma_{k,\ell} = \int u^k v^\ell \, d\mu(u,v)$$

Par ailleurs on a les égalités évidentes

$$\beta_{k,\ell} - \beta_{k,\ell+1} = \gamma_{k,\ell} - \gamma_{k+1,\ell}$$

qui prouvent que les mesures $(1-v)d\lambda$ et $(1-u)d\mu$ ont les mêmes moments, donc sont égales. Ainsi

(1) $$(1-v)\, d\lambda(u,v) = (1-u)\, d\mu(u,v)$$

De l'égalité

(2) $$\alpha_{k,\ell} - \alpha_{k+1,\ell} = \beta_{k,\ell} = \int u^k \, v^\ell \, d\lambda$$

on deduit aisément, à ℓ fixé :

(3) $$\alpha_{o,\ell} - \alpha_{k,\ell} = \int \frac{1-u^k}{1-u} \, v^\ell \, d\lambda$$

puis en écrivant

(4) $$\alpha_{o,\ell} - \alpha_{o,\ell+1} = \gamma_{o,\ell} = \int v^\ell \, d\mu$$

on obtient encore

(5) $$\alpha_{o,o} - \alpha_{o,\ell} = \int \frac{1-v^\ell}{1-v} \, d\mu$$

Avec (3) et (5) on obtient en fait l'expression de $\alpha_{k,\ell}$ selon

(6) $$\alpha_{k,\ell} = \alpha_{o,o} - \int \frac{1-v^\ell}{1-v} \, d\mu - \int \frac{1-u^k}{1-u} \, v^\ell \, d\lambda \quad .$$

Comme dans la preuve de (1.4.2) distinguons maintenant deux cas :

<u>1er cas</u>. On a $\int \frac{d\lambda}{1-u} = \int \frac{d\mu}{1-v} < +\infty$. On peut poser $d\theta = \frac{d\lambda}{1-u} = \frac{d\mu}{1-v}$ et il vient, à partir de (6)

(7) $$\begin{aligned} \alpha_{k,\ell} &= \alpha_{o,o} - \int d\theta + \int u^k \, v^\ell \, d\theta \\ &= \quad a \quad + \int u^k \, v^\ell \, d\theta = a + m_{k,\ell} \end{aligned}$$

où $(m_{k,\ell})$ est une suite de moments. Par exponentiation, on en déduit que $(e^{s\alpha_{k,\ell}})$ est une suite de moments sur I^2 pour tout $s \geqslant 0$, ce qui est a)

2e cas. On a $\int \frac{d\lambda}{1-u} = \int \frac{d\mu}{1-v} = \infty$. On introduit alors la fonction g_p, indicatrice du carré $[1 - \frac{1}{p}] \times [1- \frac{1}{p}]$, puis la mesure

$$d\theta_p = g_p \frac{d\lambda}{1-u} = g_p \frac{d\mu}{1-v}$$

et enfin la suite double

$$\alpha_{k,\ell}(p) = \alpha_{o,o} - \int (1-v^\ell)d\theta_p - \int (1-u^k)\ v^\ell\ d\theta_p$$

$$= \alpha_{o,o} - \int d\theta_p + \int u^k\ v^\ell\ d\theta_p\ .$$

D'après l'étude du 1er cas la suite $\alpha_{k,\ell}(p)$ engendre un semi-groupe de suites de moments et, lorsque $p \to \infty$, elle possède, d'après le théorème de Lebesgue, une limite

$$\delta_{k,\ell} = \alpha_{k,\ell} + \int (1+\ldots+v^{\ell-1})\ 1_L\ d\mu + \int (1+\ldots+u^{k-1})v^\ell\ 1_L\, d\lambda$$

où L est l'ensemble formé de l'arête droite et de l'arête supérieure du carré I^2. Par ailleurs l'égalité (1) montre que μ n'a pas de masse pour $v = 1$ et $0 \leqslant u < 1$, de même que λ n'a pas de masse pour $u = 1$ et $0 \leqslant v < 1$. On peut donc simplifier $\delta_{k,\ell}$ selon

$$\delta_{k,\ell} = \alpha_{k,\ell} + \int_{u=1} (1+\ldots+v^{\ell-1})d\mu + \int_{v=1} (1+\ldots+u^{k-1})d\lambda$$

$$\delta_{k,\ell} = \alpha_{k,\ell} - \sigma_\ell - \tau_k \qquad (\text{avec } \sigma_o = \tau_o = 0)\ .$$

Par stabilité par passage à la limite on sait que $(e^{s\delta_{k,\ell}})$ est une suite de moments sur I^2, donc il en sera de même pour $(e^{s\alpha_{k,\ell}})$ si l'on sait que les suites $(e^{s\sigma_\ell})$ et $(e^{s\tau_k})$ sont des suites de moments sur I^2. Or la suite σ_ℓ , par exemple, est construite à partir d'une mesure $\tilde{\mu}$ sur $[o,1]$ selon

$$\sigma_o = 0 \qquad \sigma_\ell = - \int_o^1 (1+\ldots+v^{\ell-1})d\tilde{\mu}(v)\ .$$

Comme il est clair que $\sigma_\ell - \sigma_{\ell+1} = \int_o^1 v^\ell \, d\tilde{\mu}(v)$, on voit que le critère (1.4.2) garantit que la suite exponentielle $(e^{s\sigma_\ell})$ est une suite de moments sur $[o,1]$, correspondant par exemple à la mesure ρ_s . Alors la mesure $\delta_1 \otimes \rho_s$ sur le carré I^2, où δ_1 est la mesure de Dirac au point 1, a bien pour moments

$$\int u^k v^\ell \, d(\delta_1 \otimes \rho_s) = e^{s\sigma_\ell}$$

ce qui répond à la question concernant la suite (σ_ℓ). On refait le même raisonnement avec la suite (τ_k) en échangeant le rôle des coordonnées, et le théorème est ainsi complètement démontré. □

CHAPITRE 3. LE PROBLEME DES MOMENTS DE HAMBURGER.

Dans ce chapitre, assez développé, nous revenons au cas de la dimension 1, en sortant toutefois du cas d'un convexe compact puisque l'espace de base est la droite numérique $\mathbb{R}$. La théorie des moments correspondant est, déjà depuis longtemps, extrêmement élaborée, puisque ses principaux linéaments remontent aux années 1920-23 avec les travaux de HAMBURGER, NEVANLINNA et M. RIESZ. Notre propos n'est donc pas de la reprendre une fois de plus, puisqu'il existe d'excellents ouvrages d'exposition sur le thème. Mais la théorie n'est pas figée ; des articles récents, postérieurs à 1980, en reprennent différents points et soulèvent des problèmes nouveaux, en même temps qu'ils apportent un regard neuf. Dans cet exprit, une lecture (ou une relecture) des anciens ouvrages peut s'avérer bénéfique, si elle s'accompagne d'une certaine critique.

C'est pourquoi le paragraphe 3.1 constitue un exposé sommaire de points essentiels de la théorie classique, mettant évidemment en relief les questions d'unicité et de non-unicité, et les questions d'extrêmalité. On profite aussi de l'exposé pour introduire la notion de mesure quasi-spectrale qui sera utilisée plus loin. Le paragraphe 3.2 est relativement court, mais il apporte quelques précisions essentielles sur un opérateur A_z introduit par LANDAU [7] en 1980 et insuffisamment exploité à notre avis. Le paragraphe 3.3 donne une démonstration très simplifiée de ce qu'il est convenu d'appeler la "paramétrisation de Nevanlinna" dans le cas indéterminé, les outils utilisés étant précisément l'opérateur A_o de Landau pour l'obtention de la condition nécessaire, et les mesures quasi-spectrales et leurs quasi-résolvants pour l'obtention de la condition suffisante. Il nous semble y avoir là une approche intéressante de l'un des points forts de la théorie.

Le paragraphe 3.4 est essentiellement consacré aux mesures, dites canoniques d'ordre m, qui interviennent assez naturellement une fois explicitée la paramétrisation de Nevanlinna, d'autant qu'elles donnent des exemples de mesures qui sont des points extrêmaux, au sens Krein-Milman, du convexe compact des solutions. Nous donnons ici une contribution, qui nous semble originale, en prouvant qu'une mesure μ , solution du problème des moments dans le cas indéterminé, est canonique d'ordre m, si et seulement si l'espace $\mathcal{P}$ des polynômes (ou son adhérence) est de codimension finie, égale précisément à m, dans l'espace $L^2(\mu)$. Ce résultat permet ensuite de généraliser certains résultats de BERG et CHRISTENSEN [2] sur les "perturbations" de mesures N-extrêmales au cas des mesures canoniques.

En revenant à la paramétrisation de Nevanlinna, on peut aussi apporter des résultats complets sur les mesures canoniques symétriques. Dans [3] CHIHARA avait montré, en 1982, qu'un problème symétrique indéterminé n'admettait que deux solutions symétriques N-extrêmales. Nous explicitons ici toutes les mesures symétriques canoniques d'ordre $m \geqslant 1$, en montrant qu'elles se répartissent en deux classes disjointes en correspondance bijective entre elles. Nous offrons donc là la "bonne" généralisation du théorème de Chihara (qui correspond dans ce contexte au cas $m = 0$).

Enfin le paragraphe 3.5 est le pendant des paragraphes 1.4 et 2.3 puisqu'il pose et résout complètement le problème des semi-groupes associé au problème des moments de Hamburger , en donnant d'ailleurs une solution qui se démarque assez de celles obtenues en 1.4 et 2.3, puisque les différences premières sont remplacées par la différence seconde. Cette divergence tient, à notre avis, au fait que le point $\mathbb{1}$ était point frontière de l'intervalle $[o,1]$ ou du cube I^n, alors qu'il est ici point intérieur de la droite numérique $\mathbb{R}$. De plus la méthode de démonstration s'appliquant telle quelle au cas du problème des moments de Stieltjes, c'est-à-dire sur la demi-droite $[o,\infty)$, ainsi qu'au cas du problème des moments sur $[1,\infty)$, nous posons et résolvons, dans la foulée, le problème des semi-groupes correspondant.

Néanmoins de nombreux problèmes restent ouverts, même dans le cadre restrictif du problème de Hamburger. Citons-en quelques-uns, sans vouloir épuiser la liste :

- caractérisation des mesures extrêmales, au sens Krein-Milman, plus maniable que le simple théorème de Naimark (3.1.6).

- extension de la théorie des mesures canoniques d'ordre m au cas m infini, par la condition que la mesure $\widetilde{\sigma}(\mu)$, intervenant dans la paramétrisation de Nevanlinna, soit à support discret dénombrable, plutôt qu'à support fini.

- questions d'unicité et de non-unicité dans le problème des semi-groupes de Hamburger.

(3.1) PRESENTATION DE LA THEORIE CLASSIQUE.

Le problème des moments sur la droite numérique $\mathbb{R}$, dit de Hamburger, rassemble un très vaste ensemble de résultats plus ou moins divers, plus ou moins profonds, reliés à différentes théories, comme par exemple celles des fractions continues, des développements asymptotiques, des convexes compacts, des opérateurs symétriques ou auto-adjoints sur un espace de Hilbert, des mesures spectrales et des mesures quasi-spectrales, sans oublier les fonctions holomorphes. Il s'agit donc d'un univers mathématique complexe, à la charnière de différentes théories importantes. Le fait que cet univers ait été largement exploré dans les années 30 ne change rien à son intérêt actuel : par exemple les questions d'unicité ou de non-unicité des solutions ont des répercussions dans la théorie des opérateurs essentiellement auto-adjoints intervenant en théorie quantique des champs. Par ailleurs diverses publications extrêmement récentes replacent la question dans le contexte d'une recherche actuelle.

Bien entendu il n'est pas dans notre intention de présenter ici un exposé exhaustif de la théorie, d'autant qu'il existe d'excellents ouvrages rassemblant à la fois l'essentiel et le détail, les références principales étant dans l'ordre chronologique STONE [11] , SHOHAT et TAMARKIN [10] et AKHIEZER [1] . Notre intervention se situera en fait sur deux plans différents : d'une part, l'introduction et l'exploitation systématique de la notion de mesure quasi-spectrale nous permettra d'apporter de réelles améliorations dans l'exposé du théorème de NEVALINNA sur la paramétrisation des mesures solutions ; d'autre part nous donnerons des résultats, que nous pensons être originaux, généralisant certaines questions, par exemple celles posées dans les articles récents de BERG et CHRISTENSEN [2] , CHIHARA [3] et LANDAU [7] , ou encore, dans la ligne des paragraphes (1.4) et (2.3) de ce travail, nous poserons et résoudrons le problème des semi-groupes de suites de moments associé au problème de Hamburger.

La transformée de Stieltjes. - A chaque mesure positive bornée μ sur $\mathbb{R}$ on associe sa transformée de Stieltjes

$$I_\mu(z) = \int \frac{d\mu(t)}{z-t}$$

qui est une fonction holomorphe sur l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, telle que $I_\mu(\bar{z}) = \overline{I_\mu(z)}$ et telle aussi que $\Im m\, I_\mu(z) < 0$ lorsque $\Im m\, z > 0$. Il est facile de prouver, par la formule d'inversion de Stieltjes-Perron ,

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{\beta \downarrow o} \quad i\beta\, I_\mu(a+i\beta) = \mu(\{a\}) \\[2ex] \lim\limits_{\beta \downarrow o} \frac{1}{2i\pi} \int_a^b [\, I_\mu(\alpha-i\beta) - I_\mu(\alpha+i\beta)]d\alpha = \\[2ex] \qquad = \mu(]a,b[) + \frac{1}{2}\mu(\{a\}) + \frac{1}{2}\mu(\{b\}) \end{array}\right.$$

que $I_\mu(.)$ détermine complètement μ. La transformation de Stieltjes constitue donc un outil privilégié pour l'étude des mesures positives bornées sur $\mathbb{R}$. De plus si la mesure μ est telle que $\int t^{2n} d\mu(t) < +\infty$ pour tout n, autrement dit si elle possède des moments de tous les ordres, alors ces moments interviennent dans le développement asymptotique de $I_\mu(z)$ car on a évidemment

$$I_\mu(z) = \sum_{k=o}^{n} \frac{\alpha_k}{z^{k+1}} + \frac{1}{z^{n+1}} \int \frac{t^{n+1}}{z-t}\, d\mu(t)$$

avec $\alpha_k = m_k(\mu) = \int t^k d\mu(t)$.

La classe N de Nevanlinna. - Le théorème classique de Riesz-Herglotz, précisant qu'une fonction f holomorphe dans le disque unité $D = \{z, |z| < 1\}$, telle que $Re f \geqslant 0$ sur D et $f(o) = 1$ peut s'écrire sous la forme

$$f(z) = \int \frac{u+z}{u-z}\, d\theta(u)$$

où θ est une probabilité sur le tore $\{z, |z| = 1\}$, conduit aisément à l'introduction et à la caractérisation des fonctions f de la classe de Nevanlinna.

(3.1.1) <u>DEFINITION</u>. - *Désignons par* Π_+ *et* Π_- *les demi-plans* $\Im m\, z > o$ *et* $\Im m\, z < o$ *respectifs. On dit qu'une fonction* f *holomorphe sur* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} = \Pi_+ \cup \Pi_-$ *est un élément de la classe* N *de Nevanlinna lorsqu'elle vérifie les conditions* $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ *et* $z \in \Pi_+ \Rightarrow \Im m\, f(z) \geqslant 0$.

(3.1.2) <u>THEOREME</u>. - *Pour que l'on ait* $f \in N$, *il faut et il suffit qu'il existe* $a \geqslant o$, b *réel et une mesure positive bornée* σ *sur* $\mathbb{R}$ *tels que*

$$f(z) = az + b + \int \frac{tz+1}{t-z}\, d\sigma(t).$$

les éléments a,b *et* σ *sont alors uniques.*

<u>PREUVE</u>. Voir AKHIEZER [1] p. 92 par exemple. □

Il est clair qu'une transformée de Stieltjes $I_\mu(z)$ est une fonction $f(z)$ telle que $-f \in N$. Il est donc important de caractériser, à l'intérieur de la classe N, ces fonctions particulières. C'est l'objet de l'énoncé suivant, dont une preuve est donnée par exemple dans AKHIEZER [1] p. 92-94.

(3.1.3) <u>THEOREME</u>. - *Une condition ncéessaire et suffisante pour qu'une fonction* $f(z)$ *soit la transformée de Stieltjes* $I_\mu(z)$ *d'une mesure positive bornée sur* $\mathbb{R}$ *est que l'on ait les deux conditions :*

a) $-f \in N$

b) $\sup_{y \geqslant 1} |y\, f(iy)| < +\infty$.

Le problème des moments : la condition d'existence. - Etant donnée une mesure positive μ sur $\mathbb{R}$, ayant des moments de tous les ordres $\alpha_k = \int t^k d\mu(t)$, on vérifie immédiatement que la matrice $M = [\alpha_{i+j}]$ est de type positif, ce qui fournit une condition nécessaire. Réciproquement si la suite (α_k), $k \geqslant 0$, est telle que la matrice $M = [\alpha_{i+j}]$ soit de type positif, on peut, soit par une forme particulière du théorème de Hahn-Banach (par exemple voir [10]), soit en invoquant la théorie des prolongements auto-adjoints d'opérateurs symétriques (voir par exemple DUNFORD-SCHWARTZ [4] , p. 1250), obtenir l'existence d'une mesure μ positive sur $\mathbb{R}$ telle que $\alpha_k = \int t^k d\mu(t)$. D'où :

(3.1.4) THEOREME (HAMBURGER, 1921). - *Pour que la suite* (α_k) *soit une suite de moments sur* $\mathbb{R}$ *il faut et il suffit que la matrice* $M = [\alpha_{i+j}]$ *soit de type positif.*

Bien entendu $\mathbb{R}$ n'étant pas compact il n'y a en général aucun résultat d'unicité puisque l'ensemble des polynômes $\mathcal{P} = \mathbb{C}[X]$ ne permet pas de reconstituer l'espace $L^2(\mu)$. La question importante de savoir si le problème est *déterminé* (unicité de μ) ou *indéterminé* (dans le cas contraire), est évidemment l'un des grands axes de la théorie, question qu'il faut compléter par la donnée d'une description, aussi explicite que possible, des solutions μ dans le cas indéterminé.

Nous verrons plus loin qu'au coeur du débat intervient la suite (P_k) des polynômes orthonormés associée à chaque mesure μ solution (et indépendante du choix de cette mesure), pourvu qu'on puisse construire une telle suite infinie. Le cas élémentaire à éliminer pour cela est celui où une mesure μ à support discret est solution (et dans ce cas elle est unique), ce qui revient à dire que la matrice $M = [\alpha_{i+j}]$ n'est pas de type défini positif. Nous supposerons donc dans toute la suite que l'on a la condition :

(*) <u>La matrice</u> $M = [\alpha_{i+j}]$ <u>est de type défini positif</u>.

<u>Le convexe compact $M(\alpha)$ des solutions</u> . - Désignons par $\alpha = (\alpha_k)$ une suite, fixée une fois pour toutes ici, et vérifiant la condition (*). On lui associe l'ensemble convexe $M(\alpha)$ des solutions μ du problème des moments $\alpha_k = \int t^k d\mu(t)$. Par ailleurs désignons par $C_T(\mathbb{R}) = C_T$ l'espace vectoriel des fonctions continues tempérées sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire telle que pour chacune d'elles, il existe un polynôme P qui la majore en valeur absolue. On a évidemment $C_T \subset L^2(\mu)$ pour toute $\mu \in M(\alpha)$. Par ailleurs si $|f| \leqslant P$ alors

$$\left|\int f d\mu\right| \leqslant \int P d\mu = \theta(P)$$

où $\theta(P)$ se calcule à partir des α_k , et est donc indépendant de $\mu \in M(\alpha)$. Ainsi l'application $\mu \to L_\mu$, où L_μ est définie sur C_T par $L_\mu(f) = \int f d\mu$, envoie injectivement $M(\alpha)$ dans le dual algébrique C_T^* , et même dans une partie faiblement bornée de ce dual. Montrons en fait qu'elle est même faiblement fermée. Pour cela supposons que $\mu_i \to L$, où (μ_i) est une suite généralisée de $M(\alpha)$. On a donc $L(f) = \lim \int f d\mu_i$ pour toute $f \in C_T$. Alors L est une fonctionnelle linéaire positive sur C_T, de sorte que le théorème de Riesz-Markov-Alexandroff implique l'existence d'une mesure positive bornée λ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$L(f) = \int f d\lambda \qquad \text{pour toute } f \in C_o(\mathbb{R}) .$$

Il faut tirer de là que $\lambda \in M(\alpha)$. Pour cela on fixe une suite $\phi_n \in \mathcal{K}(R)$ telle que $\phi_n \uparrow 1$ et $[-n,+n] \subset \text{Supp } \phi_n$, et pour f donnée dans C_T on fixe une fonction $g \in C_T$ telle que $g \geqslant 1$ et $f = o(g)$, c'est-à-dire $\lim\limits_{|x| \to \infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = o$.

On a alors, par positivité de L sur C_T

$$\int |f|\phi_n \, d\lambda = L(\phi_n |f|) \leqslant L(|f|)$$

donc à la limite $\int |f| d\lambda \leqslant L(|f|)$. Ainsi λ a des moments de tous les ordres. Par ailleurs pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N tel que $n \geqslant N$ implique $(1 - \phi_n)|f| \leqslant \varepsilon g$. D'où

$$L(|f| - \phi_n|f|) \leqslant \varepsilon L(g)$$

et ainsi

$$L(|f|) = \lim L(\phi_n|f|) = \lim \int \phi_n|f| d\lambda = \int |f| d\lambda$$

de sorte que $L(f) = \int f d\lambda$ pour toute $f \geqslant 0$, donc finalement pour toute $f \in C_T$. Maintenant $\mu_i \to L$, donc $\int f d\mu_i \to \int f d\lambda$, et par suite $\int P d\mu_i \to \int P d\lambda$ pour tout polynôme P , donc $\int t^k d\lambda = \alpha_k$ et $\lambda \in M(\alpha)$. En résumé

(3.1.5) THEOREME. - *L'ensemble* $M(\alpha)$ *des mesures solutions, muni de la topologie faible associée à l'espace* C_T *des fonctions continues tempérées, est un convexe compact métrisable.*

PREUVE. Il reste à prouver la métrisabilité. Pour cela on peut remplacer la topologie faible associée à C_T par la topologie étroite, associée à $C_o(\mathbb{R})$, et utiliser la séparabilité de $C_o(\mathbb{R})$.□

REMARQUE. Il est clair qu'on ne peut remplacer la topologie faible associée à C_T par celle associée à l'espace $\mathcal{P}$ des polynômes, qui n'induit pas sur le compact $M(\alpha)$ une topologie séparée (puisqu'elle est même grossière !).

Le théorème précédent pose immédiatement la question de savoir quels sont les points extrêmaux de $M(\alpha)$, et éventuellement de décrire la structure de l'ensemble de ces points extrêmaux. On verra plus loin qu'elle n'est pas simple. Toutefois une caractérisation simple existe, donnée par :

(3.1.6) THEOREME (NAIMARK, 1943). - *Pour qu'une mesure* $\mu \in M(\alpha)$ *soit un point extrémal du convexe compact métrisable* $M(\alpha)$ *, il faut et il suffit que l'espace* $\mathcal{P}$ *des polynômes soit dense dans l'espace* $L^1(\mu)$.

PREUVE. La condition est suffisante car si $\mu = \frac{1}{2}(\lambda+\nu)$ avec $\lambda,\nu \in M(\alpha)$ et $\bar{\mathcal{P}} = L^1(\mu)$, on voit déjà que λ et ν sont absolument continues par rapport à μ, de sorte qu'il existe des densités boréliennes $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$ telles que $f + g = 2$, avec $\lambda = f.\mu$ et $\nu = g.\mu$. Fixons $\phi \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$: par densité il existe une suite (P_n) dans $\mathcal{P}$ telle que $\int |\phi - P_n|\, d\mu \to 0$. Alors $\int |\phi - P_n|\, d\lambda \to 0$ aussi, car $\int |\phi - P_n|\, d\lambda \leqslant 2 \int |\phi - P_n| d\mu$, et de même $\int |\phi - P_n| d\nu \to 0$. Mais puisque $\int P_n d\lambda = P_n d\nu$ on a

$$\int \phi d\lambda = \lim \int P_n d\lambda = \lim \int P_n d\nu = \int \phi d\nu$$

donc $\lambda = \nu$ et μ est point extrêmal de $M(\alpha)$.

Réciproquement si μ est un point extrêmal de $M(\alpha)$, montrons que $\mathcal{P}$ est dense dans $L^1(\mu)$. Pour cela il suffit de prouver que toute $f \in L^\infty(\mu)$ telle que $\int fPd\mu = 0$ pour tout polynôme P, est nulle dans $L^\infty(\mu)$. Par homothétie on peut supposer $\|f\| \leqslant 1$ et f réelle. Soit donc $g = 1-f \geqslant 0$ et $h = 1+f \geqslant 0$, puis $\lambda = g.\mu$ et $\nu = h.\mu$. Alors

$$\int Pd\lambda = \int Pgd\mu = \int (1-f)Pd\mu = \int Pd\mu$$

$$\int Pd\nu = \int Phd\mu = \int (1+f)Pd\mu = \int Pd\mu$$

donc λ et ν sont éléments de $M(\alpha)$. Mais $h+g = 2$ implique $\mu = \frac{1}{2}(\lambda+\nu)$ et par extrêmalité de μ, on obtient $\lambda = \nu = \mu$, donc $g = h = 1$ μ-presque partout, et $f = 0$ μ-presque partout. □

REMARQUE. On verra plus loin qu'il est intéressant d'introduire les mesures $\mu \in M(\alpha)$ telles que $\mathcal{P}$ soit dense dans l'espace $L^2(\mu)$. Ces mesures, appelées

N-extrêmales, sont des points extrêmaux de $M(\alpha)$. Mais on n'obtient pas ainsi tous les points extrêmaux, ce qui pose encore de nouvelles questions relatives aux propriétés de densité de l'espace $\mathcal{P}$ dans les différents espaces $L^p(\mu)$, $1 \leqslant p < +\infty$. On pourra consulter [2] pour plus de détails.

<u>L'espace de Hilbert fondamental $H = H(\alpha)$ et les mesures quasi-spectrales E^μ.</u>

La suite (α_k) étant toujours fixée de façon que la matrice $M = [\alpha_{i+j}]$ soit de type défini positif, on peut placer sur l'espace $\mathcal{P} = \mathbb{C}[X]$ une norme hilbertienne, associée au produit scalaire

$$(P|Q) = \sum_{i,j} \alpha_{i+j}\, p_i \bar{q}_j \quad \text{si } P = \Sigma p_i X^i \quad \text{et} \quad Q = \Sigma q_j X^j .$$

Cette norme sur $\mathcal{P}$ est évidemment induite par celle de $L^2(\mu)$ pour toute solution $\mu \in M(\alpha)$. On peut alors introduire le système orthonormal (P_k), $k \geqslant 0$ par la méthode d'orthonormalisation de Schmidt, puis l'espace $H = H(\alpha)$ obtenu en complétant abstraitement l'espace $\mathcal{P}$. Il est clair que H s'identifie à l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$ dans la représentation $h = \Sigma h_k P_k$ avec $h_k = (h|P_k)$.

Cela étant on pourra considérer, avec quelques précautions, que pour chaque $\mu \in M(\alpha)$, H s'identifie à un sous-espace fermé de $L^2(\mu)$, adhérence $\bar{\mathcal{P}}$ de $\mathcal{P}$ dans $L^2(\mu)$, et introduire l'opérateur de projection orthogonale $\Pi_H^\mu : L^2(\mu) \to H$, défini de façon précise par

$$\Pi_H^\mu f = \sum_0^\infty (f|P_k)\, P_k$$

Par ailleurs il existe sur $L^2(\mu)$ une mesure spectrale canonique $\tilde{E}^\mu = \tilde{E}$, associée à l'opérateur auto-adjoint de multiplication par X, et définie par $\tilde{E}(A)f = 1_A f$ pour tout A appartenant à la tribu borélienne $\Sigma = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$. Par projection sur H, on en déduit l'existence, pour chaque $\mu \in M(\alpha)$, d'une mesure quasi-spectrale E^μ sur H, suffisamment bien définie par les conditions

(1) $$E^\mu(A)h = \Pi_H^\mu(1_A h) \qquad h \in H$$

équivalentes aux conditions

$$(2) \qquad (E^{\mu}(A)P|Q) = \int_A P\bar{Q}\, d\mu \qquad P,Q \in \mathcal{P}$$

On a alors :

(3.1.7) PROPOSITION. - *Pour que la mesure quasi-spectrale* E^{μ} *soit spectrale il faut et il suffit que* $\mathcal{P}$ *soit dense dans* $L^2(\mu)$ *, c'est-à-dire que* μ *soit* N-*extrêmale.*

PREUVE. La condition est suffisante car si $H = L^2(\mu)$ alors $E^{\mu} = \tilde{E}^{\mu}$. Réciproquement supposons E^{μ} spectrale, c'est-à-dire vérifiant la propriété multiplicative $E^{\mu}(A \cap B) = E^{\mu}(A)E^{\mu}(B)$. Dans ce cas on a

$$(E^{\mu}(A \cap B)1|1) = \int_{A \cap B} d\mu = \int_A 1_B \, d\mu$$

$$(E^{\mu}(A)E^{\mu}(B)1|1) = \int_A \Pi_H^{\mu}(1_B)\, d\mu \; .$$

L'égalité ayant lieu pour tous les A on en déduit que $\Pi_H^{\mu}(1_B) = 1_B$ dans $L^2(\mu)$ donc $1_B \in H$ et $H = L^2(\mu)$, c'est-à-dire que $\mathcal{P}$ est dense dans $L^2(\mu)$.□

Le problème de l'unicité par la méthode des opérateurs. On sait qu'il existe, entre les polynômes orthonormaux (P_n), une relation de récurrence linéaire à trois indices

$$X\, P_{n+1} = a\, P_{n+2} + b\, P_{n+1} + c\, P_n$$

avec $a = (X\, P_{n+1}|P_{n+2})$, $b = (X\, P_{n+1}|P_{n+1})$, $c = (X\, P_{n+1}|P_n)$

En posant donc

$$a_n = (X\, P_n|P_n) \quad \text{et} \quad b_n = (X\, P_n|P_{n+1})$$

on obtient la relation fondamentale

$$XP_n = b_n P_{n+1} + a_n P_n + b_{n-1} P_{n-1}$$

avec $b_{-1} = 0$. On remarquera que si $P_n = p_n X^n + \ldots$, avec $p_n > 0$ alors

$$b_n = (P_{n+1} | XP_n) = p_n (P_{n+1} | X^{n+1}) = \frac{p_n}{p_{n+1}} \| P_{n+1} \|^2 > 0$$

pour $n \geqslant 0$.

Cette relation fondamentale fait apparaître que l'opérateur de multiplication par X, défini sur l'espace $\mathcal{P}$, est représenté matriciellement sur la base orthonormale (P_n) par la matrice, dite de Jacobi ,

$$J = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & \cdots\cdots \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & \cdots\cdots \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & \cdots\cdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Comme cet opérateur de multiplication par X est symétrique puisque $(XP|Q) = (P|XQ)$, il est fermable en tant qu'opérateur non borné sur H. Notons donc par T sa fermeture, définie sur le domaine

$$D(T) = \{h \in H \; ; \exists Q_n \in \mathcal{P}, \; Q_n \to h \quad \text{et} \quad XQ_n \to Xh \}$$

selon $Th = Xh$. Evidemment $\mathcal{P} \subset D(T)$, donc T est à domaine dense, et est symétrique et fermé.

La théorie générale invite donc à déterminer ses indices de défaut, ce qui amène plus généralement à déterminer les noyaux $\mathrm{Ker}(\lambda - T^*)$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour cela soit $f \in D(T^*)$ telle que $T^* f = \lambda f$. Avec $f = \Sigma \xi_n P_n$ on a

$$\lambda(f|P_n) = (T^* f|P_n) = (f|XP_n)$$

$$= (f|b_n\, P_{n+1} + a_n\, P_n + b_{n-1}\, P_{n-1})$$

soit le système :

$$\lambda\, \xi_n = b_n\, \xi_{n+1} + a_n\, \xi_n + b_{n-1}\, \xi_{n-1} \qquad .$$

Comme on a $b_n > 0$ pour $n \geqslant 0$, on voit que ξ_n est proportionnel à ξ_o. Pour $\xi_o = P_o$, qui est une constante $p_o > 0$, on obtient $\xi_n = P_n(\lambda)$. Alors de deux choses l'une :

- ou bien $\Sigma|P_n(\lambda)|^2 = +\infty$ et alors $\mathrm{Ker}(\lambda - T^*) = (o)$
- ou bien $\Sigma|P_n(\lambda)|^2 < +\infty$ et alors $g_\lambda = \Sigma P_n(\lambda) P_n \in H$, et il est facile de vérifier que $g_\lambda \in D(T^*)$ et que $T^* g_\lambda = \lambda g_\lambda$, et aussi $T^* g_{\bar\lambda} = \bar\lambda\, g_{\bar\lambda}$. Donc la dimension de $\mathrm{Ker}(\lambda - T^*)$ est égale à 1, et à celle de $\mathrm{Ker}(\bar\lambda - T^*)$. En résumé :

(3.1.8) THEOREME (STONE, 1932). - *L'opérateur symétrique fermé* T *sur* H *admet comme indices de défaut le couple* (o,o) *ou le couple* (1.1) . *Dans le premier cas* T *est auto-adjoint et* $\Sigma|P_n(\lambda)|^2 = +\infty$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *et pour tout* λ *réel qui n'est pas valeur propre de* T. *Dans le second cas* T *n'est pas auto-adjoint mais admet des prolongements auto-adjoints et* $\Sigma|P_n(\lambda)|^2 < +\infty$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$.

PREUVE. Seul le dernier point est à préciser quand λ est réel car la théorie des indices de défaut ne fait intervenir que les valeurs $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Mais P_n ayant tous ses zéros réels, il est évident, par décomposition en facteurs premiers, que l'on a $|P_n(\lambda)| \geqslant |P_n(\alpha)|$ pour $\lambda = \alpha + i\beta$. □

(3.1.9) COROLLAIRE. - *Si la série* $\Sigma|P_n(\lambda)|^2$ *n'est pas partout convergente sur* $\mathbb{C}$, *alors elle diverge pour tout* λ *n'appartenant pas un ensemble au plus dénombrable de* $\mathbb{R}$.

Examen du premier cas. Sans entrer dans tous les détails, on voit alors aisément que T, étant auto-adjoint, sa mesure spectrale E(.) donne naissance à une mesure $\mu = (E(.)1|1)$ solution du problème des moments, et telle que $E^{\mu} = E$. En examinant le résolvant $R(z,T) = \int \frac{dE(t)}{z-t}$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on voit aisément que la fonction $\phi_z = R(z,T)1$ est élément du domaine D(T). Or $(z-T)\phi_z = 1$ dans H, d'où $(z-X)\phi_z = 1$ dans tout espace $L^2(\nu)$, pour tout $\nu \in M(\alpha)$. Il suit aisément de là que

$$(\phi_z|1) = \int \frac{d\mu(t)}{z-t} = \int \frac{d\nu(t)}{z-t}$$

d'où l'égalité $\nu = \mu$ avec l'injectivité de la transformation de Stieltjes. En résumé, avec (3.1.7), on règle le cas d'unicité

(3.1.10) THEOREME. - *Lorsqu'on est dans le premier cas, c'est-à-dire lorsque* $\Sigma|P_n(\lambda)|^2 = +\infty$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *(ou même pour un seul* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$*), l'opérateur* T *est auto-adjoint. Si* E(.) *est la mesure spectrale de* T, *alors l'unique solution du problème des moments est la mesure* $\mu = E_1 = (E(.)1|1)$. *De plus* $\mathcal{P}$ *est alors dense dans l'espace* $L^2(\mu)$.

Examen du second cas. Résumons assez sommairement la situation, renvoyant à STONE [11] pour une étude complète, qui ne saurait être développée dans le cadre de notre travail. On introduit les espaces de défaut $D_+ = \mathrm{Ker}(T^*-i)$ et $D_- = \mathrm{Ker}(T^*+i)$, ainsi que l'espace $D(T^*)$ que l'on norme avec la norme du graphe, définie par

$$\|h\|_*^2 = \|h\|^2 + \|T^*h\|^2$$

et qui rend $D(T^*)$ complet. Ceci assure la décomposition hilbertienne

$$D(T^*) = D(T) \oplus D_+ \oplus D_-$$

et on rappelle que toute extension auto-adjointe de T s'obtient, puisque D_+ et D_- sont respectivement engendrés par les fonctions g_i et g_{-i} , par la donnée d'une constante θ telle que $|\theta| = 1$. Cette extension T_θ est caractérisée par son domaine

$$D(T_\theta) = D(T) \oplus D_\theta$$

où $D_\theta = \mathbb{C}\, G_\theta$ et $G_\theta = g_i + \theta g_{-i} = g_i + \theta \bar{g}_i$ et $T_\theta G_\theta = T^* G_\theta = i g_i - i\theta \bar{g}_i$.

Alors la mesure spectrale $E_\theta(.)$ de T_θ conduit à une mesure $\nu_\theta = (E_\theta(.)1|1)$, solution du problème des moments telle que $\mathcal{P}$ soit dense dans l'espace $L^2(\nu_\theta)$, ce qui assure que ν_θ est N-extrêmale. On introduit ensuite la fonction $R(i,T_\theta)1 = \phi + c\, G_\theta \in D(T_\theta)$ et un calcul facile montre que ϕ et c sont déterminés par les égalités

$$(1) \qquad \begin{cases} (i-X)\phi = 1 - \frac{1}{\Delta^2}\, \bar{g}_i \\ c = - \frac{i\,\bar{\theta}}{2\Delta^2} \end{cases}$$

avec $\Delta^2 = \sum_0^\infty |P_k(i)|^2$.

On remarquera que ϕ est indépendante de θ. Par ailleurs on vérifie aussi que

$$\begin{aligned} \int \frac{d\nu_\theta(t)}{i-t} &= (R(i,T_\theta)1|1) \\ &= (\phi|1) + c(G_\theta|1) \\ &= (\phi|1) - i\,\frac{1+\bar{\theta}}{2\Delta^2} \end{aligned}$$

d'où il résulte que les transformées de Stieltjes $I_{\nu_\theta}(i)$ des mesures ν_θ, calculées au point i, sont toutes distinctes (ce qui implique que les ν_θ sont distinctes et par conséquent que l'on est bien dans le cas d'indétermination) et réparties sur le pourtour Γ d'un disque de centre ω et de rayon R avec

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} \omega = (\phi|1) - \dfrac{i}{2\Delta^2} \\ R = \dfrac{1}{2\Delta^2} \end{cases}$$

disque qui est d'ailleurs contenu dans le demi-plan Π_-.

On poursuit en cherchant à obtenir la détermination de la transformée de Stieltjes $\int \frac{d\mu(t)}{i-t} = I_\mu(i)$ pour n'importe quelle mesure $\mu \in M(\alpha)$ solution. On y arrive aisément en revenant à la fonction ϕ écrite plus haut, ce qui permet d'obtenir l'égalité

$$\text{(3)} \qquad \int \frac{d\mu(t)}{i-t} - \omega = \frac{1}{2i\Delta^2} \left(\frac{i+t}{i-t} \,\Big|\, g_i\right)$$

On introduit alors la projection $h = \Pi_H^\mu \frac{i+t}{i-t} = 2if-1$ avec $f = \Pi_H^\mu \frac{1}{i-t}$. Pour $g \in D(T)$ on a facilement

$$\text{(4)} \qquad ((\bar{i}-T)g|h) = (g|i+t)$$

donc $h \in D(T^*)$ et $(i-T^*)h = i+t$. De plus

$$\text{(5)} \qquad \left\|\frac{i+t}{i-t} - h\right\|^2 = \|1\|^2 - \|h\|^2$$

car $\left|\frac{i+t}{i-t}\right| = 1$. Décomposons maintenant h en $h = \tilde{h} + rg_i$ avec $\tilde{h} \perp g_i$. Il est facile de vérifier que

$$\int \frac{d\mu(t)}{i-t} - \omega = \frac{r}{2i}$$

d'où l'égalité

$$\text{(6)} \qquad \left|\int \frac{d\mu(t)}{i-t} - \omega\right|^2 = \frac{r^2}{4}$$

Or, si h dépend évidemment de μ, on peut vérifier que $\tilde{h}$ n'en dépend pas, car si $\tilde{h}_\mu$ et $\tilde{h}_\nu$ correspondent à μ et ν, alors $(i-T^*)(\tilde{h}_\mu-\tilde{h}_\nu) = 0$, donc $\tilde{h}_\mu-\tilde{h}_\nu \in \mathbb{C}g_i$ et par ailleurs $\tilde{h}_\mu-\tilde{h}_\nu$ est orthogonale à g_i. On peut donc déterminer $\tilde{h}$ en choisissant pour μ l'une des mesures ν_θ. Mais $\mathcal{P}$ est dense dans $L^2(\nu_\theta)$ donc $h = \frac{i+t}{i-t}$ est dans $L^2(\nu_\theta)$ et $||h||^2 = ||1||^2 = ||\tilde{h}||^2 + r^2(\theta)\Delta^2$, en notant $r(\theta)$ le nombre r associé à ν_θ. En appliquant (6) à ν_θ, on a encore $r(\theta)^2 = 4R^2$ puisque $I_{\nu_\theta}(i) \in \Gamma$. On arrive ainsi à l'expression de $||\tilde{h}||^2$.

$$||\tilde{h}||^2 = ||1||^2 - 4R^2\Delta^2 \tag{7}$$

En revenant à la mesure μ on a $||h||^2 = ||\tilde{h}||^2 + r^2\Delta^2$

soit

$$||h||^2 = ||1||^2 - 4R^2\Delta^2 + r^2\Delta^2 \quad .$$

Alors avec (6), (5) et la valeur $R = \frac{1}{2\Delta^2}$ on obtient finalement l'égalité

$$\text{(8)} \quad \begin{cases} \left| \displaystyle\int \frac{d\mu(t)}{i-t} - \omega \right|^2 = R^2 - \frac{R}{2} \left|\left| \frac{i+t}{i-t} - h \right|\right|^2 \\ \text{avec} \quad h = \Pi_H^\mu \frac{i+t}{i-t} \end{cases} .$$

Cette égalité prouve que la transformée de Stieltjes appartient au disque D(i), limité par le cercle $\Gamma(i)$ de centre ω et de rayon R. Elle donne aussi la condition pour que $I_\mu(i) \in \Gamma(i)$, qui est que la fonction $\frac{i+t}{i-t}$, ou la fonction $\frac{1}{i-t}$ appartienne à H.

Pour énoncer tous ces résultats, établis pour $z = i$, revenons à $z = a+ib$ quelconque avec $b > 0$. Une transformation simple ramène la question au point i. D'où l'on déduit :

(3.1.11) <u>THEOREME</u> (STONE , 1932). - *Lorsqu'on est dans le second cas l'opérateur T n'est pas auto-adjoint et il possède une infinité d'extensions auto-adjointes T_θ, indexées sur le tore $|\theta| = 1$. Le problème des moments* *possède une infinité de solutions parmi lesquelles on trouve les mesures* $\nu_\theta = (E_\theta(.)1|1)$ *, associées aux mesures spectrales* E_θ *des* T_θ*. Ces mesures sont* N-*extrêmales c'est-à-dire que* $\mathcal{P}$ *est dense dans chacun des espaces* $L^2(\nu_\theta)$.

Par ailleurs pour tout $z = a+ib$ *fixé , avec* $b > o$*, la transformée de Stieltjes* $I_\mu(z)$*, calculée au point* z*, décrit, quand* μ *décrit le convexe compact* $M(\alpha)$ *des solutions, l'ensemble des points d'un disque fermé* $D(z)$ *de centre*

$$\omega(z) = \frac{1}{2ib\Delta^2(z)} \left[1 + 2ib \sum_{k=1}^{\infty} \overline{P_k(z)}\, Q_k(z)\right]$$

et de rayon $R(z) = \dfrac{1}{2b\Delta^2(z)}$ *, où l'on a posé*

$$\Delta^2(z) = \sum_{k=o}^{\infty} |P_k(z)|^2$$

et où (Q_k) *est la suite des polynômes*

$$Q_k(z) = \int \frac{P_k(z) - P_k(t)}{z-t}\, d\mu(t)$$

indépendants de la mesure μ *choisie dans* $M(\alpha)$.

Enfin pour que $I_\mu(z)$ *appartienne à la frontière* $\Gamma(z) = \partial D(z)$ *il faut et il suffit que la fonction* $\frac{1}{z-t}$ *soit élément de* H*, ce qui revient à dire que* μ *est une mesure* N-*extrêmale.*

PREUVE. Il y a quelques points supplémentaires à préciser, particulièrement concernant les polynômes Q_k. Pour cela il suffit de revenir au cas $z = i$ et à la formule (2) donnant $\omega = \omega(i)$, à partir de l'expression (1) donnant ϕ. On a alors

$$(\phi|1) = \int \frac{d\mu(t)}{i-t} - \frac{1}{\Delta^2} \int \frac{\bar{g}_i(t)}{i-t}\, d\mu(t)$$

mais $\overline{g_i}(i) = \Delta^2$, donc

$$(\phi|1) = \frac{1}{\Delta^2} \int \frac{\overline{g_i}(t) - \overline{g_i}(i)}{i-t} \, d\mu(t)$$

$$= \frac{1}{\Delta^2} \sum_{k=o}^{\infty} P_k(-i) \int \frac{P_k(i) - P_k(t)}{i-t} \, d\mu(t)$$

$$= \frac{1}{\Delta^2} \sum_{k=1}^{\infty} P_k(-i)\, Q_k(i) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{k=1}^{\infty} \overline{P_k(i)\, Q_k(i)}$$

formule qui conduit aisément à la bonne expression pour $\omega(i)$, puis pour $\omega(z)$.

Maintenant si $\frac{1}{i-t} \in H$, ce qui est, d'après (8), une condition nécessaire et suffisante pour que $I_\mu(i) \in \Gamma(i)$, il faut montrer que μ est N-extrêmale. Or cela résulte de l'énoncé qui suit. □

(3.1.12) <u>THEOREME</u> (M. RIESZ, 1923). - *On suppose le problème des moments indéterminé et on fixe $\mu \in M(\alpha)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathcal{P}$ *est dense dans* $L^2(\mu)$ *, c'est-à-dire que* μ *est N-extrêmale, ou encore que* $H = L^2(\mu)$.

b) μ *est l'une des mesures* ν_θ.

c) On a $I_\mu(i) \in \Gamma(i)$.

d) On a $I_\mu(z) \in \Gamma(z)$ *pour un point* $z = a+ib$ *fixé,* $b > o$.

e) On a $I_\mu(z) \in \Gamma(z)$ *pour tout* z.

<u>PREUVE</u>. Il suffit de prouver d $\Rightarrow$ a et a $\Rightarrow$ b.

d $\Rightarrow$ a : Avec l'égalité

$$\frac{1}{z-t} = \sum_{o}^{n-1} \frac{t^k}{z^{k+1}} + \frac{t^n}{z^n(z-t)}$$

on voit que d) implique $\frac{t^n}{z-t} \in H$ pour tout n, puisqu'alors $\frac{1}{z-t} \in H$.

La fonction $f = \frac{1}{z-t}$ est donc telle que $Pf \in H$ pour tout polynôme P. Il en résulte que si $g \in H$, comme il existe une suite Q_k de polynômes telle que $Q_k \to g$ dans $L^2(\mu)$ et comme f est bornée, alors $fg = \lim fQ_k \in H$. Ainsi $fH \subset H$, donc $f^p \in H$ pour tout p, et ainsi $\frac{1}{(z-t)^p} \in H$. Maintenant pour $|z'-z| < b$, on a

$$\frac{1}{z'-t} = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{(z-z')^k}{(z-t)^{k+1}}$$

et la série est normalement convergente en t puisque $\left|\frac{z-z'}{z-t}\right| \leqslant \frac{|z-z'|}{b}$.

Elle converge donc a fortiori dans $L^2(\mu)$, puisque μ est bornée, et par suite $\frac{1}{z'-t} \in H$. On déduit immédiatement de là que $\frac{1}{z-t} \in H$ pour tout $z \in \Pi_+$, c'est-à-dire l'énoncé e). Pour obtenir a) fixons $f \in L^2(\mu)$ telle que $f \perp H$. Alors l'intégrale

$$\int \frac{f(t)}{z-t}\, d\mu(t)$$

est nulle pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, ce qui prouve que la mesure (complexe) $f.\mu$ a une transformée de Stieltjes nulle, donc $f.\mu = o$ et $f = o$ dans $L^2(\mu)$. Ainsi $H = L^2(\mu)$.

a $\Rightarrow$ b : Introduisons sur l'espace $H = L^2(\mu)$ l'opérateur X de multiplication par t : $(Xf)(t) = tf(t)$, défini sur le domaine $D(X) = \{f \in L^2 \ , Xf \in L^2\}$. Il est immédiat que X prolonge T, qu'il est symétrique et même auto-adjoint puisque $D(X^*)$ est formé des éléments $g \in L^2$ tels que l'application $f \to (Xf|g)$ soit continue. Or $(Xf|g) = (f|Xg)$ et la condition signifie, vu la densité de $\mathcal{P}$ dans $L^2(\mu)$, que $Xg \in L^2(\mu)$, donc $D(X^*) = D(X)$. Comme on est dans le cas d'indétermination alors T n'est pas auto-adjoint, de sorte que X coïncide nécessairement avec l'un des opérateurs T_θ. Or $R(z,X)1 = \frac{1}{z-t}$ donc

$$\int \frac{d\mu(t)}{z-t} = (R(z,X)1|1) = (R(z,T_\theta)1|1) = \int \frac{d\nu_\theta(t)}{z-t}$$

et ainsi $\mu = \nu_\theta$ par égalité des transformées de Stieltjes. □

Du théorème (3.1.11) on tire aisément à partir des relations

$$| I_\mu(z) - I_\mu(z') | = \left| \int \frac{(z-z')}{(z-t)(z'-t)} \, d\mu(t) \right|$$

$$\leqslant \frac{|z-z'|}{bb'} \, \alpha_o$$

que les disques D(z) varient continûment avec z. On tire encore de là que la fonction $\Delta^2(z) = \sum_o^\infty |P_k(z)|^2$ est continue sur $\mathbb{C}$, la série étant d'après le théorème de Dini, uniformément convergente sur tout compact K du plan complexe $\mathbb{C}$. Il suit de là l'énoncé, important pour la suite :

(3.1.13) <u>COROLLAIRE</u>. - *La fonction noyau*

$$K(z,z') = \sum_{k=o}^{\infty} P_k(z)P_k(z')$$

est, dans le cas indéterminé, une fonction entière des deux variables complexes z *et* z'. *Et pour toute suite* $(a_k) \in \ell^2$ *, la fonction* $A(z) = \sum_o^\infty a_k P_k(z)$ *est une fonction entière de la variable complexe* z, *de sorte que tout élément* $h \in H$ *est la restriction à* $\mathbb{R}$ *d'une fonction entière.*

En énonçant les théorèmes (3.1.8) à (3.1.13) nous n'avons pas, évidemment, épuisé le sujet, et il est de nombreuses propriétés du convexe compact $M(\alpha)$ qui sont laissées de côté.

Citons par exemple la fait qu'il résulte de (3.1.13) que les mesures N-extrêmales ν_θ sont toutes à support discret dénombrable sur $\mathbb{R}$. D'autre part nous aurons besoin dans la suite de quelques propriétés importantes des polynômes Q_k dans le cas indéterminé. Elles se retrouvent d'ailleurs facilement à partir de la définition

$$Q_k(z) = \int \frac{P_k(z) - P_k(t)}{z-t} \, d\mu(t) \; .$$

(3.1.14) PROPOSITION. - *On suppose le problème des moments indéterminé. Alors les polynômes* Q_k *se déterminent par les conditions*

$$Q_o = 0 \quad , \quad Q_1 = \frac{\sqrt{\alpha_o}}{b_o} \quad , \quad Q_2 = \frac{(X-a_1) + b_1}{b_o b_1} \sqrt{\alpha_o}$$

$$XQ_k = b_k Q_{k+1} + a_k Q_k + b_{k-1} Q_{k-1} \quad \text{si } k \geqslant 2 \; .$$

Ils sont à coefficients réels et les racines de Q_k *sont toutes réelles. Enfin on a la relation*

$$Q_k(z) = I_\mu(z)P_k(z) - (\frac{1}{z-t} \mid P_k)$$

de sorte que, pour toute $\mu \in M(\alpha)$, *on a*

$$\Pi_H^\mu \frac{1}{z-t} = \sum_{k=o}^{\infty} [I_\mu(z)P_k(z) - Q_k(z)] P_k$$

pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, *et que pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *la série* $\sum_o^\infty |Q_k(z)|^2$ *est convergente uniformément sur tout compact.*

(3.1.15) COROLLAIRE 1 . - *Pour que la mesure* μ *soit N-extrêmale il faut et il suffit que pour au moins une valeur* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *(et c'est alors vrai pour toutes), on ait la relation*

$$\sum_{k=o}^{\infty} \mid I_\mu(z)P_k(z) - Q_k(z) \mid^2 = \int \frac{d\mu(t)}{|z-t|^2}$$

PREUVE. Car cette condition traduit exactement le fait que $\Pi_H^\mu \frac{1}{z-t} = \frac{1}{z-t}$ dans l'espace $L^2(\mu)$, ce qui ramène à (3.1.11). □

Application. Nous donnons ici une application renforçant la proposition (3.1.7) en obtenant une caractérisation des mesures N-extrêmales par une condition très simple portant sur la mesure quasi-spectrale associée. Plaçons-nous dans le cas indéterminé. On a alors, comme conséquence de (3.1.13)

(3.1.16) LEMME. - *Pour toute* $f \in L^2(\mu)$ *la projection* $\Pi_H^\mu f$ *est une fonction holomorphe sur* $\mathbb{C}$ *donnée par*

$$(\Pi_H^\mu f)(z) = \sum_0^\infty (f|P_k)P_k(z) = \int K(z,t)f(t)d\mu(t).$$

PREUVE. La suite $a_k = (f|P_k)$ étant dans ℓ^2, on voit que $\Pi_H^\mu f$ s'écrit $\Sigma(f|P_k)P_k$ et se prolonge donc en une fonction holomorphe d'après (3.1.13). Si maintenant $K_n(z,t) = \sum_0^n P_k(z)P_k(t)$ alors

$$\int |K(z,t) - K_n(z,t)|^2 d\mu(t) = \sum_{n+1}^\infty |P_k(z)|^2 \downarrow 0$$

la décroissance vers zéro étant uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}$.

Il suit de là que pour chaque z, et uniformément sur tout compact, on a puisque $f \in L^2(\mu)$

$$\int K(z,t)f(t)d\mu(t) = \lim \int K_n(z,t)f(t)d\mu(t)$$

$$= \lim \sum_0^n (f|P_k)P_k(z) = (\Pi_H^\mu f)(z)$$

d'où le résultat. □

On a alors la caractérisation annoncée

(3.1.17) THEOREME. - *On suppose le problème indéterminé. Alors pour toute* $\mu \in M(\alpha)$ *les conditions suivantes sont équivalentes*

a) μ *est N-extrêmale*

b) toute fonction entière f, élément de $L^2(\mu)$ *, appartient à H.*

c) la mesure quasi-spectrale E^μ *est commutative au sens où* $E^\mu(A)E^\mu(B) = E^\mu(B)E^\mu(A)$ *pour tous boréliens A,B de* $\mathbb{R}$.

PREUVE.

$a \Rightarrow b$: car $H = L^2(\mu)$

$b \Rightarrow c$: Soit $f \in L^2$, supposée entière. On a donc l'égalité

$$f(z) = \int K(z,t)f(t)d\mu(t)$$

au sens de $L^2(\mu)$, c'est-à-dire μ-presque partout par rapport à z. Ceci implique que $S = \mathrm{Supp}\mu$ est discret car dans le cas contraire l'égalité aurait lieu pour tout $z \in \mathbb{C}$ d'après le principe des zéros isolés puisque chacun des membres de l'égalité est holomorphe sur $\mathbb{C}$. En particulier, avec $f(z) = \exp(-nz^2)$ on aurait pour tout n

$$\exp(-nx^2) = \int K(x,t)\exp(-nt^2)d\mu(t)$$

Par le théorème de Lebesgue on aurait, quand $n \to \infty$:

$$1_{\{o\}}(x) = \int K(x,t)1_{\{o\}}(t)d\mu(t) = K(x,o)\mu(\{o\}) .$$

Avec $x = o$ on obtient $1 = K(o,o)\mu(\{o\})$, donc $\mu(\{o\}) > 0$ et $K(o,o) > 0$. Avec $x \neq o$ on obtient $K(x,o) = 0$, ce qui est absurde puisque K est continu.

Donc S est discret. Fixons $a \in S$ et $b \in S$ avec $b \neq a$. Alors par le fait que μ est discrète on a

$$\exp(-n(x-a)^2) = \int K(x,t)\exp(-n(t-a)^2)d\mu(t)$$

pour tout $x \in S$. Avec $x = a$ et $n \to \infty$ on obtient comme plus haut l'égalité

$$1 = K(a,a)\ \mu(\{a\})$$

soit

$$\mu(\{a\}) = \frac{1}{K(a,a)} = \frac{1}{\Delta^2(a)}$$

et avec $x = b$ on obtient $K(a,b) = 0$.

Maintenant la mesure quasi-spectrale E^μ est définie sur H par $E^\mu(A)h = \Pi_H^\mu(1_A h)$, d'où pour $a \in S$ l'égalité

$$(E^\mu(A)h)(a) = \int K(a,t)1_A(t)h(t)d\mu(t)$$

$$= K(a,a)1_A(a)h(a)\mu(\{a\}) = (1_A h)(a)$$

puique $K(a,t) = 0$ si $t \in S$ avec $t \neq a$. Ainsi $E^{\mu}(A)h = 1_A h$, l'égalité étant prise ponctuellement sur S, donc aussi dans $L^2(\mu)$. Ceci prouve que E^{μ} est spectrale, donc a fortiori on a c).

c $\Rightarrow$ a. Par le théorème de Fubini on a, pour P polynôme

$$[E^{\mu}(B)E^{\mu}(A)P](x) = \iint K(x,t)1_B(t)K(t,s)1_A(s)P(s)d\mu(s)d\mu(t)$$

$$[E^{\mu}(A)E^{\mu}(B)P](x) = \iint K(x,s)1_A(s)K(s,t)1_B(t)P(t)d\mu(s)d\mu(t)$$

donc, avec c), on a l'égalité

$$\iint_{A\times B} [K(x,t)P(s) - K(x,s)P(t)]K(s,t)d\mu(s)d\mu(t) = 0$$

d'où l'on déduit l'égalité

(1) $$[K(x,t)P(s) - K(x,s)P(t)]\, K(s,t) = 0$$

$\mu \otimes \mu \otimes \mu$ -presque partout en x,s,t. Par continuité l'égalité est vraie sur S^3, où $S = \mathrm{Supp}\mu$. On tire de là que S est discret, car sinon d'après le principe des zéros isolés et l'holomorphie de toutes les fonctions on aurait l'égalité pour $s,t,x \in \mathbb{R}$ quelconques. Comme $K(s,s) > 0$ on aurait pour s fixé, et $|t-s| < \delta$

(2) $$K(x,t)P(s) = K(x,s)P(t).$$

Avec $P = 1$ on en déduit $K(x,t) = K(x,s)$, et avec $P = X$ on a au contraire $K(x,t) \neq K(x,s)$ pour $s \neq t$, ce qui est absurde.

Ainsi S est discret. Mais alors pour $s \neq t$ on a $K(s,t) = 0$ car sinon on aurait de nouveau l'égalité (2) et une absurdité. Ainsi S est discret et $s \neq t$, $s,t \in S$ implique $K(s,t) = 0$. Il suit de là comme dans la preuve précédente que $E^{\mu}(A)h = 1_A h$ au sens de $L^2(\mu)$, ou comme égalité ponctuelle sur S. Mais alors E^{μ} est spectrale et μ est N-extrêmale d'après (3.1.7). □

(3.2) L'OPERATEUR A_z DE LANDAU.

Dans son article [7] , LANDAU introduit p. 265 un opérateur A_z , $z \in \mathbb{C}$, défini sur les polynômes par

$$A_z R(t) = \frac{R(z)-R(t)}{z-t}$$

et démontre un peu plus loin que cet opérateur s'étend en un opérateur sur H, qui est compact (p. 266) et tel que $I - \gamma A_z$ possède un inverse borné pour tout γ (p. 267), inverse qui n'est d'ailleurs pas explicité. Nous allons voir ici que ces opérateurs A_z sont effectivement intéressants, d'autant plus d'ailleurs que l'on peut compléter les résultats de LANDAU, en établissant des relations entre A_z et les mesures quasi-spectrales E^μ.

On suppose dans tout ce paragraphe que le problème des moments est indéterminé, de sorte que le compact $M(\alpha)$ est infini. La question, qui n'a pas été résolue dans le paragraphe (3.1), de donner une construction "effective" de toutes les solutions $\mu \in M(\alpha)$, sera traitée dans le paragraphe (3.3) : c'est celle, dite de la paramétrisation de NEVANLINNA, faisant intervenir les fonctions holomorphes de la classe N introduites en (3.1.1). Par les relations obtenues en (3.2), nous verrons que l'introduction des mesures quasi-spectrales E^μ permet d'en donner une preuve naturelle, beaucoup plus courte que la preuve classique, car elle évite le recours aux méthodes liées aux fractions continues et à la résolution du problème des moments tronqué à l'ordre n.

L'opérateur Δ et les fonctions fondamentales g_z et h_z. - Bien entendu dans tout cela la suite orthonormale (P_k) va jouer un rôle essentiel, associée à la suite (Q_k). C'est pourquoi on pose, pour $z \in \mathbb{C}$

$$g_z = \sum_{k=o}^{\infty} P_k(z)P_k$$

$$h_z = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(z)P_k$$

On obtient deux éléments de H, fonctions entières sur $\mathbb{C}$, dépendant holomorphiquement de z. D'ailleurs g_z a été déjà introduit, au moins pour $z = i$, dans la preuve de (3.1.11).

L'opérateur Δ est défini sur H par la condition $\Delta P_k = Q_k$, ce qui revient à dire que, pour R polynôme

$$\Delta R(x) = \int \frac{R(x)-R(t)}{x-t} \, d\mu(t) \quad .$$

(3.2.1) PROPOSITION. - *On a les formules*

a) $g_z \in D(T^*)$ *et* $T^* g_z = z g_z$

b) $h_z \in D(T^*)$ *et* $T^* h_z = z h_z + 1$

c) Pour toute $R \in H$ *on a*

$$(R|g_z) = R(\bar{z}) \; et \; (R|h_z) = (\Delta R)(\bar{z}) \quad .$$

PREUVE. Les égalités de c) sont évidentes quand on écrit $R = \Sigma \, r_k \, P_k$ avec $\Sigma |r_k|^2 < +\infty$ compte tenu des définitions de g_z et h_z. Pour prouver a) et b), supposons R polynôme. Alors on a aisément

$$(TR|g_z) = (XR|g_z) = \bar{z}\, R(\bar{z}) = \bar{z}(R|g_z) = (R|zg_z)$$

$$(TR|h_z) = (XR|h_z) = \Delta(XR)(\bar{z}) = \bar{z}(\Delta R)(\bar{z}) + (R|1)$$

$$= (R|zh_z+1)$$

L'opérateur A_z de Landau. - On a déjà $A_z 1 = o$ et plus généralement $d°A_z R = d°R-1$ si R est un polynôme. Il suit de là que $(A_z P_n|P_k) = o$ si $k \geqslant n$. Pour $k < n$ on a

$$(A_z P_n|P_k) = \int \frac{P_n(z)-P_n(t)}{z-t} P_k(t)\, d\mu(t) \qquad \text{donc}$$

$$(A_z P_n|P_k)-(A_z P_k|P_n) = \int \frac{P_n(z)P_k(t)-P_k(z)P_n(t)}{z-t} \, d\mu(t)$$

$$= P_k(z)Q_n(z) - P_n(z)\, Q_k(z)$$

d'où, avec $(A_z P_k | P_n) = o$ si $n > k$:

$$(A_z P_n | P_k) = \begin{cases} (P_k Q_n - P_n Q_k)(z) & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k \geqslant n . \end{cases}$$

Il suit de là la première précision apportée aux résultats de LANDAU :

(3.2.2) PROPOSITION. - *L'opérateur A_z est défini sur H tout entier et c'est un opérateur de Hilbert-Schmidt.*

PREUVE. Des égalités ci-dessus on déduit

$$\| A_z P_n \|^2 = \sum_{k=o}^{n} |P_k Q_n - P_n Q_k|^2 (z)$$

$$\leqslant |Q_n(z)|^2 \sum_{o}^{\infty} |P_k(z)|^2 + |P_n(z)|^2 \sum_{o}^{\infty} |Q_k(z)|^2$$

$$+ 2|P_n(z)Q_n(z)| \sum_{o}^{\infty} |P_k(z)Q_k(z)|$$

d'où

$$\sum_{o}^{\infty} \| A_z P_n \|^2 \leqslant 2[(\sum_{o}^{\infty} |P_k(z)|^2)(\sum_{o}^{\infty} |Q_k(z)|^2) + (\sum_{o}^{\infty} |P_k(z)Q_k(z)|)^2] < +\infty$$

ce qui démontre la proposition. □

La seconde précision est la suivante :

(3.2.3) PROPOSITION. - *L'opérateur A_z est quasi-nilpotent sur H, c'est-à-dire que son spectre $\sigma(A_z)$ est réduit à $\{o\}$. De plus pour $\lambda \neq o$, $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :*

$$(\lambda - A_z)^{-1} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} A_{z+\frac{1}{\lambda}}$$

PREUVE. Puisque $A_z 1 = 0$ on a $0 \in \sigma_p(A_z)$, spectre ponctuel de A_z. Pour $\lambda \neq o$ l'équation $(\lambda - A_z)R = S$ donne

$$\lambda \quad R(t) - \frac{R(z) - R(t)}{z-t} = S(t)$$

$$[\ 1 + \lambda(z-t)]\ R(t) = R(z) + (z-t)S(t)$$

et avec $t = z + \frac{1}{\lambda}$ on obtient $R(z) = \frac{1}{\lambda}\ S(z + \frac{1}{\lambda})$ puis l'égalité

$$R(t) = \frac{1}{\lambda}\ S(t) + \frac{1}{\lambda^2}\ \frac{S(z + \frac{1}{\lambda}) - S(t)}{z + \frac{1}{\lambda} - t}$$

qui fournit le résultat. □

(3.2.4) COROLLAIRE. - *La famille des opérateurs* $(A_z)_{z \in \mathbb{C}}$ *vérifie l'équation "antirésolvante"*

$$A_u - A_v = (u-v)\ A_u\ A_v \qquad u,v \in \mathbb{C}$$

PREUVE. - Supposons $u \neq v$ et posons $\lambda = \frac{1}{u-v}$, donc $u = v + \frac{1}{\lambda}$. Il suffit alors d'écrire $(\lambda - A_v)(\lambda - A_v)^{-1} = I$ avec (3.2.3). □

REMARQUE. Compte tenu de (3.2.4) on voit que la famille d'opérateurs $B_z = - A_z$ vérifie l'équation résolvante classique

$$B_u - B_v = (v-u)\ B_u\ B_v$$

mais, bien entendu, B_u ne saurait être un opérateur résolvant, puisqu'il n'est pas inversible. On a donc affaire à ce qu'on appelle généralement un *pseudo-résolvant* , ou un *quasi-résolvant* , et on peut donc prévoir qu'il existe a priori certaines relations avec les mesures quasi-spectrales E^{μ} et les opérateurs quasi-résolvants associés.

Mais déjà, grâce à (3.2.3) et (3.2.4), on peut expliciter le caractère analytique de la fonction $z \to A_z$. En effet, avec (3.2.4) on a $A_u A_v = A_v A_u$, et avec $u = z$ et $v = o$ on obtient

$$A_z - A_o = zA_z A_o \quad \text{soit} \quad A_z(1-zA_o) = A_o$$

D'où :

(3.2.5) <u>COROLLAIRE 2</u> . - *Pour chaque* $z \in \mathbb{C}$ *on a*

$$A_z = A_o(1-zA_o)^{-1} = \sum_{k=o}^{\infty} z^k A_o^{k+1} \quad .$$

<u>Relations avec les mesures quasi-spectrales E^μ</u>. - On rappelle que pour toute $\mu \in M(\alpha)$ la mesure quasi-spectrale E^μ est définie par $E^\mu(A)R = \Pi_H^\mu(1_A R)$ pour tout $R \in H$. En particulier pour $R,S \in H$ on a

$$(E^\mu(A)R|S) = \int_A R\bar{S}\, d\mu$$

de sorte que $dE^\mu_{R,S} = R\bar{S}\, d\mu$. On peut alors introduire, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ le quasi-résolvant

$$R_z^\mu = \int \frac{dE^\mu(t)}{z-t}$$

qui est un opérateur borné sur H, tel que pour P,Q polynômes on ait

(1) $$(R_z^\mu P|Q) = \int \frac{P(t)\,\overline{Q(t)}}{z-t}\, d\mu(t)$$

La comparaison avec l'opérateur A_z est alors facile puisque

$$(A_z P|Q) = \int \frac{P(z)-P(t)}{z-t}\,\overline{Q(t)}\, d\mu(t)$$

(2) $$= -\,(R_z^\mu P|Q) + P(z)\,(\frac{1}{z-t}\,|\,Q).$$

En introduisant la fonction

$$f_z^\mu = \Pi_H^\mu \frac{1}{z-t} = R_z^\mu 1$$

où cette dernière égalité est conséquence de (1), on obtient la représentation suivante, compte tenu de (3.2.1) :

$$(A_z P|Q) = -(R^\mu_z P|Q) + (P|g_{\bar z})(f^\mu_z|Q)$$

d'où l'on tire

$$A_z P = -R^\mu_z P + (P|g_{\bar z})f^\mu_z \quad .$$

Si maintenant on convient, pour $f,g \in H$, de noter $f \otimes g$ l'opérateur $h \to (h|g)f$ (on notera l'antilinéarité par rapport à la seconde variable), on obtient :

(3.2.6) <u>PROPOSITION</u>. - *Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ on a la représentation*

$$A_z = -R^\mu_z + f^\mu_z \otimes g_{\bar z}$$

où $f^\mu_z = \Pi^\mu_H \frac{1}{z-t}$ *s'écrit aussi sous la forme*

$$f^\mu_z = R^\mu_z 1 = I_\mu(z) g_z - h_z \quad \textit{avec } I_\mu(z) = \int \frac{d\mu(t)}{z-t} \quad .$$

<u>PREUVE</u>. - Seule la dernière égalité est à prouver. Or pour $P = P_k$ on a, avec (3.2.1c)

$$(f^\mu_z|P) = \int \frac{P(t)}{z-t}\, d\mu(t) = \int \frac{P(t)-P(z)}{z-t} + P(z)\, I_\mu(z)$$

$$= I_\mu(z)\ (g_z|P) - (\Delta P)(z)$$

$$= I_\mu(z)\ (g_z|P) - (h_z|P)$$

ce qui suffit. □

De (3.2.6) on déduit plusieurs résultats utiles pour la suite et rassemblés dans l'énoncé :

(3.2.7) COROLLAIRE :

a) Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *et toutes mesures* $\mu, \nu \in M(\alpha)$ *on a*

$$R_z^\mu - R_z^\nu = [I_\mu(z) - I_\nu(z)]\ g_z \otimes g_{\bar{z}}$$

b) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ *l'adjoint* A_z^* *se détermine selon*

$$A_{\bar{z}}^* = A_z + h_z \otimes g_{\bar{z}} - g_z \otimes h_{\bar{z}}$$

c) Enfin $h_z = A_{\bar{z}}^* 1$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$.

PREUVE. a) est évident avec (3.2.6). L'assertion b) peut se prouver directement avec les formules donnant $(A_z P_n | P_k)$, mais il suffit ici de remarquer que $(R_z^\mu)^* = R_{\bar{z}}^\mu$ pour avoir b) pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, puis pour z quelconque par analyticité. Enfin c) peut aussi se prouver directement mais c'est évident avec les égalités $A_z 1 = o$, $(1 | g_{\bar{z}}) = 1$ et $(1 | h_{\bar{z}}) = (\Delta 1)(z) = 0$. □

(3.3) LA PARAMETRISATION DE NEVANLINNA.

On aborde ici un point important de la théorie, qui n'est autre qu'une obtention complète de la solution du problème des moments dans le cas indéterminé. L'originalité de notre démarche, comme nous l'avons déjà noté, consiste à utiliser les mesures quasi-spectrales E^μ pour démontrer le théorème de Nevanlinna.

Le point de départ est l'introduction des quatre fonctions entières, construites à partir de la suite orthonormale (P_k) et de la suite associée (Q_k) selon :

$$\begin{cases} A(z) = z \sum Q_k(o) Q_k(z) = z(h_z | h_o) \\ B(z) = -1 + z \sum Q_k(o) P_k(z) = -1 + z(g_z | h_o) \\ C(z) = 1 + z \sum P_k(o) Q_k(z) = 1 + z(h_z | g_o) \\ D(z) = z \sum P_k(o) P_k(z) = z(g_z \mid g_o) . \end{cases}$$

On introduit aussi quelquefois les fonctions A_n, B_n, C_n, D_n obtenues en sommant les séries pour $k \leqslant n$, ce qui permet de voir, avec les formules classiques de Darboux-Christoffel (voir par exemple AKHIEZER [1] p. 9 et p. 14), que l'on a $A_n D_n - B_n C_n = 1$ et $\mathfrak{Im}\,[D_n(z)\,\overline{B_n(z)}] = -\,\mathfrak{Im}\,z.\sum_{0}^{n}|P_k(z)|^2$, de sorte que, à la limite :

(3.3.1) <u>PROPOSITION</u>. - *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *on a*

$$(AD - BC)\,(z) = 1$$

$$\mathfrak{Im}\,[D(z)\,\overline{B(z)}] = -\,\mathfrak{Im}\,z.\|g_z\|^2 .$$

Cela étant, le théorème fondamental de NEVANLINNA s'énonce ainsi.

(3.3.2) <u>THEOREME</u> (NEVANLINNA, 1922). *Désignons par* $\tilde{N} = N \cup \{\infty\}$ *la classe* N *de Nevanlinna introduite en (3.1.1) augmentée de la constante* ∞. *On a alors, dans le cas d'indétermination, une correspondance bijective homographique entre* $\tilde{N}$ *et le convexe compact* $M(\alpha)$ *des solutions du problème. Cette correspondance s'explicite selon la relation*

$$I_\mu(z) = \int \frac{d\mu(t)}{z-t} = \frac{A(z)\phi(z) - C(z)}{B(z)\phi(z) - D(z)}$$

avec $\mu \in M(\alpha)$ *et* $\phi \in \tilde{N}$.

Pour que μ *soit* N-*extrêmale il faut et il suffit que* ϕ *soit une constante réelle, finie ou infinie.*

En utilisant la description (3.1.2) de la classe N, on peut donner un autre énoncé, plus suggestif, de (3.3.2).

(3.3.3) THEOREME. - *Dans le cas d'indétermination il y a correspondance bijective homographique entre le convexe compact* $M(\alpha)$ *et l'ensemble des triplets* (a,b,σ) *augmenté d'un point à l'infini* $b_\infty = \infty$ *, avec* $a \geqslant o$ *et* $b \in \mathbb{R}$ *,* σ *étant une mesure positive bornée sur* $\mathbb{R}$*. Cette correspondance s'explicite selon*

$$I_\mu(z) = \frac{A(z)\phi(z) - C(z)}{B(z)\phi(z) - D(z)}$$

avec

$$\phi(z) = az + b + \int \frac{tz+1}{t-z}\, d\sigma(t)$$

Pour que μ *soit N-extrêmale il faut et il suffit que* $a = o$ *et* $\sigma = o$ *c'est-à-dire que* $\phi = b \in \bar{\mathbb{R}}$.

REMARQUE. C'est cette représentation paramétrique qui permet d'affiner la description du convexe compact $M(\alpha)$ en introduisant la notion de mesure canonique d'ordre m. On montre ainsi, en particulier, que l'ensemble des points extrêmaux de $M(\alpha)$, décrit partiellement par le théorème de Naimark (3.1.6), est partout dense dans $M(\alpha)$, tandis que l'ensemble des mesures N-extrêmales est compact dans $M(\alpha)$ et homéomorphe à $\bar{\mathbb{R}}$ (ou au tore $|\theta| = 1$ comme on a vu en (3.1.11) avec les mesures ν_θ). Ces résultats exposés dans AKHIEZER [1] , p. 114 à 121, et attribués à GLAZMAN et NAIMAN (1955), ont été "retrouvés" par BERG et CHRISTENSEN [2] parmi d'autres résultats plus substantiels et plus originaux. Nous reviendrons d'ailleurs sur la notion de mesure canonique d'ordre m, pour apporter quelques compléments à l'article [2] cité.

La preuve de (3.3.2) est ordinairement longue et difficile, car elle nécessite la connaissance de toute la théorie antérieure, en particulier des travaux sur l'approximation du problème des moments par les problèmes analogues tronqués à l'ordre n. On pourra consulter AKHIEZER [1] ou STONE [11] pour s'en convaincre.

La preuve que nous donnons ici, sans être totalement évidente nous semble tout de même simplifier notablement la question, en apportant en plus quelques lumières supplémentaires sur la liaison existant entre le problème des moments, dans le cas d'indétermination, et la théorie des opérateurs. Cette preuve se divise évidemment en deux, suivant que l'on parte de μ pour aboutir à ϕ , ou de ϕ pour aboutir à μ.

1er cas. On suppose μ fixée.

En exprimant ϕ à partir de $I_\mu(z)$ il s'agit donc de prouver que la fonction

$$\phi(z) = \phi^\mu(z) = \frac{C(z)-D(z)I_\mu(z)}{A(z)-B(z)I_\mu(z)} = \frac{U(z)}{V(z)}$$

est élément de la classe $\tilde{N}$. On a déjà

(3.3.4) PROPOSITION. - *Posons* $f_z = f_z^\mu = I_\mu(z)g_z - h_z$. *Alors*

$$U(z) = C(z) - D(z)I_\mu(z) = (1-zf_z|g_o) = 1-zf_z(o)$$

$$V(z) = A(z) - B(z)I_\mu(z) = (1-zh_o|f_{\bar{z}}).$$

PREUVE. Car

$$U(z) = C - D\, I_\mu = (1+zh_z|g_o) - zI_\mu(z)(g_z|g_o)$$
$$= (1-zf_z|g_o) = 1-zf_z(o).$$

$$V(z) = A - B\, I_\mu = (zh_z|h_o) - I_\mu(z)\ [-1 + (zg_z|h_o)]$$
$$= I_\mu(z) - z(I_\mu(z)g_z - h_z|h_o) = I_\mu(z) - z(h_o|f_{\bar{z}})$$

Mais $I_\mu(z) = (f_z|1) = (1|f_{\bar{z}})$ car $(1|g_z) = 1$ et $(1|h_z) = o$ donc $V(z) = (1-zh_o|f_{\bar{z}})$. □

Supposons maintenant μ N-extrêmale. On sait alors que $\frac{1}{z-t} \in H$, donc

$f_z = f_z^\mu = \Pi_H^\mu \frac{1}{z-t} = \frac{1}{z-t}$, où l'égalité est à lire dans $L^2(\mu)$, c'est-à-dire μ-presque partout par rapport à t. On ne peut donc particulariser t que pour les valeurs $t \in S = \mathrm{Supp}\mu$, qui décrivent donc un ensemble discret fermé d'après ce qu'on a vu en (3.1.17). Toutefois on a

$$(A_o f_z)(t) = \frac{f_z(t)-f_z(o)}{t} = \frac{1}{t}\left[\frac{1}{z-t} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z} - f_z(o)\right]$$

$$= \frac{1}{z(z-t)} + \frac{1-zf_z(o)}{zt} = \frac{1}{z} f_z(t) + \frac{1-zf_z(o)}{zt}$$

où les égalités sont vraies μ-presque partout en t. Ainsi

(1) <u>Si</u> μ <u>est N-extrêmale alors</u> $f_z^\mu = zA_o f_z^\mu - (1-zf_z^\mu(o))\frac{1}{t}$.

On sait que μ est discrète, donc si $0 \in S$, c'est-à-dire si $\mu(\{o\}) > o$ alors nécessairement $zf_z(o) = 1$. Dans le cas où $0 \notin S$ la fonction $t \to \frac{1}{t}$ est élément de $L^2(\mu)$, puisqu'elle est bornée sur S.

Maintenant $U = 1-zf_z(o)$ et $V = (1-zh_o \mid f_{\bar{z}})$, mais $f_{\bar{z}}$ est donnée par (1), donc

$$V = -z(h_o|f_{\bar{z}}) + (1|\bar{z}A_o f_{\bar{z}}) - (1-zf_z(o)\int \frac{d\mu(t)}{t}$$

$$= -z(h_o|f_{\bar{z}}) + z(A_o^* 1|f_{\bar{z}}) - (1-zf_z(o))\int \frac{d\mu(t)}{t}$$

$$= -(1-zf_z(o))\int \frac{d\mu(t)}{t}$$

car $A_o^* 1 = h_o$. En résumé

(2) <u>Si</u> μ <u>est N-extrêmale alors</u> $U = 1-zf_z(o)$ <u>et</u>
$V = -(1-zf_z(o))\int \frac{d\mu(t)}{t}$

Il y a cependant quelques précautions à prendre. Tout d'abord $AD-BC = 1$ implique que $U = C-DI_\mu$ et $V = A-BI_\mu$ ne peuvent simultanément s'annuler. Donc les deux conditions $f_z(o) = \frac{1}{z}$ et $\mu(\{o\}) = 0$ sont incompatibles. Ainsi $f_z(o) = \frac{1}{z}$ implique $\mu(\{o\}) > 0$, ce qui est aussi la condition nécessaire et suffisante pour que $\frac{1}{t} \notin L^2(\mu)$. Donc

(3) $$f_z^\mu(o) = \frac{1}{z} \iff \mu(\{o\}) > 0 \iff \phi = 0$$

Maintenant si $\mu(\{o\}) = 0$, alors $f_z(o) \neq \frac{1}{z}$ donc

$$\phi = \phi^\mu = \frac{U}{V} = -\frac{1}{\int \frac{d\mu(t)}{t}} = b$$

avec b constante réelle non nulle, mais éventuellement infinie si $\int \frac{d\mu(t)}{t} = 0$.

On vient donc de voir que la transformation $\mu \to \phi$ envoie l'ensemble des mesures N-extrêmales dans l'ensemble $\bar{\mathbb{R}}$. Or on sait que lorsque μ décrit l'ensemble de ces mesures N-extrêmales, sa transformée de Stieltjes $I_\mu(z)$ décrit le cercle $\Gamma(z) = \partial D(z)$ défini en (3.1.11). Il suit donc de là que, à z fixé, la transformation homographique

$$H_z : \zeta \to \frac{C(z) - D(z)\zeta}{A(z) - B(z)\zeta}$$

transforme $\Gamma(z)$ en une partie de $\bar{\mathbb{R}}$. Il y a donc en fait bijection entre $\Gamma(z)$ et $\bar{\mathbb{R}}$, de sorte qu'il existe une mesure N-extrêmale μ_o et une seule, et une mesure N-extrêmale μ_∞ et une seule telles que

$$\mu_o(\{o\}) > 0 \quad \text{et} \quad \mu_\infty(\{o\}) = 0 \text{ et } \int \frac{d\mu_\infty(t)}{t} = 0$$

En résumé, on a prouvé jusque-là :

(3.3.5) <u>THEOREME</u>.

a) Quand μ est N-extrêmale alors $\phi = \phi^\mu = b \in \bar{\mathbb{R}}$.

b) On a $b = 0$ *si et seulement si* $\mu(\{o\}) > 0$. *Dans ce cas* $U = 0$, $\phi = 0$ *donc* $I_\mu(z) = \frac{C(z)}{D(z)}$ *, ce qui prouve que* $D(z) \neq 0$ *pour tout* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

c) On a $b = \infty$ *si et seulement si* $\mu(\{o\}) = 0$ *et* $\int \frac{d\mu(t)}{t} = 0$. *Dans ce cas* $V = 0$, $\phi = \infty$ *, donc* $I_\mu(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ *, ce qui prouve que* $B(z) \neq 0$ *pour tout* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Revenons au cas général où $\mu \in M(\alpha)$ n'est plus supposée N-extrêmale. Alors l'homographie H_z transforme nécessairement le disque fermé $D(z)$ en l'un des demi-plans fermés $\bar{\Pi}_+$ ou $\bar{\Pi}_-$. Pour savoir lequel il suffit de transformer un seul point de l'intérieur $\overset{\circ}{D}(z)$ et ce point particulier peut être choisi selon

$$\zeta = \frac{1}{2} [\, I_o(z) + I_\infty(z)] = I_\mu(z) \qquad \text{avec} \quad \mu = \frac{1}{2}(\mu_o+\mu_\infty)$$

où l'on a posé, pour simplifier $I_o = I_{\mu_o}$ et $I_\infty = I_{\mu_\infty}$. Par correspondance affine on a donc, pour cette mesure μ

$$U = \frac{1}{2}\,(U_o+U_\infty) = \frac{1}{2}\,U_\infty = -\frac{1}{2B}$$

$$V = \frac{1}{2}\,(V_o+V_\infty) = \frac{1}{2}\,V_o = \frac{1}{2D}$$

car $U_\infty = C-DI_\infty = C - \frac{DA}{B} = \frac{BC-AD}{B} = -\frac{1}{B}$ et par le même calcul $V_o = A-BI_o = \frac{1}{D}$.

On a donc $\phi^\mu = \frac{U}{V} = -\frac{D}{B}$, de sorte que

$$\Im m\, \phi^\mu(z) = \Im m \;[-\frac{D(z)}{B(z)}\,] = \frac{1}{|B(z)|^2}\; \Im m\,[-D(z)\bar{B}(z)]$$

soit, avec (3.3.1) :

$$\Im m\, \phi^\mu(z) = \frac{\|\, g_z \|^2}{|B(z)|^2}\; \Im m\; z > 0 \quad \text{si} \quad z \in \Pi_+ \qquad .$$

On voit donc que ce qui est vrai pour $\mu = \frac{1}{2}(\mu_o+\mu_\infty)$ est vrai aussi pour toute $\mu \in M(\alpha)$, ce qui démontre bien que ϕ^μ est une fonction de Nevanlinna, ou la constante ∞ lorsque $\mu = \mu_\infty$.

2ème cas. On suppose ϕ fixée.

On a déjà vu que ϕ^μ décrit $\bar{\mathbb{R}}$ quand μ décrit l'ensemble des mesures N-extrêmales. On peut donc supposer que ϕ est une fonction de Nevanlinna, non réduite à une constante réelle. L'idée essentielle qui préside à la preuve est la reconstitution de μ lorsqu'on suppose connu le quasi-résolvant R_z^μ . En effet on tire de (3.2.7) les formules suivantes, en faisant successivement $\nu = \mu_o$ et et $\nu = \mu_\infty$

$$R_z^\mu - R_z^o = \left(\frac{A\phi - C}{B\phi - D} - \frac{C}{D}\right) g_z \otimes g_{\bar z}$$

$$R_z^\mu - R_z^\infty = \left(\frac{A\phi - C}{B\phi - D} - \frac{A}{B}\right) g_z \otimes g_{\bar z}$$

soit encore

(4)
$$R_z^\mu - R_z^o = \frac{\phi}{D(B\phi - D)} \quad g_z \otimes g_{\bar z}$$
$$R_z^\mu - R_z^\infty = \frac{1}{B(B\phi - D)} \quad g_z \otimes g_{\bar z} \quad .$$

On va donc maintenant, supposant $\phi \in N$ non réduite à une constante réelle, considérer l'opérateur

(5)
$$R_z = R_z^\infty + \frac{1}{B(z)(B\phi - D)(z)} \quad g_z \otimes g_{\bar z}$$

et chercher une mesure $\nu \in M(\alpha)$ telle que $\phi = \phi^\nu$.

On commence par remarquer que pour $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, on a $(B\phi - D)(z) \neq 0$. Car en effet la condition $\phi(z) = \frac{D(z)}{B(z)}$ implique, avec (3.3.1)

$$\mathfrak{Im}\,\phi(z) = \mathfrak{Im}\,[\frac{D(z)}{B(z)}] < 0 \quad \text{si } z \in \Pi_+$$

ce qui est absurde.

On fixe maintenant $h \in H$ et on considère la fonction

$$\theta(z) = (R_z h|h)$$

définie pour $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ et qui est déjà telle que $\theta(\bar{z}) = \overline{\theta(z)}$ car $R_{\bar{z}} = (R_z)^*$ comme il résulte de (5) et du fait que les fonctions ϕ, B, D vérifient la même propriété de symétrie. On pourra donc désormais supposer $z \in \Pi_+$.

Le principe d'étude est simple : on va obtenir certaines majorations importantes en remarquant que pour tout $z \in \Pi_+$, on a $\mathfrak{Im}\phi(z) \geqslant 0$, donc $\phi(z) \in \bar{\Pi}_+$ et par conséquent, d'après l'étude du premier cas assurant que l'homographie H_z envoie le disque fermé $D(z)$ sur $\bar{\Pi}_+$, on peut garantir qu'il existe (au moins) une mesure $\mu \in M(\alpha)$, dépendant a priori de z, telle que $\phi(z) = \phi^{\mu}(z)$. Autrement dit :

(6) <u>Pour tout</u> $z \in \Pi_+$, <u>il existe</u> $\mu \in M(\alpha)$ <u>telle que</u> $R_z = R_z^{\mu}$

A z fixé, et μ étant ainsi choisie, on aura

(7) $$\theta(z) = (R_z h|h) = (R_z^{\mu} h|h) = \int \frac{|h|^2}{z-t}\, d\mu(t)$$

(8) $$z\theta(z) = \int \frac{z}{z-t}\, |h|^2\, d\mu(t)$$

(9) $$z\theta(z) - \|h\|^2 = \int (\frac{z}{z-t} - 1)|h|^2 d\mu(t) = \int \frac{t}{z-t}\, |h|^2 d\mu(t) \quad .$$

De (7) on déduit $\mathfrak{Im}\theta(z) < 0$ si $z \in \Pi_+$, donc θ est elle-même une fonction de la classe $-N$. De (8) on déduit, avec $z = iy$ et $y \geqslant 1$, que $|y\theta(iy)| \leqslant \|h\|^2$, donc θ possède les propriétés de (3.1.3). Par suite il existe une mesure positive bornée E_h sur $\mathbb{R}$ telle que $\theta(z) = I_{E_h}(z) = \int \frac{dE_h(t)}{z-t}$. Enfin de (9) on déduit l'inégalité, pour h polynôme quelconque

$$|z\theta(z) - \|h\|^2| \leqslant \frac{1}{\Im m z} \int |t|\ |h|^2\ d\mu(t) \leqslant \frac{C}{y}$$

où $C = \|h\|\ \|Xh\|$ est indépendante de μ, donc de z, et où $y = \Im m z > 0$. Alors quand $y \to \infty$ on obtient à la limite, compte tenu du fait que $\theta = I_{E_h}$, l'égalité

(10) $$\int dE_h(t) = \|h\|^2, \quad h \text{ polynôme} \quad .$$

A partir de là, on construit, comme d'habitude, des mesures complexes $E_{h,k}$, associées aux points $h,k \in H$, de façon que

(11) $$(R_z h|k) = \int \frac{1}{z-t}\ dE_{h,k}(t)$$

ce qui permet, par le raisonnement classique, d'introduire une fonctionnelle E(.), associant à tout borélien A de $\mathbb{R}$, un opérateur $E(A) \in L(H)$ défini par

(12) $$(E(A)h|k) = E_{h,k}(A) \quad .$$

On a alors $E(A)^* = E(A)$ car $\overline{E_{h,k}} = E_{k,h}$, $E(\emptyset) = 0$ et $E(\mathbb{R}) = I$ d'après (10). De plus E est évidemment additive, et dénombrablement additive pour la topologie simple-faible, donc aussi pour la topologie simple-forte d'après le théorème classique d'Orlicz-Pettis. En résumé on a construit une mesure quasi-spectrale E(.) sur H, telle que

(13) $$R_z = \int \frac{dE(t)}{z-t} \quad .$$

Posons maintenant $\nu = E_1$, correspondant à h = 1. On a alors

$$I_\nu(z) = \int \frac{d\nu(t)}{z-t} = (R_z 1|1)$$

$$= (R_z^\infty 1|1) + \frac{1}{B(z)(B\phi - D)(z)} \quad \text{car } (1|g_z) = 1$$

Mais $(R_z^\infty 1|1) = \int \frac{d\mu^\infty(t)}{z-t} = \frac{A(z)}{B(z)}$ d'après (3.3.5) donc

$$I_\nu(.) = \frac{A}{B} + \frac{1}{B(B\phi-D)} = \frac{BA\phi + 1-AD}{B(B\phi-D)}$$

$$= \frac{BA\phi-BC}{B(B\phi-D)} = \frac{A\phi-C}{B\phi-D}$$

en utilisant l'égalité AD-BC = 1 et le fait que $B(z) \neq 0$ pour $z \in \Pi_+$. On tire ϕ de l'égalité obtenue, sous la forme

$$\phi = \frac{C-DI_\nu}{A-BI_\nu} = \phi^\nu$$

ce qui convient tout à fait.

Il reste cependant un point à vérifier, qui n'est pas nécessairement le moindre, puisqu'il s'agit de la condition $\nu \in M(\alpha)$.

Pour cela on utilise un théorème classique de NAIMARK (voir par exemple RIESZ et NAGY [8] p. 442) assurant qu'il existe un espace élargi $\widetilde{H} \supset H$, induisant sur H sa propre structure hilbertienne, et une mesure spectrale $\widetilde{E}$ sur $\widetilde{H}$, telle que $E(.) = P\widetilde{E}(.)|_H$, où P est la projection orthogonale $\widetilde{H} \to H$. On introduit alors l'opérateur (non borné) auto-adjoint

$$\widetilde{T} = \int t \, d\widetilde{E}(t)$$

dont le résolvant $R(z,\widetilde{T}) = \widetilde{R}_z = \int \frac{d\widetilde{E}(t)}{z-t}$ est évidemment tel que $R_z = P\widetilde{R}_z$ sur H. Alors la mesure $\widetilde{E}_1$ se définit par

$$\widetilde{E}_1(A) = (\widetilde{E}(A)1|1) = (\widetilde{E}(A)1|P1) = (P\widetilde{E}(A)1|1)$$
$$= (E(A)1|1) = E_1(A) = \nu(A)$$

donc $\widetilde{E}_1 = E_1 = \nu$.

Admettons maintenant provisoirement que $D(T) \subset D(\widetilde{T})$ et que $\widetilde{T}$ prolonge T. Alors $\widetilde{T}1 = T1 = X$, $\widetilde{T}X = TX = X^2$, etc..., de sorte que pour tout polynôme h, on a $h \in D(\widetilde{T})$ et

$$h = h(T)1 = h(\widetilde{T})1$$

Il suit de là que $\widetilde{E}_h = |h|^2\,\widetilde{E}_1 = |h|^2.\nu$, par une propriété classique des mesures spectrales, et par suite

$$\int |h|^2 d\nu = \|h\|^2 = \int |h|^2 d\mu$$

pour toute $\mu \in M(\alpha)$. Alors évidemment $\int t^{2n} d\nu(t) = \alpha_{2n}$ et en faisant successivement $h = (1+t)^n$, $n=1,2,\dots$, on obtient que $\int t^{2m+1} d\nu(t) = \alpha_{2m+1}$, et ainsi $\nu \in M(\alpha)$.

Il reste à prouver que $\widetilde{T}$ prolonge T, et pour cela il suffit de prouver, $\widetilde{T}$ étant fermé, que tout polynôme Q est tel que $Q \in D(\widetilde{T})$ et $\widetilde{T}Q = XQ$. Fixons donc Q et le nombre $z \in \Pi_+$ et soit $Q_z = (z-T)Q = (z-X)Q \in H$. Alors $TQ = z\cdot Q - Q_z$. Par ailleurs

$$(Q_z | g_{\bar{z}}) = ((z-T)Q | g_{\bar{z}}) = (Q | (\bar{z}-T^*)g_{\bar{z}}) = 0$$

donc, d'après la définition de R_z on a

$$R_z Q_z = R_z^\infty Q_z = Q \quad \text{car} \quad R_z^\infty(z-T) = I \quad .$$

Avec l'égalité $R_z = P\widetilde{R}_z$ on a donc $Q = P\widetilde{R}_z Q_z$, de sorte que $\widetilde{R}_z Q_z$ se décompose selon

$$\widetilde{R}_z Q_z = Q + \widetilde{Q} \quad \text{avec} \quad \widetilde{Q} \in \widetilde{H} \quad \text{et} \quad \widetilde{Q} \perp H$$

Puisque $\widetilde{R}_z = R(z,\widetilde{T}) = (z-\widetilde{T})^{-1}$ on a donc

$$Q_z = (z-\widetilde{T})\widetilde{R}_z Q_z = zQ + z\widetilde{Q} - \widetilde{T}\widetilde{R}_z Q_z$$

d'où l'égalité

$$\widetilde{T}\,\widetilde{R}_z\,Q_z = zQ + z\widetilde{Q} - Q_z$$

de laquelle on déduit, avec $Q_z \perp \widetilde{Q}$ puisque $Q_z \in H$:

$$\begin{aligned}(\widetilde{T}\,\widetilde{R}_z Q_z | \widetilde{R}_z\,Q_z) &= (zQ + z\widetilde{Q} - Q_z \mid Q + \widetilde{Q}) \\ &= z\|Q\|^2 + z\|\widetilde{Q}\|^2 - (Q_z|Q) \\ &= z\|Q\|^2 + z\|\widetilde{Q}\|^2 - z\|Q\|^2 + (TQ|Q)\end{aligned}$$

Il reste donc en fait

$$z\,\|\tilde{Q}\|^2 = (\tilde{T}\,\tilde{R}_z\,Q_z \mid \tilde{R}_z\,Q_z) - (T\,Q|Q)$$

ce qui prouve que $z\,\|\tilde{Q}\|^2$ est nécessairement réel. On en déduit donc $\tilde{Q} = 0$ et par suite $\tilde{R}_z\,Q_z = Q$, ce qui implique

$$Q = \tilde{R}_z\,Q_z \in \operatorname{Im} R(z,\tilde{T}) = D(\tilde{T})$$

et

$$(z-\tilde{T})Q = Q_z = (z-T)Q$$

d'où $\tilde{T}\,Q = T\,Q$, ce qui termine toute la démonstration du théorème de Nevanlinna (3.3.2).□

(3.4) LES MESURES CANONIQUES D'ORDRE m.

Reprenons la représentation canonique des fonctions de la classe N de Nevanlinna, exprimée en (3.1.2) et rappelée en (3.3.3)

(1) $$\phi(z) = az + b + \int \frac{tz+1}{t-z}\,d\sigma(t)$$

avec $a \geqslant 0$, $b \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in ca^+(\mathbb{R})$, cône des mesures positives bornées sur $\mathbb{R}$. En remplaçant $\mathbb{R}$ par le compact $\bar{\mathbb{R}}$ et la mesure σ par la mesure $\tilde{\sigma}$ sur $\bar{\mathbb{R}}$ définie par $\tilde{\sigma}|_{\mathbb{R}} = \sigma$ et $\tilde{\sigma}(\{\infty\}) = a$, on peut écrire

(2) $$\phi(z) = b + \int \frac{tz+1}{t-z}\,d\tilde{\sigma}(t)$$

ce qui fait apparaître la classe N comme étant en correspondance bijective avec l'ensemble produit $\mathbb{R} \times ca^+(\bar{\mathbb{R}})$.

En plaçant sur $ca^+(\bar{\mathbb{R}})$ la topologie faible habituelle, qui ici s'identifie à la topologie étroite associée à l'espace $C_0(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{C}\,\mathbb{1}$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ ayant une limite à l'infini, on obtient un espace localement compact dénombrable à l'infini et métrisable. L'espace $\mathbb{R} \times ca^+(\bar{\mathbb{R}})$ est donc du même type et il est facile de voir que sa topologie produit, transportée sur l'ensemble N n'est autre que celle de la convergence uniforme sur les compacts de l'espace $\Omega = \Pi_+ \cup \Pi_-$, autrement dit celle induite par la topologie de l'espace $\mathcal{H}(\Omega)$ des fonctions holomorphes sur Ω.

Alors le théorème (3.3.3) permet d'identifier, dans le cas d'indétermination, le convexe compact $M(\alpha)$ à l'espace $\tilde{N} = N \cup \{\infty\}$, compactifié d'Alexandrov de l'espace localement compact N, cette identification étant en réalité une correspondance homographique bijective et un homéomorphisme. Avec l'expression (2) de la fonction ϕ on a donc en fait l'homéomorphisme

$$M(\alpha) \simeq [\mathbb{R} \times ca^+(\mathbb{R})]^\sim$$

et on a vu que l'ensemble des mesures N-extrêmales correspond à la partie $\mathbb{R} \cup \{\infty\} = \bar{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire est défini par la condition $\tilde{\sigma} = 0$ et $b \in \bar{\mathbb{R}}$ dans la représentation (2).

Cet exposé de la situation, mis à part le remplacement du couple (a,σ) par la seule mesure positive $\tilde{\sigma}$ sur $\bar{\mathbb{R}}$, constitue le point de départ de l'article de BERG et CHRISTENSEN [2] maintes fois cité.

Les mesures canoniques d'ordre m. A côté des mesures N-extrêmales correspondant à $\tilde{\sigma} = 0$, on introduit en suivant AKHIEZER [1] p. 115, les mesures canoniques d'ordre m, avec $m \geqslant 0$ entier, définies par la condition que la mesure $\tilde{\sigma}$ a un support fini dans $\bar{\mathbb{R}}$, de cardinal m. Une étude fine et délicate, que nous ne pouvons détailler ici, permet à AKHIEZER de donner diverses caractérisations de ces mesures canoniques d'ordre m, parmi lesquelles nous retenons l'énoncé suivant :

(3.4.1) THEOREME (AKHIEZER [1] p. 121). - *Pour tout entier* $m \geqslant 1$ *et toute mesures* $\mu \in M(\alpha)$ *, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) La mesure μ *est canonique d'ordre* m

b) On a l'égalité

$$\phi^{\mu}(z) = b + \int \frac{tz+1}{t-z} \, d\tilde{\sigma}(t)$$

avec $b \in \mathbb{R}$*,* $\tilde{\sigma}$ *étant une mesure positive sur* $\bar{\mathbb{R}}$*, à support fini de cardinal* m*.*

c) Pour tout choix des nombres complexes $z_1, z_2, \ldots, z_m$ *, éléments (non nécessairement distincts) du demi-plan* Π_+*, l'espace* $\mathcal{P} = \mathbb{C}[X]$ *des polynômes est dense dans l'espace* $L^2(\gamma)$*, où* γ *est la mesure positive sur* $\mathbb{R}$ *définie par*

$$d\gamma(t) = \frac{d\mu(t)}{|R(t)|^2} \qquad \text{avec} \quad R(t) = \prod_{k=1}^{m} (z_k - t)$$

l'énoncé analogue étant faux en remplaçant m *par* $m-1$*.*

d) Même énoncé que c) avec un choix particulier des nombres $z_1, z_2, \ldots, z_m$*.*

En particulier toute mesure canonique d'ordre m *a un support discret dénombrable dans* $\mathbb{R}$*.*

Il suit aisément de là que toute mesure d'ordre fini est un point extrêmal du convexe compact $M(\alpha)$ ([1] p. 121). On peut aussi voir, en remplaçant l'inégalité de Cauchy-Schwarz par celle de Hölder, que pour toute mesure μ, canonique d'ordre $m \geqslant 1$, l'espace $\mathcal{P}$ est dense dans $L^p(\mu)$ pour tout $p \in [1,2[$ et n'est pas dense dans $L^2(\mu)$ puisque μ n'est pas N-extrêmale. Pour cela voir BERG et CHRISTENSEN [2] p. 108.

Sur ce sujet des mesures canoniques notre contribution, qui est nouvelle à notre connaissance, et en tout cas qui ne figure ni dans [1] ni dans [2] est la suivante, offrant une description explicite de l'espace $L^2(\mu)$ lorsque μ est canonique d'ordre m :

(3.4.2) THEOREME . - *Dans le cas d'indétermination et relativement à la mesure* $\mu \in M(\alpha)$ *et au nombre entier* $m \geqslant 1$, *les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) μ *est une mesure canonique d'ordre* m.

b) L'espace fondamental H *est de codimension finie, égale à* m , *dans l'espace* $L^2(\mu)$.

c) Soient $z_1, z_2, \ldots, z_p$ *des éléments distincts du demi-plan* Π_+ , *et* $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ *des exposants entiers* $\geqslant 1$ *tels que* $\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_p = m$. *Alors l'espace* $L^2(\mu)$ *est engendré par* H *et l'ensemble des* m *fonctions*

$$\frac{1}{(z_k-t)^{\rho}} \qquad 1 \leqslant k \leqslant p \quad ; \quad 1 \leqslant \rho \leqslant \rho_k$$

et ne l'est plus lorsqu'on supprime l'une des p *fonctions* $\dfrac{1}{(z_k-t)^{\rho_k}}$.

La démonstration nécessite quelques lemmes.

(3.4.3) LEMME 1. - *Soit* μ *une mesure positive sur* $\mathbb{R}$, *à support discret (dénombrable). Alors pour tout point* $z_o \in \Pi_+$ *l'ensemble des fonctions* $\dfrac{1}{(z_o-t)^k}$, $k \geqslant 1$, *est total dans l'espace* $L^2(\mu)$.

PREUVE. - Fixons $f \in L^2(\mu)$, orthogonale à toutes les fonctions précédentes et introduisons la fonction holomorphe sur $\Pi_+ \cup \Pi_-$

$$\Phi(z) = \int \frac{\overline{f(t)}}{z-t}\, d\mu(t) \quad .$$

Alors la condition sur f équivaut aux égalités $\Phi^{(k)}(z_o) = 0$ pour tout $k \geqslant 1$ ce qui implique, par analyticité, que Φ est identiquement nulle sur le demi-plan Π_+. La mesure complexe $d\nu = \bar{f}.d\mu$ a donc une transformée de Stieltjes nulle sur Π_+ et c'est une mesure à support discret. Il suit donc de la formule

$$\nu(\{a\}) = \lim_{\beta \downarrow o} i\beta I_\nu(a + i\beta)$$

rappelée au début de (3.1), et valable pour des mesures signées complexes, que ν est nécessairement nulle puisqu'elle est à support discret. Ainsi $\bar{f}.d\mu = 0$ ce qui prouve que $f = 0$ dans l'espace $L^2(\mu)$, et termine la démonstration. □

REMARQUE. - Le lemme reste valable pour toute mesure μ dont le support est distinct de $\mathbb{R}$ car alors le domaine d'holomorphie de Φ est connexe et par suite $\Phi \equiv 0$ sur Π_+ implique $\Phi \equiv 0$ sur Π_-, donc $I_\nu = 0$ et $\nu = 0$.

(3.4.4) LEMME 2. - *On fixe les fonctions* $\dfrac{1}{(z_k-t)^\rho}$ *comme en (3.4.2.d). Alors le système de ces* m *fonctions est libre dans l'espace* $L^2(\mu)$ *pour toute* $\mu \in M(\alpha)$.

PREUVE. - Supposons qu'il existe des constantes $\lambda_{k,\rho}$ telles que

$$F = \sum_{k,\rho} \frac{\lambda_{k,\rho}}{(z_k-t)^\rho}$$

soit nulle dans $L^2(\mu)$. On peut alors, en posant $R = \prod_{k=1}^{p} (z_k-t)^{\rho_k}$ écrire F sous la forme $F = \frac{Q}{R}$, où Q est un polynôme en t de degré $\leqslant m-1$. La condition $F = 0$ dans $L^2(\mu)$ donne

$$\int \left|\frac{Q}{R}\right|^2 d\mu = 0$$

d'où l'on déduit $Q = 0$ μ-presque partout, c'est-à-dire $\|Q\|^2 = 0$, et par suite $Q \equiv 0$ puisque le problème des moments considéré est indéterminé et la matrice $M = [\alpha_{i+j}]$ de type défini positif. Alors on a $F \equiv 0$, d'où l'on tire sans difficulté $\lambda_{k,\rho} = 0$ pour tous les k,ρ . □

Avant d'énoncer le troisième lemme introduisons une nouvelle notation. A tout système (3.4.2.d) et pour toute $\mu \in M(\alpha)$ désignons par $H^\mu(z_1,\rho_1,\ldots,z_p,\rho_p)$

l'espace vectoriel engendré dans $L^2(\mu)$ par l'espace $H = \overline{\mathcal{P}}$ et le système des m fonctions $\frac{1}{(z_k-t)^\rho}$, $k \leqslant p$, $\rho \leqslant \rho_k$. On a alors :

(3.4.5) LEMME 3. - *On fixe les points distincts* $z_1,\ldots,z_p$ *dans* Π_+ *et les exposants* $\rho_1,\ldots,\rho_p$. *Alors pour toute mesure* $\mu \in M(\alpha)$, *à support discret et tout* k *fixé, la condition*

$$\frac{1}{(z_k-t)^{\rho_k+1}} \in H^\mu(z_1,\rho_1,\ldots,z_p,\rho_p)$$

implique la condition $H^\mu(z_1,\rho_1,\ldots,z_p,\rho_p) = L^2(\mu)$.

PREUVE. - Posons pour simplifier $H^\mu_m = H^\mu(z_1,\rho_1,\ldots,z_p,\rho_p)$ et remarquons que H^μ_m est un sous-espace fermé comme somme d'un sous-espace fermé et d'un sous-espace de dimension finie. Posons encore $z_k = z$ pour simplifier l'écriture. De l'égalité

$$\frac{1}{z-t} = \sum_{j=o}^{n-1} \frac{t^j}{z^{j+1}} + \frac{t^n}{z^n(z-t)}$$

on déduit de l'hypothèse que toutes les fonctions $\frac{t^n}{z-t}$ sont éléments de H^μ_m . Par suite, pour tout polynôme Q on a aussi $\frac{Q}{z-t} \in H^\mu_m$, et comme l'application $f \to \frac{f}{z-t}$ opère continûment de $L^2(\mu)$ dans lui-même (puisque la fonction $\frac{1}{z-t}$ est bornée), on en déduit, par passage à la limite, que $\frac{h}{z-t} \in H^\mu_m$ pour tout $h \in H$.

Ecrivons maintenant explicitement

$$\frac{1}{(z-t)^{\rho_k+1}} = h + \sum_{r,\rho} \frac{\lambda_{r,\rho}}{(z_r-t)^\rho}$$

ce qui permet d'écrire, toujours avec $z = z_k$:

$$\frac{1}{(z-t)^{\rho_k+2}} = \frac{h}{z-t} + \sum_{r,\rho} \frac{\lambda_{r,\rho}}{(z-t)(z_r-t)^\rho} .$$

La fraction rationnelle $\frac{1}{(z-t)(z_r-t)^\rho}$ se développe en éléments simples, pour $r \neq k$, en faisant apparaître des combinaisons linéaires de $\frac{1}{z-t}$ et des puissances $\frac{1}{(z_r-t)^\sigma}$ pour $\sigma \leqslant \rho$. C'est donc un élément de H_m^μ. Lorsque $r = k$, on obtient une fraction du type $\frac{1}{(z_k-t)^{\rho+1}}$ avec $\rho + 1 \leqslant \rho_k+1$, donc c'est aussi un élément de H_m^μ. Enfin $\frac{h}{z-t} \in H_m^\mu$ comme on a vu de sorte que l'on obtient

$$\frac{1}{(z-t)^{\rho_k+2}} \in H_m^\mu \quad .$$

Il suffit de recommencer pour voir qu'en fait, avec $z = z_k$, toutes les fonctions $\frac{1}{(z-t)^q}$ sont éléments de H_m^μ pour $q = 1,2,\ldots$, ce qui, avec le lemme 1 garantit que l'on a bien $L^2(\mu) = H_m^\mu$. □

<u>REMARQUE</u>. On peut faire la même démonstration à partir de l'hypothèse $\frac{1}{z-t} \in H_m^\mu$ pour un point z distinct des points $z_1,\ldots,z_p$. Cela revient à supposer formellement que l'on avait $\rho_k = 0$ dans la preuve précédente. D'où :

(3.4.6) <u>COROLLAIRE 1</u>. - *On fixe les points* $z_1,\ldots,z_p$ *et les exposants* $\rho_1,\ldots,\rho_p$. *Alors pour toute mesure* $\mu \in M(\alpha)$, *à support discret, et pour tout* $z \in \Pi_+$, *distinct des* z_k , *la condition*

$$\frac{1}{z-t} \in H^\mu(z_1,\rho_1,\ldots,z_p,\rho_p)$$

implique la condition $H^\mu(z_1,\rho_1,\ldots,z_p,\rho_p) = L^2(\mu)$.

(3.4.7) <u>COROLLAIRE 2</u>. - *On fixe les points* $z_1,\ldots,z_p$ *et les exposants* $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_p$ *tels que* $\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_p = m$, *et on désigne, pour toute mesure* $\mu \in M(\alpha)$ *à support discret, par*

$$L_m^\mu = L^\mu(z_1,\rho_1,\ldots,z_p,\rho_p)$$

l'espace vectoriel engendré dans $L^2(\mu)$ *par les* m *fonctions*

$$\frac{1}{(z_k-t)^\rho} \qquad 1 \leqslant k \leqslant p \quad ; \quad 1 \leqslant \rho \leqslant \rho_k$$

On désigne par H^μ_{m+1} *et* L^μ_{m+1} *les espaces analogues obtenus soit en rajoutant une nouvelle variable* z_o *associé à l'exposant* $\rho_o = 1$, *soit en augmentant d'une unité l'un des exposants* ρ_k. *On a alors la propriété*

$$H^\mu_m \neq L^2(\mu) \Longrightarrow H \cap L^\mu_{m+1} = (o) \quad .$$

<u>PREUVE</u>. La propriété est vraie pour m = 0 car alors $H^\mu_m = H$ et la condition $H \neq L^2(\mu)$ implique $\frac{1}{z-t} \notin H$ pour tout $z \in \Pi_+$ d'après le théorème de M. Riesz (3.1.11) et (3.1.12). Supposons la vérifiée pour m-1 fixé et passons à m. Quitte à supposer $\rho_1 = 0$, c'est-à-dire l'absence de la variable z_1 dans H^μ_m, on peut se ramener à

$$H^\mu_{m+1} = H^\mu(z_1,\rho_1+1,z_2,\rho_2,\dots,z_p,\rho_p)$$

et on pose alors $\rho'_k = \rho_k$ si $k \geqslant 2$ et $\rho'_1 = \rho_1+1$. Maintenant supposons $H^\mu_m \neq L^2(\mu)$, et soit $h \in H \cap L^\mu_{m+1}$. Alors h admet une décomposition du type

$$h = \sum_{k,\rho} \frac{\lambda_{k,\rho}}{(z_k-t)^\rho}$$

avec $1 \leqslant k \leqslant p$ et $1 \leqslant \rho \leqslant \rho'_k$. On a alors nécessairement $\lambda_{1,\rho_1+1} = 0$, car dans le cas contraire on aurait évidemment

$$\frac{1}{(z_1-t)^{\rho_1+1}} \in H^\mu_m$$

ce qui conduirait, avec (3.4.5) si $\rho_1 \geqslant 1$ et (3.4.6) si $\rho_1 = 0$, à l'égalité $H^\mu_m = L^2(\mu)$. La condition $\lambda_{1,\rho_1+1} = 0$ garantit donc la condition $h \in H \cap L^\mu_m$ et comme évidemment H^μ_{m-1} est distinct de $L^2(\mu)$ puisque H^μ_m l'est lui-même, on obtient $h = 0$ par l'hypothèse de récurrence, ce qui termine la démonstration. □

L'énoncé et la preuve du dernier lemme nous ramènent directement à (3.4.1).

(3.4.8) LEMME 4. - *On fixe les points* $z_1,\dots,z_p$ *et les exposants* $\rho_1,\dots,\rho_p$ *tels que* $\rho_1+\dots+\rho_p = m$ *, et soit* R *le polynôme*

$$R = \prod_{k=1}^{p} (z_k-t)^{\rho_k}$$

A chaque mesure $\mu \in M(\alpha)$ *on associe la mesure* $d\gamma = \frac{1}{|R|^2}\, d\mu$. *On a alors l'équivalence des assertions*

a) μ *est une mesure canonique d'ordre* $\leqslant m$

b) $H^\mu_m = L^2(\mu)$.

c) L'espace $\mathcal{P}$ *des polynômes est dense dans* $L^2(\gamma)$.

PREUVE. L'équivalence $a \Leftrightarrow c$ n'est autre que (3.4.1). Il suffit donc de prouver $b \Leftrightarrow c$. Or l'application $U : L^2(\mu) \to L^2(\gamma)$, définie par $U(f) = Rf = g$ est une isométrie surjective, puisque R ne s'annule pas sur la droite numérique. Supposons donc $H^\mu_m = L^2(\mu)$ et soit $g \in L^2(\gamma)$. Alors $f = \frac{g}{R} \in L^2(\mu) = H^\mu_m$, de sorte qu'il existe $h \in H$ et $\frac{S}{R} \in L^\mu_m$, avec S polynôme de degré $\leqslant m-1$, tels que $f = h + \frac{S}{R}$.
En approchant h par une suite de polynômes Q_n dans $L^2(\mu)$, on aura $f = \lim Q_n + \frac{S}{R}$ dans $L^2(\mu)$, donc $g = \lim(RQ_n+S)$ dans $L^2(\gamma)$ et ainsi $\mathcal{P}$ est dense dans $L^2(\gamma)$.
Réciproquement supposons $\mathcal{P}$ dense dans $L^2(\gamma)$ et soit $f \in L^2(\mu)$ choisie telle que $f \perp H^\mu_m$. Posons $g = Rf$ et soit $P \in \mathcal{P}$ un polynôme . Par division euclidienne on a $P = QR + S$ avec $d^\circ S \leqslant m-1$, donc

$$(g|P)_{L^2(\gamma)} = (f|Q + \tfrac{S}{R})_{L^2(\mu)}$$

Mais $Q + \frac{S}{R} \in \mathcal{P} + L^\mu_m \subset H^\mu_m$, donc $(f|Q + \frac{S}{R}) = 0$ et par suite $(g|P) = 0$ pour tout polynôme P . On tire de là $g = 0$ dans $L^2(\gamma)$ par l'hypothèse $\bar{\mathcal{P}} = L^2(\gamma)$, et par l'isométrie U on obtient $f = 0$ dans $L^2(\mu)$. Ainsi H^μ_m est fermé et a un orthogonal nul, donc $H^\mu_m = L^2(\mu)$, ce qui termine tout. □

Enfin le dernier lemme aura son importance pour l'utilisation du lemme 3 et de ses corollaires.

(3.4.9) LEMME 5. - *Soit* $\mu \in M(\alpha)$ *une mesure fixée. On suppose que l'espace* H *est de codimension finie dans* $L^2(\mu)$. *Alors* μ *est à support discret dans* $\mathbb{R}$.

PREUVE. - Soit m la codimension de H dans $L^2(\mu)$. Il existe une base orthonormale $(G_1,\dots,G_m)$ de $H^\perp$, de sorte que toute $g \in L^2(\mu)$ se décompose selon

$$g = g_o + \sum_{k=1}^{m} (g|G_k)G_k$$

avec $g_o \in H$. En particulier pour $g = \frac{1}{z-t}$, où z est choisi quelconque dans $\Omega = \Pi_+ \cup \Pi_-$, on a

$$\frac{1}{z-t} = f^\mu_z + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k(z)\, G_k$$

où $f^\mu_z = \Pi^\mu_H \frac{1}{z-t}$ et $\lambda_k(z) = (\frac{1}{z-t} \mid G_k) = \int \frac{\overline{G_k(t)}}{z-t}\, d\mu(t)$.

Cela étant on va prouver, sachant que l'indétermination du problème des moments étudié assure que H est formé de fonctions entières, que l'espace $L^2(\mu)$ est formé de fonctions analytiques dans une bande convenable $|\mathcal{I}m\zeta| < M$ entourant l'axe réel. Il suivra bien de là, par le principe des zéro isolés, que le support de μ est nécessairement discret.

On commence par voir qu'il existe un point $z_m \in \Omega$ tel que $\lambda_m(z_m) \neq 0$. Car dans le cas contraire on aurait

$$\lambda_m(z) \equiv \int \frac{\overline{G_m(t)}}{z-t}\, d\mu(t) = 0$$

pour tout $z \in \Omega$, donc la transformée de Stieltjes de la mesure complexe $d\nu_m = \overline{G_m}.d\mu$ serait identiquement nulle sur Ω, ce qui entraînerait la nullité de ν_m, donc celle de G_m dans $L^2(\mu)$, contrairement au fait que $\|G_m\| = 1$. Le point z_m étant ainsi choisi on recommence le raisonnement en prouvant qu'il existe un point $z_{m-1} \in \Omega$ tel que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda_{m-1}(z_{m-1}) & \lambda_m(z_{m-1}) \\ \lambda_{m-1}(z_m) & \lambda_m(z_m) \end{vmatrix} = \Delta_{m-1}(z_{m-1}, z_m)$$

soit non nul. En effet supposons $\Delta_{m-1}(z,z_m) = 0$ pour tout $z \in \Omega$; il existe alors deux constantes $\alpha = \lambda_m(z_m) \neq 0$ et β telles que $\alpha\lambda_{m-1}(z) + \beta\lambda_m(z) = 0$ pour tout $z \in \Omega$. Cela se traduit par le fait que la mesure

$$d\nu_{m-1} = (\alpha\,\overline{G_{m-1}} + \beta\,\overline{G_m}).d\mu$$

a une transformée de Stieltjes nulle sur Ω , donc est une mesure nulle et ainsi $\bar{\alpha}\, G_{m-1} + \bar{\beta}\, G_m = 0$ dans $L^2(\mu)$, contrairement à l'orthonormalité des G_k et à la condition $\alpha \neq 0$.

De proche en proche on construit ainsi une suite de points $z_m, z_{m-1}, \ldots, z_1$ dans Ω telle que tous les déterminants

$$\Delta_k(z_k,\ldots,z_m) = |\lambda_i(z_j)| \qquad k \leqslant i,j \leqslant m$$

soient non nuls. En écrivant que $\Delta = \Delta_1(z_1,\ldots,z_m)$ est non nul, on voit alors qu'on peut exprimer linéairement toutes les fonctions G_k à partir des différences

$$g_k = \frac{1}{z_k - t} - f^{\mu}_{z_k}$$

Ce résultat entraîne évidemment l'analyticité de toutes les fonctions G_k dans la bande $|\mathfrak{Im}\,\zeta| < M$ avec

$$M = \operatorname*{Min}_K |\mathfrak{Im}\, z_k| > 0$$

et ainsi l'analyticité dans cette même bande de toutes les fonctions de $L^2(\mu)$. □

Preuve du théorème (3.4.2). - On a déjà a $\Rightarrow$ c car si μ est canonique d'ordre m, on a déjà $L^2(\mu) = H_m^\mu$ avec le lemme 4, pour tout système $(z_1,\rho_1,\ldots,z_p,\rho_p)$ tel que $m = \rho_1+\ldots+\rho_p$. Ceci implique codim $H \leqslant m$, de sorte que μ est nécessairement à support discret (on retrouve ici, grâce au lemme 5, la dernière affirmation du théorème d'Akhiezer (3.4.1)). Mais H_{m-1}^μ est distinct de $L^2(\mu)$, car l'égalité $H_{m-1}^\mu = L^2(\mu)$ fournirait, grâce au lemme 4, le fait que μ est canonique d'ordre $\leqslant m-1$, ce qui est absurde. On a donc les deux conditions $H_m^\mu = L^2(\mu)$ et $H_{m-1}^\mu \neq L^2(\mu)$, ce qui est c) du théorème (3.4.2). On a c $\Rightarrow$ b car c) implique évidemment codim $H \leqslant m$, donc μ est à support discret grâce au lemme 5, et (3.4.7) peut s'appliquer. Alors $H_m^\mu = L^2(\mu)$ et $H_{m-1}^\mu \neq L^2(\mu)$ implique $H \cap L_m^\mu = (o)$, et comme L_m^μ est un espace de dimension m d'après le lemme 2, on a bien codim $H = m$, ce qui est b). Enfin b $\Rightarrow$ a, car déjà b) implique que μ est à support discret ; de plus on a nécessairement $H_{m-1}^\mu \neq L^2(\mu)$ (car l'égalité impliquerait l'inégalité codim $H \leqslant m-1$) de sorte que, avec (3.4.7) encore, on obtient $H \cap L_m^\mu = (o)$. Avec le lemme 2 ceci prouve que H est de codimension m dans H_m^μ et comme il est aussi de codimension m dans $L^2(\mu)$, on a nécessairement $L^2(\mu) = H_m^\mu$. Avec le lemme 4 on en déduit que μ est canonique d'ordre $\leqslant m$, mais elle ne peut être d'un ordre inférieur, car le lemme 4 impliquerait inversement une égalité $L^2(\mu) = H_{m'}^\mu$ avec $m' < m$, ce qui est absurde. Donc μ est bien d'ordre m, et le théorème (3.4.2) se trouve complètement démontré.

(3.4.10) COROLLAIRE. - *On suppose que la mesure* $\mu \in M(\alpha)$ *n'est pas un point extrêmal du convexe compact* $M(\alpha)$. *Alors l'espace* $H = \overline{\mathcal{P}}$ *est de codimension infinie (dénombrable) dans l'espace* $L^2(\mu)$.

PREUVE. Car on a rappelé, après l'énoncé de (3.4.1), que toute mesure canonique d'ordre m est un point extrêmal de $M(\alpha)$. Le corollaire est donc une conséquence immédiate de la caractérisation donnée par (3.4.2). □

L'énoncé du théorème (3.4.2), quoiqu'assez complet, est souvent d'un maniement trop lourd pour les applications. En remarquant que dans (3.4.2.c) les points $z_1,\ldots,z_p \in \Pi_+$ sont fixés, ainsi que l'entier p, on peut décider de fixer $p = 1$, donc d'écrire (3.4.2.c) avec un seul point $z_1 = z \in \Pi_+$. En faisant ce choix on simplifie extrêmement l'expression de l'espace H_m^μ , puisque alors H_m^μ n'est autre que l'adhérence de l'espace $\mathcal{P}(f_z)^m$; où f_z est la fonction $t \to \frac{1}{z-t}$. On a donc l'énoncé simplifié :

(3.4.11) THEOREME. - *Pour que la mesure* μ *soit canonique d'ordre* $m \geqslant 0$, *il faut et il suffit que pour un point* $z \in \Pi_+$ *fixé (et c'est alors vrai pour tout* $z \in \Pi_+$*) l'espace* $\mathcal{P}(f_z)^m$ *soit dense dans* $L^2(\mu)$ *tandis que l'espace* $\mathcal{P}(f_z)^{m-1}$ *ne l'est pas.*

Perturbations de mesures canoniques. - Dans [2] , BERG et CHRISTENSEN donnent, avec leurs théorèmes 7 et 8 et leur lemme 2, p. 111 à 113, des résultats intéressants lorsqu'on modifie une mesure N-extrêmale μ en lui ajoutant ou en lui retranchant une mesure à support fini. Nous allons montrer ici que ces résultats se généralisent, grâce au théorème (3.4.2) utilisé sous la forme (3.4.11), au cas des mesures canoniques d'ordre m. Utilisant les notations de [2] nous dirons qu'une mesure μ est déterminée (resp. indéterminée) lorsqu'elle a des moments $\alpha_k = \int t^k d\mu(t)$ de tous les ordres, et que le problème des moments associé à la suite (α_k) est déterminé (resp. indéterminé). Précisons aussi que les perturbations apportées à la mesure μ vont en général changer la suite des moments associée. Ces précautions étant prises on a déjà une généralisation du lemme 2 de [2] sous la forme :

(3.4.12) LEMME. - *Soit* μ *une mesure déterminée et soit* τ *une mesure à support fini* S, *de cardinal* $m \geqslant 1$. *On suppose que* $\mu(S) = 0$, *c'est-à-dire que*

μ et τ sont étrangères. Alors la mesure $\lambda = \mu+\tau$ est soit déterminée, soit indéterminée et canonique d'ordre $\leqslant$ m-1. De plus on peut préciser que λ est nécessairement déterminée lorsque le support de μ n'est pas discret.

PREUVE. Fixons $z \in \Pi_+$ (on peut prendre $z = i$ si l'on veut). Il suffit de prouver, avec (3.4.11), que l'espace $\mathcal{P}(f_z)^{m-1}$ est dense dans $L^2(\lambda)$, avec $f_z(t) = \frac{1}{z-t}$. Explicitons τ selon $\tau = \sum_{k=1}^{m} m_k \delta_{a_k}$, avec $m_k > 0$, et soit $g \in L^2(\lambda)$, orthogonale à l'espace $\mathcal{P}(f_z)^{m-1}$. On a donc l'égalité, pour tout $P \in \mathcal{P}$

$$(1) \qquad \int \frac{P(t)}{(z-t)^{m-1}} \bar{g}(t)d\mu(t) + \sum_{k=1}^{m} m_k \frac{P(a_k)\overline{g(a_k)}}{(z-a_k)^{m-1}} = 0 .$$

Introduisons les polynômes réels L_k, de degré (m-1), utilisés dans l'interpolation de Lagrange et tels que $L_k(a_j) = \delta_{kj}$ (indice de Kronecker). Avec $P = L_kQ$, k fixé et $Q \in \mathcal{P}$, on a donc, avec (1), en remarquant que la fonction $g f_{\bar{z}}^{m-1} L_k$ est encore dans $L^2(\mu)$ (puisque $d°L_k = m-1$)

$$(2) \qquad \frac{m_k \overline{g(a_k)}}{(z-a_k)^{m-1}} Q(a_k) = - (Q \mid g f_{\bar{z}}^{m-1} L_k)_{L^2(\mu)}$$

Si l'on avait $g(a_k) \neq 0$, on déduirait de (2) l'existence d'une fonction $F_k \in L^2(\mu)$ telle que $Q(a_k) = (Q|F_k)$ pour tout $Q \in \mathcal{P}$. En remplaçant Q par les polynômes P_n de la base orthonormale de $L^2(\mu)$ (rappelons que μ est déterminée) on obtient $\|F_k\|^2 = \Sigma|P_n(a_k)|^2 < +\infty$. Il suit de là, avec (3.1.8) que a_k est une valeur propre de l'opérateur T = X de multiplication par X sur $L^2(\mu)$, ce qui implique la condition $\mu(\{a_k\}) > 0$, en contradiction avec l'hypothèse $\mu(S) = 0$. On a donc $g(a_k) = 0$ pour tout k, de sorte que (1) fournit, avec le choix $P = (z-t)^{m-1}Q$, l'égalité $\int Q(t)\,\overline{g(t)}\,d\mu(t) = 0$ pour tout $Q \in \mathcal{P}$. Ainsi $g = 0$ dans $L^2(\mu)$ par densité de $\mathcal{P}$ et cette condition, jointe aux égalités $g(a_k) = 0$, donne bien l'égalité $g = 0$ dans $L^2(\lambda)$, ce qui termine la preuve du lemme. □

Avant d'énoncer le premier théorème (appelons le théorème de soustraction) qui va généraliser le théorème 7 de [2] , rappelons qu'il résulte de (3.4.9), qu'une mesure indéterminée μ, canonique d'ordre $m \geqslant 0$, a toujours un support discret $S = \operatorname{Supp} \mu$, qui est infini dénombrable (puisque μ est indéterminée). On peut donc l'expliciter selon $\mu = \sum_{k=o}^{\infty} m_k \, \delta_{a_k}$ avec $m_k > o$ pour tout k.

(3.4.13) <u>THEOREME</u> (dit de soustraction). - *Soit* $\mu = \sum_{k=o}^{\infty} m_k \delta_{a_k}$ *une mesure indéterminée canonique d'ordre* $m \geqslant 0$. *Pour toute partie finie* J *du support* $S = \operatorname{Supp} \mu$, *de cardinal* $n(J)$, *on note* ν_J *la mesure*

$$\nu_J = \sum_{k \notin J} m_k \delta_{a_k}$$

On a alors les deux cas :

a) si $n(J) \leqslant m$, *la mesure* ν_J *est indéterminée et canonique d'ordre* $m(J) = m-n(J)$.

b) si $n(J) > m$, *la mesure* ν_J *est déterminée.*

<u>PREUVE</u>. Supposons d'abord $m = 0$, c'est-à-dire μ indéterminée et N-extrêmale. Il faut montrer que si $n(J) = 1$ alors ν_J est déterminée (ce qui est le th. 7 de [2]), et si $n(J) \geqslant 2$ alors ν_J est aussi déterminée, ce qui par récurrence évidente revient à supposer la mesure de départ μ déterminée (et ayant toujours la forme discrète) et $n(J) = 1$. En définitive on peut se ramener au cas où $\mu = \sum_{k=o}^{\infty} m_k \delta_{a_k}$ est déterminée ou N-extrêmale (et dans les deux cas l'espace $\mathcal{P}$ est dense dans $L^2(\mu)$), avec $\nu_J = \nu = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \, \delta_{a_k}$, et il faut prouver que ν est déterminée. Supposons le contraire et soit $K_\nu(z,z') = K(z,z')$ le noyau associé à ν. En suivant [2] , introduisons la fonction f, définie sur $S = \operatorname{Supp} \mu$ par

$$\begin{cases} f(a_o) = -\dfrac{1}{m_o} \\ f(a_k) = K(a_o,a_k) \quad \text{si } k \geqslant 1 \end{cases}$$

Alors f est un élément non nul de $L^2(\mu)$ et pour tout $P \in \mathcal{P}$ on a

$$(P|f)_{L^2(\mu)} = - P(a_o) + \int K(a_o,t)P(t)d\nu(t)$$

Or par définition de $K = K_\nu$, on sait que les deux fonctions entières $P(z)$ et $\int K(z,t)P(t)d\nu(t)$ coïncident sur le support $S(\nu)$ de ν. Mais ces deux fonctions sont en fait des polynômes, puisque si P est l'un des polynômes P_k de la base orthonormale associée à ν, on a $\int K(z,t)P(t)d\nu(t) = P(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Le fait que $S(\nu)$ soit infini garantit donc l'égalité pour tout z, et en particulier pour $z = a_o$. Ainsi $(P|f)_{L^2(\mu)} = 0$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse faite sur μ, impliquant la densité de $\mathcal{P}$ dans $L^2(\mu)$.

Raisonnons maintenant par récurrence sur m, en supposant $m \geqslant 1$ et le théorème vrai pour $0 \leqslant m' \leqslant m-1$. Il suffit alors de prouver que la mesure $\nu = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \delta_{a_k}$ est indéterminée et canonique d'ordre (m-1). Déjà ν est indéterminée, car dans le cas contraire, $\mu = \nu + m_o\delta_{a_o}$ serait, d'après le lemme, soit déterminée soit indéterminée et N-extrêmale, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $m \geqslant 1$. Montrons maintenant que ν est canonique d'ordre $m' \leqslant m-1$. Pour cela il suffit de prouver, avec (3.4.11), que l'espace $\mathcal{P}(f_z)^{m-1}$ est dense dans $L^2(\nu)$, $z \in \Pi_+$ étant fixé. La fonction $\phi(t) = \frac{t-a_o}{z-t}$ étant telle que $\phi \in L^\infty(\nu)$ et $\frac{1}{\phi} \in L^\infty(\nu)$, il revient au même de prouver que l'espace $M = \mathcal{P}(t-a_o)f_z^m$ est dense dans $L^2(\nu)$. Fixons donc $g \in L^2(\nu)$ orthogonale à M. Pour tout $P \in \mathcal{P}$ on a

$$(Pf_z^m|g)_{L^2(\nu)} = \int \frac{P(t)-P(a_o)}{(z-t)^m} \bar{g}(t)d\nu(t) + P(a_o)(f_z^m|g)_{L^2(\nu)}$$

$$= \beta\ P(a_o)$$

où l'on a posé $\beta = (f_z^m|g)_{L^2(\nu)}$.

Introduisons maintenant la fonction $h \in L^2(\mu)$, définie par

$$\begin{cases} h(a_o) = -\dfrac{\bar{\beta}}{m_o}(\bar{z}-a_o)^m \\ h(a_k) = g(a_k) \quad \text{si} \quad k \geqslant 1 \end{cases}$$

Avec ce choix de h on a

$$(Pf_z^m|h)_{L^2(\mu)} = -\beta P(a_o) + (Pf_z^m|g)_{L^2(\nu)} = 0$$

de sorte que h est orthogonale à $\mathcal{P}f_z^m$ dans $L^2(\mu)$. D'après l'hypothèse sur μ on a donc $h = 0$ dans $L^2(\mu)$, d'où a fortiori $g(a_k) = 0$ si $k \geqslant 1$. Autrement dit $g = 0$ dans $L^2(\nu)$, ce qui démontre ce que l'on cherchait.

Il reste à voir que $m' = m-1$. C'est évident si $m = 1$ puisque ν est indéterminée. Supposons $m \geqslant 2$ et $m' \leqslant m-2$. En enlevant du support de ν une partie finie J de cardinal $(m-1)$, on obtient, par l'hypothèse de récurrence, une mesure déterminée θ , qui permet de reconstruire μ par addition d'une mesure τ, à support fini, de cardinal m, disjoint du support de θ. Avec le lemme on obtient alors que μ est soit déterminée, soit indéterminée et canonique d'ordre $\leqslant m-1$, ce qui de toute façon est absurde. Ainsi $m' = m-1$ et la démonstration est terminée.□

Le théorème (3.4.13) donne immédiatement la généralisation annoncée du théorème 8 de [2] , qui est cette fois un résultat de perturbation :

(3.4.14) <u>THEOREME</u> (dit de perturbation). - *Soit* $\mu = \sum_{k=o}^{\infty} m_k \delta_{a_k}$ *une mesure indéterminée canonique d'ordre* $m \geqslant 0$. *Pour toute partie finie* J *de* $S(\mu) = \operatorname{Supp} \mu$, *de cardinal* $n(J)$, *on pose*

$$\nu_J = \sum_{k \notin J} m_k \delta_{a_k}$$

Alors pour toute mesure τ *à support fini* $S(\tau)$ *de cardinal* $n(J)$ *disjoint du support* $S(\nu_J)$ *de* ν_J*, la mesure "perturbée"* $\lambda = \nu_J+\tau$ *est indéterminée et canonique d'ordre* m .

<u>PREUVE</u>. Fixons $n(J) = n \geqslant 1$ et ramenons-nous à $J = \{a_o,\ldots,a_{n-1}\}$ de sorte que

$$\lambda = \sum_{j=o}^{n-1} p_j\,\delta_{b_j} + \sum_{k=n}^{\infty} m_k\delta_{a_k}$$

avec $p_j > o$ et $b_j \neq a_k$ pour tout $k \geqslant n$. On se ramène d'abord à supposer $p_j = m_j$, car la mesure λ' construite avec les m_j est telle que λ et λ' ont des densités bornées l'une par rapport à l'autre et le résultat s'obtient aisément avec (3.4.11). Ensuite par une récurrence immédiate on se ramène au cas $n=1$, de sorte qu'on simplifie l'écriture de λ selon

$$\lambda = m_o\delta_b + \sum_{k=1}^{\infty} m_k\delta_{a_k}$$

avec $b \neq a_k$ pour tout $k \geqslant 1$. Posons $\nu = \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} m_k\delta_{a_k}$. On voit, avec (3.4.13.b), que ν est une mesure déterminée permettant de reconstituer λ par adjonction d'une mesure θ à support fini, de cardinal $(m+1)$, disjoint du support de ν. Avec le lemme (3.4.12) on obtient que λ est soit déterminée, soit indéterminée et canonique d'ordre $m' \leqslant m$. Dans le second cas on a nécessairement $m' = m$, car on peut permuter les rôles de λ et μ et considérer μ comme une perturbation de λ. Il reste donc à éliminer le cas où λ est déterminée. En supposant cela on a nécessairement $b \neq a_o$ (car sinon $\lambda = \mu$) de sorte que la mesure $\lambda' = \lambda+m_o\delta_{a_o}$ est d'après le lemme (3.4.12) soit déterminée, soit indéterminée et N-extrêmale. Mais alors en revenant à (3.4.13), et surtout à l'analyse du début de sa preuve, on voit que la mesure μ, qui s'obtient par "soustraction" à partir de λ, est en fait déterminée dans les deux cas, ce qui est absurde et termine la démonstration. □

Mesures canoniques et symétrie. - Dans [3] , CHIHARA montre essentiellement que s'il existe, dans le compact $M(\alpha)$, une mesure symétrique μ, c'est-à-dire telle que $\check{\mu} = \mu$, où $d\check{\mu}(t) = d\mu(-t)$, alors la suite $\alpha = (\alpha_n)$ est évidemment telle que $\alpha_{2n} > 0$ et $\alpha_{2n+1} = 0$ (mais ceci n'est pas le point important), et il n'existe dans $M(\alpha)$ que deux mesures N-extrêmales, déterminées d'ailleurs dans la représentation de Nevanlinna, par les conditions $b = o$ et $b = \infty$. La méthode utilisée est assez longue et repose sur la comparaison du problème des moments de Hamburger et du problème des moments de Stieltjes (c'est-à-dire sur l'intervalle $[o,+\infty)$) qui lui est naturellement associé dans le cas symétrique. De plus nulle part n'est abordé le problème de la caractérisation des mesures symétriques canoniques d'ordre m, extension naturelle du cas des mesures N-extrêmales.

Supposons donc fixée la suite $\alpha = (\alpha_n)$ telle que $\alpha_{2n} > 0$ et $\alpha_{2n+1} = 0$, telle aussi que le problème des moments associé soit indéterminé. Alors pour toute $\mu \in M(\alpha)$, la mesure symétrisée $\check{\mu}$ de μ est élément de $M(\alpha)$, et la question est de déterminer les mesures $\mu \in M(\alpha)$, canoniques d'ordre m et symétriques.

La condition sur la suite $\alpha = (\alpha_n)$ impose que la base orthonormale polynômiale (P_k) est telle que $\check{P}_k = (-1)^k P_k$, ce qui conduit à la condition $\check{Q}_k = (-1)^{k-1} Q_k$ sur les polynômes Q_k associés. En revenant aux fonctions entières de (3.3), on voit alors que les fonctions A et D sont impaires, tandis que B et C sont paires. De plus entre les transformées de Stieltjes de μ et $\check{\mu}$, il existe la relation évidente

$$I_{\check{\mu}}(z) = - I_{\mu}(-z) \tag{1}$$

de sorte que μ est symétrique si et seulement si sa transformée de Stieltjes est impaire. Si μ est supposée N-extrêmale, alors $I_\mu(z)$ se paramètre selon (3.3.2) sous la forme

$$I_\mu(z) = \frac{A(z)b-C(z)}{B(z)b-D(z)}$$

avec $b \in \bar{\mathbb{R}}$. Pour $b = 0$ et $b = \infty$, on obtient des transformations de Stieltjes impaires, donc les mesures correspondantes μ_o et μ_∞ sont symétriques. Réciproquement en cherchant la condition $I_{\check{\mu}} = - I_\mu$, compte tenu des égalités $\check{A} = -A$, $\check{D} = -D$, $\check{B} = B$ et $\check{C} = C$, couplées avec l'égalité $AD-BC = 1$, on obtient, pour déterminer les valeurs finies de b, la seule équation $b = 0$. Le résultat de CHIHARA est donc ainsi complètement démontré sans aucune difficulté.

Le cas des mesures canoniques est tout de même plus complexe. Pour l'étudier utilisons la représentation de Nevanlinna, qui fournit si vite le résultat dans le cas de N-extrêmalité. On sait que la paramétrisation de Nevanlinna associe à μ, comme on a vu au début de (3.4) une constante $b = b(\mu) \in \bar{\mathbb{R}}$ et une mesure $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(\mu) \in ca^+(\bar{\mathbb{R}})$. En raisonnant avec $\bar{\mathbb{R}}$ (qui est $\mathbb{R}$ complété ici avec un seul point à l'infini) on doit considérer ∞ comme un point invariant par la symétrie par rapport à l'origine. Il existe donc deux points auto-symétriques dans $\bar{\mathbb{R}}$, qui sont $b = 0$ et $b = \infty$.

Ceci étant dit, comparons les éléments $b(\mu)$ et $\tilde{\sigma}(\mu)$ aux éléments correspondants associés à $\check{\mu}$. Or cela est facile :

(3.4.15) PROPOSITION. - *On a les égalités*

$$b(\check{\mu}) = -b(\mu)$$

$$\tilde{\sigma}(\check{\mu}) = \tilde{\sigma}(\mu)^{\vee}$$

PREUVE. Posons $\phi = \phi^\mu$ et $\psi = \phi^{\check{\mu}}$. Compte tenu des égalités $\check{A} = -A$, $\check{D} = -D$, $\check{B} = B$ et $\check{C} = C$ on obtient immédiatement, avec l'égalité (1) comparant I_μ et $I_{\check{\mu}}$, la relation

$$\frac{A\psi-C}{B\psi-D} = \frac{A\check{\phi}+C}{B\check{\phi}+D}$$

laquelle se réduit à l'égalité $\psi = - \check{\phi}$ quand on se souvient que $AD - BC = 1$.

Maintenant si

$$\phi(z) = b + \int \frac{tz+1}{t-z} \, d\tilde{\sigma}(t)$$

alors $\psi = -\check{\phi}$ s'écrit

$$\begin{aligned}\psi &= -b + \int \frac{tz-1}{t+z} \, d\tilde{\sigma}(t) \\ &= -b + \int \frac{tz+1}{t-z} \, d\tilde{\sigma}(-t) \\ &= -b + \int \frac{tz+1}{t-z} \, d\check{\tilde{\sigma}}(t)\end{aligned}$$

ce qui donne les égalités annoncées. □

(3.4.16) <u>COROLLAIRE 1</u> . - *Pour que* $\mu \in M(\alpha)$ *soit symétrique il faut et il suffit que l'on ait* $b = \infty$ *(et dans ce cas* μ *est* μ*-extrêmale) ou bien* $b = 0$ *et* $\tilde{\sigma}$ *symétrique (le cas* $\tilde{\sigma} = 0$ *donnant la deuxième solution* N-*extrêmale).*

Le cas où μ est canonique d'ordre $m \geqslant 1$ se règle aussitôt puisqu'alors $\tilde{\sigma}$ a un support de cardinal m. On a donc $b = 0$ et $\tilde{\sigma}$ est symétrique. Pour savoir si $\tilde{\sigma}$ charge les points 0 et ∞, il faut distinguer suivant la parité de m. Si m est pair alors $\tilde{\sigma}$ ne peut charger un seul de ces deux points car les $(m-1)$ points restant du support ne peuvent se répartir symétriquement. Si m est impair alors nécessairement $\tilde{\sigma}$ charge un et un seul des points 0 et ∞. D'où l'énoncé :

(3.4.17) <u>COROLLAIRE 2</u>. - *Pour que* $\mu \in M(\alpha)$ *soit symétrique et canonique d'ordre* $m \geqslant 1$ *il faut et il suffit que* $b = 0$ *et que* $\tilde{\sigma}$ *soit une mesure symétrique sur* $\bar{\mathbb{R}}$. *Si* m *est pair, ou bien* $\tilde{\sigma}$ *charge les deux points* 0 *et* ∞*, ou bien elle n'en charge aucun. Si* m *est impair, alors* $\tilde{\sigma}$ *charge un et un seul des deux points* 0 *ou* ∞.

Par exemple si $m = 1$ alors $\tilde{\sigma}$ se détermine par sa masse q placée soit au point O, soit au point ∞. Dans le premier cas on a $\phi = -\frac{q}{z}$ et dans le second $\phi = qz$, ce qui permet de voir, quitte à modifier q, que si ϕ est solution, il en est de même pour la fonction $-\frac{1}{\phi}$. D'où :

(3.4.18) <u>COROLLAIRE 3.</u> - *Pour que* $\mu \in M(\alpha)$ *soit symétrique et canonique d'ordre 1, il faut et il suffit que l'on ait l'une des deux relations*

$$I_\mu(z) = \frac{qA(z)+zC(z)}{qB(z)+zD(z)} \qquad \text{ou} \qquad I_\mu(z) = \frac{qzA(z)-C(z)}{qzB(z)-D(z)}$$

avec $0 < q < \infty$.

La remarque faite plus haut sur l'invariance de l'ensemble des solutions par la transformation $\phi \to -\frac{1}{\phi}$ est en réalité générale. Examinons en détail le cas pair $m = 2p$. Il y a deux sortes de solutions. Les premières, notées ϕ, sont impaires et proviennent de mesures $\tilde{\sigma} = \sigma$, discrètes de la forme

$$\sigma = \sum_{k=1}^{p} r_k(\delta_{a_k} + \delta_{-a_k})$$

avec $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_p$ et $r_k > 0$. Les secondes, notées ψ, sont aussi impaires et proviennent de mesures $\tilde{\sigma} = \tilde{\tau}$ discrètes de la forme

$$\tilde{\tau} = s_o\delta_o + s_\infty\delta_\infty + \sum_{k=1}^{p-1} s_k(\delta_{b_k} + \delta_{-b_k})$$

avec $0 < b_1 < b_2 < \dots < b_{p-1}$ et $s_o, s_\infty, s_k > 0$. Considérons alors ϕ sur la droite numérique. C'est une fraction rationnelle

$$\phi(x) = \int \frac{tx+1}{t-x}\, d\sigma(t) = \sum_{k=1}^{p} \frac{2r_k(a_k^2+1)x}{a_k^2 - x^2}$$

admettant les a_k pour pôles simples et telle que $\phi(o) = 0$ et $\phi(\infty) = 0$. De plus ϕ est décroissante car

$$\phi'(x) = -\int \frac{1+t^2}{(t-x)^2}\, d\sigma(t)$$

donc ϕ s'annule en des points $b_1, b_2, \dots, b_{p-1}$ tels que $b_k \in]a_k, a_{k+1}[$, et bien entendu ϕ s'annule aussi, par imparité, aux points $-b_k$. Ainsi ϕ s'annule sur $\bar{\mathbb{R}}$ en $m = 2p$ points qui sont $0, \infty$ et les $\pm b_k$. Par ailleurs la fonction $\psi = -\frac{1}{\phi}$ est évidemment impaire et de la classe de Nevanlinna N. Comme elle est continue en dehors des points $0, \infty$ et $\pm b_k$, sa mesure $\tilde{\sigma} = \tilde{\tau}$ associée est portée par ces points, avec des masses correspondantes positives. On peut donc écrire

$$\psi(z) = b + \int \frac{tz+1}{t-z}\, d\tilde{\tau}(t)$$

et remarquer que la mesure $\nu \in M(\alpha)$ correspondant à ψ est symétrique, puisque ψ est impaire. Mais ceci implique, grâce à (3.4.15), que $b = 0$ et que $\tilde{\tau}$ est symétrique, de sorte que $\tilde{\tau}(\{b_k\}) = \tilde{\tau}(\{-b_k\}) = s_k > 0$, avec en plus $s_o = \tilde{\tau}(\{o\}) > 0$ et $s_\infty = \tilde{\tau}(\{\infty\}) > 0$. On voit donc que $\psi = -\frac{1}{\phi}$ est bien une fonction de la seconde famille. On ferait bien entendu un raisonnement analogue pour passer de la seconde famille à la première, et de nouveau un autre raisonnement semblable réglerait le cas où m est impair.

On a donc en définitive obtenu la paramétrisation complète des mesures $\mu \in M(\alpha)$ qui sont symétriques et canoniques d'ordre $m \geqslant 1$, en montrant de plus que ces mesures se répartissent en deux classes $S_m^1(\alpha)$ et $S_m^2(\alpha)$, la classe $S_m^1(\alpha)$ étant formée des solutions μ associées à des mesures $\tilde{\sigma}$ n'ayant pas de masse à l'infini, et la classe $S_m^2(\alpha)$ étant au contraire formée des solutions associées à des mesures $\tilde{\sigma}$ ayant une masse à l'infini. De plus chaque mesure $\mu \in S_m^1(\alpha)$ a son correspondant $\nu \in S_m^2(\alpha)$ (et réciproquement), la liaison entre μ et ν étant établie par la relation fondamentale

$$\phi^\mu(z)\, \phi^\nu(z) = -1$$

entre leurs fonctions de Nevanlinna associées.

Pour en terminer avec cette question on peut donc rassembler l'essentiel dans l'énoncé :

(3.4.19) THEOREME. - *Les mesures* $\mu \in M(\alpha)$ *qui sont symétriques et canoniques d'ordre* $m \geqslant 1$ *se répartissent en deux classes* $S_m^1(\alpha)$ *et* $S_m^2(\alpha)$. *La première est formée des mesures* μ *dont la transformée de Nevanlinna* $\phi = \phi^\mu$ *est de la forme*

$$\phi(z) = \sum_{k=1}^{p} \frac{2u_k z}{a_k^2 - z^2}$$

dans le cas $m = 2p$, *avec* $u_k > 0$ *et* $0 < a_1 < \ldots < a_p$, *et de la forme*

$$\phi(z) = -\frac{r_o}{z} + \sum_{k=1}^{p} \frac{2u_k z}{a_k^2 - z^2}$$

dans le cas $m = 2p+1$, *avec* $r_o > 0$, $u_k > 0$ *et* $0 < a_1 < \ldots < a_p$.

La seconde est formée des mesures ν *dont la transformée de Nevanlinna* $\psi = \phi^\nu$ *s'écrit*

$$\psi(z) = -\frac{1}{\phi(z)}$$

où ϕ *est l'une des fonctions précédentes.*

PREUVE. Tout a été dit pratiquement ; il suffit de rajouter que l'on a posé $u_k = r_k(a_k^2 + 1)$ pour simplifier l'écriture de ϕ lorsqu'on ne veut pas faire apparaître explicitement la mesure $\sigma = \tilde{\sigma}$ à l'origine du calcul de ϕ. □

(3.5) LE PROBLEME DES SEMI-GROUPES SUR $\mathbb{R}$, $[o,\infty)$ ET $[1,\infty)$.

La droite numérique $\mathbb{R}$ étant évidemment stable par le produit $(x,y) \to xy$, on peut se poser le même type de questions qu'en (1.4) et (2.3) relativement au problème des semi-groupes. Déjà il est clair que si (α_k) est une suite de moments sur $\mathbb{R}$ alors la suite exponentielle $(e^{s\alpha_k})$ est aussi une suite de moments sur $\mathbb{R}$

pour tout $s \geqslant 0$. Il suffit pour le voir de se souvenir de la définition de la mesure $\mu \square \nu$, produit "convolutif multiplicatif" de μ et ν, c'est-à-dire image de $\mu \otimes \nu$ par l'opération $(s,t) \to st$, qui assure que si (α_k) et (β_k) sont les suites de moments associées respectivement à μ et ν, alors $(\alpha_k \beta_k)$ est la suite des moments de $\mu \square \nu$.

Le problème posé est donc le même qu'en (1.4) et (2.3), qui est de caractériser *toutes* les suites (α_k) ayant la propriété d'engendrer par exponentiation un semi-groupe de moments sur $\mathbb{R}$. Il est assez facilement résolu, avec les mêmes méthodes qu'en (1.3) pour le cas $[o,1]$, bien que la solution ne soit pas exactement la même.

On rappelle, avec (1.4.1), que la matrice $M = [\alpha_{i+j}]$ est de type quasi-positif lorsque l'on a la condition

$$\sum_{i,j} \alpha_{i+j}\, \xi_i\, \xi_j \geqslant 0$$

pour toute suite finie de réels (ξ_i) telle que $\Sigma \xi_i = 0$.

Cela étant, on a le résultat suivant :

(3.5.1) <u>THEOREME</u>. - *Soit* (α_k), $k \geqslant 0$, *une suite quelconque de réels. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) Toutes les suites $(e^{s\alpha_k})$, $s \geqslant 0$, *sont des suites de moments sur* $\mathbb{R}$.

b) La matrice $M = [\alpha_{i+j}]$ *est de type quasi-positif.*

c) La suite $\beta_k = \alpha_{k+2} - 2\alpha_{k+1} + \alpha_k$, *"dérivée seconde" ou plutôt différence seconde de la suite* (α_k) *est une suite de moments sur* $\mathbb{R}$.

PREUVE.

a $\Rightarrow$ b : c'est la même qu'en (1.4.2).

b $\Rightarrow$ c : c'est presque la même qu'en (1.4.2). Fixons une suite réelle finie (ξ_i), $i = 0,\dots,p$ et un entier $N \geqslant 2p+2$. Il est facile de voir qu'il existe (au moins) une mesure *signée* $\mu \in M[o,1]$ telle que $\alpha_k = \int t^k d\mu$ pour tout $k \leqslant N$. La condition b) implique la condition

(1) $$\int_o^1 A^2(t)d\mu(t) \geqslant 0 \quad \text{si } d°A \leqslant p+1 \quad \text{et} \quad A(1) = 0$$

ce qui peut encore s'écrire

(2) $$\int_o^1 (1-t)^2 P^2(t)d\mu(t) \geqslant 0 \quad \text{si} \quad d°P \leqslant p \ .$$

Avec $P = \Sigma\xi_i X^i$, on obtient exactement la condition

(3) $$\sum_{i,j} \beta_{i+j}\, \xi_i\, \xi_j \geqslant 0$$

exprimant que la matrice $N = [\beta_{i+j}]$ est de type positif. Avec le théorème de Hamburger (3.1.4), on obtient c).

c $\Rightarrow$ a : c'est là la partie de la preuve qui diffère le plus des démonstrations analogues de (1.4.2) et (2.3.1), à cause de l'introduction de la différence seconde au lieu des différences premières. Fixons une mesure ν sur $\mathbb{R}$, ayant des moments de tous les ordres, et telle que

(4) $$\beta_k = \int t^k d\nu(t) \qquad k = 0,1,\dots$$

Posons maintenant $\tau_k = \alpha_{k+1} - \alpha_k$, de sorte que (4) conduit à

(5) $$\tau_{k+1} - \tau_k = \int t^k d\nu(t)$$

d'où l'on tire sans difficulté, par sommation

(6) $$\alpha_{k+1} - \alpha_k = \tau_k = \tau_o + \int \frac{t^k - 1}{t-1}\, d\nu(t) \ .$$

En recommençant la sommation, on arrive à

(7) $$\alpha_k = \alpha_o + k\,\tau_o + \int \frac{t+\ldots+t^{k-1}-(k-1)}{t-1}\, d\nu(t)$$

soit encore à

(8) $$\alpha_k = \alpha_o + k\,\tau_o + \int \frac{t^k-kt+k-1}{(t-1)^2}\, d\nu(t)$$

ce qui permet, à partir de là, de distinguer deux cas

<u>1er cas</u>. On a $\int \frac{d\nu(t)}{(t-1)^2} < +\infty$. On introduit alors la mesure positive bornée $d\mu(t) = \frac{1}{(t-1)^2}\, d\nu(t)$, de sorte que (8) donne l'existence de deux réels a et b tels que

(9) $$\alpha_k = a + bk + \int t^k d\mu(t)$$

d'où l'on déduit l'expression

(10) $$e^{s\alpha_k} = e^{sa}\, e^{sbk}\, e^{s\rho_k} \qquad s \geqslant 0$$

avec $\rho_k = \int t^k d\mu(t)$. Or (e^{sa}), (e^{sbk}) et $(e^{s\rho_k})$ sont des suites de moments sur $\mathbb{R}$ par la propriété d'exponentiation, donc $(e^{s\alpha_k})$ est aussi une suite de moments sur $\mathbb{R}$ par la propriété de stabilité par produit, et on obtient donc a).

<u>2ème cas</u>. On a $\int \frac{d\nu(t)}{(t-1)^2} = +\infty$. On procède alors par approximation en introduisant la fonction g_p, indicatrice de l'ensemble $(-\infty, 1-\frac{1}{p}] \cup [1+\frac{1}{p}, \infty)$, qui est telle que $g_p \uparrow 1 - 1_{\{1\}}$. On pose ensuite $d\nu_p = g_p\, d\nu$, de sorte que la mesure ν_p vérifie l'hypothèse du premier cas. On peut donc introduire la suite

(11) $$\alpha_k(p) = \alpha_o + k\,\tau_o + \int \frac{t^k-kt+k-1}{(t-1)^2}\, d\nu_p(t)$$

et, d'après l'étude du premier cas, la suite $(\alpha_k(p))$ engendre un semi-groupe $(e^{s\alpha_k(p)})$ de suites de moments. Par passage à la limite $p \to \infty$ on obtient, avec le théorème de Lebesgue

$$(12) \qquad \alpha_k(p) \to \alpha_k - \frac{k(k-1)}{2} \nu(\{1\}) = \gamma_k$$

puis, par exponentiation :

$$(13) \qquad e^{s\alpha_k} = e^{s\gamma_k} r^{k(k-1)}$$

avec $r = \exp\{\frac{s}{2} \nu(\{1\})\} \geqslant 1$. Maintenant on sait, par passage à la limite, que $(e^{s\gamma_k})$ est une suite de moments, de sorte qu'il en sera de même pour $(e^{s\alpha_k})$ si l'on sait que la suite $(r^{k(k-1)})$ est elle-même une suite de moments. Cette question se ramène immédiatement au cas de la suite r^{k^2}, $r > 1$, et il y est répondu de façon positive avec le lemme suivant (3.5.2), ce qui termine donc la preuve du théorème. □

(3.5.2) <u>LEMME</u>. - *Pour tout* $r > 1$ *la suite* (r^{k^2}) *est une suite de moments, correspondant de plus à un problème indéterminé admettant une solution à support dans* $[o,\infty)$.

<u>PREUVE</u>. En posant $r = \exp(\frac{\sigma^2}{2})$, on est ramené à la suite $\exp(\frac{1}{2}\sigma^2 k^2)$. Or si l'on introduit la mesure gaussienne normale

$$d\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$$

on remarque que, par transformation de Laplace-Fourier, on a

$$\exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2 k^2\right) = \int e^{\sigma k t} d\gamma(t)$$

Le changement de variable $x = e^{\sigma t} = \phi(t)$, $t = \frac{1}{\sigma} \operatorname{Log} x = \psi(x)$, et l'introduction de la mesure image $\mu = \phi(\gamma)$, donnent l'égalité

$$\exp(\frac{1}{2}\sigma^2 k^2) = \int x^k \, d\mu(x)$$

qui répond à la question, avec la précision supplémentaire que la solution exhibée μ est densitable par rapport à la mesure de Lebesgue dx puisque

$$d\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma x} \quad \exp\{-\frac{(\mathrm{Log}x)^2}{2\sigma^2}\} \; dx$$

pour $x > 0$. De plus μ est à support $[o, +\infty)$.

Pour voir que le problème des moments associé est indéterminé, utilisons le critère donné par AKHIEZER [1] 14 p. 87 et dû à KREIN. Pour cela il suffit de vérifier l'inégalité

$$\int_o^\infty \frac{\mathrm{Log}\ h(x)}{1+x^2} \, dx > -\infty$$

où $h(x)$ est la densité de la mesure μ, explicitée ci-dessus, ce qui se ramène immédiatement à vérifier que l'on a bien

$$\int_o^\infty \frac{\mathrm{Log}\ x}{1+x^2} \, dx < +\infty \quad \text{et} \quad \int_o^\infty \frac{(\mathrm{Log}\ x)^2}{1+x^2} \, dx < +\infty$$

et termine la preuve du lemme. □

Application au problème des semi-groupes de Stieltjes. - Nous n'avons pas introduit, dans ce travail, le problème des moments sur la demi-droite $\mathbb{R}_+ = [o,\infty)$, dit de Stieltjes, qui se traite de manière analogue à celui de Hamburger, mais avec des résultats quelquefois moins précis. Le fait que tout polynôme réel P, tel que $P(t) \geqslant 0$ pour tout $t \geqslant 0$, puisse s'écrire sous la forme $P = A^2 + XB^2$, avec $A,B \in \mathbb{R}[X]$, qui est un résultat classique de Féjer, amène immédiatement au critère d'existence suivant, exposé par exemple dans AKHIEZER [1] p. 76 :

(3.5.3) THEOREME. - *Pour qu'une suite* $\alpha = (\alpha_k)$ *soit une suite de moments sur* $[o,\infty)$ *il faut et il suffit que les matrices* $M = [\alpha_{i+j}]$ *et* $N = [\alpha_{i+j+1}]$

soient de type positif.

Le fait qui a suggéré l'examen du problème des semi-groupes de Stieltjes est tout simplement la preuve du lemme (3.5.2), qui, en exhibant une solution à support dans $[o,\infty)$ pour le problème associé à la suite (r^{k^2}), $r \geqslant 1$, permet de calquer sans difficulté la preuve de (3.5.1). On a donc

(3.5.4) THEOREME. - *Soit* $\alpha = (\alpha_k)$, $k \geqslant 0$, *une suite quelconque de réels. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) Toutes les suites $(e^{s\alpha_k})$, $s \geqslant 0$, *sont des suites de moments sur* $[o,\infty)$.

b) Les deux matrices $M = [\alpha_{i+j}]$ *et* $N = [\alpha_{i+j+1}]$ *sont de type quasi-positif.*

c) La suite $\beta_k = \alpha_{k+2} - 2\alpha_{k+1} + \alpha_k$, *différence seconde de la suite* (α_k), *est une suite de moments sur* $[o,\infty)$.

PREUVE. On commence par remarquer que l'intervalle $[o,\infty)$ étant stable vis à vis du produit $(s.t) \to st$, on peut multiplier entre elles des suites de moments de Stieltjes et obtenir ainsi une suite de moments de Stieltjes. Ceci permet de voir la stabilité par exponentiation (avec $s \geqslant 0$) des suites de moments de Stieltjes. On a alors a $\Rightarrow$ b par la méthode de (1.4.2) sans difficulté, b $\Rightarrow$ c en recopiant la preuve de (1.4.2) ou de (3.5.1) et c $\Rightarrow$ a de la même façon qu'en (3.5.1), grâce à ce qui a été dit de la suite (r^{k^2}), permettant de conclure dans le 2ème cas de la preuve. □

Application au problème des semi-groupes sur $[1,\infty)$. L'intervalle $[1,\infty)$ est, lui aussi, stable par l'opération produit $(s.t) \to st$, ce qui permet d'effectuer des produits et des exponentiations des suites de moments correspondantes. Le lemme de Fejer, sur les polynômes P positifs sur $[1,\infty)$, se déduit immédiatement du cas

$[o,\infty)$. Tout tel polynôme s'écrit $P = A^2 + (X-1)B^2$ avec $A,B \in \mathbb{R}[X]$. On tire donc de là, par les méthodes habituelles :

(3.5.5) THEOREME. - *Pour qu'une suite* $\alpha = (\alpha_k)$ *soit une suite de moments sur* $[1,\infty)$ *il faut et il suffit que les matrices* $M = [\alpha_{i+j}]$ et $N = [\alpha_{i+j+1} - \alpha_{i+j}]$ *soient de type positif.*

Le point 1 est ici point frontière de l'intervalle $[1,\infty)$, et c'est pourquoi le polynôme X-1, qui s'annule au point 1, intervient. Le problème des semi-groupes doit donc vraisemblablement se résoudre sans faire appel à la différence seconde, mais seulement à la différence première. On a en effet :

(3.5.6) THEOREME. - *Soit* $\alpha = (\alpha_k)$,,$k \geqslant 0$, *une suite de réels quelconques. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) Toutes les suites $(e^{s\alpha_k})$, $s \geqslant 0$, *sont des suites de moments sur* $[1,\infty)$.

b) La matrice $M = [\alpha_{i+j}]$ *est de type quasi-positif et la matrice* $N = [\alpha_{i+j+1} - \alpha_{i+j}]$ *est de type positif.*

c) La suite $\beta_k = \alpha_{k+1} - \alpha_k$ *est une suite de moments sur* $[1,\infty)$.

PREUVE. On a évidemment a $\Rightarrow$ b par les méthodes de (1.4.2), de même que b $\Rightarrow$ c. Pour voir que c $\Rightarrow$ a il suffit encore de plaquer la preuve de (1.4.2), en faisant attention au changement de signe dans la définition de β_k. Supposons qu'il existe une mesure positive ν sur $[1,\infty)$ telle que

$$\alpha_{k+1} - \alpha_k = \int t^k d\nu(t)$$

On en déduit l'égalité

$$\alpha_k = \alpha_o + \int (1+t+\ldots+t^{k-1})d\nu(t)$$

$$\alpha_k = \alpha_o + \int \frac{t^k-1}{t-1}\, d\nu(t)$$

A partir de là on distingue le premier cas, qui est celui où $\int \frac{d\nu}{t-1} < +\infty$, et qui permet d'introduire la mesure $\mu = \frac{\nu}{t-1}$ sur $[1,\infty)$. Alors $\alpha_k = a + \int t^k d\mu(t)$ avec a réel convenable, donc $e^{s\alpha_k} = e^{sa}\, e^{s\gamma_k}$ avec $\gamma_k = \int t^k d\mu$. Or $(e^{s\gamma_k})$ est une suite de moments sur $[1,\infty)$, par stabilité de l'exponentiation, donc aussi $(e^{s\alpha_k})$. Dans le second cas, c'est-à-dire lorsque $\int \frac{d\nu}{t-1} = +\infty$, on introduit la fonction g_p , indicatrice de l'intervalle $[1+\frac{1}{p}, \infty)$, de sorte que $g_p \uparrow 1_{]1,\infty)}$. En posant $\nu_p = g_p.\nu$, on se ramène au premier cas et on introduit la suite

$$\alpha_k(p) = \alpha_o + \int \frac{t^k-1}{t-1}\, d\nu_p(t)$$

qui engendre un semi-groupe. Par passage à la limite $p \to \infty$ on obtient, avec le théorème de Lebesgue,

$$\alpha_k(p) \to \alpha_k - k\,\nu(\{1\}) = \gamma_k$$

donc $e^{s\alpha_k(p)} \to e^{s\gamma_k}$ et cette dernière suite est donc une suite de moments. Or

$$e^{s\alpha_k} = e^{s\gamma_k}\, e^{k\nu(\{1\})s}$$

et la suite $e^{k\nu(\{1\})s}$ étant de la forme a^k avec $a \geqslant 1$, est bien une suite de moments sur $[1,\infty)$. On termine par stabilité du produit de deux suites de moments. □

BIBLIOGRAPHIE.

[1] N.I. AKHIEZER, *The classical moment problem,* Oliver and Boyd (1961 ; traduction anglaise 1965).

[2] C. BERG et J.P.R. CHRISTENSEN, *Density questions in the classical theory of moments,* Ann. Inst. Fourier, 31.3, (1981), p. 99-114.

[3] T.S. CHIHARA, *Indeterminate Symmetric Moment Problems,* J. of Math. Analysis and Appl. , 85, (1982), p. 331-346.

[4] N. DUNFORD et J.T.S. SCHWARTZ, *Linear operators I et II,* Interscience Publishers, New-York, (1957).

[5] F. HAUSDORFF, *Momentenprobleme für ein endliches Intervall,* Math. Z., 16, (1923), p. 220-248.

[6] T. HILDEBRANDT et I.J. SCHOENBERG, *On linear functional operators and the moment problem for a finite interval in one or several dimensions,* Ann. of Math., Sér. 2, 34, (1933), p. 317-328.

[7] H.J. LANDAU, *The Classical moment problem : Hilbertian proofs,* J. Funct. Analysis, 38, (1980), p. 255-272.

[8] B. SZ NAGY et F. RIESZ, *Leçons d'Analyse Fonctionnelle,* Paris-Budapest, (1955).

[9] R.R. PHELPS, *Lectures on Choquet's theorem,* Van Nostrand Mathematical studies 7, (1966).

[10] J.A. SHOHAT et J.D. TAMARKIN, *The problem of moments,* Amer. Math. Soc., Math. Surveys 1, (1943).

[11] M. STONE, *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis,* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 15, (1932).

[12] D.V. WIDDER, *The Laplace transform,* Princeton, (1946).