

PIERRE EYMARD

**Transfert des fonctions harmoniques en fonctions propres
de l'opérateur de Laplace-Beltrami**

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1982, fascicule 4B
« Journées d'analyse harmonique », , p. 1-4

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1982__4B_A10_0

© Université de Lyon, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TRANSFERT DES FONCTIONS HARMONIQUES
EN FONCTIONS PROPRES DE L'OPERATEUR DE LAPLACE-BELTRAMI

par Pierre EYMARD

(Université de Nancy-1)

Soient $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| < 1\}$ et $S^{n-1} = \partial B_n = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| = 1\}$. Soit $G_n = SO_0(n,1)$ le groupe des matrices $g = (g_{ij})_{0 \leq i, j < n}$ qui conservent la forme quadratique $-x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$, et telles que $g_{00} \geq 1$ et $\det(g) = 1$. Dans le cas particulier où $n = 2$, on a $B_2 \cong X = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$; on a $S^1 \cong \Gamma = \{|z| = 1\}$; et $G_2 \cong SU(1,1)/\{\pm e\}$, où $G = SU(1,1)$ est le groupe des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}, |a|^2 = |b|^2 = 1$.

Le groupe G_n opère sur B_n , et sur S^{n-1} , par la formule $y = g x$, où

$$y_p = \frac{g_{p0} \frac{1+|x|^2}{2} + g_{p1} x_1 + \dots + g_{pn} x_n}{\frac{1-|x|^2}{2} + g_{00} \frac{1+|x|^2}{2} + g_{01} x_1 + \dots + g_{0n} x_n} \quad (p = 1, 2, \dots, n)$$

si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$. Si $n=2$, cette action correspond à celle de $G = SU(1,1)$ sur X et sur Γ par $g \cdot z = \frac{az+b}{bz+a}$, pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

I. LES DEUX NOYAUX DE POISSON DE LA BOULE B_n .

Soit dv la mesure de masse 1 sur S^{n-1} invariante par les rotations autour de 0. On a la formule, pour $g \in G_n$ et $f \in L^1(S^{n-1}, dv)$,

$$\int_{S^{n-1}} f(g \cdot v) dv = \int_{S^{n-1}} P(ru, v) f(v) dv,$$

où

$$P(ru, v) = \left(\frac{1-r^2}{1+r^2-2ru \cdot v} \right)^{n-1},$$

si $g \circ 0 = ru$, avec $0 \leq r < 1$ et $u \in S^{n-1}$. Le noyau $P : B_n \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ainsi défini est le noyau de Poisson hyperbolique (ou lobstchevskien). Mais on a d'autre part le noyau de Poisson euclidien

$$P_e(ru, v) = \frac{1-r^2}{(1+r^2-2ru \cdot v)^{n/2}},$$

c'est-à-dire celui qui résoud le classique problème de Dirichlet pour les fonctions harmoniques euclidiennes (i.e. telles que $\Delta F \equiv 0$) dans la boule B_n . Si $n=2$, il se trouve par hasard que ces deux noyaux coïncident :

$$P(re^{i\phi}, e^{i\theta}) = P_e(re^{i\phi}, e^{i\theta}) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\phi)}.$$

II. LE THEOREME DE REPRESENTATION INTEGRALE DE HELGASON-MINEMURA.

Dans B_n , l'opérateur de Laplace-Beltrami, invariant par G_n , est

$$D = \frac{(1-r^2)^2}{4} \Delta + \frac{(n-r)}{2} (1-r^2) \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

où $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ est le Laplacien euclidien. Si $n=2$, on a $D = \frac{(1-r^2)^2}{4} \Delta$ et

les fonctions harmoniques euclidiennes et lobatchevskiennes coïncident (car $DF \equiv 0 \Leftrightarrow \Delta F \equiv 0$) ; ceci n'est plus vrai si $n > 2$.

Pour tout nombre complexe μ , soit $\mathcal{E}_\mu(B_n) = \mathcal{E}_{1-\mu}(B_n)$ l'espace de toutes les fonctions propres de D dans B_n , de valeur propre $\mu(\mu-1)(n-1)^2$.

Soit $\mathcal{E}(B_n)$ l'espace de toutes les fonctions harmoniques euclidiennes dans B_n .

Soit $\mathcal{H}'(S^{n-1})$ l'espace de toutes les fonctionnelles analytiques (ou hyperfonctions sur S^{n-1}). Par exemple $\mathcal{H}'(\Gamma) = \{ T = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} f_\ell e^{i\ell\theta}, \text{ où, pour tout } 0 \leq r < 1, \text{ on a } \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |f_\ell| r^{|\ell|} < +\infty \}$.

THEOREME. - Si $\mu(n-1) \notin -\mathbb{N}$, la transformation de Poisson d'exposant μ

$$P^\mu T(ru) = \int_{S^{n-1}} P^\mu(ru, v) dT(v) \quad (0 \leq r \leq 1, u \in S^{n-1})$$

est une bijection de $\mathcal{H}'(S^{n-1})$ sur $\mathcal{E}_\mu(B_n)$.

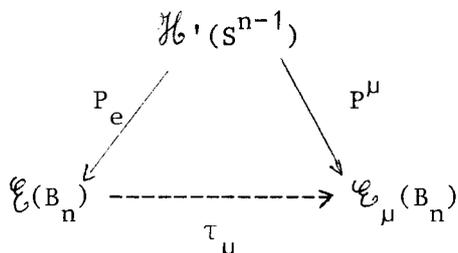
D'autre part, on sait que la transformation de Poisson classique euclidienne

$$P_e T(ru) = \int_{S^{n-1}} P_e(ru, v) dT(v)$$

est une bijection de $\mathcal{H}'(S^{n-1})$ sur $\mathcal{E}(B_n)$.

III. LA FORMULE DU TRANSFERT DES FONCTIONS HARMONIQUES EUCLIDIENNES EN FONCTIONS PROPRES DE D.

Si $\mu(n-1) \notin -\mathbb{N}$, il existe donc formellement une application τ_μ telle que le diagramme



soit commutatif. Proposée par le conférencier pour $n = 2$, la formule suivante a été démontrée par H. Samii pour n quelconque :

THEOREME. - Supposons $0 < \Re \mu < \frac{n}{2(n-1)}$. Alors :

$$\tau_\mu F(ru) = \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(\mu(n-1))\Gamma(n/2-\mu(n-1))} (1-r^2)^{\frac{n-2}{2}} \int_0^1 F(tru) \frac{t(1-r)^2}{(1-t)(1-r^2t)} t^{\mu(n-1)-\frac{n-2}{2}} \frac{dt}{t^{\frac{4-n}{2}}}$$

MOTIVATION. - Les propriétés des fonctions harmoniques euclidiennes sont classiques ou faciles à démontrer. Par la formule du transfert on peut espérer en déduire des

propriétés cachées, ou plus difficiles à démontrer directement, des fonctions propres de D. Nous allons en donner un exemple.

IV. LES INEGALITES DE SAMII. -

Les fonctions sphériques de la boule hyperbolique sont, pour $\mu \in \mathbb{C}$,

$$Z_{\mu}(r) = P^{\mu}(1)(r) = (1-r^2)^{\mu(n-1)} {}_2F_1\left(\mu(n-1) - \frac{n-2}{2}, \mu(n-1); \frac{n}{2}; r^2\right).$$

Si F est une fonction définie dans B_n , pour tout $0 \leq r < 1$, notons F_r la fonction définie sur S^{n-1} par $F_r(u) = F(ru)$. Si F est harmonique euclidienne, on sait que la fonction

$$r \longmapsto \|F_r\|_p = \left(\int_{S^{n-1}} |F(ru)|^p du \right)^{1/p}$$

est croissante pour $r \in [0, 1[$. Par transfert, Samii en déduit :

THEOREME. - Supposons $0 < \mu$ réel $< \frac{n}{2(n-1)}$; p réel ≥ 1 et $0 \leq r < 1$.

$$\text{Alors} \quad \|(\tau_{\mu} F)_r\|_p \leq Z_{\mu}(r) \|F_r\|_p.$$

En particulier :

$$Z_{\mu p}(r) \leq (1-r^2)^{\frac{2-n}{2}} [Z_{\mu}(r)]^p Z_{\frac{pn}{2(n-1)}}(r).$$

BIBLIOGRAPHIE. -

- [1] S. HELGASON, J. Functional Analysis, 17 (1974), p. 328-353 ;
- [2] K. MINEMURA, J. Math. Japan 27 (1975) ;
- [3] H. SAMII, Thèse de 3-ème cycle, Nancy 1982.
