

YVES GÉRARD

**Caractérisation des groupes de cohomologie d'un groupe
topologique en termes de suites exactes**

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1982, fascicule 6A
« Quelques éléments pour l'étude du groupe de Galois d'une extension transcendante », ,
p. 1-13

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1982__6A_1_0

© Université de Lyon, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CARACTERISATION DES GROUPES DE COHOMOLOGIE D'UN GROUPE TOPOLOGIQUE EN TERMES DE SUITES EXACTES

par Yves GERARD

Soient G un groupe topologique et A un G -module lisse. On a défini dans [2] les groupes de cohomologie $H^n(G, A)$, qui coïncident avec les groupes usuels lorsque G est discret ou profini et définissent une cohomologie particulièrement utile pour l'étude de groupes de Galois d'extensions transcendentes. On montre ici que, pour $n \geq 2$, $H^n(G, A)$ est en correspondance avec un ensemble de suites exactes commençant par A et finissant par G .

Lorsque G est discret, on obtient un résultat analogue à celui de D.F. Holt [4], avec cependant quelques différences. D'abord, les suites exactes utilisées ici comportent le plus grand nombre possible de G -modules comme termes, de manière à simplifier les définitions. Mais surtout, on obtient une meilleure caractérisation des suites équivalentes à 0, grâce à deux notions, presque duales, de trivialisations (leur définition est plus faible que celle des suites analogues de D.F. Holt), une suite étant équivalente à 0 si elle est triviale ou cotriviale ; la notion de cotrivialisation peut sembler un peu trop technique, mais en pratique elle est très commode et permet des démonstrations élémentaires.

On obtient ainsi une caractérisation très voisine de celle de N. Yoneda [5] ; il serait, sans doute, intéressant de voir comment ces caractérisations sont liées.

§ 0. Soit G un groupe topologique. On note $G\text{-}\mathcal{M}_{\text{td}}$ la catégorie des G -modules lisses (c'est-à-dire des G -modules dont chaque élément a un stabilisateur ouvert dans G). On note $H(G, .)$ le foncteur cohomologique dérivé à droite de $A \mapsto A^G$ (cf. [1] et [2]). On se propose donc de construire un δ -foncteur (avec la terminologie de [3]) $\mathcal{H}(G, .)$, isomorphe à $H(G, .)$ tel que, pour tout $n \geq 2$ et pour $A \in G\text{-}\mathcal{M}_{\text{td}}$, $\mathcal{H}^n(G, A)$ soit défini en termes de suites exactes.

Soit $A \in G\text{-}\mathcal{M}\text{td}$. On rappelle (cf. [1]) que l'on note $\mathcal{D}(G,A) = (\mathcal{D}^n(G,A))_{n \geq 0}$

le complexe dont les n -cochaînes sont les applications $c : G^n \rightarrow A$ telles que, pour $0 \leq i \leq n$ et $(g_1, g_2, \dots, g_i) \in G^i$, il existe un voisinage U de 1_G dans G tel que $c(g_n, \dots, g_{i+2}, g_{i+1}^{-1} u, g_i, \dots, g_1) = c(g_n, \dots, g_{i+2}, g_{i+1}, g_i, \dots, g_1)$, $(g_n, \dots, g_{i+1}) \in G^{n-i}$ et $u \in U$. $H(G,A)$ est la cohomologie de ce complexe.

§ 1. Construction de $\mathcal{H}^2(G, \cdot)$

(1.1) Soit $A \in G\text{-}\mathcal{M}\text{td}$. On note $\mathcal{F}^2(G,A)$ l'ensemble des suites exactes (M, μ)

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\mu_1} M \xrightarrow{\mu_2} G \rightarrow 1$$

de groupes topologiques, de type A , où μ_1 et μ_2 sont des morphismes stricts, tels que μ_2 (en tant qu'application) possède une section continue s telle que l'application $\alpha(s) : (g_1, g_2) \mapsto s(g_1)s(g_2)s(g_1g_2)^{-1}$ appartienne à $\mathcal{Z}^2(G,A)$. Si l'on désigne par $\mathcal{H}^2(G,A)$ le quotient de $\mathcal{F}^2(G,A)$ par la relation d'équivalence usuelle, on montre (cf. [1]) qu'il existe une bijection canonique de $H^2(G, A)$ sur $\mathcal{H}^2(G,A)$ qui permet d'identifier ces deux ensembles, d'où une loi de groupe sur $\mathcal{H}^2(G,A)$. Cette loi provient d'une loi de groupe abélien sur $\mathcal{F}^2(G,A)$: la somme de deux suites (M, μ) et (M', μ') de $\mathcal{F}^2(G,A)$ est la suite

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\nu_1} (M_2 \times_G M'_2) / D \xrightarrow{\nu_2} G \rightarrow 1,$$

où $M_1 \times_G M'_2$ est le produit fibré des groupes topologiques M_2 et M'_2 au-dessus de G ,

$D = \{(\mu_1(a), \mu'_1(-a)) \mid a \in A\}$, $\nu_1(a)$ est la classe de $(\mu_1(a), 1)$ et ν_2 est obtenu par passage au quotient de la projection $M_2 \times_G M'_2 \rightarrow G$.

(1.2). Soient $(M, \mu) \in \mathcal{F}^2(G,A)$ et $f : A \rightarrow B$ un G -morphisme, et soit $B \ltimes_{\mu_2} M_2$ (ou

seulement $B \ltimes M_2$) le produit semi-direct (topologique) de B par M_2 (M_2 opérant

dans B à l'aide de μ_2); on note $B \ltimes_A M_2$ le quotient de $B \ltimes_{\mu_2} M_2$ par le sous-groupe distingué discret $\{(f(a), \mu_1(-a))\}$ et on obtient alors le diagramme commutatif et exact suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B \times_{\mu_2} M_2 & \longrightarrow & M_2 \longrightarrow 1 \\
& & \parallel & & \downarrow \mu_2 & & \downarrow \mu_2 \\
0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B *_A M_2 & \longrightarrow & G \longrightarrow 1 \\
& & \uparrow f & & \uparrow & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & M_2 & \xrightarrow{\mu_2} & G \longrightarrow 1
\end{array}$$

La deuxième suite horizontale est dans $\mathcal{G}^2(G, B)$ et sa classe dans $H^2(G, B)$ est l'image par $H^2(f)$ de celle de (M, μ) .

On le voit en remarquant que tout morphisme de la forme

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & G \longrightarrow 1 \\
& & \downarrow f & & \downarrow & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & G \longrightarrow 1
\end{array}$$

se factorise en un unique morphisme

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B *_A M_2 & \longrightarrow & G \longrightarrow 1 \\
& & \parallel & & \downarrow & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & G \longrightarrow 1
\end{array}$$

2. Construction de $\mathcal{H}^n(G, A)$ pour $n \geq 3$.

(2.1) Soit $A \in G\text{-}\mathcal{M}\text{td}$. On note $\mathcal{G}^n(G, A)$ l'ensemble des suites exactes (M, μ)

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\mu_1} M_2 \xrightarrow{\mu_2} \dots \rightarrow M_n \xrightarrow{\mu_n} G \longrightarrow 1$$

de groupes topologiques telles que

- (i) $M_i \in G\text{-}\mathcal{M}\text{td}$ et μ_{i-1} est un G -morphisme si $2 \leq i \leq n-2$;
- (ii) M_n est un groupe topologique et μ_{n-1} et μ_n sont des morphismes stricts ;
- (iii) $\mu_{n-1}(\mu_n(m)m') = m \mu_{n-1}(m')m^{-1}$ ($m \in M_n$, $m' \in M_{n-1}$) ;
- (iv) μ_n possède une section continue s telle que $\alpha(s) \in \mathcal{D}^2(G, \mu_{n-1}(M_{n-1}))$ (cf. §0).

On peut remplacer ces conditions par les suivantes. :

(i') $M_2 \in G\text{-}\mathcal{M}\text{td}$ et μ_1 est un G -morphisme.

(ii') $0 \rightarrow M_2/\mu_1(A) \rightarrow M_3 \rightarrow \dots \rightarrow G \rightarrow 1$ est dans $\mathcal{G}^{n-1}(G, M_2/\mu_1(A))$

La suite

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow A \rightarrow M_2 \rightarrow \dots \rightarrow G \rightarrow 1$$

appartient alors à $\mathcal{G}^{n+1}(G, 0)$.

(2.2). Soient $(M, \mu), (N, \nu) \in \mathcal{G}^n(G, A)$. Un morphisme ϕ de (M, μ) dans (N, ν) est une suite $(\phi_i)_{2 \leq i \leq n}$ où $\phi_2, \dots, \phi_{n-1}$ sont des G -morphisms et ϕ_n un morphisme (continu) tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & M_2 & \rightarrow \dots \rightarrow & M_n & \rightarrow & G & \rightarrow & 1 \\ & & \parallel & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi_n & & \parallel & & \\ 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & N_2 & \rightarrow \dots \rightarrow & N_n & \rightarrow & G & \rightarrow & 1 \end{array}$$

soit commutatif.

(2.3) On dit que (M, μ) est rétractable (resp. sectionnable) s'il existe un morphisme $M \rightarrow 0$ (resp. $0 \rightarrow M$), c'est-à-dire s'il existe un G -morphisme (resp. un morphisme) rétraction de μ_1 (resp. section de μ_n).

(2.4) On note $\sim$ la relation d'équivalence dans $\mathcal{G}^n(G, A)$ engendrée par $(M, \mu) \rightarrow (N, \nu)$, $((M, \mu) \sim (N, \nu) \text{ s'il existe une suite de morphismes reliant } (M, \mu) \text{ à } (N, \nu))$. Et on pose $\mathcal{H}^n(G, A) = \mathcal{G}^n(G, A) / \sim$.

Soient $(M, \mu), (M', \mu') \in \mathcal{G}^n(G, A)$; on note $(M, \mu) + (M', \mu')$ la suite $(N, \nu) \in \mathcal{G}^n(G, A)$ définie comme suit : $N_2 = M_2 \underset{A}{*} M'_2$ est la somme amalgamée (dans $G\text{-}\mathcal{M}\text{td}$) $(= (M_2 \times M'_2) / \{(\mu_1(-a), \mu'_1(a)) / a \in A\})$; $N_i = M_i \times M'_i$ (produit dans $G\text{-}\mathcal{M}\text{td}$) pour $2 < i < n$; $M_n = M_n \underset{G}{\times} M'_n$ produit fibré de groupes topologiques au-dessus de G et les morphismes canoniques ν_i rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\mu_1} & M_2 & \xrightarrow{\mu_2} & \dots \rightarrow M_n \xrightarrow{\mu_n} G \rightarrow 1 \\
& & \parallel & & \downarrow & & \uparrow & & \parallel \\
0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\nu_1} & M_2 \underset{A}{*} M'_2 & \xrightarrow{\nu_2} & \dots \rightarrow M_n \underset{G}{\times} M'_n & \xrightarrow{\nu_n} & G \rightarrow 1 \\
& & \parallel & & \uparrow & & \downarrow & & \parallel \\
0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\mu'_1} & M'_2 & \xrightarrow{\mu'_2} & \dots \rightarrow M'_n & \xrightarrow{\mu'_n} & G \rightarrow 1
\end{array}$$

Par passage au quotient, cette loi de composition dans $\mathcal{G}^n(G,A)$ définit dans $\mathcal{H}^n(G,A)$ une loi, notée $+$, associative, commutative et ayant pour élément neutre la classe de

$$0 \rightarrow A = A \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow G = G \rightarrow 1.$$

On verra, plus loin, que $\mathcal{G}^n(G,A)$ est un groupe abélien.

§ 3. Trivialisation et cotrivialisation.

On suppose toujours $n \geq 3$.

(3.0) La notion de morphisme définie en (2.2) se généralise pour $(M,\mu) \in \mathcal{G}^n(G,A)$ et $(N,\nu) \in \mathcal{G}^n(G,B)$ ($B \in G\text{-Mod}$) en remplaçant id_A par un G -morphisme ϕ_1 .

(3.1) On dit que $(M,\mu) \in \mathcal{G}^n(G,A)$ est trivialisable s'il existe un morphisme $f : (N,\nu) \rightarrow (M,\mu)$, où $(N,\nu) \in \mathcal{G}^n(G,0)$ et on dit que $(f, (N,\nu))$ (ou (N,ν)) est une trivialisation de (M,μ) ; s'il en est ainsi, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & N_2 & \xrightarrow{\nu_2} & N_3 & \rightarrow & \dots \rightarrow G \rightarrow 1 \\
& & \downarrow & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \parallel \\
0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\mu_1} & M_2 & \xrightarrow{\mu_2} & M_3 & \rightarrow & \dots \rightarrow G \rightarrow 1
\end{array}$$

et l'on peut considérer la première ligne comme un élément de $\mathcal{G}^{n-1}(G,N_2)$. De plus, on peut supposer que $N_2 = M_2$ et $f_2 = \text{id}_{M_2}$; en effet, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & M_2 & \xrightarrow{v'_2} & M_2 \rtimes N_2 & \xrightarrow{v'_3} & N_3 \rightarrow \dots \rightarrow G \rightarrow 1 \\
\downarrow & & \parallel & & \downarrow f'_3 & & \parallel \\
0 & \rightarrow & A \rightarrow M_2 & \rightarrow & M_3 & \rightarrow & \dots \rightarrow G \rightarrow 1
\end{array}$$

(où les morphismes v'_2 , v'_3 et f'_3 sont définis canoniquement à partir de v_2 , v_3 et f_3 ; $M_2 \rtimes N_2$ est la somme amalgamée dans G -Mod ou est défini comme dans (1.2) pour $n = 3$).

REMARQUE. - En changeant de nouveau (N, v) on peut supposer que f_{n-1} est surjectif etc. ; mais ceci ne sera pas utile pour la suite.

(3.2) Si (M, μ) est trivialisable, (M, μ) est équivalente à 0.

En effet, si $(f, (N, v))$ est une trivialisatation de (M, μ) , on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & A & \rightarrow & A \times N_2 & \xrightarrow{v_2 \circ g} & N_3 \rightarrow \dots \rightarrow G \rightarrow 1 \\
\parallel & & \downarrow \mu_1 + f_2 & & \downarrow f_3 & & \parallel \\
0 & \rightarrow & A & \rightarrow & M_2 & \rightarrow & M_3 \rightarrow \dots \rightarrow G \rightarrow 1
\end{array}$$

(où g est la projection de $A \times N_2$ sur N_2), et la suite exacte du haut est rétractable.

(3.3) Si (M, μ) est rétractable, (M, μ) est trivialisable.

Soit r une rétraction de μ_1 . On considère la suite

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow M_2 \xrightarrow{(r, \mu_2)} A \rtimes M_3 \xrightarrow{\mu_3 \circ pr} G \rightarrow 1$$

($A \rtimes M_3$ produit semi-direct)

de $\mathcal{G}^3(G, 0)$ ou, si $n > 3$, la suite

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow M_2 \xrightarrow{(r, \mu_2)} A \times M_3 \xrightarrow{\mu_3 \circ pr} M_4 \rightarrow \dots \rightarrow G \rightarrow 1$$

de $\mathcal{G}^n(G, 0)$. On a alors un morphisme évident de cette suite dans (M, μ) .

(3.4) On dit que $(M, \mu) \in \mathcal{S}^n(G, A)$ est faiblement cotrivialisable si l'on a un diagramme commutatif et exact

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\mu_1} & M_2 & \xrightarrow{\mu_2} & \dots & M_{n-1} & \xrightarrow{\mu_{n-1}} & M_n & \xrightarrow{\mu_n} & G & \rightarrow & 1 \\
 & & \parallel & & \downarrow g_2 & & & \downarrow g_{n-1} & & \downarrow g_n & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\nu_1} & N_2 & \xrightarrow{\nu_2} & \dots & N_{n-1} & \xrightarrow{\nu_{n-1}} & N_n & \rightarrow & 1
 \end{array}$$

où $N_i \in G\text{-}\mathcal{C}\text{td}$ et ν_{i-1} est un G -morphisme pour $2 \leq i \leq n-2$, N_{n-1} et N_n sont des groupes topologiques et ν_{n-2} et ν_{n-1} des morphismes stricts, g_i des G -morphisms pour $2 \leq i \leq n-2$, g_{n-1} un morphisme et g_n une application continue telle que $g_n(1) = 1$. On dit alors que $g = (g_i)_{2 \leq i \leq n}$ est une cotrivialisation faible de (M, μ) .

(3.5) Soit g une cotrivialisation faible de (M, μ) . On dit que g est une cotrivialisation de (M, μ) si g vérifie les conditions suivantes :

- (i) $g_{n-1}(M_{n-1})$ est contenu dans le centralisateur de $\nu_{n-2}(N_{n-2})$;
- (ii) G opère continûment dans N_{n-1} (donc M_n opère continûment dans N_{n-1}) et $\{(x, y) \mid \nu_{n-1}(x) = g_n(y)\}$ est un sous-groupe de $N_{n-1} \rtimes M_n$ (cf. (1.2)) noté $N_{n-1} \rtimes_{N_n} M_n$;
- (iii) Pour $(x, y) \in N_{n-1} \rtimes_{N_n} M_n$, $x' \in M_{n-1}$ et $y' \in N_{n-2}$, on a $x(\mu_n(y) \cdot g_{n-1}(x'))(\mu_n(y) \cdot \nu_{n-2}(y'))x^{-1} = g_{n-1}(\mu_n(y) \cdot x')\nu_{n-2}(\mu_n(y) \cdot y')$.

S'il existe une cotrivialisation de (M, μ) , on dit que (M, μ) est cotrivialisable.

(3.6) Si g est une cotrivialisation de (M, μ) , on note $g \rtimes M$ la suite

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow M_2 \xrightarrow{\pi_2} N_2 \times M_3 \rightarrow \dots \rightarrow N_{n-2} \times M_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} N_{n-1} \rtimes_{N_n} M_n \xrightarrow{\pi_n} G \rightarrow 1$$

de $\mathcal{S}^n(G, 0)$, où :

$$\pi_2 = (g_2, \mu_2)$$

$$\pi_i(x, y) = (g_i(y) \cdot v_{i-1}(-x), \mu_i(y)) \quad \text{pour } 3 \leq i \leq n-1,$$

$$\pi_n = \mu_n \circ p_n, p_n : N_{n-1} \times_{N_n} M_n \rightarrow M_n \text{ étant la projection.}$$

On a alors un morphisme évident $g \times M \rightarrow (M, \mu)$, donc $g \times M$ est une trivialisation de (M, μ) .

Ainsi, si (M, μ) est cotrivialisable, (M, μ) est trivialisable (donc équivalente à 0).

(3.7) Montrons maintenant que $\mathcal{H}^n(G, A)$ est un groupe abélien. Il suffit de voir que tout élément de $\mathcal{H}^n(G, A)$ est symétrisable. Soit donc $(M, \mu) \in \mathcal{Y}^n(G, A)$ et soit $-(M, \mu)$ la suite

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{-\mu_1} M_2 \xrightarrow{\mu_2} M_3 \rightarrow \dots \rightarrow G \rightarrow 1.$$

Alors le diagramme suivant, où la première ligne est $(M, \mu) + (-(M, \mu))$, est commutatif et exact :

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & M_2 \overset{*}{\underset{A}{\times}} M_2 & \rightarrow & M_3 \times M_3 & \rightarrow & \dots & \rightarrow & M_n \overset{\times}{\underset{G}{\times}} M_n & \rightarrow & G & \rightarrow & 1 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & g_2 & & g_3 & & & & g_n & & & & \\ 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & M_2 & \rightarrow & M_3 & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \mu_{n-1}(M_{n-1}) & \rightarrow & 1 \end{array}$$

où $g_2(\text{cl}(x, x')) = x - x'$, $g_i(x, x') = x - x'$ si $3 \leq i \leq n-1$ et $g_n(x, x') = xx'^{-1}$.

Ainsi $(M, \mu) + (-(M, \mu))$ est cotrivialisable, donc équivalente à 0.

(3.8) Si $(M, \mu) \in \mathcal{Y}^n(G, A)$ est sectionnable, (M, μ) est cotrivialisable.

Soit σ une section de μ_n ; on a le diagramme commutatif et exact suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & A & \rightarrow & M_2 & \rightarrow & \dots \xrightarrow{\mu_{n-2}} M_{n-1} \xrightarrow{\mu_{n-1}} M_n \rightarrow G \rightarrow 1 \\
& & \parallel & & \parallel & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\
0 & \rightarrow & A & \rightarrow & M_2 & \rightarrow & \dots \xrightarrow{\nu_{n-2}} M_{n-1} \ltimes G \xrightarrow{\nu_{n-1}} M_n \rightarrow 1
\end{array},$$

où $\nu_{n-2}(x') = (\mu_{n-2}(x'), 1_G)$, si $x' \in M_{n-2}$ et

$$\nu_{n-1}(x, g) = \mu_{n-1}(x)\sigma(g), \text{ si } (x, g) \in M_{n-1} \ltimes G \text{ (produit semi-direct)}$$

D'où une cotrivialisation de (M, μ) (G opère trivialement sur $M_{n-1} \ltimes G$).

Ainsi, si (M, μ) est sectionnable, (M, μ) est trivialisable (ce qu'on peut voir directement).

(3.9) On va maintenant prouver que, pour $(M, \mu) \in \mathcal{J}^n(G, A)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) (M, μ) est équivalente à 0 ;
- ii) (M, μ) est trivialisable,
- iii) (M, μ) est cotrivable.

On sait déjà que $\text{iii}) \Rightarrow \text{ii}) \Rightarrow \text{i})$, d'après (3.2) et (3.6).

a) Montrons que $\text{i}) \Rightarrow \text{ii})$.

LEMME 1. - Soient (M, μ) et (M', μ') , éléments de $\mathcal{J}^n(G, A)$, et soit $(N, \nu) \in \mathcal{J}^n(G, 0)$.

Si l'on a des morphismes

$$(N, \nu) \xrightarrow{g} (M, \mu) \xleftarrow{f} (M', \mu')$$

(M est donc trivialisable), alors il existe $(M'', \mu'') \in \mathcal{J}^n(G, A)$ qui est co-trivialisable, et des morphismes

$$(M, \mu) \xleftarrow{f_1} (M'', \mu'') \xrightarrow{f_2} (M', \mu').$$

On prend pour (M'', μ'') la suite

$$0 \rightarrow A \rightarrow M'_2 \times N_2 \rightarrow \dots \rightarrow M'_{n-1} \times N_{n-1} \rightarrow M'_n \times_{G_n} N_n \rightarrow G \rightarrow 1$$

qui commence par le produit des suites (M', μ') et (N, ν) dans $G\text{-Mod}$. On a alors un morphisme naturel $f_2 : (M'', \mu'') \rightarrow (M', \mu')$ (par projections) ainsi que $f_1 : (M'', \mu'') \rightarrow (M, \mu)$. Si l'on note $(\bar{M}, \bar{\mu})$ la suite obtenue en changeant la fin de M en

$$\dots \rightarrow M_{n-1} \xrightarrow{\mu_{n-1}} \mu_{n-1}(M_{n-1}) \rightarrow 1,$$

on a, comme en (3.7), une cotrivialisation $(\phi, (\bar{M}, \bar{\mu}))$ de (M'', μ'') avec ici

$$\phi_i(x, y) = f_i(x) - g_i(y) \text{ pour } 2 \leq i \leq n-1 \quad ((x, y) \in M'_i \times N_i), \text{ et}$$

$$\phi_n(x, y) = f_n(x)g_n(y)^{-1} \in \mu_{n-1}(M_{n-1}) \quad ((x, y) \in M'_n \times N_n).$$

Fin de la démonstration du lemme 1.

LEMME 2. - Soient (M, μ) et (M', μ') deux éléments de $\mathcal{Y}^n(G, A)$ et $f : (M, \mu) \rightarrow (M', \mu')$ un morphisme. Si (M, μ) (resp. M', μ') est trivialisable alors (M', μ') (resp. (M, μ)) l'est aussi.

Si (M, μ) est trivialisable c'est évident. Si (M', μ') est trivialisable, d'après le lemme 1, on peut écrire des morphismes

$$(M', \mu') \leftarrow (M'', \mu'') \rightarrow (M, \mu)$$

où (M'', μ'') est cotrivialisable, donc trivialisable (voir (3.6)), ainsi que (M, μ) .

Fin de la démonstration du lemme 2.

Soit $(M, \mu) = M \in \mathcal{Y}^n(G, A)$ équivalente à 0. Il existe donc une suite $(f_i)_{i \in i[0, n]}$ de morphismes reliant 0 à M et s'écrivant sous la forme

$$0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xleftarrow{f_1} M_2 \rightarrow \dots \rightarrow M$$

ou bien sous la forme

$$0 \xleftarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \leftarrow \dots \leftarrow M$$

selon le sens de f_0 ($M_i \in \mathcal{Y}^n(G, A)$ pour $i \in [1, n]$).

Dans les deux cas M_1 est trivialisable, puisqu'il est soit rétractable (voir (3.3)), soit sectionnable (voir (3.8)). En utilisant le lemme 2, on voit donc que M est trivialisable.

b) Montrons maintenant que ii) $\Rightarrow$ iii).

Soit $(f, (N, \nu))$ une trivialisation de $(M, \mu) \in \mathcal{Y}^n(G, A)$ telle que $N_2 = M_2$ et $f_2 = \text{id}_{M_2}$ (ce qu'on peut supposer d'après (3.1)).

Si $n \geq 4$, on a le diagramme exact et commutatif (dans le cas $n = 4$, on supprime les produits directs)

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\mu_1} & M_2 & \xrightarrow{\mu_2} & M_3 & \rightarrow & \dots & \rightarrow & M_{n-2} & \xrightarrow{\mu_{n-2}} & M_{n-1} & \xrightarrow{\mu_{n-1}} & M_n & \rightarrow & G & \rightarrow & 1 \\
 & & \parallel & & \downarrow \nu_2 & & \downarrow g_3 & & & & \downarrow g_{n-2} & & \downarrow g_{n-1} & & \parallel & & & & \\
 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\nu_2 \circ \mu_1} & N_3 & \xrightarrow{(f_3, \nu_3)} & M_3 \times N_3 & \xrightarrow{\tau_3} & \dots & \rightarrow & M_{n-2} \times N_{n-1} & \xrightarrow{\tau_{n-2}} & M_{n-1} \times N_n & \xrightarrow{\tau_{n-1}} & M_n & \rightarrow & 1
 \end{array}$$

où $M_{n-1} \times N_n$ est toujours le produit semi-direct (topologique),

g_i , l'injection canonique pour $3 \leq i \leq n-1$,

$$\tau_i(x, y) = (\mu_i(x) - f_{i+1}(y), \nu_{i+1}((-1)^{i+1}y)) \text{ pour } 3 \leq i \leq n-2,$$

et $\tau_{n-1}(x, y) = \mu_{n-1}(x) f_n((-1)^{n-1}y)$; on est alors dans une situation identique à celle rencontrée en (3.8), d'où une cotrivialisation pour (M, μ) .

Si, enfin, $n = 3$ (on généralise $\ast_A$ défini en (1.2)) on considère dans le produit semi-direct (topologique) $M_2 \times_{\mu_3} N_3$, le sous-groupe

$D = \{(x, \mu_2(x)) \mid x \in M_2\}$ qui est distingué ((car $(N, \nu) \in \mathcal{Y}^3(G, 0)$)). On a alors une cotrivialisation définie par le diagramme exact et commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\quad} & M_2 & \xrightarrow{\quad} & M_3 \rightarrow G \rightarrow 1 \\
 & & \parallel & & \downarrow g_2 & & \parallel \\
 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\tau_1} & (M_2 \times_{\mu_3} N_3)/D & \xrightarrow{\tau_2} & M_3
 \end{array}$$

où $\tau_1(a) = \text{cl}(\mu_1(a), 1_{N_3})$, $\tau_2(\text{cl}(x, y)) = \mu_2(x) f_3(y)^{-1}$ et $g_2(x) = \text{cl}(x, 1)$.

§ 4. L'isomorphisme de $H(G,.)$ et $\mathcal{H}(G,.)$.

(4.1) Soit $f : A \rightarrow B$ un G -morphisme. Si $(M, \mu) \in \mathcal{S}^n(G, A)$ ($n \geq 2$), on note $f^*(M, \mu)$ la suite de $\mathcal{S}^n(G, B)$ obtenue en remplaçant le début de la suite (M, μ) par $0 \rightarrow B \rightarrow B \underset{A}{*} M_2 \rightarrow M_3 \dots$. On obtient ainsi un morphisme $f^* : \mathcal{S}^n(G, A) \rightarrow \mathcal{S}^n(G, B)$, qui a la propriété universelle suivante : tout morphisme $g : \mathcal{S}^n(G, A) \rightarrow \mathcal{S}^n(G, B)$ tel que $g_1 = f$ se factorise de manière unique à travers f^* . La classe de $f^*(M, \mu)$ dans $\mathcal{H}^n(G, B)$ ne dépend que de celle de (M, μ) dans $\mathcal{H}^n(G, A)$; on définit $\mathcal{H}^n(G, f) : \mathcal{H}^n(G, A) \rightarrow \mathcal{H}^n(G, B)$ en faisant correspondre la classe de $f^*(M, \mu)$ à celle de (M, μ) . Il est facile de vérifier que l'on définit ainsi un foncteur covariant additif $\mathcal{H}^n(G,.)$ de $G\text{-}\mathcal{M}td$ dans $\mathbb{Z}\text{-}\mathcal{M}od$.

(4.2) Soit

$$0 \rightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \rightarrow 0$$

une suite exacte dans $G\text{-}\mathcal{M}td$. Pour toute suite (M, μ)

$$0 \rightarrow A'' \xrightarrow{\mu_1} M_2 \rightarrow \dots \rightarrow G \rightarrow 1$$

de $\mathcal{S}^n(G, A'')$, la classe dans $\mathcal{H}^{n+1}(G, A')$ de la suite

$$0 \rightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{\mu_1 \circ g} M_2 \rightarrow \dots \rightarrow G \rightarrow 1.$$

ne dépend que de la classe dans $\mathcal{H}^n(G, A'')$ de (M, μ) , ce qui permet de définir un morphisme $\delta^n : \mathcal{H}^n(G, A'') \rightarrow \mathcal{H}^{n+1}(G, A')$; on vérifie alors que $(\mathcal{H}^n(G, .))_{n \geq 2}$ muni de $(\delta_n)_{n \geq 2}$, est un δ -foncteur (au sens de [3]); on utilise l'équivalence de " (M, μ) est trivialisable" et " $(M, \mu) \sim 0$ ". La vérification est fastidieuse de par sa longueur, mais facile.

(4.3) On pose $\mathcal{H}^0(G, .) = H^0(G, .)$ et $\mathcal{H}^1(G, .) = H^1(G, .)$. On définit ainsi un δ -foncteur $\mathcal{H}(G, .)$. Il est universel ([3]); en effet, la catégorie $G\text{-}\mathcal{M}td$ possède assez d'objets injectifs et, si I en est un, une suite de $\mathcal{S}^n(G, I)$ ($n \geq 3$) est rétractable donc équivalente à 0; on a ainsi $\mathcal{H}^n(G, I) = 0$, pour $n > 0$.

Par suite, $\mathcal{H}(G, .)$ et $H(G, .)$ sont équivalents.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] Y. GERARD, *Cohomologie galoisienne transcendante*, J. of Algebra, 49 (1977), p. 422-440. Cet article est développé dans le travail suivant.
- [2] Y. GERARD, *Sur la cohomologie galoisienne transcendante*. (Thèse Univ. de Lyon-1, 1977).
- [3] A. GROTHENDIECK, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tohoku Math. J., 9 (1957), p. 119-221.
- [4] D.F. HOLT, *An interpretation of the cohomology groups $H^n(G,M)$* , J. of Algebra, 60 (1979). p. 307-320.
- [5] N. YONEDA, *On Ext and exact sequences*, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, (1960), p. 507-576.
