MICHEL MIZONY

Analyse harmonique hyperbolique : représentations et contractions des groupes $SO_o(1,n)$

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1982, fascicule 2A
« Analyse harmonique hyperbolique : représentations et contractions des groupes $SO_o(1,n)$ », , p. 1-27
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1982___2A_A1_0>

Département de mathématiques de Lyon
Préprint septembre 1982.

ANALYSE HARMONIQUE HYPERBOLIQUE : REPRESENTATIONS ET CONTRACTIONS DES GROUPES $SO_\circ(1,n)$.

par Michel MIZONY

RESUME. Nous définissons des représentations isométriques hilbertiennes d'un sous-semi-groupe de $SO_\circ(1,n)$, à partir d'un noyau de Poisson de 2ème espèce, lié aux fonctions de Jacobi de 2ème espèce. Par contraction ces représentations approximent des représentations unitaires irréductibles du groupe des déplacements pseudo-euclidien : $\mathbb{R}^n \rtimes SO_\circ(1,n-1)$. En particulier nous retrouvons une formule du type Mehler-Heine pour les fonctions de Jacobi de 2ème espèce et les fonctions de Hankel et nous montrons que les semi-groupes considérés sont les semi-groupes de causalité globale de l'univers lorsque n = 4.

1°) DECOMPOSITION DU GROUPE DE POINCARE ET DES GROUPES DE DE SITTER.

Soit le groupe de Poincaré $P = \mathbb{R}^4 \rtimes SO_\circ(1,3)$, produit semi-direct du groupe $\mathbb{R}^4$ des translations d'espace-temps et du groupe $SO_\circ(1,3)$ des transformations de Lorentz de l'univers, muni d'une courbure nulle, identifié à l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1+3}$.

Soit le groupe de De Sitter $H_1 = SO_\circ(1,4)$ des changements de référentiels de l'univers, muni d'une courbure négative, identifié à l'hyperboloïde d'équation $x_o^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_4^2 = -1$ dans $\mathbb{R}^{1+4}$.

Et soit le groupe de De Sitter $H_2 = SO_\circ(2,3)$ des transformations de l'univers, muni d'une courbure positive, univers identifié à l'hyperboloïde d'équation $x_{-1}^2+x_o^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2 = 1$ dans $\mathbb{R}^{2+3}$.

NOTATIONS 1.1. - Identifions $SO_o(1,3)$, $SO_o(2,3)$, $SO_o(1,4)$ etc..., à des sous-groupes du groupe conforme $SO_o(2,4)$ en mettant des indices.

$SO_o(2,4)$ agit sur $\mathbb{R}^{2+4} = \{ x = (x_{-1},x_o,x_1,x_2,x_3,x_4)/x_\alpha \in R \ , \ \alpha = -1,0,\ldots,4\}$

$\mathbb{R}^{1+4} = \{x \in \mathbb{R}^{2+4}/x_{-1} = 0 \}$ et $\mathbb{R}^{2+3} = \{x \in \mathbb{R}^{2+4}/x_4 = 0\}$.

Par convention, $SO_o(1,2)_{0,1,2}$ est le sous-groupe de $SO_o(2,4)$ agissant sur les coordonnées d'indices 0, 1 et 2 ; $SO_o(1,1)_{-1,1}$ est le sous-groupe de $SO_o(2,4)$ ou de $SO_o(1,3)_{-1,1,2,3}$ agissant sur les coordonnées d'indices -1 et 1 ; etc... . Parfois nous mettrons en indice, les indices des coordonnées sur lesquels le sous-groupe n'agit pas par exemple $H_1 = SO_o(1,4)_{-1}$ ou encore $H_2 = SO_o(2,3)_4$. Enfin le groupe des transformations de Lorentz sera noté $L = SO_o(1,3)_{0,1,2,3}$.

Dans $SO_o(p,q)$ nous utiliserons les mêmes conventions de notations.

LEMME 1.2. - *Soit* $q \geqslant 1$, *nous avons les décompositions suivantes de* $SO_o(2,q)$:

$$SO_o(2,q) = SO(2)_{-1,0} \cdot SO_o(1,q)_{-1} \cdot SO_o(1,q)_0$$
$$= SO(2)_{-1,0} \cdot \prod_{j=1}^{q} SO_o(1,1)_{0,j} \cdot SO_o(1,q)_0$$

(C'est une généralisation de la décomposition du type Cartan-Sekiguchi de $SO_o(2,1)_{-1,0,1} = SO(2)_{-1,0}\ SO_o(1,1)_{-1,1}\ SO_o(1,1)_{0,1}$). Nous appellerons décomposition de Cartan-Sekiguchi de $SO_o(p,q)$, $p \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$, la décomposition [DI''] donnée dans Sekiguchi [7], nous appellerons décomposition d'Oshima-Iwasawa la décomposition [DI'] et décomposition de Bruhat la décomposition [DI'''] donnée dans [7]. Nous préciserons ces décompositions au fur et à mesure de leur utilisation.

DECOMPOSITION DE CARTAN-SEKIGUCHI . Soit $G = SO_o(p,q)$, $H = SO_o(p,q-1)_q$, $K = SO(p) \times SO(q)$, $A_o = SO_o(1,1)_{-p+1,q}$ et W le groupe de Weyl associé à H ; c'est le quotient du normalisateur de A_o dans H par le centralisateur de A_o dans H : alors $G = HA_oK = HWA_{o,+}K$.

PREUVE DU LEMME.

$$SO_\circ(2,q) = SO(2)_{-1,o}\times SO(q).SO_\circ(1,1)_{o,1}.SO_\circ(1,q)_o$$ décomposition de Cartan-Sekiguchi

$$= SO(2)_{-1,o}\times SO(q).SO_\circ(1,1)_{o,1} SO(q)\ SO_\circ(1,q)_o$$

$$= SO(2)_{-1,o}.SO_\circ(1,q)_{-1}.SO_\circ(1,q)_o$$ décomposition de Cartan

$$= SO(2)_{-1,o} SO_\circ(1,q-1)_{-1,q} SO_\circ(1,1)_{o,q}\ SO(q)\ SO_\circ(1,q)_o$$ décomposition de Cartan-Sekiguchi.

$$= SO(2)_{-1,0}\ SO_\circ(1,q-2)_{-1,q-1,q}\ SO_\circ(1,1)_{o,q-1}\ SO_\circ(q-1)_q\ SO_\circ(1,1)_{o,q}\ SO_\circ(1,q)_o^o$$

par décomposition de Cartan-Sekiguchi de $SO_\circ(1,q-1)_{-1,q}$ etc...

$$= SO(2)_{-1,0}\ .\prod_{j=1}^{q} SO_\circ(1,1)_{o,j}\ .\ SO_\circ(1,q)_o$$ c.q.f.d.

TABLEAU DE DECOMPOSITION 1.3. DES GROUPES DE TRANSFORMATIONS.

groupe	espace-temps	Lorentz	nature de la décomposition	Univers
$H_1 = SO_\circ(1,4)_{-1}$	$= SO(4).SO_\circ(1,1)_{o,4}$	$\cdot L$	Cartan-Sekiguchi	U_- espace compact, temps non compact
P	$= R^{1+3}$	$.L$	produit semi-direct	$U_o = R^{1+3}$
$H_2 = SO_\circ(2,3)_4$	$= SO(2)_{1,0}.\prod_{i=1}^{3} SO_\circ(1,1)_{-1,i}$	$.L$	Lemme 1.2	$U_\mp$ temps compact, espace non compact.

Soit C le cône isotrope dans $\mathbb{R}^{2+4}$: $C=\{x\in R^{2+4}/x_{-1}^2+x_o^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_4^2=0\}$

alors on a $U_- = C\cap\{x/x_{-1}=1\}$, $U_o = C\cap\{x/x_{-1}+x_4=1\}$ et $U_+ = C\cap\{x/x_4=1\}$.

2°) DES DECOMPOSITIONS DU GROUPE CONFORME $SO_\circ(2,4)$.

Soit $SO_\circ(2,4) = KAN$ la décomposition d'Iwasawa du groupe conforme, avec $K = SO(2)_{-1,o} \times SO(4)$, $A = A_o . A_1$ où $A_o = SO_\circ(1,1)_{-1,4}$ et $A_1 = SO_\circ(1,1)_{o,3}$, et N est un groupe de Lie nilpotent de dimension 6.

Donnons les deux décompositions de Cartan-Sekiguchi relative à H_1 et H_2 en posant :

$$W = \left\{ id , \begin{pmatrix} -1 & & & & & 0 \\ & -1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & -1 & \\ 0 & & & & & -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ et } A_{o,+} = \left\{ a_\lambda = \begin{pmatrix} ch_\lambda & & & & & sh_\lambda \\ & 1 & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & 1 & \\ sh_\lambda & & & & & ch_\lambda \end{pmatrix} / \lambda \geq o \right\}$$

$$SO_\circ(2,4) = KA_{o,+}\, W\, H_1 = K\, A_o\, H_1$$

$$SO_\circ(2,4) = KA_{o,+}\, W\, H_2 = K\, A_o\, H_2 \quad .$$

Le centralisateur de A_o dans H_1 (et dans H_2) est le groupe de Lorentz L.

Précisons les deux décompositions d'Iwasawa-Oshima du groupe conforme, relativement aux deux sous-groupes de De Sitter H_1 et H_2

$SO_\circ(2,4) = \overline{N_o A_o W H_1} = \overline{N_o A_o W H_2}$, plus précisément la partie $N_o A_o W H_1$ (respectivement $N_o A_o W H_2$) est un ouvert partout dense dans $SO_\circ(2,4)$ et il y a unicité de la décomposition.

Précisons que $N = N_o N_1$, avec $N_1 \simeq \mathbb{R}^2$ provenant de la décomposition d'Iwasawa de $L = SO(3)_{1,2,3}\, SO_\circ(1,1)_{o,3}\, N_1$ et que N_o est défini comme suit :

$$N_o = \left\{ n_x = \begin{pmatrix} 1 - \frac{|x|^2}{2} & x^* & \frac{|x|^2}{2} \\ x & \mathbf{id} & -x \\ -\frac{|x|^2}{2} & x^* & 1 + \frac{|x|^2}{2} \end{pmatrix} \quad / \quad \text{avec } x = \begin{pmatrix} x_o \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \right\}, \text{ où}$$

$|x|^2 = x_o^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ et $x^* = (x_o \; - x_1 \; -x_2 \; -x_3)$.

On a, pour $X \in L$ et $n_x \in \mathbb{N}_o$, $X n_x X^{-1} = n_{X.x}$ où $X.x$ est l'action canonique de L sur R^4. On identifie ainsi le groupe de Poincaré P ou sous-groupe $L.N_o$ de $SO_\circ(2,4)$.

D'autre part $L.A_o.N_o$ est un parabolique maximal de $SO_\circ(2,4)$ qui contient le parabolique minimal MAN, (où $M = SO(2)_{1,2}$ est le centralisateur de A dans K). On obtient donc :

$$SO_\circ(2,4) = KLA_oN_o = KA_oP$$

est le sous-groupe A_o qui normalise N_o , apparait comme le groupe des dilatations de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1+3}$.

Enfin nous avons une décomposition du type Bruhat :

$SO_\circ(2,4) = \overline{N_o^- WLA_oN_o}$ avec unicité d'écriture, où N_o^- se déduit de N_o par l'involution de Cartan θ de $SO_\circ(2,4)$.

Résumons ces décompositions sous la forme du tableau suivant :

TABLEAU DE DECOMPOSITION 2.1 du groupe conforme.

	nature de la décomposition
$SO_\circ(2,4) = SO(2)_{-1,o}\ SO(4)\ .A_o\ .H_1$	Cartan-Sekiguchi
$= SO(2)_{-1,o} SO(4)\ .A_o\ .H_2$	Cartan-Sekiguchi
$= SO(2)_{-1,o}\ SO(4)\ .A_o\ .P$	Iwasawa (modifiée)
$SO_\circ(2,4) \hookleftarrow N_o\ .\ A_o\ .\ W.H_1$	Iwasawa-Oshima
$\hookleftarrow N_o\ .\ A_o\ .\ W.H_2$	Iwasawa-Oshima
$\hookleftarrow N_o\ .\ A_o\ .\ W.P$	Bruhat

Remarque; Dans les trois premières décompositions, pour une dilatation non triviale, il y a unicité d'écriture à $SO(3)_{1,2,3}$ près.

Dans les trois dernières décompositions, $\hookleftarrow$ indique l'injection canonique sur un ouvert partout dense.

3°) CONES DU FUTUR ET SEMI-GROUPES DE CAUSALITE GLOBALE.

Soit U l'un des trois univers $U_\circ$, U_- et U_+ , considéré comme une partie du cône isotrope C de $\mathbb{R}^{2+4}$. Fixons une origine O de cet univers U .

Nous appellerons cône ouvert du futur de l'univers U, relativement point O, l'encemble C(O) des points de U, image de l'origine par le semi-groupe engendré par les translations strictement positives du temps et par les transformations de Lorentz, semi-groupe dans le groupe G des transformations de l'univers U. (G = P, H_1 ou H_2). Notons G_+ ce sous-semi-groupe que nous appellerons semi-groupe de causalité globale.

Pour $U = U_\circ$ prenons pour origine le point $O = (1/2,0,0,0,0,1/2) \in U_\circ$.
Alors $C(O) = C_\circ(O) = \{x \in C / x_{-1}+x_4 = 1,\ x_o > 0$ et $x_o^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2 > 0\}$

$$= \{(\frac{1-\lambda^2}{2}, x_o, x_1, x_2, x_3, \frac{1+\lambda^2}{2}) \;/\; x_o^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = \lambda^2 > o \text{ et } x_o > o\},$$

et le sous-semi-groupe ouvert $G_+ = P_+$ de Poincaré est $P_+ = L.N_o^{+*}$, où $N_o^{+,*} = \{n_x \in N_o \;/\; x_o^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2 > 0 \quad \text{et} \quad x_o > 0\}$, c'est le cône ouvert des vecteurs du genre temps de l'espace de Minkowski.

Pour $U = U_-$, prenons pour origine le point $O = (1,0,0,0,0,1) \in C$.
Alors $C(O) = C_-(O) = \{x \in C/x_{-1} = 1,\ x_4 > 1,\ x_o > 0$ et $x_o^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2 > 0\}$

$$= \{(1,x_o,x_1,x_2,x_3, \sqrt{1+\lambda^2})/x_o > 0,\ x_o^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2 = \lambda^2 > 0\}$$

et le sous-semi-groupe ouvert $G_+ = H_{1,+}$ est égal à $H_{1,+} = L\, B_+^* \,L$ où $B = SO_\circ(1,4)_{o,4}$ nous étudierons ce semi-groupe dans les paragraphes suivants.

Par contre pour $U = U_+$, on a $C(O) = U_+$ et $G_+ = H_{2,+} = H_2$, ce qui n'est pas étonnant du fait de la compacité du sous-groupe des translations de temps.

Considérons maintenant $\tilde{C}_-(0) = A^*_{o,+}(C_-(0))$, (respectivement $\tilde{C}_o(0)=A^*_{o,+}(C_o(0))$, la partie du cône isotrope C obtenue par dilatations strictement positives de $C_-(0)$, (resp. $C_o(0)$) ; on a :

$$\tilde{C}_-(0) = \{x \in C/x_{-1} = e^p > 1 \ , \ x_o>0, \ x_4>1 \quad \text{et} \quad x_o^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2 = \lambda^2 > 0\}$$

$$\tilde{C}_o(0) = \{x \in C/x_{-1}+x_4 = e^p > 1, \ x_o > 0 \ \text{et} \ x_o^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2 = \lambda^2 > 0\}$$

Alors le sous-semi-groupe $SO_o(2,4)^+$ (resp. $SO_o(2,4)^\circ$) de $SO_o(2,4)$ formés des éléments laissant stable $\tilde{C}_-(0)$ (resp. $\tilde{C}_o(0)$) est un sous-semi-groupe fermé de dimension 15 de $SO_o(2,4)$ égal à $SO_o(2,4)^+ = \overline{H_{1,+}A^*_{o,+}H_{1,+}}$, (resp. $SO_o(2,4)^\circ = \overline{\theta(LN^*_{o,+})A^*_{o,+}\,LN^*_{o,+}}$ où θ est l'involution de Cartan)

Nous appellerons ce semi-groupe $SO_o(2,4)^+$ (resp. $SO_o(2,4)^\circ$) le semi-groupe des transformations conformes et causales relativement à un univers de courbure négative (resp. nulle).

4°) NOTATIONS ET SOUS-SEMI-GROUPE G_+ DU GROUPE $G = SO_o(1,n)$.

Soit $G = SO_o(1,n)_{o,1,\dots,n}$, $K = SO(n)$, $A = SO_o(1,1)_{o,n}$ et $H = SO_o(1,n-1)_n$. Soit $M = SO(n-1)_n$ le centralisateur de A dans H (et dans K). Soit $M' = SO(n-2)_{n-1,n}$. G agit canoniquement sur $\mathbb{R}^{1+n}$, muni de la pseudo métrique (1,n) : $x = (x_o,x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{1+n}$ $||x||=||x||_{(1,n)} = x_o^2-x_1^2-\dots-x_n^2$.
Soit C le cône isotrope de $\mathbb{R}^{1+n}$ et Ξ les raies de ce cône. Soit $\xi_o = e_o+e_n \in C$ (où $e_o,e_1,\dots,e_n$ est la base canonique de R^{1+n}) et soit $P = MAN$ le stabilisateur de la raie $R\xi_o \in \Xi$.
Soit $G = KAN$ la décomposition d'Iwasawa de G, $G = \overline{HWAN}$ celle d'Oshima-Iwasawa, $G = HAK$ celle de Cartan-Sékiguchi et soit $X = G/K$ l'espace riemannien symétrique.

(4.1) Soit $\Gamma = G/P \simeq K/M$ la frontière de X. Γ est isomorphe à Ξ, car P stabilise $\mathbb{R}\xi_o$. identifions Γ à une partie de G par une section σ et à une partie de C (qui paramètre Ξ) par une application s.

Soit $K = M\, SO(2)^{+}_{n-1,n}\, M$ i.e. pour $k \in K$ $k = m_1 k_\theta m_2$ avec $0 \leq \theta \leq \pi$ pour

$$k_\theta = \begin{pmatrix} Id_{n-1} & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$ et m_1 et $m_2 \in M$. Posons encore k_{θ_i} l'élément générique de $SO(2)_{i,n-1}$, $i=1,\dots,n-2$.

Soit $\gamma \in \Gamma$, on a $\gamma = \dot{k} \in K/M$ avec $\dot{k} = (\dot{m}, k_\theta)$ où $\dot{m} \in M/M'$ et $k_\theta \in SO(2)^{+}_{n-1,n}$, posons $\sigma_o(\dot{m}) = k_{\theta_{n-2}} * k_{\theta_{n-3}} \dots k_{\theta_1} \in M$ où σ_o est la section canonique de M/M' dans M et posons :

$$\sigma(\gamma) = \sigma(\dot{k}) = \sigma(\dot{m}, k_\theta) = \sigma_o(\dot{m}) k_\theta \qquad \text{pour} \qquad o < \theta < \pi$$

et $\sigma(\gamma) = id$ pour $\theta = o$ et $\sigma(\gamma) = k_\pi$ pour $\theta = \pi$. Posons aussi $s(\gamma) = \sigma(\gamma)(\xi_o) \in C$. Ainsi $s(\dot{m},k) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \cos \end{pmatrix} \in C$. Soit $d\gamma$ la mesure image de la mesure dk sur K.

En tant qu'espace mesuré on a $(\Gamma, d\gamma) = \left(M/M' \times [o,\pi],\ d\dot{m}\ \dfrac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{n-1}{2})} \sin^{n-1}\theta\, d\theta\right)$

où $d\dot{m}$ est la mesure image de la mesure de Haar normalisée sur M.

(4.2) Soit $\Gamma_+ = HAN/P = H/M$; c'est un ouvert de Γ (d'après la décomposition d'Oshima-Iwasawa) ; soit $C_+ = HA(e_o - e_n)$ et Ξ_+ l'ouvert de Ξ formé des raies de C_+. Γ_+ est isomorphe à Ξ_+.

Identifions Γ_+ à une partie de G par une section σ_+ et à une partie de C_+ (qui paramètre Ξ_+) par une application s_+, en utilisant la décomposition de Cartan de H par rapport à M : $H = M\, SO_o(1,1)_{1,n-1} M$.

Soit $\gamma = \dot{h} = (\dot{m}, h_\psi) \in \Gamma_+$ avec $\dot{m} \in M/M'$ et $h_\psi \in SO_o(1,1)_{1,n-1}$, $\psi \geq o$

posons $\sigma_+(\gamma) = \sigma_+(\dot{m}, h_\psi) = \sigma_o(\dot{m}) h_\psi \in G$ pour $\psi > o$ et $\sigma_+(\gamma_e) = e$, et posons $s_+(\gamma) = \sigma_+(\gamma)\xi_1$ avec $\xi_1 = e_o - e_n \in C$.

Ainsi $s_+(\dot{m}, h_\psi)$ est de la forme $s_+(h_\psi) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \in C$.

Soit $d_+\gamma$ la mesure image de la mesure dh sur H. En tant qu'espace mesuré on a $(\Gamma_+, d_+\gamma) = (M/M' \times \mathbb{R}_+,\ d\dot{m}\ \operatorname{sh}\psi^{n-2}\, d\psi)$.

Soit G_+ le sous-semi-groupe de G, défini par $G_+ = \{g \in G / g^{-1}(C_+) \subset C_+\}$ il est engendré par H et A_+ c'est-à-dire $G_+ = HA_+H$. Et notons G_+° le sous-semi-groupe ouvert HA_+^*H de G.

5°) NOYAUX DE POISSON DE 1ère ET 2ème ESPECE ; REPRESENTATIONS DE G ET DE G_+.

G agit canoniquement sur $\Gamma = G/P$ par $(g,\gamma) \mapsto g.\gamma = \widehat{g^{-1}\sigma(\gamma)}$; on peut encore écrire cette action de la manière suivante : $s(g.\gamma) \in \mathbb{R}\, g^{-1}(s(\gamma)) \in \Xi$.
Posons pour tout $g \in G$ et $\gamma \in \Gamma$: $P(g,\gamma) = \frac{dg.\gamma}{d\gamma}$; c'est le noyau de Poisson (que nous appellerons de 1ère espèce).

De manière semblable définissons une action du semi-groupe G_+ sur la "demi-frontière" Γ_+ : $(g,\gamma) \to g.\gamma$ où $g.\gamma$ est défini par $s_+(g.\gamma) \in \mathbb{R}\, g^{-1}(s_+(\gamma)) \in \Xi_+$. Du fait de la définition de G_+ cette action est parfaitement définie. Posons alors pour tout $g \in G_+$ et $\gamma \in \Gamma_+$:
$Q(g,\gamma) = \frac{d_+(g.\gamma)}{d_+\gamma}$; nous appellerons ce noyau le noyau de Poisson de deuxième espèce. Ces noyaux vérifient les propriétés suivantes :

i) $\forall g_1,g_2 \in G$, $\forall \gamma \in \Gamma$	i') $\forall g_1,g_2 \in G_+$ et $\forall \gamma \in \Gamma_+$
$P(g_1g_2,\gamma) = P(g_1,\gamma)P(g_2,g_1.\gamma)$	$Q(g_1g_2,\gamma) = Q(g_1,\gamma)Q(g_2,g_1.\gamma)$
ii) $\forall k \in K$, $\forall \gamma \in \Gamma$	ii') $\forall h \in H$ et $\forall \gamma \in \Gamma_+$
$P(k,\gamma) = 1$	$Q(h,\gamma) = 1$
iii) $\forall a_t \in A$, $\forall (\dot{m},k_\theta) \in \Gamma$	iii') $\forall a_t \in A^+$ et $\forall (\dot{m},h_\psi) \in \Gamma_+$
$P(a_t,(\dot{m},k_\theta)) = (\mathrm{ch}t - \mathrm{sh}t \cos\theta)^{-(n-1)}$	$Q(a_t,(\dot{m},h_\psi)) = (\mathrm{ch}t + \mathrm{sh}t\, \mathrm{ch}\psi)^{-(n-1)}$

Du fait des formules de 2 cocycles i) et i') ci-dessus nous pouvons définir des représentations de G et de G_+ dans des espaces de fonctions sur Γ et Γ_+.

Notons $\rho = \frac{n-1}{2}$ et pour $\lambda \in \mathbb{C}$, pour f fonction continue sur Γ, $g \in G$ posons $\Pi_{\rho-i\lambda}(g)\, f(\gamma) = P(g,\gamma)^{1/2 - \frac{i\lambda}{n-1}}\, f(g.\gamma)$

et pour $f \in L^2(\Gamma_+, d\gamma)$ posons $\tilde{\Pi}_{\rho-i\lambda}(g) f(\gamma) = Q(g,\gamma)^{1/2\, \frac{i\lambda}{n-1}}\, f(g.\gamma)$ pour $g \in G_+$

PROPOSITION 5.1.- *i) Pour* $\lambda \in \mathbb{R}$ $\Pi_{\rho-i\lambda}$ *se prolonge en une représentation unitaire de* G*, (c'est la première série principale), dans* $L^2(\Gamma, d\gamma)$

ii) Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ $\tilde{\Pi}_{\rho-i\lambda}$ *est une représentation continue du semi-groupe* G_+ *dans l'espace hilbertien* $L^2(\Gamma_+, d_+\gamma)$ *; de plus pour* $\mathrm{Im}(\lambda) \geq 0$ *ces représentations sont contractantes et pour* $\mathrm{Im}(\lambda) = 0$*, elles sont isométriques (non unitaires).*

- Pour f continue sur Γ on a :

$$||\Pi_{\rho-i\lambda}(g)f||_2^2 = \int_\Gamma |P(g,\gamma)^{1+2\frac{\mathrm{Im}(\lambda)}{n-1}}|\, f(g.\gamma)|^2 d = \int_\Gamma P(g,\gamma)^{\frac{2\mathrm{Im}(\lambda)}{n-1}}\, |f(g.\gamma)|^2 dg.\gamma$$

donc pour λ réel $||\Pi_{\rho-i\lambda}(g)f||_2 = ||f||_2$.

- Pour $f \in L^2(\Gamma_+, d_+\gamma)$

$$||\tilde{\Pi}_{\rho-i\lambda}(g)f||_2^2 = \int_{\Gamma_+} |Q(g,\gamma)|^{\frac{2\ \mathrm{Im}(\lambda)}{n-1}}\, |f(g.\gamma)|^2 d_+g.\gamma \qquad \text{pour tout } g \in G_+$$

or g est de la forme $h_1\, a_t\, h_2$ avec $t \geq 0$ et on a d'après i') , ii') et iii') les inégalités : $(\mathrm{ch}t\ \mathrm{ch}(\psi-\psi_1))^{-2\rho} \leq |Q(h_1\, a_t\, h_2, \gamma)| \leq (\mathrm{ch}t)^{-2\rho}$ où $\gamma = (\dot{m}, h_\psi)$ et $h_1 = m_1\, h_{\psi_1}\, m'_1$, donc $\tilde{\Pi}_{\rho-i\lambda}(g)f \in L^2(\Gamma_+, d_+\gamma)$ et en particulier pour $\mathrm{Im}(\lambda) \geq 0$ on a $||\tilde{\Pi}_{\rho-i\lambda}(h_1\, a_t\, h_2)f||_2 \leq (\mathrm{ch}t)^{-2\,\mathrm{Im}(\lambda)}||\, f||_2 \leq ||f||_2$.

- Enfin d'après 5°) i) et i') on a $\Pi_{\rho-i\lambda}(g_1g_2) = \Pi_{\rho-i\lambda}(g_1)\Pi_{\rho-i\lambda}(g_2)$ et $\tilde{\Pi}_{\rho-i\lambda}(g'_1g'_2) = \tilde{\Pi}_{\rho-i\lambda}(g'_1)\, \tilde{\Pi}_{\rho-i\lambda}(g'_2)$ pour $g_1, g_2 \in G$ et $g'_1, g'_2 \in G_+$.

c.q.f.d.

REMARQUES. - 5.2.

i) pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Pi_{\rho-i\lambda}/K$ est la représentation quasi-régulière de K par rapport à M et pour $\lambda \in \mathbb{C}$ $\tilde{\Pi}_{\rho-i\lambda}/H$ est la représentation quasi-régulière de **H** par rapport à M.

ii) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Pi_{\rho-i\lambda}/G_+$ est une représentation unitaire du semi-groupe G_+ et $\tilde{\Pi}_{\rho-i\lambda}$ est une représentation isométrique. Rapport entre $\Pi_{\rho-i\lambda}/G_+$ et $\tilde{\Pi}_{\rho-i\lambda}$?

6°) RAPPORT ENTRE LES REPRESENTATIONS HILBERTIENNES $\Pi_{\rho-i\lambda}$ et $\tilde{\Pi}_{\rho-i\lambda}$ sur G_+.

PROPOSITION 6.1. - *i) La restriction au sous-semi-groupe* G_+ *de* G *de la représentation unitaire* $\Pi_{\rho-i\lambda}$ *de* G, *contient une sous représentation isométrique équivalente à la représentation* $\tilde{\Pi}_{\rho-i\lambda}$ *de* G_+.

ii) En conséquence la restriction $\Pi_{\rho-i\lambda}$ *au sous-groupe* H *de* G *est la somme de deux représentations de* H *équivalentes à la quasi-régulière de* H *par rapport à* M. *(ce qui est un résultat bien connu).*

Pour montrer cette proposition, donnons une autre réalisation de $\Pi_{\rho-i\lambda}$.

Soit $W = \{id, k_\pi\}$ le groupe de Weyl de G, alors $W \times \Gamma_+$ est un ouvert partout dense dans Γ par l'identification T :

$$(\omega,\dot{m},h_\psi) \mapsto T(\omega,\dot{m},h_\psi) = (\dot{m},k_{\mathrm{Arcos}\,\frac{\varepsilon}{\mathrm{ch}\psi}})$$
$$W \times \Gamma_+ \mapsto \Gamma$$

où $\varepsilon = 1$ si $\omega = id$ et $\varepsilon = -1$ si $\omega = k_\pi$.

Appelons encore $d_+\gamma$ la mesure produit de la mesure de Haar sur W et $d_+\gamma$ sur Γ_+. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, et f $d_+\gamma$ presque partout définie sur $W \times \Gamma_+$ posons : $E_\lambda(f)$ fonction sur Γ définie par $E_\lambda(f)(\dot{m},k_\theta) = (\cos\theta)^{-\rho+i\lambda} \times f(\omega(\theta),\dot{m},h_{\mathrm{Argch}\left|\frac{1}{\cos\theta}\right|})$ avec $\omega(\theta) = id$ si $\cos\theta < o$ et $\omega(\theta) = k_\pi$ si $\cos\theta > 0$.

On obtient alors :

LEMME 6.2. - *Pour* $\lambda \in \mathbb{R}$ *, alors* E_λ *est un isomorphisme isométrique de* $L^2(W\times\Gamma_+,d_+\gamma)$ *sur* $L^2(\Gamma,d\gamma)$

E_λ^{-1} est défini pour $f \in L^2(\Gamma,d\gamma)$ par

$$E_\lambda^{-1}(f)\ (\omega,\dot{m},h_\psi) = \varepsilon(\omega)(\mathrm{ch}\psi)^{-\rho+i\lambda}\ f(\dot{m},k_{\mathrm{Arcos}\ \frac{\varepsilon(\omega)}{\mathrm{ch}\psi}})\ .$$

Posons $\sigma_\lambda(g) = E_\lambda^{-1} \circ \Pi_{\rho-i\lambda}(g) \circ E_\lambda$ pour tout $g \in G$.

La représentation σ_λ de G (équivalente à $\Pi_{\rho-i\lambda}$) s'écrit pour f $f \in L^2(W\times\Gamma_+,d_+\gamma)$, $\lambda\in\mathbb{R}$ et $g \in G$.

$$\sigma_\lambda(g)f(\omega,\dot{m},h\psi) = (\varepsilon(\omega)\mathrm{ch}\psi)^{-\rho+i\lambda}\ P(g,(\dot{m},k_{\mathrm{Arcos}\ \frac{\varepsilon(\omega)}{\mathrm{ch}\psi}})^{1/2-\frac{i\lambda}{n-1}} \times$$

$$\times(\cos[(\mathrm{Arcos}\ \frac{\varepsilon(\omega)}{\mathrm{ch}\psi})(g)])^{-\rho+i\lambda} f(\omega[(\mathrm{Arcos}\frac{\varepsilon(\omega)}{\mathrm{ch}\psi})(g)],\dot{m}(g),h_{\mathrm{Argch}\left|\frac{1}{\cos[\mathrm{Arcos}\frac{\varepsilon(\omega)}{\mathrm{ch}\psi}](g)}\right|})\ ;$$

où par convention on note $g.(\dot{m},k_\theta) = (\dot{m}(g),k_{\theta(g)})$ pour $g \in G$, notons également $g\ .\ (\dot{m},h_\psi) = (\dot{m}(g),h_{\psi(g)})$ pour $g \in G_+$; en particulier pour $g = a_t$ avec $t>0$

on a : $\mathrm{ch}\psi(t) = \dfrac{\mathrm{sht}+\mathrm{cht}\,\mathrm{ch}\psi}{\mathrm{cht}+\mathrm{sht}\,\mathrm{ch}\psi}$.

6.3. <u>Calcul de $\sigma_\lambda(a_t)$,</u> lorsque $t>0$ et $\omega = k_\pi$.

Par un calcul simple on obtient : $\cos(\mathrm{Arcos}\ \frac{\varepsilon(\omega)}{\mathrm{ch}\psi})(a_t) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}\psi(t)}$

et $$P(a_t,(\dot{m},k_{\mathrm{Arcos}\frac{-1}{\mathrm{ch}\psi}}))^{1/2-\frac{i\lambda}{n-1}} = \frac{(\mathrm{ch}\psi)^{\rho-i\lambda}}{(\mathrm{sht}+\mathrm{cht}\,\mathrm{ch}\psi)^{\rho-i\lambda}}\ ,$$

donc $$\sigma_\lambda(a_t)\ f(k_\pi,\dot{m},h_\psi) = (\mathrm{sht}+\mathrm{cht}\,\mathrm{ch}\psi)^{-\rho+i\lambda}(-\mathrm{ch}\psi(t))^{\rho-i\lambda}f(id,\dot{m},h_{\psi(t)})$$

$$= Q(a_t,(\dot{m},h_\psi))^{1/2+\frac{i\lambda}{n-1}}\ f(id,\dot{m},h_{\psi(t)})$$

6.4. Calcul de $\sigma_\lambda(h_\phi)$ pour $h_\phi \in SO_\circ(1,1)_{0,n-1} \subset H$.

On a : $h_\phi.(\dot{m},k_\theta) = (\dot{m}(\phi),k_{\theta(\phi)})$ avec $\cos\theta(\phi) = \dfrac{\cos\theta}{ch\phi - sh\phi\sin\theta}$ et

$$\cos(\mathrm{Arccos}\frac{\varepsilon(\omega)}{ch\psi})(h_\phi) = \frac{\frac{\varepsilon(\omega)}{ch\psi}}{ch\phi - sh\phi th\psi} = \frac{\varepsilon(\omega)}{ch(\psi-\phi)} .$$

Calculons $P(h_\phi,\dot{m},k_{\mathrm{Arcos}\frac{\varepsilon(\omega)}{ch\,\psi}}))$ en utilisant le fait que dans G, $h_\phi = k_{-\frac{\Pi}{2}}\, a_\phi\, k_{\frac{\Pi}{2}}$.

Pour $\gamma \in \Gamma$ $P(h_\phi,\gamma) = P(a_\phi, k_{-\frac{\Pi}{2}}.\gamma)$ et en particulier pour $\gamma = (\dot{m},k_\theta)$ avec

$\frac{\Pi}{2} \leq \theta \leq \Pi$, $P(h_\phi,\dot{m},k_\theta)) = P(a_\phi, \dot{m}(\frac{\Pi}{2}),k_{\theta - \frac{\Pi}{2}})) = (ch\phi - sh\phi\sin\theta)^{-(n-1)}$

donc pour $\omega = k_\Pi$, $P(h_\phi,\dot{m},k_{\mathrm{Arcos}\frac{-1}{ch\psi}})) = (ch\phi - sh\phi th\psi)^{-(n-1)}$ et ainsi

$$\sigma_\lambda(h_\phi)\, f(k_\Pi,\dot{m},h_\psi) = (-ch\psi)^{-\rho+i\lambda}(-ch(\psi-\phi))^{\rho-i\lambda} \times$$

$$\times\, (ch\phi - sh\phi th\psi)^{\rho-i\lambda} f(\omega(\mathrm{Arc}\cos\frac{-1}{ch(\psi-\phi)}) , \dot{m}(h_\phi),h_{\psi-\phi})$$ c'est-à-dire :

$$\sigma_\lambda(h_\phi)\, f(k_\Pi, \dot{m},h_\psi) = f(id,\dot{m}(h_\phi),h_{\psi-\phi})$$

6.5 . Identifions l'espace $L^2(\Gamma_+,d_+\gamma)$ et l'espace des fonctions $f \in L^2(W\times\Gamma_+,d_+\gamma)$ telles que $f(k_\Pi,\gamma) = f(id,\gamma)$, au vu de $\sigma_\lambda(a_+)$ et de $\sigma_\lambda(h_\phi)$, 6.3 et 6.4 permettent de conclure:pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sigma_\lambda/G_+ = \tilde{\Pi}_{\rho-i\lambda}$, nous avons donc démontré la proposition 6.1 i) ; pour montrer ii) considérons la restriction de σ_λ à H agissant d'une part dans le sous-espace des fonctions $f \in L^2(W\times\Gamma_+,d_+\gamma)$ telles que $f(k_\Pi,\gamma) = f(id,\gamma)$ et d'autre part dans le sous-espace supplémentaire des fonctions $f \in L^2(W\times\Gamma_+,d_+\gamma)$ telles que $f(k_\Pi,\gamma) = -f(id,\gamma)$, ces deux restrictions sont équivalentes à $\Pi_{\rho-i\lambda/H}$ qui est la quasi-régulière de H par rapport à M.

c.q.f.d.

CONCLUSION 6.6. - La proposition 6.1 signifie que les représentations de la première série principale de $G = SO_\circ(1,n)$, restreinte au sous-semi-groupe G_+ ne sont pas irréductibles. Un résultat identique s'obtient aisément en considérant d'une part les représentations des autres séries principales $\Pi_{\tau,\rho-i\lambda}$ à valeurs dans $L^2(\Gamma,H_\tau)$ où (τ,H_τ) paramètre les représentations unitaires irréductibles de M, et en construisant d'autre part les représentations hilbertiennes contractantes $\tilde{\Pi}_{\tau,\rho-i\lambda}$ ($\mathrm{Im}(\lambda) \geq 0$, $\tau \in \hat{M}$) du semi-groupe G_+ à valeurs dans $L^2(\Gamma_+,H_\tau)$.

Nous allons aborder maintenant le problème qui fut la motivation profonde de ce travail : comment rattacher d'une part les fonctions de Jacobi de 2ème espèce à la théorie des groupes, et comment interpréter d'autre part la transformation de Laplace-Jacobi dans ce cadre ? Ces questions ont déjà été abordées, en particulier, d'une part par J. Faraut [3] et dans un exposé non publié [4] et d'autre part par M. Mizony [6] , en ce qui concerne la définition et les propriétés de la transformation de Laplace-Jacobi.

7°) FONCTIONS DE JACOBI COMME MOYENNE DES NOYAUX DE POISSON DE 1er ET 2ème ESPECE ; FORMULES D'ADDITION.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour $g \in G$ posons $\phi_n(\lambda,g) = \langle \Pi_{\rho-i\lambda}(g)1 | 1 \rangle_{L^2(\Gamma,d\gamma)}$.

En particulier pour $g = a_t$ posons $\phi_n(\lambda,t) = \phi_n(\lambda,a_t)$; on a

(1) $\phi_n(\lambda,t) = \dfrac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{n-1}{2})} \displaystyle\int_0^{\pi} \dfrac{\sin^{n-2}\theta\, d\theta}{(\mathrm{ch}t-\mathrm{sh}t\cos\theta)^{\rho-i\lambda}}$ par définition du produit scalaire dans $L^2(\lambda,d\gamma) = L^2(M/M' \times [o,\pi[\,,\ \dfrac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{n-1}{2})}\, d\dot{m}\, \sin^{n-2}\theta\, d\theta)$.

C'est la fonction de Jacobi de 1ère espèce réalisée comme coefficient de la représentation $\Pi_{\rho-i\lambda}$ de G. $\phi_n(\lambda,t)$ est notée $\varphi_{\frac{n-2}{2},\,-1/2}(\lambda,t)$ dans [6] .

D'autre part si $1 \notin L^2(H/M,d_+\gamma)$ on a cependant $\tilde{\Pi}_{\rho-i\lambda}(g)1 \in L^1(H/M,d_+\gamma)$ pour $g \in G_+^\circ$ (sous-semi-groupe ouvert), dès que $\mathrm{Im}(\lambda) > \rho-1$.

Posons donc pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(\lambda) > \rho-1$ et pour $g \in G_+^\circ$

$$\tilde{\phi}_n(\lambda,g) = < \tilde{\Pi}_{\rho-i\lambda}(g)1 \,|\, 1 > = \int_{\Gamma_+} \tilde{\Pi}_{\rho-i\lambda}(g)1 \quad d_+\gamma$$

en particulier pour $g = a_t$ avec $t > o$ posons

$$(2) \quad \tilde{\phi}_n(\lambda,t) = \tilde{\phi}_n(\lambda,a_t) = \int_o^\infty \frac{(\mathrm{sh}\psi)^{n-2}\, d\psi}{(\mathrm{ch}t+\mathrm{sh}t\mathrm{ch}\psi)^{\rho-i\lambda}} = \frac{\Gamma(\rho)\Gamma(1-\rho-i\lambda)}{2^{-(n-2)}\Gamma(1-i\lambda)} \Phi_{\frac{n-2}{2},-1/2}(\lambda,t)$$

où $\Phi_{\frac{n-2}{2},\, -1/2}(\lambda,t)$ est la fonction de Jacobi de deuxième espèce (cf. [6]).

Les fonctions de Jacobi de deuxième espèce sont donc réalisées comme coefficients généralisés de représentations hilbertiennes contractantes du sous-semi-groupe ouvert G_+° de $SO_o(1,n)$.

Réécrivons les formules (1) et (2) sous la forme suivante.

$$\phi_n(\lambda,t) = \int_{K/M} P(a_t,\dot{k})^{1/2-\frac{i\lambda}{n-1}} \, d\dot{k} \qquad \text{pour} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\tilde{\phi}_n(\lambda,t) = \int_{H/M} Q(a_t,\dot{h})^{1/2-\frac{i\lambda}{n-1}} \, d\dot{h} \quad \text{pour} \ \lambda\in\mathbb{C},\ \mathrm{Im}(\lambda)>\rho-1 \ \text{et} \ t\in\mathbb{R}_+.$$

et considérons $\phi_n(\lambda,.)$ (resp. $\tilde{\phi}_n(\lambda,.)$) comme fonction sur G (resp. G_+°) bi-invariante par K (resp. par H), alors en utilisant les formules de 2-cocycles vérifiées par les noyaux $P(g,\gamma)$ et $Q(g,\gamma)$, on obtient les formules d'addition

$$\phi_n(\lambda,t_1)\phi_n(\lambda,t_2) = \int_K \phi_n(\lambda,a_{t_1}\, k\, a_{t_2})dk \qquad \lambda,t_1,t_2 \in \mathbb{R}.$$

et

$$\tilde{\phi}_n(\lambda,t_1)\tilde{\phi}_n(\lambda,t_2) = \int_H \tilde{\phi}_n(\lambda,a_{t_1}\, h\, a_{t_2})dh \qquad t_1,t_2 \in \mathbb{R}_+,\ \mathrm{Im}(\lambda)>\rho-1.$$

Ces formules s'écrivent encore en faisant apparaître des noyaux K et $\tilde{K}$ sur $\mathbb{R}_+^3$.

$$(3)\quad \begin{cases} \phi_n(\lambda,t_1)\phi_n(\lambda,t_2) = \dfrac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2^{n-1/2}} \displaystyle\int_o^{\infty} K(t_1,t_2,t)\ \phi_n(\lambda,t)(\mathrm{sh}t)^{n-1}\,dt \\[2ex] \text{avec } K(t_1,t_2,t) = \begin{cases} o & \text{pour } t \notin [\,|t_1-t_2|\ ,\ t_1+t_2\,] \\[1ex] \dfrac{2^{n-1/2}}{\sqrt{\Pi}\,\Gamma(\frac{n-1}{2})}\ \dfrac{(2\mathrm{ch}t\,\mathrm{ch}t_1\,\mathrm{ch}t_2-\mathrm{ch}^2t+\mathrm{sh}^2t_1\,\mathrm{sh}^2t_2-\mathrm{ch}^2t_1\,\mathrm{ch}^2t_2)^{\frac{n-3}{2}}}{(\mathrm{sh}t\ \mathrm{sh}t_1\ \mathrm{sh}t_2)^{n-2}} & \text{ailleurs.} \end{cases} \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \tilde{\phi}_n(\lambda,t_1)\tilde{\phi}_n(\lambda,t_2) = \displaystyle\int_o^{\infty} \tilde{K}(t_1,t_2\ t)\ \tilde{\phi}_n(\lambda,t)\ (\mathrm{sh}t)^{n-1}\,dt \\[2ex] \text{avec } \tilde{K}(t_1,t_2,t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } o < t < t_1+t_2 \\[1ex] \dfrac{(\mathrm{ch}^2t+\mathrm{ch}^2t_1\,\mathrm{ch}^2t_2-\mathrm{sh}^2t_1\,\mathrm{sh}^2t_2-2\mathrm{ch}t\ \mathrm{ch}t_1\,\mathrm{ch}t_2)^{\frac{n-3}{2}}}{(\mathrm{sh}t\ \mathrm{sh}t_1\ \mathrm{sh}t_2)^{n-2}} & \text{ailleurs.} \end{cases} \end{cases}$$

8°) ALGEBRES DE CONVOLUTIONS ET TRANSFORMATIONS DE FOURIER ET DE LAPLACE.

Considérons les décompositions $G = K\,A_+\,K$ de $SO_o(1,n)$ et $G_+^o = H\,A_+^*\,H$. Une mesure de Haar dg sur G s'écrit sur $K\,A_+\,K$: $dg = dk(\mathrm{sh}t)^{n-1}dt\ dk$, et sa restriction à l'ouvert G_+^o s'écrit $dg = dh\ (\mathrm{sh}t)^{n-1}dt\ dh$, où dk et dh sont des mesures de Haar sur K et H.

Pour étudier les espaces de fonctions sur G (respectivement sur G_+^o), bi invariantes par K (resp. par H), nous sommes donc amenés à étudier les espaces de fonctions sur $\mathbb{R}_+$, munie de la mesure $(\mathrm{sh}t)^{n-1}dt$.

A partir des noyaux K et $\tilde{K}$, définissons les produits de convolution $*$ et $\tilde{*}$ en posant pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $f,g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$ (l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact) :

$$(5) \qquad f * g(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty K(t_1,t_2,t)\ f(t_1)\ g(t_2)(\mathrm{sh}t_1\ \mathrm{sh}t_2)^{n-1}\ dt_1\ dt_2.$$

$$(6) \qquad f \tilde{*} g(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{K}(t_1,t_2,t)\ f(t_1)g(t_2)(\mathrm{sh}t_1\ \mathrm{sh}t_2)^{n-1}\ dt_1\ dt_2.$$

Définissons également des transformations $\mathcal{F}_n$ et $\mathcal{L}_n$ telles que, (formellement grâce aux formules d'addition (3) et (4)), on ait :

$\mathcal{F}_n(f * g) = \mathcal{F}_n(f)\ \mathcal{F}_n(g)$ et $\mathcal{L}_n(f \tilde{*} g) = \mathcal{L}_n(f)\ \mathcal{L}_n(g)$.

Pour cela il faut poser :

TRANSFORMATION DE FOURIER SPHERIQUE : pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(7) \qquad \mathcal{F}_n(f)\ (\lambda) = \frac{2^{n-1/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty f(t) \quad \phi_n(\lambda,t) \quad (\mathrm{sh}t)^{n-1}\ dt.$$

TRANSFORMATION DE LAPLACE SPHERIQUE : pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*), \lambda \in \mathbb{C}$, $\rho+i\lambda \notin \mathbb{N}^*$:

$$(8) \qquad \mathcal{L}_n(f)(\lambda) = \int_0^\infty f(t) \quad \tilde{\phi}_n(\lambda,t)\ (\mathrm{sh}t)^{n-1}\ dt.$$

NOTATIONS. Soit pour $\delta > 0$ et $a > 0$ l'espace $\mathcal{C}^\infty_{\delta,a}(\mathbb{R}_+^*)$ des fonctions f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, nulles sur $]0,\delta]$ et telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists K_n \geq 0$ telle que $|f^{(n)}(t)| \leq K_n e^{at}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $\mathcal{E}(\mathbb{R}_+^*) = \bigcup_{\substack{\delta > 0 \\ a > 0}} \mathcal{C}^\infty_{\delta,a}$ l'espace des fonctions à croissance exponentielle.

Soit pour $\delta > 0$ et $a > 0$ l'espae $\mathcal{H}_{\delta,a}$ des fonctions g holomorphes sur le demi-plan $\mathrm{Im}(\lambda) > a$ et vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists K_n \geq 0$ telle que

$|g(\lambda)| \leq K_n(1+|\lambda|)^{-n}\ e^{-\delta \mathrm{Im}(\lambda)}$ sur le demi-plan.

Soit $\mathcal{H} = \bigcup_{\substack{\delta > 0 \\ a > \rho}} \mathcal{H}_{\delta,a}$.

Résumons les propriétés des transformations de Fourier et de Laplace sphérique :

PROPOSITION 8.1. - *i) La transformation de Fourier* $\mathcal{F}_n$ *se prolonge d'une part à :* $L^1(\mathbb{R}_+,(\mathrm{sht})^{n-1}dt)$ *par la formule (7), et d'autre part en un isomorphisme isométrique de* $L^2(\mathbb{R}_+,(\mathrm{sht})^{n-1}dt)$ *sur* $L^2(\mathbb{R}_+|c(\lambda)|^{-2}d\lambda)$ *où*

$$c(\lambda) = 2^{n-1} \frac{\Gamma(i\lambda)}{\Gamma(\rho+i\lambda)} \quad ;$$

Le produit de convolution $*$ *est défini (par la formule (5)) sur* $L^1(\mathbb{R}_+,(\mathrm{sht})^{n-1}dt)$ *qui est ainsi muni d'une structure d'algèbre de Banach commutative (et involutive), et on a* $\mathcal{F}_n(f * g) = \mathcal{F}_n(f)\,\mathcal{F}_n(g)$, *pour tout* $f,g \in L^1(R_+,(\mathrm{sht})^{n-1}dt)$, *c'est-à-dire les fonctions sphériques* $\phi_n(\lambda,.)$ *définissent des caractères (hermitiens) de l'algèbre* $L^1(\mathbb{R}_+,(\mathrm{sht})^{n-1}dt)$.

ii) La transformation de Laplace $\mathcal{L}_n$ *se prolonge, par la formule (8) à* $\mathcal{E}(\mathbb{R}_+^*)$. *De plus, pour* $a > o$ *et* $\delta > o$, $\mathcal{L}_n$ *est une bijection de* $\bigcap_{b>a} \mathcal{C}^\infty_{\delta,b}$ *sur* $\bigcap_{b>a+\rho} \mathcal{H}_{\delta,b}$ *et donc* $\mathcal{L}_n$ *est une bijection de* $\mathcal{E}(\mathbb{R}_+^*)$ *sur* $\mathcal{H}$.

Le produit de convolution $\tilde{*}$ *se prolonge, par la formule (6), à* $\mathcal{E}(\mathbb{R}_+^*)$ *(et même à l'ensemble des fonctions continues sur* $\mathbb{R}_+$, *nulles au voisinage de zéro).* $\mathcal{E}(\mathbb{R}_+^*)$ *est donc muni d'une structure d'algèbre commutative et on a pour* $f,g \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^*)$; $\mathcal{L}_n(f \tilde{*} g) = \mathcal{L}_n(f)\,\mathcal{L}_n(g)$ *au sens suivant : pour tout* $f,g \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^*)$, *il existe* $\alpha(f,g) \geq \rho$ *tel que pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(\lambda) > \alpha(f,g)$ $\mathcal{L}_n(f \tilde{*} g)(\lambda) = \mathcal{L}_n(f)(\lambda)\,\mathcal{L}_n(g)(\lambda)$; *autrement dit les fonctions de Jacobi de 2ème espèce* $\phi_n(\lambda,.)$ *sont des caractères de l'algèbre de convolution* $\mathcal{E}(R_+^*)$.

i) est la théorie classique des fonctions sphériques, plus exactement de l'analyse harmonique sphérique, théorie appliquée au couple de Gelfand $(SO_0(1,n),SO(n))$. La démonstration de ii) se trouve pour l'essentiel dans [6] , où l'on trouve également les formules d'inversions des transformations de Fourier et de Laplace sphérique, et dans Faraut [4] .

CONCLUSION 8.2. - De même que le dual sphérique du couple de Gelfand $(SO_o(1,n),SO(n))$ est paramétré par la demi-droite de représentation $\Pi_{\rho-i\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, (du moins le support de la mesure de Plancherel sphérique), de même il nous semble avoir établi que le "dual sphérique" associé au semi-groupe G_+ relativement au sous-groupe non compact $H = SO_o(1,n-1)$ est paramétré par le demi-plan des représentations hilbertiennes contractantes $\tilde{\Pi}_{\rho-i\lambda}$ avec $\mathrm{Im}(\lambda) \geqslant o$.

Avant de passer à la dernière partie de ce travail, consacrée à la contraction de représentations hilbertiennes contractantes de sous-semi-groupes de groupes de Lie, un petit mot pour remercier l'équipe d'analyse harmonique de Lyon, animée par Gilbert Arsac. Dans cette équipe, l'aide de Pierre Bonnet par sa connaissance des groupes cinématiques et du groupe conforme, transparaît dans la première partie notamment, et celle de Gilbert Primet, qui m'a initié à la théorie des contractions des groupes de Lie, transparaît dans la dernière partie. Enfin les fructueuses discussions avec J. Faraut (de Strasbourg) furent stimulantes.

9°) CONTRACTION DU GROUPE $SO_o(1,n)$ sur le groupe $\mathbb{R}^n \rtimes SO_o(1,n-1)$

PRELIMINAIRES SUR LES CONTRACTIONS. - Pour plus de précisions se reporter à Dooley et Rice [1]. Ici nous donnons la définition d'une contraction dans un cas particulier.

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie d'espace vectoriel sous-jacent U et soit $\mathcal{H}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{G}$ qui admet un supplémentaire vectoriel V dans $\mathcal{G}$; supplémentaire supposé $ad_{\mathcal{H}}$;invariant (On dit que $\mathcal{H}$ est réductive dans $\mathcal{G}$).

Soit $x = x_V + x_{\mathcal{H}}$ la décomposition d'un élément de $\mathcal{G} = V \oplus \mathcal{H}$.
Pour $r > o$ posons $\Phi_r(x) = rx_V + x_{\mathcal{H}}$ alors $\Phi_r \in GL(U)$ et si l'on pose

$$[x,y]_1 = \lim_{r\to o} \Phi_r^{-1} [\Phi_r(x), \Phi_r(y)]_{\mathcal{G}}$$ pour tout $x,y \in U$, l'espace vectoriel

U est alors muni d'une nouvelle structure d'algèbre de Lie.

Soit $\mathcal{G}'$ cette algèbre. Par définition on dit que $\mathcal{G}'$ est la contractée de $\mathcal{G}$ suivant $\mathcal{H}$; V est alors une sous-algèbre abélienne de $\mathcal{G}'$ et on a :

$$[x,y]_1 = [x_{\mathcal{H}}, y_{\mathcal{H}}]_{\mathcal{G}} + [x_{\mathcal{H}}, y_V]_{\mathcal{G}} + [x_V, y_{\mathcal{H}}]_{\mathcal{G}} .$$

Au niveau des groupes de Lie : Soit H un sous-groupe réductif du groupe de Lie G , c'est-à-dire $\underline{H}$ est réductive dans $\underline{G}$. Soit V un supplémentaire de $\underline{H}$, $ad_{\underline{H}}$-invariant. Formons le produit semi-direct $G' = V \rtimes H$ et la famille P_r , pour $r > o$, d'applications contractantes de G' dans G définies par $P_r(v,h) = \exp_G(rv)h$, pour tout $(v,h) \in G'$. Soit $\underline{G}'$ l'algèbre de Lie de G' et Φ_r la différentielle de P_r au point élément neutre de G'. Alors $\underline{G}'$ est la contractée de $\underline{G}$ suivant $\underline{H}$. On dit que le produit semi-direct $G' = V \rtimes H$ est contracté du groupe G suivant le sous-groupe H. Exemple :

<u>Contraction du groupe $G = SO_o(1,n)$</u> sur $G' = \mathbb{R}^n \rtimes SO_o(1,n-1)$ suivant $H = SO_o(1,n-1)$.

En fait nous allons donner l'expression de la famille d'applications contractantes P_r sur le semi-groupe ouvert G'_+ de G'.

Soit $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_o, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n / x_o > o \quad \text{et} \; ||x||^2 = x_o^2 - x_1^2 - \ldots - x_{n-1}^2 > o\}$
$\mathbb{R}^n_+$ est stable par $H = SO_o(1,n-1)$.

Posons $G'_+ = \mathbb{R}^n_+ \rtimes SO_o(1,n)$ c'est un sous-semi-groupe ouvert de G'.
Soit $e_o = (1,o,\ldots o) \in \mathbb{R}^n$ et pour $r > o$, $x \in \mathbb{R}^n_+$ posons $k = r||x||$; il existe $h' \in H$, (unique à SO(n-1) près) tel que $x = \frac{k}{r} h'(e_o)$.

Alors pour $(o,h) \in G'$, , $P_r(o,h) = h \in G$
pour $(ke_o, o) \in G'$, $P_r(ke_o, o) = a_{rk} \in SO_o(1,1)_{o,n} \subset G$.
et donc pour $(x,h) \in G'_+$, $P_r(x,h) = h' \, a_{rk} \, h'^{-1} \, h \in G^o_+$ le semi-groupe ouvert dans G. On obtient de manière évidente :

PROPOSITION 9.1. - *Pour tout* $r > o$ *, l'application contractante* P_r *est un homéomorphisme du sous-semi-groupe* G'_+ *sur le sous-semi-groupe* G^o_+.

REMARQUE 9.2. - Pour $n = 4$, G_+° est le sous-semi-groupe ouvert de causalité globale dans le groupe de De Sitter $SO_\circ(1,4)$ et G_+' est le sous-semi-groupe ouvert de causalité globale dans le groupe de Poincaré $\mathbb{R}^4 \rtimes SO_\circ(1,3)$. De plus, r a la signification de la valeur absolue de la courbure de l'Univers.

10°) UN DEMI-PLAN DE REPRESENTATIONS HILBERTIENNES CONTRACTANTES DU SOUS-SEMI-GROUPE G_+'.

Soit $\{e_o,e_1,\ldots,e_{n-1}\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et soit $\{e^o,e^1,\ldots,e^{n-1}\}$ celle de $\mathbb{C}^n$. Identifions $\mathbb{C}^n$ à l'espace des caractères de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{C}^*$: pour $x = (x_o,\ldots,x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ et $\hat{x} = (\lambda,\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, posons $\hat{x}(x) = e^{i(x|\hat{x})} = e^{i(\lambda x_o-\lambda_1 x_1 \ldots -\lambda_{n-1} x_{n-1})}$.

Le groupe $SO_\circ(1,n-1)$ agit canoniquement sur $\mathbb{C}^n$ par $h.\hat{x} = h\begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_{n-1}\end{pmatrix}$.

Pour $\hat{x} = \lambda e^o$ le stabilisateur $H_{\hat{x}}$ de $\hat{x}$ dans H est $M = SO(n-1)$.
Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, la méthode des petits groupes permet de construire une famille de représentations unitaires irréductibles de G' : U_λ à valeurs dans $L^2(H/M,d_+\gamma)$ réalisée comme l'induite de $\hat{x} \otimes id_M$ de $\mathbb{R}^n \rtimes M$. Plus précisément pour $f \in L^2(H/M,d_+\gamma)$ et pour presque tout $\gamma \in \Gamma_+ = H/M$,

$$U_\lambda \ (x,h)f(\gamma) = (\sigma_+(\gamma).\hat{x})(x)\ f(h.\gamma), \text{ pour tout } (x,h) \in G'.$$

En particulier pour $(x,h) \in G_+'$ avec $x = h'ke_o$, $k > o$ et $h' \in H$, U_λ est déterminée par les relations :

$$(9)\qquad \begin{cases} U_\lambda(x,h) = U_\lambda(o,h') \circ U_\lambda(ke_o,o) \circ U_\lambda(o,h'^{-1}) \circ U_\lambda(o,h) \\ U_\lambda(o,h)\ f(\gamma) = f(h.\gamma) \\ U_\lambda(ke_o,o)\ f(\dot{m},h_\psi) = e^{i\lambda k\ ch\psi}\ f(\dot{m},h_\psi) \end{cases}$$

Ces relations (9) gardent un sens pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $Im(\lambda) \geqslant o$ et on obtient :

PROPOSITION 10.1. - *Pour* $\lambda \in \mathbb{C}$, $Im(\lambda) \geqslant o$, U_λ *est une représentation hilbertienne contractante du semi-groupe* G_+' *dans* $L^2(H/M,d_+\gamma)$ *;et pour* $\lambda \in \mathbb{R}^*$ *elle est unitaire (et même irréductible , c.f. Kaneta* [5]*).*

11°) APPROXIMATION DES REPRESENTATIONS U_λ DE G'_+ PAR LES REPRESENTATIONS $\tilde{\Pi}_{\rho-i\frac{\lambda}{r}}$ DE G°_+.

PROPOSITION 11.1. - *i) Pour* $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(\lambda) \geq 0$, *pour* $f \in L^2(\Gamma_+, d_+\gamma)$,

$\tilde{\Pi}_{\rho-i\frac{\lambda}{r}} \circ P_r(x,h)f$ *converge, lorsque* r *tend vers zéro, vers* $U_\lambda(x,h)f$ $d_+\gamma$ *presque partout et uniformément sur les compacts de* G'_+.

ii) Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ $\mathrm{Im}(\lambda) > 0$ *et* $f \in L^2(\Gamma_+, d_+\gamma)$ *et* f *continue nulle à l'infini, alors* $\|\tilde{\Pi}_{\rho-i\frac{\lambda}{r}} \circ P_r(x,h)f - U_\lambda(x,h)f\|_2 \to 0$ *lorsque* $r \to 0$, *uniformément sur les compacts de* G'_+ .

. Tenant compte du fait que pour $h \in H$ et $f \in L^2(\Gamma_+, d_+\gamma)$ on a $\tilde{\Pi}_{\rho-i\frac{\lambda}{r}} \circ P_r(o,h)f(\gamma) = f(h.\gamma) = U_\lambda(o,h)f(\gamma)$, et du fait que pour $(x,h) \in G'_+$ on a $P_r(x,h) = P_r(o,h')\ P_r(ke_o,o)\ P_r(o,h'^{-1})P_r(o,h)$, il nous reste à évaluer $\tilde{\Pi}_{\rho-i\frac{\lambda}{r}} \circ P_r(ke_o,o) = \tilde{\Pi}_{\rho-i\frac{\lambda}{r}}(a_{rk})$.

. Pour $f \in L^2(\Gamma_+, d_+\gamma)$, $\tilde{\Pi}_{\rho-i\frac{\lambda}{r}}(a_{rk})f(\dot{m},h_\psi) = (\mathrm{ch}\,rk + \mathrm{sh}\,rk\,\mathrm{ch}\psi)^{-\rho+i\frac{\lambda}{2}} f(\dot{m},h_{\psi(rk)})$

avec $\mathrm{ch}\psi(rk) = \dfrac{\mathrm{sh}rk + \mathrm{ch}rk\ \mathrm{ch}\psi}{\mathrm{ch}rk + \mathrm{sh}rk\ \mathrm{ch}\psi}$. On a $\lim\limits_{r\to o} h_{\psi(rk)} = h_\psi$, uniformément par rapport à (k,ψ) sur les compacts de $\mathbb{R}^*_+ \times R$.

. D'autre part $(\mathrm{ch}rk + \mathrm{sh}\,rk\ \mathrm{ch}\psi)^{-\rho+i\frac{\lambda}{r}} = e^{-(\rho-i\frac{\lambda}{r})\mathrm{Log}(1+rk\mathrm{ch}\psi+r\varepsilon_{\psi,k}(r))}$

avec $\varepsilon_{\psi,k}(r) \to o$ uniformément sur tout compact par rapport à $(k,\psi) \in \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}$.

Donc $(\mathrm{ch}rk+\mathrm{sh}rk\mathrm{ch}\psi)^{-\rho+i\frac{\lambda}{r}} \to e^{i\lambda k\mathrm{ch}\psi}$ uniformément sur tout compact par rapport à (k,ψ).

. En particulier pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(\lambda) > 0$ et f continue à support compact sur Γ_+ on a $\tilde{\Pi}_{\rho-i\frac{\lambda}{r}} \circ P_r(ke_o,o)\ f(\gamma) \to U_\lambda(ke_o,o)\ f(\gamma)$ lorsque $r \to o$, uniformément sur tout compact par rapport à $(k,\gamma) \in \mathbb{R}^*_+ \times \Gamma_+$. En conséquence, i) est démontré.

. Montrons ii) : soit f continue à support compact sur Γ_+ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(\lambda) > o$; on a $\left| \tilde{\Pi}_{\rho - i\frac{\lambda}{r}} \circ P_r(ke_o,o)f(\dot{m},h_\psi) - U_\lambda(ke_o,o)f(\dot{m},h_\psi)\right|$

$$= \left|(\mathrm{chrk}+\mathrm{shrkch}\psi)^{-\rho+i\frac{\lambda}{r}} f(\dot{m},h_{\psi(rk)}) - e^{i\lambda k\mathrm{ch}\psi} f(\dot{m},h_\psi)\right|$$

$$= e^{-\mathrm{Im}(\lambda)k\ \mathrm{ch}\psi}\left|\frac{(\mathrm{chrk}+\mathrm{shrkch}\psi)^{-\rho+i\frac{\lambda}{r}}}{e^{i\lambda k\ \mathrm{ch}\psi}} f(\dot{m},h_{\psi(rk)}) - f(\dot{m},h_\psi)\right|.$$

Donc pour $\varepsilon >$ il existe $\eta = \eta(\varepsilon,f,k) > o$ tel que pour $r > \eta$ on a :

$\left|\tilde{\Pi}_{\rho-i\frac{\lambda}{r}} \circ P_r(ke_o,o)f(\dot{m},h_\psi) - U_\lambda(ke_o,o)f(\dot{m},h_\psi)\right| \leq \varepsilon\, e^{-\mathrm{Im}(\lambda)k\ \mathrm{ch}\psi}$ qui est de carré intégrable pour $d_+\gamma$, dès que $\mathrm{Im}(\lambda) > o$. Donc pour $f \in L^2(\Gamma_+,d_+\gamma)$ et f continue nulle à l'infini, on a :

$$\left|\left|\tilde{\Pi}_{\rho-i\frac{\lambda}{r}} \circ P_r(x,h)f - U_\lambda(x,h)f\right|\right|_2 \to o \text{ uniformément sur les compacts}$$

de G'_+ lorsque $r \to o$.

c.q.f.d.

REMARQUE 11.2. - On pourrait pour $(\tau,H_\tau) \in \hat{M}$, construire les demi-plans de représentations hilbertiennes contractantes $U_{\tau,\lambda}$ de G'_+ dans $L^2(\Gamma_+,H_\tau)$ et obtenir un résultat semblable. (Voir remarque 6.6).

En conséquence de cette proposition 11.1 , on obtient une formule du type Mehler-Heine pour les fonctions de Jacobi de 2ème espèce et les fonctions de Hankel, plus précisément :

12°) COEFFICIENTS GENERALISES DES REPRESENTATIONS $\tilde{\Pi}_{\rho-i\lambda}$ ET U_λ ; FORMULE DU TYPE MEHLER-HEINE.

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(\lambda) > \rho-1$ alors $\tilde{\phi}_n(\lambda,t) = \langle\tilde{\Pi}_{\rho-i\lambda}(a_t)1|1\rangle = \displaystyle\int_o^\infty \frac{(\mathrm{sh}\psi)^{n-2}\, d\psi}{(\mathrm{cht}+\mathrm{shtch}\psi)^{\rho-i\lambda}}$;

De même, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(\lambda) > o$ posons :

$$k_n(\lambda t) = \langle U_\lambda(te_o,o)1|1\rangle = \int_o^\infty e^{i\lambda t\ \mathrm{ch}\psi}(\mathrm{sh}\psi)^{n-2}\, d\psi .$$

$k_n(\lambda t)$ est une fonction de Bessel, solution de l'équation $\frac{d^2}{dt^2} + \frac{n-1}{t}\frac{d}{dt} + \lambda^2 = 0$;

et en fait égale à : $k_n(\lambda t) = \frac{2^{n-2}}{\sqrt{\Pi}}\, \Gamma(\frac{n-1}{2})\, (-i\lambda t)^{-(\frac{n-1}{2})}\, K_{\frac{n-2}{2}}(-i\lambda t)$ où $K_{\frac{n-2}{2}}$ est une fonction de Bessel modifiée, encore appelée fonction de Hankel (c.f. Trimèche [8], et Watson [10]). A-t-on une formule de type Mehler-Heine pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(\lambda) > \mathrm{Max}(0,\rho-1)$, $\lim\limits_{r\to o} \tilde{\phi}_n(\frac{\lambda}{r}, rt) = k_n(\lambda t)$? (cf. Erdelyi [2] 7.8. (4)). (H,M) étant un couple de Gelfand, soit B(H,M) l'ensemble des coefficients des représentations unitaires irréductibles de H et de classe 1 par rapport à M. C'est un ensemble de fonctions continues et bornées sur H. Soit A(H,M) l'algèbre (pour la multiplication ordinaire des fonctions), engendrée par B(H,M).

Pour $\xi, \eta \in A(H,M)$, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(\lambda) > \rho-1$, pour $g \in G_+^\circ$,
posons $<\tilde{\Pi}_{\rho-i\lambda}(g)\,\xi|\eta> \doteq \int_{H/M} \tilde{\Pi}_{\rho-i\lambda}(g)\,\xi(\sigma_+(\gamma))\,\overline{\eta(\sigma_+(\gamma))}\, d_+\gamma$ qui existe.

De même pour $\mathrm{Im}(\lambda) > o$, pour $g \in G'_+$, pour $\xi,\eta \in A(H,M)$, posons :

$< U_\lambda(g)\xi|\eta> \doteq \int_{H/M} U_\lambda(g)\, \xi(\sigma_+(\gamma))\overline{\eta(\sigma_+(\gamma))}\, d_+\gamma$ qui existe.

On vient de définir des coefficients généralisés des représentations $\tilde{\Pi}_{\rho-i\lambda}$ de G_+° et U_λ de G'_+, et on obtient (à partir de la proposition 11-1).

PROPOSITION 12.1. - *(Formule du type Mehler-Heine) : pour* $\xi,\eta \in A(H,M)$, *pour* $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(\lambda) > \mathrm{Max}(o,\rho-1)$ *pour* $(x,h) \in G'_+$:

$$\lim_{r\to o} <\tilde{\Pi}_{\rho-i\frac{\lambda}{r}} \circ P_r(x,h)\,\xi|\eta> = < U_\lambda(x,h)\,\xi|\eta> ,$$

uniformément sur les compacts de G'_+ .

CONSEQUENCE 12.2 . Contraction du produit de convolution $\tilde{*}$.

Contractons la formule d'addition des fonctions $\tilde{\phi}_n(\lambda,t)$, formule (4) :

$$\lim_{r\to o} \tilde{\phi}_n\left(\frac{\lambda}{r}, rt_1\right) \tilde{\phi}_n\left(\frac{\lambda}{r}, rt_2\right) = \lim_{r\to o} \int_o^\infty \tilde{K}(rt_1,rt_2,t)\, \tilde{\phi}_n\left(\frac{\lambda}{r}, t\right)(\mathrm{sh}t)^{n-1}dt$$

$$= \lim_{r\to o} \int_o^\infty r^n\, \tilde{K}(rt_1,rt_2,rt)\, \tilde{\phi}_n\left(\frac{\lambda}{r}, rt\right) \left(\frac{\mathrm{sh}rt}{r}\right)^{n-1} dt.$$

posons $K'(t_1,t_2,t) = \lim\limits_{r\to o} r^n \tilde{K}(rt_1,rt_2,rt)$ cette limite existe et on a

$$K'(t_1,t_2,t) = \begin{cases} o & \text{pour } o < t < t_1 + t_2 \\ \dfrac{1}{2^{n-3}(t\ t_1\ t_2)^{n-2}} \times \left(\dfrac{t^4}{3} + t^4 + t_1^4 + t_2^4 - 2t^2t_1^2 - 2t^2t_2^2 - 2t_1^2t_2^2\right)^{\frac{n-3}{2}} & \end{cases}$$

et la formule d'addition suivante pour les fonctions de Bessel $k_n(\lambda t)$:

$$k_n(\lambda t_1)\ k_n(\lambda t_2) = \int_o^\infty K'(t_1,t_2,t)\ k_n(\lambda t)\ t^{n-1}\ dt \quad \text{(cf. Vilenkin [9]) .}$$

donc un nouveau produit de convolution sur $\mathbb{R}_+^*$, contracté du produit $\tilde{*}$:

Pour f et g , fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$f *' g(t) = \int_o^\infty \int_o^\infty K'(t_1,t_2,t)\ f(t_1)g(t_2)\ t_1^{n-1}dt_1\ t_2^{n-1}dt_2$$

Et à partir de là on peut développer toute une analyse harmonique sphérique, associée au semi-groupe G_+' , contractée de l'analyse harmonique sur G_+° .

En particulier posons pour $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}_+^*)$

$$\mathcal{L}_n'(f)(\lambda) = \int_o^\infty f(t)\ k_n(\lambda t)\ t^{n-1}\ dt$$

et pour tout $r > o$ posons $f_r(t) = f(\frac{t}{r})$ alors $\mathcal{L}_n'(f)(\lambda) = \lim\limits_{r\to o} r^{-n} \mathcal{L}_n(f_r)(\frac{\lambda}{r})$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ $\mathrm{Im}(\lambda) > 0$.

Ainsi la transformation de Laplace Bessel $\mathcal{L}'_n$ est "limite" de la transformation de Laplace-Jacobi $\mathcal{L}_n$. Cette transformation $\mathcal{L}_n'$ est étudiée par Trimèche [8].

13°) SUR LE FORMALISME HILBERTIEN DE LA MECANIQUE QUANTIQUE.

13.1. Depuis Wigner et Bargmann, il est d'usage d'appeler système quantique élémentaire, une classe d'équivalence de représentations projectives unitaires et irréductibles du groupe des invariants cinématiques de l'univers considéré.

Il nous semble avoir mis en évidence le fait suivant :

Les classes de représentations hilbertiennes isométriques $\tilde{\Pi}_{\rho-i\lambda}$ et U_λ des sous-semi-groupes de causalité globale des groupes de De Sitter $SO_0(1,4)$ et de Poincaré $\mathbb{R}^4 \rtimes SO_0(1,3)$ conviennent mieux pour paramétrer les particules de masse positive et de spin nul dans la mesure où elles se correspondent bien lorsque la courbure de l'univers tend vers zéro ; de plus par cette contraction les sous-semi-groupes de causalité sont homéomorphes.

PROBLEMES 13.2. - a) Irréductibilité des représentations contractantes $\tilde{\Pi}_{\rho-i\lambda}$ du semi-groupe G_+ de $SO_0(1,n)$.

b) Construction de toutes les classes de représentations hilbertiennes contractantes et irréductibles du semi-groupe G_+ de $SO_0(1,n)$ et G'_+ de $\mathbb{R}^n \rtimes SO_0(1,n-1)$.

c) Dans la contraction du groupe de Poincaré sur le groupe de Galilée (en faisant tendre la vitesse de la lumière vers l'infini), les représentations hilbertiennes contractantes de G_+ donnent-elles les représentations projectives de Galilée (ou du sous-semi-groupe de causalité de Galilée).

Si ces problèmes (et d'autres) sont résolus avec une "interprétation physique convenable" ne devra-t-on pas proposer :

DEFINITION 13.3. - Un système quantique élémentaire est une classe d'équivalence de représentations projectives isométriques et irréductibles du sous-semi-groupe de causalité globale du groupe des invariants cinématiques de l'univers considéré.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. H. DOOLEY et J.W. RICE, On contractions of semi-simple Lie groups, préprint (1982).

[2] A. ERDELYI, Higher transcendental functions", Volume 2. Mc Graw-Hill Book Company, Inc. (1953).

[3] J. FARAUT, Distributions sphériques sur les espaces hyperboliques", Journal de Maths pures et appliquées, T. 58 fasc. 4 (1979).

[4] J. FARAUT, Algèbre de Volterra et transformation de Laplace sphérique, Préprint (1981).

[5] KANETA, Irreducibility of some unitary representations of the Poincaré group with respect to the Poincaré subsemigroup. Nagoya Math. J. VI. 78 (1980).

[6] M. MIZONY, Une transformation de Laplace-Jacobi, Préprint (1980) à paraître dans SIAM Journal on Mathematical Analysis.

[7] J. SEKIGUCHI, Eigenspaces of the Laplace-Beltrami operator on a hyperboloïd, Nagoya Math J. V. 79 (1980).

[8] K. TRIMECHE, Transformation de Meijer modifiée, Séminaire d'analyse harmonique. Tunis (1980).

[9] N. JA. VILENKIN, Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes, Dunod, Paris (1969).

[10] G.N. WATSON, A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge Univ. Press. London and New York 2ème ed. (1966).

Comme ouvrages de références nous avons utilisé:

A. O. BARUT and R. RACZKA, Theory of group representations and applications. P.W.N. (WARSZAWA 1977).
G. ARSAC, Le groupe de Poincaré et ses représentations, Cours de D.E.A. Lyon (1982).