

A. TILLIER

**Les groupes de transvections des espaces symétriques associés
à une algèbre de Jordan de forme réelle**

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1977, tome 14, fascicule 4
, p. 27-56

[<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1977__14_4_27_0>](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1977__14_4_27_0)

© Université de Lyon, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES GROUPES DE TRANSVECTIONS DES ESPACES SYMETRIQUES ASSOCIES A UNE ALGEBRE DE JORDAN DE FORME REELLE

par A. TILLIER

INTRODUCTION.

Le but de ce travail est de caractériser algébriquement le groupe des transvections des variétés pseudo-riemanniennes symétriques associées à une algèbre de Jordan de forme réelle simple.

Lorsque l'on a un espace symétrique, il est naturel de chercher les métriques pseudo-riemanniennes compatibles avec la structure d'espace symétrique et, s'il en existe, de les comparer entre elles : c'est une autre forme de la recherche et de la comparaison des métriques associées à une dérivation covariante. Sur l'espace symétrique défini par une algèbre de Jordan semi-simple $\mathcal{U}$, la métrique pseudo-riemannienne habituelle compatible avec les symétries est construite par un certain procédé à partir de la forme bilinéaire "trace" : on établit en (1.7) que ce procédé appliqué à une forme bilinéaire $\langle, \rangle$ fournit une métrique pseudo-riemannienne compatible si et seulement si les endomorphismes de $\mathcal{U}$ de la forme $P(x)$ sont auto-adjoints pour $\langle, \rangle$, et on en déduit en (1.8) que si $\mathcal{U}$ est simple, alors $\langle, \rangle$ est proportionnelle à la trace.

Si $\mathcal{U}$ n'est pas semi-simple, la trace, qui est dégénérée, ne peut fournir de métrique pseudo-riemannienne. En (1.9), on construit une algèbre $\mathcal{U}$ non semi-simple et une forme bilinéaire qui, par un procédé identique à celui du cas semi-simple, donne lieu à une métrique pseudo-riemannienne compatible avec les symétries.

Le paragraphe 2 résume les propriétés essentielles des algèbres de Jordan de forme réelle simples. Après avoir rappelé la nature des composantes connexes notées $\text{Inv}_k(\mathcal{U})$ de l'espace symétrique associé à une telle algèbre (2.4), on établit que l'étude de $\text{Inv}_k(\mathcal{U})$ se réduira à celle de la variété pseudo-riemannienne notée M_k , définie par $M_k = \{x \in \text{Inv}_k(\mathcal{U}) \mid \det x = (-1)^k\}$ (2.7).

Le § 3 est consacré à la démonstration des deux théorèmes prin-

cipaux de cet article ((3.7) et (3.8)). Il est immédiat que le groupe des transvections $G(M_k)$ de M_k est engendré par les endomorphismes de $\mathcal{U}$ de la forme $P(x)P(y)$ pour $x \in M_k$ et $y \in M_k$, où P désigne la représentation quadratique. Si on désigne par $P(M_k)$ le groupe engendré par les $P(x)$ pour $x \in M_k$, alors $G(M_k) \subseteq P(M_k)$, mais la non-associativité de $\mathcal{U}$ est un obstacle sérieux pour conclure à l'égalité.

Utilisant de façon exhaustive un cas particulier où la formule $P(x)P(y) = P(xy)$ est vraie, le théorème (3.7) établit que $G(M_k) = P(M_k)$ sauf si le degré de $\mathcal{U}$ est pair et que k est impair. De plus, on montre qu'il y a au plus trois groupes $P(M_k)$ distincts (resp. $G(M_k)$), à savoir $P(M_0)$, $P(M_1)$ et $P(M_2)$ (resp. $G(M_0)$, $G(M_1)$ et $G(M_2)$). Suivant les valeurs de k , on précise auquel de ces trois groupes $P(M_k)$ (resp. $G(M_k)$) est identique. Enfin, on établit des inclusions entre ces divers groupes, lorsque l'on ne peut conclure à leur égalité.

Désignons par I_k l'ensemble des éléments involutifs de degré k de $\mathcal{U}$. On sait que les I_k sont des variétés riemanniennes symétriques. Désignons par $G(I_k)$ le groupe des transvections de I_k et par $P(I_k)$ le groupe engendré par les $P(w)$ pour $w \in I_k$, on obtient, avec les $G(I_k)$ et les $P(I_k)$, les mêmes résultats que ci-dessus, car la démonstration du théorème (3.7) reste valable.

1. LES ESPACES SYMETRIQUES ASSOCIES A UNE ALGEBRE DE JORDAN.

(1.1) DEFINITION. - Un espace vectoriel $\mathcal{U}$ sur un corps K , muni d'une application K -bilinéaire de $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}$ notée $(x, y) \mapsto xy$ telle que :

$$i) \quad xy = yx$$

$$ii) \quad x^2(xy) = x(x^2y) \text{ (identité de Jordan)}$$

est appelée une algèbre de Jordan.

Des exemples d'algèbre de Jordan sont donnés en (2.2) ; ce sont celles qui sont de forme réelle, que nous allons plus particulièrement étudier ici. Pour les cas plus généraux, voir [1].

(1.2) On suppose que $\mathcal{U}$ possède un élément neutre e ($ex=x$, $x \in \mathcal{U}$). $\mathcal{U}$ n'est pas associative en général, pour $x \in \mathcal{U}$, il peut exister deux éléments distincts x_1 et x_2 de $\mathcal{U}$ tels que $x_1x = x_2x = e$. Toutefois, l'algèbre $K[x ; e]$ engendrée par x et e dans $\mathcal{U}$ est associative ; par définition, on dit que x est *inversible*, s'il est inversible dans $K[x ; e]$. L'unique élément de $K[x ; e]$, noté x^{-1} , vérifiant $xx^{-1}=e$, est appelé *l'inverse* de x ; x^{-1} est aussi inversible, et $(x^{-1})^{-1} = x$.

Dans toute la suite, nous supposons, outre le fait que $\mathcal{U}$ possède un élément neutre e , que le corps de base est $\mathbb{R}$, et que $\mathcal{U}$ est de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

Notons $\text{Inv}(\mathcal{U})$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{U}$; c'est un ouvert, non vide car $e \in \text{Inv}(\mathcal{U})$. $\text{Inv}(\mathcal{U})$ n'est pas connexe en général ; toutefois, pour $x \in \text{Inv}(\mathcal{U})$, x et x^{-1} appartiennent à la même composante connexe.

(1.3) Désignons par $L(x)$ l'application linéaire de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}$ définie par :

$$(\forall y \in \mathcal{U}) \quad L(x)y = xy.$$

Si $\mathcal{U}$ n'est pas associative, en général $L(xy) \neq L(x)L(y)$. De plus, le fait que x soit inversible n'implique pas que $L(x)$ le soit, et même si c'est le cas, on a en général $L^{-1}(x) \neq L(x^{-1})$: la représentation $x \mapsto L(x)$ n'a pas de bonnes propriétés.

Mais posons $P(x) = 2L^2(x) - L(x^2)$; $P(x)$ est appelée la *représentation quadratique*.

On a alors :

- 1) $P(\lambda x) = \lambda^2 P(x)$
- 2) $P(P(x)y) = P(x)P(y)P(x)$ (formule fondamentale)
- 3) $P(x^n) = P^n(x)$ ($n \in \mathbb{N}^*$)
- 4) $P(x)$ est inversible si et seulement si x est inversible, et
 $P(x^{-1}) = P^{-1}(x)$; dans ce cas $P(x^n) = P^n(x)$ ($n \in \mathbb{Z}$).
- 5) $P(x)y$ est inversible si et seulement si x et y le sont ; alors
 $(P(x)y)^{-1} = P^{-1}(x)y^{-1} = P(x^{-1})y^{-1}$.
- 6) Soit C une composante connexe de $\text{Inv}(\mathcal{U})$ et $x \in \text{Inv}(\mathcal{U})$ (x n'appartenant pas nécessairement à C). Alors $P(x)C = C$.
- 7) $P(x+y) = P(x) + P(y) + 2L(x)L(y) + 2L(y)L(x) - 2L(xy)$.
- 8) Mais, en général, $P(xy) \neq P(x)P(y)$.

(1.4) DEFINITION. - Soit M une variété C^∞ . M est appelé un espace symétrique (ou de réflexions) s'il existe une application C^∞ de $M \times M$ dans M , notée $(x,y) \mapsto S(x)y$, vérifiant :

- 1) $S(x)x = x$ et x est un point fixe isolé de $S(x)$.
- 2) $S(x)S(x) = \text{Id}_M$ ($S(x)$ est involutive)
- 3) $S(S(x)y) = S(x)S(y)S(x)$.

$S(x)$ est appelée la *symétrie* par rapport à x . Pour une étude générale des espaces symétriques, nous renvoyons à [2], dont les résultats seront admis sans démonstration ici.

(1.5) $\text{Inv}(\mathcal{U})$, et chacune de ses composantes connexes, sont munies naturellement d'une structure de variété, puisque ce sont des ouverts de $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$.

THEOREME. - $\text{Inv}(\mathcal{U})$, et chacune de ses composantes connexes, sont des espaces symétriques pour la loi $S(x)y = P(x)y^{-1}$.

(Pour la démonstration, voir [2], volume 1, page 68).

(1.6) Soit (M,g) une variété pseudo-riemannienne. On dit que (M,g) est une variété pseudo-riemannienne symétrique, si, pour tout $x \in M$, il existe une isométrie involutive, notée $S(x)$ et appelée symétrie par rapport à x , admettant x comme point fixe isolé.

Lorsque M est connexe, les $S(x)$ sont uniquement déterminés par g , et M

est un espace symétrique pour la loi $(x, y) \mapsto S(x)y$.

Mais si M est un espace symétrique connexe, de symétries $S(x)$, il n'est pas évident que l'on puisse l'obtenir comme ci-dessus : le problème est de trouver une métrique pseudo-riemannienne g sur M pour laquelle les $S(x)$ soient des isométries. On dit alors que g est compatible avec les symétries de M , ou avec la structure d'espace symétrique, et alors (M, g) est une variété pseudo-riemannienne symétrique.

En fait, il existe des espaces symétriques pour lesquels il n'y a aucune métrique compatible avec les symétries, d'autres pour lesquels il en existe une seule à une constante multiplicative près, d'autres enfin pour lesquels il en existe plusieurs non proportionnelles.

(1.7) Si l'espace symétrique M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, identifions $T_y M$, l'espace tangent à M en y , avec $\mathbb{R}^n$, et notons $D_y S(x)$ la différentielle de $S(x)$ en y .

Une métrique pseudo-riemannienne g sur M est compatible avec les symétries si et seulement si :

$$\forall \xi \in T_y M \quad \forall \eta \in T_y M \quad g_y(\xi, \eta) = g_{S(x)y}(D_y S(x)\xi, D_y S(x)\eta)$$

pour tout x et y appartenant à M , par définition d'une isométrie.

LEMME. - Soit $\langle, \rangle$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $\mathcal{U}$, et C une composante connexe de $\text{Inv}(\mathcal{U})$. Les quatre propositions suivantes sont équivalentes :

- 1) $L(x)$ est auto-adjoint pour $\langle, \rangle$, ($\forall x \in \mathcal{U}$)
- 2) $L(x)$ est auto-adjoint pour $\langle, \rangle$, ($\forall x \in C$)
- 3) $P(x)$ est auto-adjoint pour $\langle, \rangle$, ($\forall x \in \mathcal{U}$)
- 4) $P(x)$ est auto-adjoint pour $\langle, \rangle$, ($\forall x \in C$).

Démonstration. - 1) $\implies$ 2) et 3) $\implies$ 4) de façon évidente.

C , ouvert de $\mathcal{U}$, contient une base de $\mathcal{U}$, et $x \mapsto L(x)$ est linéaire : ($\forall x \in \mathcal{U}$) $L(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i L(x_i)$ avec $x_i \in C$, et donc $L(x)$ est auto-adjoint comme les $L(x_i)$: 2) $\implies$ 1).

On suppose 4) satisfait. Soit $x \in C$. Puisque C est ouvert, il existe $\epsilon \in \mathbb{R}$ tel que $x + \epsilon e \in C$, donc $P(x + \epsilon e)$ est auto-adjoint. Or

$$2\epsilon L(x) = P(x + e) - P(x) - \epsilon^2 \text{Id}_{\mathcal{U}} \text{ (d'après 1.3)}$$

ce qui prouve que $L(x)$ est auto-adjoint pour tout $x \in C$, et donc pour tout $x \in \mathcal{U}$ d'après ci-dessus : donc 4) $\implies$ 1).

Mais $P(x) = 2L^2(x) - L(x^2)$ par définition. Si $L(x)$ et $L(x^2)$ sont auto-adjoints, $P(x)$ l'est aussi : 1) $\implies$ 3), ce qui achève la démonstration.

Q.E.D.

THEOREME. - Soit $\langle , \rangle$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $\mathcal{U}$ et C une composante connexe de $\text{Inv}(\mathcal{U})$. Pour que

$$g_y(\xi, \eta) = \langle P(y^{-1})\xi, \eta \rangle$$

($\forall \xi \in T_y C, \forall \eta \in T_y C, \forall y \in C$) fournisse une métrique pseudo-riemannienne g sur C , il faut et il suffit que les $P(x)$ ($\forall x \in \mathcal{U}$) soient auto-adjoints pour $\langle , \rangle$. Dans ce cas, cette métrique est compatible avec les symétries de C .

La métrique pseudo-riemannienne sur $\text{Inv}(\mathcal{U})$ induite par ces métriques est compatible avec les symétries de $\text{Inv}(\mathcal{U})$.

Démonstration. - $P(y^{-1})$ étant inversible pour $y \in \text{Inv}(\mathcal{U})$, g_y est non dégénérée, et l'application $y \mapsto g_y$ est C^∞ , car l'application $y \mapsto P(y^{-1})$ l'est.

Si les $P(x)$ ($\forall x \in \mathcal{U}$) sont auto-adjoints pour $\langle , \rangle$, il vient :

$$\langle P(y^{-1})\xi, \eta \rangle = \langle \xi, P(y^{-1})\eta \rangle = \langle P(y^{-1})\eta, \xi \rangle$$

donc $g_y(\xi, \eta) = g_y(\eta, \xi)$, et g étant symétrique est bien une métrique pseudo-riemannienne sur $\text{Inv}(\mathcal{U})$ et par restriction sur C .

Réciproquement, si g est une métrique pseudo-riemannienne sur C , g est en particulier symétrique, et donc :

$$g_y(\xi, \eta) = g_y(\eta, \xi)$$

ce qui donne $\langle P(y^{-1})\xi, \eta \rangle = \langle P(y^{-1})\eta, \xi \rangle = \langle \xi, P(y^{-1})\eta \rangle$ et $P(y^{-1})$, donc $P(y)$ est auto-adjoint pour $\langle , \rangle$ lorsque $y \in C$. D'après le lemme, $P(x)$ est auto-adjoint pour $\langle , \rangle$, et ceci quel que soit $x \in \mathcal{U}$.

De plus, si l'on prolonge g par la même construction à $\text{Inv}(\mathcal{U})$ tout entier, g sera pseudo-riemannienne d'après ci-dessus car les $P(x)$ ($\forall x \in \mathcal{U}$) sont auto-adjoints pour $\langle , \rangle$.

Soient x et y appartenant à $\text{Inv}(\mathcal{U})$.

Posons $f(x) = x^{-1}$. Nous admettrons que $D_y f = -P(y^{-1})$. (voir [2], volume 1, page 69).

Aussi :

$$D_y S(x) = D_y (P(x)y^{-1}) = -P(x) P(y^{-1}).$$

En tenant compte du fait que les $P(x)$ sont auto-adjoints pour $\langle, \rangle$ et des formules (1.3) il vient :

$$\begin{aligned} g_{S(x)y}(D_y S(x)\xi, D_y S(x)\eta) &= g_{S(x)y}(P(x)P(y^{-1})\xi, P(x)P(y^{-1})\eta) = \\ &\langle P([P(x)y^{-1}]^{-1})P(x)P(y^{-1})\xi, P(x)P(y^{-1})\eta \rangle = \\ &\langle P(P(x^{-1})y)P(x)P(y^{-1})\xi, P(x)P(y^{-1})\eta \rangle = \\ &\langle P(x^{-1})P(y)P(x^{-1})P(x)P(y^{-1})\xi, P(x)P(y^{-1})\eta \rangle = \\ &\langle P^{-1}(x)\xi, P(x)P(y^{-1})\eta \rangle = \\ &\langle P(y^{-1})\xi, \eta \rangle = g_y(\xi, \eta) \end{aligned}$$

ce qui assure que les symétries sont des isométries de g , pour $x \in \text{Inv}(\mathcal{U})$ aussi bien que pour $x \in C$.

Q.E.D.

(1.8) Désignons par $\text{Tr} L(x)$ la trace habituelle de l'endomorphisme $L(x)$ de $\mathcal{U}$; $\langle x, y \rangle$ défini par $\langle x, y \rangle = \text{Tr} L(xy)$ est une forme bilinéaire symétrique pour lesquelles les endomorphismes de la forme $L(z)$ sont auto-adjoints : on a $\langle zx, y \rangle = \langle x, zy \rangle$ ou encore, en tenant compte de la commutativité $\text{Tr} L((xz)y) = \text{Tr} L(x(zy))$; on dit que la forme $x \mapsto \text{Tr} L(x)$ est associative ([1], page 28).

Pour une algèbre de Jordan $\mathcal{U}$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\text{Rad}(\mathcal{U}) = \{0\}$ ($\text{Rad}(\mathcal{U})$, appelé radical de $\mathcal{U}$, est un idéal un peu particulier : voir [1], page 35).

b) la forme bilinéaire $\langle x, y \rangle = \text{Tr} L(xy)$ est non dégénérée.

Si $\mathcal{U}$ vérifie a) ou b) on dit que $\mathcal{U}$ est *semi-simple* : $\mathcal{U}$ s'écrit alors d'une façon unique à l'ordre près sous la forme

$$\mathcal{U} = \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{U}_i, \text{ où les } \mathcal{U}_i \text{ sont des algèbres de Jordan simples (c'est-}$$

à-dire qu'elles ne possèdent aucun idéal propre) vérifiant $\mathcal{U}_i \mathcal{U}_j = 0$ pour $i \neq j$.

THEOREME. - Soit $\mathcal{U}$ une algèbre de Jordan simple, $\langle , \rangle$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $\mathcal{U}$ et C une composante connexe de $\text{Inv}(\mathcal{U})$.

Pour que $g_y(\xi, \eta) = \langle P(y^{-1})\xi, \eta \rangle$

$$(\forall \xi \in T_y C, \forall \eta \in T_y C, \forall y \in C)$$

fournisse une métrique pseudo-riemannienne g sur C , il faut et il suffit que $\langle \xi, \eta \rangle = k \text{Tr } L(\xi\eta)$, avec $k \in \mathbb{R}^*$, pour tout ξ et η de $\mathcal{U}$. Dans ce cas, cette métrique est compatible avec les symétries de C .

La métrique pseudo-riemannienne sur $\text{Inv}(\mathcal{U})$ induite par ces métriques est compatible avec les symétries de $\text{Inv}(\mathcal{U})$.

Démonstration. - Si $\langle \xi, \eta \rangle = k \text{Tr } L(\xi\eta)$, les $L(x)$ sont auto-adjoints pour $\langle , \rangle$ car $\text{Tr } L(\xi\eta)$ est associative : le résultat découle du lemme et du théorème précédents.

Réciproquement, si la forme g ainsi construite est pseudo-riemannienne, les $P(x)$ ($\forall x \in \mathcal{U}$) sont auto-adjoints, donc les $L(x)$ ($\forall x \in \mathcal{U}$) sont auto-adjoints pour $\langle , \rangle$ d'après 1.7. La forme $\langle , \rangle$ est donc associative : d'après [1], page 42, on a alors $\langle \xi, \eta \rangle = k \text{Tr } L(\xi\eta)$.

Q.E.D.

COROLLAIRE. - Soit $\mathcal{U}$ une algèbre de Jordan semi-simple.

La métrique définie par $g_y(\xi, \eta) = \text{Tr } L[(P(y^{-1})\xi)\eta]$ est pseudo-riemannienne sur $\text{Inv}(\mathcal{U})$ et compatible avec les symétries.

Démonstration. - En fait, dans la démonstration ci-dessus, la simplicité de $\mathcal{U}$ n'intervient que pour établir l'unicité, à une constante multiplicative près, de la forme $\langle , \rangle$.

Si $\mathcal{U} = \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{U}_i$, où les $\mathcal{U}_i$ sont simples et $\mathcal{U}_i \mathcal{U}_j = 0$ pour $i \neq j$,

$\text{Inv}(\mathcal{U})$ est isomorphe au produit des variétés pseudo-riemanniennes symétriques $\text{Inv}(\mathcal{U}_i)$.

Q.E.D.

(1.9) Lorsque $\mathcal{U}$ n'est pas semi-simple, le corollaire (1.8) ne permet plus d'obtenir une métrique, puisque la trace est alors dégénérée. Nous allons construire un exemple d'algèbre de Jordan non semi-simple telle que l'espace symétrique $\text{Inv}(\mathcal{U})$ admette cependant une métrique pseudo-riemannienne comme en (1.7).

Pour cela sur l'ensemble $A = \mathbb{R}^2$ considérons la loi :

$$(\lambda, \mu)(\lambda', \mu') = (\lambda\lambda', \lambda\mu' + \lambda'\mu)$$

Cette loi fait de A une algèbre associative et commutative : en réalité A est l'algèbre obtenue par l'adjonction de l'élément neutre $(1, 0)$ à l'algèbre associative et commutative triviale dont le produit est $(0, \mu)(0, \mu') = (0, 0)$.

Par ailleurs $(0, \mu)(\lambda', \mu') = (0, \lambda'\mu)$ et $L(0, \lambda'\mu)$ a pour matrice, dans la base canonique, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda'\mu & 0 \end{pmatrix}$: donc $\text{Tr } L((0, \mu)(\lambda', \mu')) = 0 \ (\forall (\lambda', \mu'))$ et donc A n'est pas semi-simple en tant qu'algèbre de Jordan.

Posons $e = (1, 0)$ et $a = (0, 1)$.

Soit $\langle, \rangle$ la forme bilinéaire symétrique non dégénérée définie par :

$$\begin{aligned} \langle e+a, e+a \rangle &= -1 \\ \langle e, e \rangle &= 1 \\ \langle e+a, e \rangle &= 0 \end{aligned}$$

On déduit que : $\langle a, e \rangle = -1$ et $\langle a, a \rangle = 0$.

Soit $x_i = \lambda_i e + \mu_i a$.

Alors :

$$\begin{aligned} \langle x_1 x_2, x_3 \rangle &= \langle \lambda_1 \lambda_2 e + (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) a, \lambda_3 e + \mu_3 a \rangle = \\ &= \langle \lambda_1 \lambda_2 e, \lambda_3 e \rangle + \langle \lambda_1 \lambda_2 e, \mu_3 a \rangle + \langle (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) a, \lambda_3 e \rangle \\ &+ \langle (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) a, \mu_3 a \rangle = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_2 \mu_3 - \lambda_1 \mu_2 \lambda_3 - \mu_1 \lambda_2 \lambda_3. \end{aligned}$$

Or cette expression est invariante par permutation des indices 2 et 3 ; donc $\langle x_1 x_2, x_3 \rangle = \langle x_1 x_3, x_2 \rangle = \langle x_2, x_1 x_3 \rangle$. Par conséquent, $L(x)$ est auto-adjoint pour $\langle, \rangle$, $(\forall x \in A)$ et donc $P(x)$ est aussi auto-adjoint

pour $<, >$ d'après le lemme (1.7). Aussi le théorème (1.7) est applicable, et $g_y(\xi, \eta) = \langle P(y^{-1})\xi, \eta \rangle$ fournit une métrique pseudo-riemannienne au-dessus de $\text{Inv}(A)$ compatible avec les symétries.

En fait, $\text{Inv}(A)$ contient deux composantes connexes : l'une, notée $\text{Inv}_e(A)$, est constituée par les couples (λ, μ) avec $\lambda > 0$ ($\forall \mu$) et l'autre par les couples (λ, μ) avec $\lambda < 0$ ($\forall \mu$). L'application $x \mapsto -x$ est un isomorphisme de variété pseudo-riemannienne symétrique entre ces deux composantes connexes.

Soit $\mathbb{R}^2$ rapporté à une base $\{e_1, e_2\}$, muni de sa structure d'espace symétrique habituelle ($S(x)y = 2x - y$). Alors l'application de $\text{Inv}_e(A)$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(\lambda, \mu) = (\text{Log } \lambda)e_1 + \frac{\mu}{\lambda} e_2$$

est un isomorphisme d'espace symétrique.

Toutes les métriques pseudo-riemanniennes compatibles avec la structure d'espace symétrique de $\mathbb{R}^2$ sont de la forme

$$\langle X, Y \rangle = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha\gamma - \beta^2 \neq 0$, si $X = x_1e_1 + x_2e_2$ et $Y = y_1e_1 + y_2e_2$.

Par ailleurs la matrice M de $D_x f$, exprimée dans la base canonique de A d'une part, et la base $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ d'autre part, est :

$$M = \begin{pmatrix} 1/\lambda & 0 \\ -\frac{\mu}{\lambda^2} & 1/\lambda \end{pmatrix} \text{ pour } x = (\lambda, \mu)$$

Utilisant le fait que toute métrique pseudo-riemannienne g compatible sur $\text{Inv}_e(A)$ donne lieu à une métrique compatible h sur $\mathbb{R}^2$ par la formule

$$h_{f(x)}(D_x f(\xi), D_x f(\eta)) = g_x(\xi, \eta)$$

il s'ensuit que toutes les métriques g_x compatibles sur $\text{Inv}_e(A)$ sont définies, dans la base canonique de A , par une matrice de la forme :

$${}^t_M \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\lambda^2} - \frac{2\mu\beta}{\lambda^3} + \frac{\gamma\mu^2}{\lambda^4} & \frac{\beta}{\lambda^2} - \frac{\mu\gamma}{\lambda^3} \\ \frac{\beta}{\lambda^2} - \frac{\mu\gamma}{\lambda^3} & \frac{\gamma}{\lambda^2} \end{pmatrix}$$

avec $x = (\lambda, \mu)$ et $\alpha\gamma - \beta^2 \neq 0$.

La métrique $g_x \langle \xi, \eta \rangle = \langle P(x^{-1})\xi, \eta \rangle$ construite plus haut a pour matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda^2} + \frac{\mu}{\lambda^3} & -\frac{\lambda^2}{2} \\ -\frac{\lambda^2}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Elle induit donc sur $\mathbb{R}^2$ la métrique de matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$, et toute

métrique g' obtenue par le procédé $g'_x(\xi, \eta) = \langle P(x^{-1})\xi, \eta \rangle$ est proportionnelle à g .

2. LE CAS DES ALGÈBRES DE JORDAN DE FORME RÉELLE.

(2.1) DEFINITION. - Une algèbre de Jordan est dite de forme réelle si elle vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :

a) $x^2 + y^2 = 0$ implique $x = y = 0$.

b) la forme bilinéaire $\langle x, y \rangle = \text{Tr } L(xy)$ est définie positive.

Une algèbre de Jordan de forme réelle possède un élément neutre ([1], page 320) et est semi-simple ([1], page 319), mais pour $y \in \text{Inv}(\mathcal{U})$, g_y définie en (1.8) n'est pas nécessairement définie positive, en raison des valeurs propres négatives possibles pour $P(y^{-1})$: $\text{Inv}(\mathcal{U})$ n'est pas riemannien symétrique, mais pseudo-riemannien symétrique.

(2.2) Classification. - On peut établir ([1], page 331) que toute algèbre de Jordan simple de forme réelle est isomorphe à l'une de celles énumérées ci-dessous, où deux distinctes d'entre elles ne sont pas isomorphes :

a) Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ muni d'une forme bilinéaire symétrique définie positive notée $\{, \}$. L'ensemble $\mathcal{U} = \mathbb{R} \times E$ avec la loi de composition $(\lambda, x)(\mu, y) = (\lambda\mu + \{x, y\}, \lambda y + \mu x)$ est une algèbre de Jordan de forme réelle. Deux algèbres construites par ce procédé sont distinctes si leurs dimensions diffèrent.

b) L'ensemble $\mathcal{H}_r(K)$ des matrices (r, r) avec $r \geq 3$ et $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, hermitiennes pour l'involution du corps considéré, muni du produit

$AB = \frac{1}{2} (A \circ B + B \circ A)$ où $\circ$ désigne le produit habituel des matrices, est une algèbre de Jordan de forme réelle.

c) $\mathcal{H}_3(\mathbb{O})$ est une algèbre de Jordan de forme réelle avec les mêmes conditions qu'en b).

$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ et $\mathbb{O}$ désignent respectivement le corps des réels, le corps des complexes, le corps des quaternions et l'algèbre des octonions.

(2.3) Si $\mathcal{U}$ est une algèbre de Jordan, un élément non nul c de $\mathcal{U}$ est appelé un *idempotent* si $c^2 = c$, et un idempotent c est dit *primitif* si $c \neq c_1 + c_2$, quels que soient les idempotents c_1 et c_2 .

Un système total orthogonal d'idempotents primitifs (en abrégé s.t.o.i.p.) est la donnée de r idempotents primitifs c_i vérifiant $c_i c_j = 0$

pour $i \neq j$ et $\sum_{i=1}^r c_i = e$.

On suppose que $\mathcal{U}$ est de forme réelle.

Alors r est un invariant de $\mathcal{U}$ appelé le *degré* de $\mathcal{U}$, noté $\deg(\mathcal{U})$ et nous avons : dans le cas (2.2) a), $\deg(\mathcal{U}) = 2$ pour $E \neq \{0\}$ (sinon $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ et $\deg \mathcal{U} = 1$) ; dans le cas (2.2) b), $\deg(\mathcal{U}) = r$; dans le cas (2.2) c), $\deg(\mathcal{U}) = 3$.

Pour tout x de $\mathcal{U}$, il existe au moins un s.t.o.i.p. $(c_i)_{1 \leq i \leq r}$ tel que $x = \sum_{i=1}^r \lambda_i c_i$. En dépit de la non-unicité éventuelle de ce s.t.o.i.p., on a les propriétés suivantes ([3]) :

a) x est inversible si et seulement si $\lambda_i \neq 0$ ($\forall i$), et

$$x^{-1} = \sum_{i=1}^r 1/\lambda_i c_i.$$

b) le nombre $\sum_{i=1}^r \lambda_i$ ne dépend pas du s.t.o.i.p. choisi ; on le désigne par $\text{Tr}(x)$ et on l'appelle la trace de x ; dans les cas (2.2) b) et c), c'est la trace habituelle des matrices considérées. On peut alors établir directement que la forme bilinéaire symétrique $\langle x, y \rangle = \text{Tr}(xy)$ est définie positive et que la forme linéaire $x \mapsto \text{Tr}(x)$ est associative, ce qui découle aussi du fait que $\text{Tr}(x) = a \text{Tr} L(x)$, où a est un nombre réel positif ne dépendant que de $\mathcal{U}$.

c) Le nombre $\prod_{i=1}^r \lambda_i$ ne dépend pas du s.t.o.i.p. choisi ; on le désigne par $\det(x)$ et on l'appelle le déterminant de x ; dans le cas (2.2) b) c'est le déterminant habituel des matrices considérées. $\det$ est une application C^∞ de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$. C'est le déterminant de l'endomorphisme $P(x)$ élevé à une puissance ne dépendant que de $\mathcal{U}$.

Dans toute la suite, $\mathcal{U}$ désignera une algèbre de Jordan de forme réelle, et la métrique pseudo-riemannienne g considérée sur $\text{Inv}(\mathcal{U})$ sera celle définie par $g_y(\xi, \eta) = \text{Tr}(P(y^{-1})\xi)\eta$. Cette métrique est compatible avec les symétries car $x \mapsto \text{Tr}(x)$ est associative ; on a de plus $g_x(\xi, \eta) = D_x^2(-\text{Log}|\det(x)|)$ (D_x^2 désignant la différentielle seconde en x).

(2.4) Soit $x \in \text{Inv}(\mathcal{U})$, $x = \sum_{i=1}^r \lambda_i c_i$. Les nombres λ_i sont non nuls : suppo-

sons que k d'entre eux soient strictement négatifs, les $(r-k)$ autres étant strictement positifs. On peut établir que k ne dépend que de x , et pas du s.t.o.i.p. choisi ; aussi l'ensemble $\text{Inv}_k(\mathcal{U})$ des x de $\text{Inv}(\mathcal{U})$ qui s'écrivent sous la forme $x = \sum_{i=1}^r \lambda_i c_i$ avec k des λ_i strictement négatifs et $(r-k)$ des λ_i strictement positifs est bien défini.

THEOREME. - Les $\text{Inv}_k(\mathcal{U})$ sont explicitement les composantes connexes de $\text{Inv}(\mathcal{U})$, et $x \mapsto -x$ est un isomorphisme de variété pseudo-riemannienne symétrique de $\text{Inv}_k(\mathcal{U})$ sur $\text{Inv}_{(r-k)}(\mathcal{U})$.

La démonstration de ce résultat se trouve en [3] page 54.

(2.5) Soit M un espace symétrique, et N une sous-variété de M . Si pour tout x de N , $S(x)N \subset N$, N est un espace symétrique pour la loi $(x,y) \mapsto S(x)y$ de $N \times N$ dans N : on dit que N est un sous-espace symétrique de M .

On a le résultat suivant, analogue à un théorème bien connu sur les groupes de Lie :

THEOREME. - Soit M un espace symétrique, et N un sous-ensemble fermé de M tel que $S(x)N \subset N$ pour $x \in N$. Alors N est un sous-espace symétrique de M .

(Voir [2], volume 1, page 125, théorème (1.7)).

Supposons que M admette une métrique pseudo-riemannienne g compatible avec les symétries. Si la restriction g_x/N de g_x à $T_x N$, pour $x \in N$, est non dégénérée, ceci reste vrai pour tout point de N , et g/N fournit une métrique pseudo-riemannienne sur N compatible avec les symétries : on dit que $(N, g/N)$ est une sous-variété pseudo-riemannienne symétrique de (M, g) .

Remarquons que tout sous-espace symétrique de (M, g) n'est pas nécessairement une sous-variété pseudo-riemannienne symétrique : la condition de non dégénérescence n'est automatiquement remplie que si (M, g) est une variété riemannienne.

(2.6) THEOREME. - Posons $M_k = \{x \in \text{Inv}_k(\mathcal{U}) \mid \det(x) = (-1)^k\}$. M_k est une sous-variété pseudo-riemannienne symétrique connexe de $\text{Inv}_k(\mathcal{U})$.

Démonstration. - M_k est l'image réciproque de $(-1)^k$ par le déterminant qui est C^∞ : donc M_k est fermé dans $\text{Inv}_k(\mathcal{U})$.

Pour $x, y \in \text{Inv}_k(\mathcal{U})$, $P(x)y^{-1} \in \text{Inv}_k(\mathcal{U})$. Mais comme $\det(P(x)y^{-1}) = \det(x^2)\det(y^{-1})$ ([3] page 66, corollaire 2), si x et y appartiennent à M_k , il vient $\det(x^2) = 1$ et $\det(y^{-1}) = \frac{1}{\det y} = (-1)^k$, donc $\det(P(x)y^{-1}) = (-1)^k$ et $P(x)y^{-1}$ appartient à M_k ; M_k est un sous-espace symétrique de $\text{Inv}_k(\mathcal{U})$ d'après (2.5).

$\text{Inv}_k(\mathcal{U})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$: pour x et y dans M_k , il existe une courbe continue $x(t)$ joignant x à y dans $\text{Inv}_k(\mathcal{U})$. Alors

$x'(t) = \frac{x(t)}{(|\det(x(t))|)^{1/r}}$ est une courbe continue joignant x à y dans M_k :

M_k est donc connexe.

Soit $x \in M_k$, $x = \sum_{i=1}^r \lambda_i c_i$, on a $T_x M_k = \{\xi \in \mathcal{U} \mid D_x \det(\xi) = 0\}$.

Considérons la décomposition de Braun-Koecher ([3], page 49) par rapport au s.t.o.i.p. $(c_i)_{1 \leq i \leq r}$ où c_{ij} désignera une base des $\mathcal{U}_{ij} = \mathcal{U}_{1/2}(c_i) \cap \mathcal{U}_{1/2}(c_j)$ pour $i < j$.

Il vient :

$$\frac{\partial_x \det}{\partial c_j} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\prod_{i \neq j} \lambda_i)(\lambda_j + h) - \prod_{i=1}^r \lambda_i}{h} = \prod_{i \neq j} \lambda_i.$$

Par ailleurs, on sait ([3], page 59) que

$$\det(x + h c_{ij}) = (1 - \frac{h^2}{2} \frac{\text{Tr } c_{ij}^2}{\lambda_i \lambda_j}) \det x.$$

Aussi :

$$\frac{\partial_x \det}{\partial c_{ij}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - \frac{h^2}{2} \frac{\text{Tr } c_{ij}^2}{\lambda_i \lambda_j}) \det x - \det x}{h} = 0$$

Soit maintenant $w = \sum_{i=1}^k -c_i + \sum_{i=k+1}^r c_i$. Par construction, w appartient à M_k et $w^2 = e$.

Il vient alors $\frac{\partial_w \det}{\partial c_i} = \varepsilon$ pour $1 \leq i \leq k$ et $\frac{\partial_w \det}{\partial c_i} = -\varepsilon$ pour

$k+1 \leq i \leq r$, avec $\varepsilon = +1$ si k est impair et $\varepsilon = -1$ si k est pair : dans tous les cas, $\xi \in T_{\mathbf{w}^k} M_k$ si et seulement si $\xi = \sum_{i=1}^r \mu_i c_i + \sum_{i < j} \mu_{ij} c_{ij}$ avec $\sum_{i=1}^k \mu_i = \sum_{j=k+1}^r \mu_j$, les coefficients μ_{ij} n'intervenant pas.

Autrement dit, soit $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1(c) \oplus \mathcal{U}_{1/2}(c) \oplus \mathcal{U}_0(c)$ la décomposition de Peirce ([1], page 49, ou [3], page 8) de $\mathcal{U}$ par rapport à l'idempotent $c = \frac{e-w}{2}$ associé à l'involutif w . Tout élément ξ de $\mathcal{U}$ s'écrit alors $\xi = \xi_1 + \xi_{1/2} + \xi_0$ avec $\xi_1 \in \mathcal{U}_1$, $\xi_{1/2} \in \mathcal{U}_{1/2}$ et $\xi_0 \in \mathcal{U}_0$: pour que ξ appartienne à $T_{\mathbf{w}^k} M_k$, il faut et il suffit que $\text{Tr}(\xi_1) = \text{Tr}(\xi_0)$.

On suppose que ξ appartient à $T_{\mathbf{w}^k} M_k$. Nous voulons trouver $\eta \in T_{\mathbf{w}^k} M_k$ tel que $\text{Tr}(P(w^{-1})\xi)\eta \neq 0$, afin d'établir que $g_{\mathbf{w}}/M_k$ est non dégénérée.

On a $P(w^{-1})\xi = P(w)\xi = \xi_1 - \xi_{1/2} + \xi_0$.

Si $\xi_{1/2} \neq 0$, $\text{Tr}((\xi_1 - \xi_{1/2} + \xi_0)\xi_{1/2}) = \text{Tr}(\xi_1 \xi_{1/2}) + \text{Tr}(\xi_0 \xi_{1/2}) - \text{Tr}(\xi_{1/2}^2)$. On sait que $\text{Tr}(\xi_1 \xi_{1/2}) = \text{Tr}(\xi_0 \xi_{1/2}) = 0$, car $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_{1/2}$ et $\mathcal{U}_0$ sont orthogonales deux à deux pour $\text{Tr}(\xi\eta)$. Donc $\text{Tr}(P(w^{-1})\xi)\eta = -\text{Tr}(\xi_{1/2}^2) \neq 0$ car Tr est définie positive : comme $\xi_{1/2} \in T_{\mathbf{w}^k} M_k$, nous pouvons dans ce cas choisir $\eta = \xi_{1/2}$.

Si $\xi_{1/2} = 0$, on a $\text{Tr}(P(w^{-1})\xi)\xi = \text{Tr}(\xi^2)$. Comme Tr est définie positive, si $\xi \neq 0$ on peut choisir $\eta = \xi$, et donc $g_{\mathbf{w}}/M_k$ est non dégénérée.

Par conséquent, M_k est une sous-variété pseudo-riemannienne symétrique de $\text{Inv}_k(\mathcal{U})$.

Q.E.D.

(2.7) Si M_1 et M_2 sont deux espaces symétriques (resp. deux variétés pseudo-riemanniennes symétriques), la variété produit $M_1 \times M_2$ se trouve naturellement d'une structure d'espace symétrique (resp. de variété pseudo-riemannienne symétrique). En fait, l'étude de M se réduit à celle de M_1 et M_2 , et le problème est plutôt, lorsque l'on a M , de trouver M_1 et M_2 tels que $M = M_1 \times M_2$.

Soit M l'espace symétrique produit des deux espaces symétriques M_1 et M_2 , et soit g une métrique pseudo-riemannienne sur M compatible avec les symétries de M . (M, g) est alors une variété pseudo-riemannienne symé-

trique, mais peut-on l'obtenir comme le produit de deux variétés pseudo-riemanniennes symétriques M'_1 et M'_2 ?

Il est naturel de regarder si M_1 et M_2 conviennent.

Soit $e = (e_1, e_2)$ ($e \in M$, $e_1 \in M_1$, $e_2 \in M_2$). Les espaces symétriques M_1 et M_2 peuvent être identifiés aux sous-espaces symétriques $M_1 \times e_2$ et $e_1 \times M_2$ de M ; si par cette identification, M_1 et M_2 deviennent deux sous-variétés pseudo-riemanniennes symétriques de M , et si de plus $Te_1 M_1$ est orthogonal à $Te_2 M_2$ pour g_e , alors (M, g) est le produit des deux variétés pseudo-riemanniennes symétriques M_1 et M_2 .

Toutefois, si M est simplement connexe, le fait que g_e ne soit pas dégénérée sur l'un seulement des deux espaces tangents permet de conclure que M est le produit de deux variétés pseudo-riemanniennes symétriques, mais ce n'est pas celui que nous avons au départ si les autres conditions ne sont pas remplies.

Par exemple, dans l'espace symétrique usuel $\mathbb{R}^2$ ($S(x)y = 2x - y$), toute droite est un sous-espace symétrique et $\mathbb{R}^2$ est le produit de deux droites non parallèles.

Toute forme bilinéaire symétrique non dégénérée g sur $\mathbb{R}^2$ fournit une métrique pseudo-riemannienne compatible avec les symétries : une droite est une sous-variété pseudo-riemannienne symétrique de $\mathbb{R}^2$ si g n'est pas dégénérée sur cette droite, et $(\mathbb{R}^2, g)$ est le produit de deux telles droites orthogonales. En effet, si g est de signature $(1, 1)$, l'espace symétrique $\mathbb{R}^2$ peut s'obtenir comme le produit d'une droite d'isotropie et d'une autre droite non parallèle à celle-ci.

THEOREME. - Soit $\mathbb{R}$ muni de sa structure de variété pseudo-riemannienne habituelle. La variété pseudo-riemannienne symétrique $\text{Inv}_k \mathcal{U}$ est le produit des deux variétés pseudo-riemanniennes $\mathbb{R}$ et M_k .

Démonstration. - Soit $w = \sum_{i=1}^k (-c_i) + \sum_{i=k+1}^r c_i$, où $(c_i)_{1 \leq i \leq r}$ est un s.t.o.i.p. w appartient à $\text{Inv}_k \mathcal{U}$ par construction, et l'ensemble $E = \{\lambda w \mid \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0\}$ est inclus dans $\text{Inv}_k \mathcal{U}$ par connexité.

E est fermé dans $\text{Inv}_k \mathcal{U}$, et comme $P(\lambda w)(\mu w)^{-1} = \lambda^2 P(w) \frac{w}{\mu} = \frac{\lambda^2}{\mu} w$, E est un sous-espace symétrique de $\text{Inv}_k \mathcal{U}$ d'après (2.5).

On a $T_w E = \mathbb{R}_w$ et $\text{Tr}(P(w^{-1})(\lambda w)(\mu w)) = \text{Tr}(\lambda \mu (w^2)) = \text{Tr}(\lambda \mu) e = r \lambda \mu$ et donc E est une sous-variété pseudo-riemannienne symétrique de $\text{Inv}_k \mathcal{U}$, car g_w/E est non dégénérée.

w appartient aussi à M_k par construction : soit $\xi \in T_{w_k} M_k$, $\xi = \xi_1 + \xi_{1/2} + \xi_0$ comme dans la démonstration de (2.6). Il vient $\text{Tr}([P(w)(\lambda w)]\xi) = \lambda \text{Tr}(w\xi) = \lambda \text{Tr}(\xi_1 - \xi_0) = \lambda \text{Tr}(\xi_1) - \lambda \text{Tr}(\xi_0) = 0$, car $\text{Tr}(\xi_1) = \text{Tr}(\xi_0)$ par définition de $T_{w_k} M_k$ et $w\xi = \xi_1 - \xi_0$ d'après les règles de multiplication dans la décomposition de Peirce.

$T_w E$ et $T_{w_k} M_k$ sont donc orthogonaux pour g_w : par conséquent $\text{Inv}_k \mathcal{U}$ est le produit de E et de M_k .

Soit i l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $i(\lambda w) = \text{Log } \lambda$. Alors i est trivialement différentiable et bijectif, et de $i(P(\lambda w)(\mu w)^{-1}) = i(\frac{\lambda^2}{\mu} w) = 2 \text{Log } \lambda - \text{Log } \mu$, il s'ensuit que i est un isomorphisme d'espace symétrique.

$$\begin{aligned} \text{On a : } g_{\lambda w}(\lambda_1 w, \lambda_2 w) &= \text{Tr}[P(\lambda w)^{-1}(\lambda_1 w)](\lambda_2 w) \\ &= \text{Tr}[P(\frac{w}{\lambda})(\lambda_1 w)](\lambda_2 w) \\ &= \text{Tr}(\frac{\lambda_1}{\lambda^2} w)(\lambda_2 w) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda^2} \text{Tr}(e) = \frac{r \lambda_1 \lambda_2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Par ailleurs $D_{\lambda w} i(\lambda_1 w) = \frac{\lambda_1}{\lambda}$. Donc i est un isomorphisme de variété pseudo-riemannienne symétrique en choisissant sur $\mathbb{R}$ la métrique $(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto r \lambda_1 \lambda_2$.

Q.E.D.

(2.8) REMARQUE. - De façon plus générale, soit $\mathcal{U}$ une algèbre de Jordan de dimension finie sur $\mathbb{R}$ avec un élément neutre, et C une composante connexe de $\text{Inv}(\mathcal{U})$. Alors $M = \{x \in C \mid |\det P(x)| = 1\}$ est un sous-espace symétrique connexe fermé de $\text{Inv}(\mathcal{U})$. Si $\mathcal{U}$ est semi-simple, C est une sous-variété pseudo-riemannienne symétrique connexe fermée de $\text{Inv}(\mathcal{U})$ muni de la métrique (1.8).

3. LES GROUPES DE TRANSVECTIONS.

(3.1) DEFINITION. - On désigne par $P(M_k)$ le groupe d'automorphismes de l'espace vectoriel $\mathcal{U}$ engendré par les $P(x)$ pour $x \in M_k$.

En raison de l'égalité $P(M_k) = P(M_{r-k})$ provenant de l'isomorphisme $x \mapsto -x$ de M_k sur M_{r-k} (pour $0 \leq k \leq r$), nous limiterons notre étude aux valeurs entières de k comprises entre 0 et $\frac{r}{2}$.

(3.2) $P(xy)$ n'est pas toujours égal à $P(x)P(y)$, car $\mathcal{U}$ n'est pas associative. Toutefois, si x, y et xy commutent deux à deux, alors $P(xy) = P(x)P(y)$ ([1], page 148, Satz 1.7).

Rappelons que par définition on dit que x et y commutent si $L(x)L(y) = L(y)L(x)$.

LEMME. - Soit $x = \sum_{i=1}^r \lambda_i c_i$ et $y = \sum_{i=1}^r \mu_i c_i$ (x et y peuvent s'écrire grâce au même s.t.o.i.p.). Alors $P(xy) = P(x)P(y)$.

Démonstration. - $xy = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mu_i c_i$. Donc x, y et xy peuvent s'écrire grâce au même s.t.o.i.p. : il nous suffit d'établir que x et y commutent pour pouvoir appliquer la proposition rappelée.

Dans une base de Braun-Koecher ([3], page 49) par rapport au s.t.o.i.p. $(c_i)_{1 \leq i \leq r}$ où c_{ij} désignera une base des $\mathcal{U}_{ij} = \mathcal{U}_{1/2}(c_i) \cap \mathcal{U}_{1/2}(c_j)$ pour $i < j$, soit $z = \sum_{i=1}^r v_i c_i + \sum_{i < j} v_{ij} c_{ij}$.

Il vient :

$$xz = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i c_i + \sum_{i < j} \frac{(\lambda_i + \lambda_j)}{2} v_{ij} c_{ij}$$

et

$$y(xz) = \sum_{i=1}^r \mu_i \lambda_i v_i c_i + \sum_{i < j} \frac{(\mu_i + \mu_j)}{2} \frac{(\lambda_i + \lambda_j)}{2} v_{ij} c_{ij}$$

Donc :

$$\begin{aligned} y(xz) &= \sum_{i=1}^r \lambda_i \mu_i v_i c_i + \sum_{i < j} \frac{(\lambda_i + \lambda_j)}{2} \frac{(\mu_i + \mu_j)}{2} v_{ij} c_{ij} \\ &= x(yz) \end{aligned}$$

et $L(y)L(x) = L(x)L(y)$.

Q.E.D.

(3.3) LEMME. - On a les inclusions suivantes :

$$P(M_0) \subseteq P(M_2) \subseteq P(M_k) \subseteq P(M_1) \text{ pour } 1 \leq k \leq \frac{r}{2}.$$

Démonstration :

a) Soit $x \in M_0$, $x = \sum_{i=1}^r \lambda_i c_i$. Par définition de M_0 , tous les λ_i sont strictement positifs, et $x' = -\lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_2 + \sum_{i=3}^r \lambda_i c_i$ appartient à M_2 par construction, de même que

$$w = -c_1 - c_2 + \sum_{i=3}^r c_i,$$

et $wx' = x$. Appliquons le lemme (3.2), il vient $P(w)P(x') = P(x)$, ce qui prouve que $P(M_0) \subseteq P(M_2)$.

b) Soit $x \in M_2$: on peut supposer que $x = -\lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_2 + \sum_{i=3}^r \lambda_i c_i$ avec des λ_i ($1 \leq i \leq r$) strictement positifs.

$$\text{Soit } x' = -\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 - \sum_{i=3}^{k+1} \lambda_i c_i + \sum_{i=k+2}^r \lambda_i c_i \text{ et}$$

$$w = c_1 - c_2 - \sum_{i=3}^{k+1} c_i + \sum_{i=k+2}^r c_i. \quad x' \text{ et } w \text{ appartiennent à } M_k, \text{ et } x'w = x.$$

Appliquons le lemme (3.2), il vient $P(x')P(w) = P(x)$, ce qui prouve que $P(M_2) \subseteq P(M_k)$.

c) Soit $x \in M_k$, $x = \sum_{i=1}^r \lambda_i c_i$. Compte tenu de la définition de M_k , on peut supposer que $\lambda_i < 0$ pour $1 \leq i \leq k$ et $\lambda_i > 0$ pour $(k+1) \leq i \leq r$.

$$\text{Posons } w_p = \sum_{i=1}^r \varepsilon_i c_i \text{ où } \varepsilon_p = -1 \text{ et } \varepsilon_i = +1 \text{ pour } i \neq p.$$

Les w_p appartiennent à M_1 par construction. Soit

$$x' = \lambda_1 c_1 + \sum_{i=2}^r |\lambda_i| c_i : x' \text{ appartient à } M_1, \text{ et } \left(\prod_{p=2}^k w_p \right) x' = x. \text{ En appliquant plusieurs fois le lemme (3.2), il vient } \left(\prod_{p=2}^k P(w_p) \right) \circ P(x') = P(x)$$

ce qui prouve que $P(M_k) \subseteq P(M_1)$.

Q.E.D.

(3.4) LEMME. - Si r est impair, il y a au plus deux groupes distincts $P(M_k)$, à savoir $P(M_0)$ et $P(M_1)$. On a :

$$P(M_k) = P(M_1) \quad (1 \leq k \leq \frac{r}{2}) \quad \text{et} \quad P(M_0) \subseteq P(M_1).$$

Démonstration. - Soit $r = 2p+1$. Pour $x \in M_1$, on suppose que

$$x = \sum_{i=1}^{2p} \lambda_i c_i - \lambda_r c_r \quad \text{où } \lambda_i \ (1 \leq i \leq r) \text{ est strictement positif. Posons}$$

$$w_q = \sum_{i=1}^r \varepsilon_i c_i, \text{ avec } \varepsilon_{2q} = \varepsilon_{2q-1} = -1 \text{ et } \varepsilon_i = +1 \text{ dans les autres cas.}$$

Par construction, les w_q appartiennent à M_2 . Soit $x' = \sum_{i=1}^r \lambda_i c_i : x'$ appartient à M_0 , et $(\prod_{q=1}^p w_q)x' = x$. Appliquant le lemme (3.2), il vient

$(\prod_{q=1}^p P(w_q)) P(x') = P(-x)$. Or $P(-x) = P(x)$ et puisque $P(x') \in P(M_0) \subseteq P(M_2)$ d'après le lemme (3.3) il s'ensuit que $P(M_1) \subseteq P(M_2)$, et on a alors :

$$P(M_1) = P(M_2) = P(M_k) \quad \text{pour } (1 \leq k \leq \frac{r}{2}).$$

Q.E.D.

(3.5) LEMME. - Si r est pair, il y a au plus trois groupes distincts $P(M_k)$, à savoir $P(M_0)$, $P(M_1)$ et $P(M_2)$.

Pour k impair compris entre 1 et $r/2$, on a :

$$P(M_k) = P(M_1)$$

Pour k pair compris entre 1 et $r/2$, on a :

$$P(M_k) = P(M_2).$$

Par ailleurs :

$$P(M_0) \subseteq P(M_2) \subseteq P(M_1).$$

Démonstration. - Pour k impair, on suppose que $k = 2p+1$. Soit $x \in M_1$, $x = -\lambda_k c_k + \sum_{i=1}^r \lambda_i c_i$ avec des λ_i strictement positifs ($1 \leq i \leq r$).

Alors $x' = -(\sum_{i=1}^k \lambda_i c_i) + (\sum_{i=k+1}^r \lambda_i c_i)$ appartient à M_k . Considérons

les w_q introduits dans la démonstration du lemme (3.4) : w_q appartient à M_2 , donc $P(w_q) \in P(M_2) \subseteq P(M_k)$ d'après (3.3) et comme $(\prod_{q=1}^p w_q)x' = x$, en appliquant le lemme (3.2), il vient $(\prod_{q=1}^p P(w_q))P(x') = P(x)$, ce qui prouve

que $P(M_1) \subseteq P(M_k)$. De (3.3) on déduit que $P(M_k) = P(M_1)$.

Pour k pair, on suppose que $k=2p$. Soit $x \in M_k$,

$$x = - \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i c_i \right) + \left(\sum_{i=k+1}^r \lambda_i c_i \right) \text{ avec } \lambda_i > 0 \quad (\forall i).$$

Posons $x' = -\lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_2 + \sum_{i=3p}^r \lambda_i c_i : x' \in M_2$, et utilisant les w_q de (3.4), on a $x' \left(\prod_{q=2}^p w_q \right) = x$. Donc d'après (3.2),

$$P(x') \left(\prod_{q=2}^p P(w_q) \right) = P(x) \text{ et } P(M_k) \subseteq P(M_2); \text{ de (3.3) on déduit alors que}$$

$$P(M_k) = P(M_2).$$

Q.E.D.

(3.6) Soit G un groupe de Lie connexe avec un automorphisme involutif σ ; soit G^σ l'ensemble des points de G fixes par σ . On désigne par $(G^\sigma)_0$ la composante de G^σ contenant l'élément neutre de G , et soit H un sous-groupe de G tel que $(G^\sigma)_0 \subset H \subset G^\sigma$; alors H est fermé dans G , et pour deux éléments xH et yH appartenant à la variété $M = G/H$, on pose $S(xH)yH = x\sigma(x)^{-1}\sigma(y)H$. M devient ainsi un espace symétrique connexe.

Réciproquement, soit M un espace symétrique connexe. On appelle *groupe des transvections* et on note $G(M)$ le groupe engendré par les automorphismes de M de la forme $S(x)S(y)$. $G(M)$ a une unique structure de groupe de transformation de Lie de M , pour laquelle G est connexe.

Soit $o \in M$ et $H = \{g \in G(M) | g(o) = o\}$. H est le *groupe d'isotropie* du point de base o .

Alors $g \mapsto \sigma(g) = S(o)gS(o)$ est un automorphisme involutif de $G(M)$ tel que $(G(M)^\sigma)_0 \subset H \subset G(M)^\sigma$, et M est isomorphe à $G(M)/H$ doté de la structure d'espace symétrique définie ci-dessus.

LEMME. - On désigne par $G(M_k)$ le groupe des transvections de M_k .

Alors $G(M_k)$ est le groupe engendré par les $P(x)P(y)$ pour x et y appartenant à M_k . On a $G(M_k) \subseteq P(M_k)$.

Démonstration. - $S(x)S(y)z = P(x)[P(y)z^{-1}]^{-1} = P(x)P(y^{-1})z$ d'après (1.3) 5. L'inclusion $G(M_k) \subseteq P(M_k)$ est évidente.

Q.E.D.

(3.7) THEOREME. - Si r est impair ou si r et k sont pairs, $G(M_k) = P(M_k)$.
 Si r est pair et k impair, $G(M_k) = G(M_1)$ et
 $P(M_2) \subseteq G(M_1) \subseteq P(M_1)$.

Compte tenu des lemmes précédents, on a :

a) si r est impair :

$$G(M_0) = P(M_0)$$

$$G(M_k) = P(M_k) = G(M_1) = P(M_1) \quad (1 \leq k \leq \frac{r}{2})$$

$$G(M_0) \subseteq G(M_1).$$

b) si r est pair :

$$G(M_0) = P(M_0)$$

Pour k pair compris entre 1 et $r/2$:

$$G(M_k) = P(M_k) = G(M_2) = P(M_2).$$

Pour k impair compris entre 1 et $r/2$:

$$P(M_k) = P(M_1)$$

$$G(M_k) = G(M_1)$$

Par ailleurs, on a :

$$P(M_0) \subseteq P(M_2) \subseteq G(M_1) \subseteq P(M_1).$$

Démonstration. - Puisque $e \in M_0$ et $P(e) = \text{Id}_{\mathcal{U}}$, il s'ensuit que
 $P(x)P(e) = P(x)$ et donc $G(M_0) = P(M_0)$.

Dans la démonstration du lemme (3.3. b)), nous avons établi que
 pour $x \in M_2$, $P(x) = P(x')P(w)$ avec x' et w de M_k ; nous pouvons en conclure
 que $P(M_2) \subseteq G(M_k)$.

Si r est impair, on a $P(M_k) = P(M_1)$ ($1 \leq k \leq \frac{r}{2}$) (lemme (3.4.)) et
 de $G(M_k) \subseteq P(M_k)$ il s'ensuit que $G(M_k) = P(M_1)$ et la partie a) du théorème
 est ainsi démontrée.

Si r est pair ainsi que k , de $P(M_k) = P(M_2)$ (lemme (3.5)), on déduit
 l'égalité

$$G(M_k) = P(M_k) = G(M_2) = P(M_2).$$

Les inclusions $P(M_2) \subseteq G(M_1) \subseteq P(M_1)$ étant évidentes ; il reste à établir que si k est impair, (r étant pair) $G(M_k) = G(M_1)$.

Soit $k = 2p+1$. Pour x et y de M , $x = -(\sum_{i=1}^k \lambda_i c_i) + (\sum_{i=k+1}^r \lambda_i c_i)$ et $y = -(\sum_{i=1}^k \mu_i d_i) + (\sum_{i=k+1}^r \mu_i d_i)$ avec λ_i et μ_i strictement positifs, et où $(d_i)_{1 \leq i \leq r}$ désigne un autre s.t.o.i.p., considérons

$$x' = -\lambda_1 c_1 + \sum_{i=2}^r \lambda_i c_i, \quad y' = -\mu_1 d_1 + \sum_{i=2}^r \mu_i d_i, \quad w_1 = c_1 - (\sum_{i=2}^{2p+1} c_i) + (\sum_{i=2p+1}^r c_i)$$

et $w_2 = d_1 - (\sum_{i=2}^{2p+1} d_i) + (\sum_{i=2p+1}^r d_i)$.

$x' \in M_1$, $y' \in M_1$, w_1 et w_2 appartiennent à M_{2p} .

En appliquant le lemme (3.2) on obtient

$$P(w_1)P(x')P(y')P(w_2) = P(x)P(y).$$

Or $P(w_1)$ et $P(w_2)$ appartiennent à $P(M_{2p}) = P(M_2) \subseteq G(M_1)$, $P(x')P(y')$ appartient à $G(M_1)$: ceci prouve que $G(M_k) \subseteq G(M_1)$.

De la même façon, on a

$$P(x')P(y') = P(w_1)P(x)P(y)P(w_2).$$

Or $P(w_1)$ et $P(w_2)$ appartiennent à $P(M_{2p}) = P(M_2) \subseteq G(M_k)$, $P(x)P(y)$ appartient à $G(M_k)$: ceci prouve que $G(M_1) \subseteq G(M_k)$.

Donc $G(M_1) = G(M_k)$ pour $1 \leq k \leq \frac{r}{2}$ et k impair, ce qui achève la démonstration de b).

Q.E.D.

(3.8) Désignons par I l'ensemble des involutifs de $\mathcal{U}$ (i.e. $w \in I \iff w^2 = e$).

On suppose que $w = \sum_{i=1}^r \epsilon_i c_i$, où $(c_i)_{1 \leq i \leq r}$ est un s.t.o.i.p. et les ϵ_i des nombres réels : de $w^2 = \sum_{i=1}^r (\epsilon_i)^2 c_i = e = \sum_{i=1}^r c_i$, on déduit que $\epsilon_i = \pm 1$.

Le nombre k des ϵ_i qui sont égaux à -1 ne dépend que de w ; on l'appelle le *degré* de w .

Soit c un idempotent ; alors c s'écrit au moins d'une façon

$c = \sum_{i=1}^k c_i$, où les c_i sont des idempotents primitifs orthogonaux deux à deux vérifiant $cc_i = c_i$. Le nombre k ne dépend que de c ; on l'appelle le *degré* de c . L'application $w \mapsto \frac{e-w}{e}$ est une bijection de l'ensemble des involutifs sur l'ensemble des idempotents qui conserve le degré.

I est un sous-espace symétrique fermé de $\text{Inv}(\mathcal{Q})$, dont les composantes connexes sont les ensembles I_k , composés des involutifs de degré k .

I_k est une sous-variété pseudo-riemannienne symétrique compacte de M_k , au-dessus de laquelle la métrique est définie négative ([3], page 66).

Désignons par $P(I_k)$ le groupe engendré par les $P(w)$ pour $w \in I_k$, et par $G(I_k)$ le groupe des transvections de I_k .

Les démonstrations conduisant au théorème (3.7) portent uniquement sur le signe des λ_i pour $x = \sum_{i=1}^r \lambda_i c_i$, et non sur leurs valeurs absolues : elles restent valables pour $|\lambda_i| = 1$, ce qui établit le résultat suivant :

THEOREME. - Si r est impair, on a :

$$G(I_0) = P(I_0)$$

$$G(I_k) = P(I_k) = G(I_1) = P(I_1) \quad (1 \leq k \leq \frac{r}{2})$$

$$G(I_0) \subseteq G(I_1)$$

Si r est pair, on a :

$$G(I_0) = P(I_0)$$

Pour k pair compris entre 1 et $r/2$:

$$G(I_k) = P(I_k) = G(I_2) = P(I_2)$$

Pour k impair compris entre 1 et $r/2$:

$$P(I_k) = P(I_1)$$

$$G(I_k) = G(I_1)$$

Par ailleurs, on a :

$$P(I_0) \subseteq P(I_2) \subseteq G(I_1) \subseteq P(I_1).$$

LES MUTATIONS D'UNE ALGÈBRE DE JORDAN DE FORME REELLE

★ ☆ ★

(PROJET D'ARTICLE)

PLAN :

- & 1. Les mutations d'une algèbre de Jordan.
- & 2. Le cas des algèbres de Jordan de forme réelle.
- & 3. Applications géométriques.

RESUME ET ENONCE DES PRINCIPAUX THEOREMES :

& 1. Les mutations d'une algèbre de Jordan :

Soit $\mathcal{U}$ une algèbre de Jordan. Pour $f \in \mathcal{U}$, posons

$$x \underset{f}{\perp} y = x(yf) + y(xf) - (xy)f$$

Alors $\mathcal{U}$ est une algèbre de Jordan pour le produit $x \underset{f}{\perp} y$, appelée la mutation de $\mathcal{U}$ par rapport à f et notée $\mathcal{U}_f$.

On rappellera ici les propriétés connues des mutations pour établir le résultat nouveau suivant :

PROPOSITION 1. - *Si $\mathcal{U}$ est de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et dotée d'un élément neutre e , et si x et y appartiennent à la même composante connexe de $\text{Inv}(\mathcal{U})$, alors $\mathcal{U}_x$ et $\mathcal{U}_y$ sont isomorphes.*

Soit $\mathcal{U}_{\mathbb{C}} = \mathcal{U} \oplus i\mathcal{U}$ la complexifiée de $\mathcal{U}$ et c un idempotent de $\mathcal{U}$.

Le sous-espace vectoriel $\mathcal{U}_1(c) \oplus i\mathcal{U}_{1/2}(c) \oplus \mathcal{U}_0(c)$ de $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}$ est une sous-algèbre de Jordan réelle de $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}$ ($\mathcal{U}_1(c)$, $\mathcal{U}_{1/2}(c)$ et $\mathcal{U}_0(c)$ désignent la décomposition de Peirce de $\mathcal{U}$ par rapport à l'idempotent c).

Soit $w = 2c - e$ l'involutif associé à c .

On a alors le résultat fondamental suivant :

THEOREME 2. - Soit $x \in \mathcal{U}$, $x = x_1 + x_{1/2} + x_0$ dans la décomposition de Peirce par rapport à c . L'application h définie par

$$h(x) = x_1 + ix_{1/2} - x_0$$

est un isomorphisme de $\mathcal{U}_w$ sur $\mathcal{U}_1(c) \oplus i\mathcal{U}_{1/2}(c) \oplus \mathcal{U}_0(c)$ (h est une application de $\mathcal{U}_w$ dans $\mathcal{U}_1(c) \oplus i\mathcal{U}_{1/2}(c) \oplus \mathcal{U}_0(c)$ car $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}_w$ coïncident en tant qu'ensembles). Toute mutation $\mathcal{U}_x$ de $\mathcal{U}$, pour $x \in \text{Inv}(\mathcal{U})$, est isomorphe à une algèbre de la forme $\mathcal{U}_1(c) \oplus i\mathcal{U}_{1/2}(c) \oplus \mathcal{U}_0(c)$.

Pour la démonstration, on vérifie à la main que h est un isomorphisme en s'appuyant sur les règles de multiplication de la décomposition de Peirce. D'après Braun-Koecher, toute composante connexe de $\text{Inv}(\mathcal{U})$ contient un involutif : compte tenu de la proposition 1, il s'ensuit que toute mutation $\mathcal{U}_x$ pour $x \in \text{Inv}(\mathcal{U})$ est isomorphe à une algèbre de la forme $\mathcal{U}_1(c) \oplus i\mathcal{U}_{1/2}(c) \oplus \mathcal{U}_0(c)$.

Seules les mutations de la forme $\mathcal{U}_x$ avec $x \in \text{Inv}(\mathcal{U})$ sont intéressantes, car ce sont celles qui possèdent un élément neutre, à savoir x^{-1} . Compte tenu du théorème 2, nous étudierons exclusivement les algèbres $\mathcal{U}_w$ avec w involutif : w est alors l'élément neutre de $\mathcal{U}_w$.

& 2. Le cas des algèbres de Jordan de forme réelle :

Ce paragraphe sera dévolu essentiellement à la démonstration du théorème de classification suivant :

THEOREME 3. - Toute mutation d'une algèbre de Jordan de forme réelle simple est isomorphe à l'une des algèbres de Jordan de la liste suivante, où deux distinctes d'entre elles ne sont pas isomorphes :

a) $\mathbb{R}$

$\mathcal{U} = \mathbb{R}c_1 \oplus \mathbb{R}c_2 \oplus E$, où E est un espace vectoriel de dimension $p > 0$ sur $\mathbb{R}$ admettant une base $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ avec les règles de

multiplication suivantes : c_1 et c_2 sont deux idempotents orthogonaux, $c_i e_j = \frac{1}{2} e_j$ ($\forall i, j$), $e_i^2 = c_1 + c_2$, $e_i e_j = 0$ pour $i \neq j$.

$\mathcal{U} = \mathbb{R}c_1 \oplus \mathbb{R}c_2 \oplus iE$, avec des règles de multiplication déduites de ci-dessus.

b) Soient A, B, C des matrices à coefficients sur un même corps K , qui peut être le corps des réels, des complexes, ou des quaternions.

A et B sont des matrices carrées hermitiennes pour l'involution du corps considéré, respectivement de type (p, p) et de type (q, q) avec $p \leq q$. On suppose que C est une matrice à q lignes et p colonnes, et si $C = (c_{ij})$, on pose $C^* = (c_{ji}^*)$ où c_{ji}^* désigne le conjugué de c_{ji} pour l'involution de K .

Alors l'ensemble $\mathcal{U}$ des matrices de la forme $X = \begin{pmatrix} A & iC^* \\ iC & B \end{pmatrix}$ est une algèbre de Jordan pour le produit $XY = \frac{1}{2} (X \circ Y + Y \circ X)$ où $\circ$ désigne le produit habituel des matrices.

c) On fait la même construction qu'en b) avec des matrices à coefficients dans l'algèbre des octonions, dans les deux cas suivants seulement : $p=0$ et $q=3$, $p=1$ et $q=2$.

Pour la démonstration, on part de la classification existante des algèbres de Jordan de forme réelle. Compte tenu du théorème 2, on considère les mutations $\mathcal{U}_{w_q}$ où $w_q = \sum_{i=1}^q c_i - \sum_{j=q+1}^r c_j$ où $(c_i)_{1 \leq i \leq r}$ est un

s.t.o.i.p. Compte tenu de l'identification des composantes connexes faite dans ma thèse, il s'ensuit que toute mutation est isomorphe à une $\mathcal{U}_{w_q}$.

La restriction $q \leq \frac{r}{2}$ se justifie par l'isomorphisme entre $\text{Inv}_k(\mathcal{U})$ et $\text{Inv}_{r-k}(\mathcal{U})$.

& 3. Applications géométriques :

L'intérêt des mutations pour l'étude des espaces symétriques provient de ce que si $P_f(x)$ désigne la représentation quadratique et $(y^{-1})_f$ l'inverse de x dans $\mathcal{U}_f$, alors $P(x)y^{-1} = P_f(x)(y^{-1})_f$.

Aussi, pour étudier une composante connexe de $\text{Inv}(\mathcal{U})$, on dispose de deux techniques : soit une étude directe dans $\mathcal{U}$, soit l'étude dans une mutation $\mathcal{U}_w$, où w est un involutif appartenant à la composante connexe.

Désignons par $\text{Tr}(x)$ la trace de x , $x \in \mathcal{U}$ ($\mathcal{U}$ est de forme réelle).

Il est immédiat que $x+iy \mapsto \text{Tr}(x) + i\text{Tr}(y)$ est une forme linéaire associative de $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathbb{C}$. Sa restriction à $\mathcal{U}_1(c) + i\mathcal{U}_{1/2}(c) + \mathcal{U}_0(c)$ est réelle, car $\mathcal{U}_{1/2}(c) \subseteq \text{Ker Tr}$. Comme cette forme est associative, on peut montrer comme dans l'Annexe 1 qu'elle fournit au-dessus de $\text{Inv}(\mathcal{U}_w)$ une métrique pseudo-riemannienne compatible avec les symétries : *cette métrique est la même que celle induite par $\mathcal{U}$.*

On sait, (Braun-Koecher), que si $g : \mathcal{U} \mapsto \mathbb{R}$ est une forme linéaire associative, alors h_w définie par $g_w(x) = g(wx)$ est une forme linéaire associative de $\mathcal{U}_w$ dans $\mathbb{R}$. On peut montrer que la trace de

$\mathcal{U}_1 \oplus i\mathcal{U}_{1/2} \oplus \mathcal{U}_0$ est en fait obtenue par ce procédé modulo l'isomorphisme h du théorème 2.

Si $w \in M_k$, nous avons vu dans l'annexe 1 que $T_w(M_k) = \{\xi \in \mathcal{U} \mid \xi = \xi_1 + \xi_{1/2} + \xi_0 \text{ avec } \text{Tr}(\xi_1) = \text{Tr}(\xi_0)\}$. Si l'on considère M_k comme partie de l'algèbre $\mathcal{U}_1 + i\mathcal{U}_{1/2} + \mathcal{U}_0$, en désignant par $T'r$ la forme induite par Tr sur cette algèbre, il vient :

$$T_w(M_k) = \{\xi \in \mathcal{U}_w \mid T'r(\xi) = 0\}$$

(compte tenu du fait que l'isomorphisme est donné par

$$x_1 + x_{1/2} + x_0 \mapsto x_1 + ix_{1/2} - x_0).$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BRAUN H. und KOECHER M., *Jordan-Algebren*, Springer-Verlag (1966).
- [2] LOOS O., *Symmetric Spaces I : General Theory, II : Compact Spaces and Classification*, Benjamin (1969).
- [3] TILLIER A., *Quelques applications géométriques des algèbres de Jordan*, Publications du Département de Mathématiques de LYON, tome 14, fasc. 3 (1977).

On pourra de plus consulter :

- BOOTHBY W.M., *Symmetric Spaces*, Marcel Dekker, Inc. (1972).
- HELGASON S., *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press (1962).
- HELWIG K.H., *Jordan-Algebren und kompakte symmetrische Räume I*, Math. Z., 115, p. 315-349 (1970).
- HIRZEBRUCH U., *Über Jordan-Algebren und kompakte symmetrische Räume vom Rang 1*, Math. Z., 90, p. 339-354 (1965).
- KOECHER M., *Jordan algebras and their applications*, Lectures Notes, U. of Minnesota, Minneapolis (1962).
- KOECHER M., *Jordan algebras and differential geometry*, Actes, Congrès intern. Math., 1970, Tome 1, p. 279-283.
- MAC GRIMMON K., *Quadratics methods in Non associative algebras*, Proc. Int. Congress of Math., 1974, Tome 1, p. 325-330.
- TILLIER A., *Sur les idempotents primitifs d'une algèbre de Jordan formelle-réelle*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 280, p. A767 -A769 (1975).

★ ☆ ★

A. TILLIER
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
43, bd du 11 novembre 1918
69521 VILLEURBANNE