PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

MICHEL MIZONY

Sur l'analyse harmonique dans certains espaces homogènes - I

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1977, tome 14, fascicule 4 , p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1977__14_4_1_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1977.t.14-4

SUR L'ANALYSE HARMONIQUE DANS CERTAINS ESPACES HOMOGENES - I.

par Michel MIZONY

Où l'on débrousaille : les théorèmes de Plancherel.

(I.1) INTRODUCTION. Soient G un groupe localement compact de type I, K un sous-groupe compact de G tel que (G,K) soit un couple de Gelfand.

C'est dire que, si K(G) est l'algèbre de convolution des fonctions complexes continues dans G, dont le support est compact, la sous-algèbre $K(G)^{\natural} = \{f \in K(G) \mid \forall x \in G, k,k' \in K,\ f(kxk') = f(x)\}$ de K(G) est *commutative*.

On sait que dire que (G/K) est un couple de Gelfand revient à dire que; pour toute classe de représentations unitaires irréductibles $\chi = (\Pi_\chi, H_\chi) \in \hat{G}$ de G, la restriction $(\Pi_\chi|K, H_\chi)$ contient au plus une fois la représentation triviale de K. On sait, qu'alors l'espace $\widehat{(G,K)}$ des représentations unitaires irréductibles de G dont la restriction à K contient exactement une fois la représentation triviale de K s'identifie canoniquement avec l'ensemble $Z = Z(G,K)$ des fonctions sphériques zonales (rel. à K) de type positif sur G muni de la topologie de convergence compacte.

On munit l'espace $A = K\backslash G/K$ de la mesure da image de la mesure de Haar de G. Pour $\nu \in M^1(G)$ (espace des mesures bornées sur G), on pose $\nu^{\natural} = \varepsilon_K * \mu * \varepsilon_K$; où ε_K est la mesure de Haar de K (normalisée) considérée comme mesure sur G.

$\nu \longrightarrow \nu^{\natural}$ est un projecteur de $M^1(G)$ sur $M^1(A)$. $M^1(A)$ est alors une algèbre de convolution involutive et commutative, dont $L^1(A,da)$ est un idéal fermé ; autrement dit, A, muni de da et du produit de convolution est un *hyper-groupe* commutatif.

Soit $d\mu$ la mesure de Plancherel sur $\hat{G}$ et $Z_\mu = Z \cap \hat{G}_r$, où $\hat{G}_r$ est le dual réduit de G; Si $d\mu$ désigne encore la restriction de la mesure de Plancherel à Z_μ, $M^1(Z_\mu)$ est une algèbre de convolution commutative dont $L^1(Z_\mu, d\mu)$ est un idéal fermé. De plus, la restriction à $M^1(A)$ de la transformation de Fourier de G échange les produits de convolution et les produits ordinaires sur A et sur Z_μ. On a ainsi une dualité satisfaisante, dans le sens ou elle généralise la transformation de Fourier des groupes commutatifs.

Le problème dont je voudrais amorcer l'étude est le suivant :

Soit (G,K) un couple de Gelfand et soit X l'espace homogène G/K, muni de la mesure dx , image de la mesure de Haar dg sur G. Peut-on, à partir de l'analyse harmonique commutative sur $A = K\backslash G/K$, obtenir une analyse harmonique "satisfaisante" sur l'espace homogène $X = G/K$? Autrement dit, peut-on trouver un "produit de convolution" sur X, un bon dual $\hat{X}$ de X, un produit de "convolution" sur $\hat{X}$ tels que la restriction à X de la transformation de Fourier sur G donne lieu à un théorème de Plancherel (i.e. une bonne mesure $d\hat{x}$ sur $\hat{X}$), à une formule d'inversion et échange produits ordinaires et "produits de convolutions" sur X et $\hat{X}$.

L'idée de ce travail est née, d'une part, de mes travaux antérieurs [1] sur l'analyse harmonique sphérique et, d'autre part, de l'étude de deux articles de P. EYMARD [2] et S. HELGASON [3] qui donnent corps à un bon dual $\hat{X}$ de X.

Le premier article qui traite du couple de Gelfand (SU(1,1),SO(2)) et le deuxième article qui traite du cas plus général des couples de Gelfand (G,K), où G est un groupe de Lie semi-simple connexe, non compact, de centre fini et de rang 1, et où K est un sous-groupe compact maximal, mettent en évidence les points suivants :

a) Le lien entre fonctions sphériques et noyau de Poisson ;

b) La définition d'un bon dual $\hat{X}$ de $X = G/K$, défini par $\hat{X} = Z_\mu \times B$, où B est la *frontière de Furstenberg* de G ;

c) La définition d'une transformation de Fourier sur X aboutissant à un théorème de Plancherel et à une formule d'inversion ;

d) La restriction de cette transformation de Fourier à $A = K\backslash G/K$ est la transformation de Fourier sphérique usuelle.

Nous allons dans cette première partie essayer d'éclaicir la question en traitant successivement les problèmes tels que nous les avons abordés chronologiquement. Des résultats seront énoncés sans démonstrations mais il sera indiqué, dans le mesure du possible, les idées de celles-ci.

(I.2) LE PROBLÈME POUR $SU(1,1)/SO(2)$.

Le premier travail fut le suivant : Soient $G = SU(1,1)$ et $K = SO(2)$; l'espace homogène $X = G/K$ s'identifie au disque unité ouvert et le dual, défini par Helgason, est $\hat{X} = Z_\mu \times B$ où $B : K/M$ est la frontière de Furstenberg $\hat{X}$ s'identifie au plan. Le théorème de Plancherel établi par Helgason (pour les espaces homogènes associés aux groupes de Lie semi-simples) entre $L^2(X,dx)$ et $L^2(Z_\mu \times B, d_\mu \otimes db)$ se lit comme une transformation de Fourier hyperbolique du disque unité dans le plan. La formule d'inversion nous a poussé à nous poser la question : qu'elle est l'image réciproque, par cette transformation, du produit ordinaire des fonctions sur le dual et qu'elle est l'image du produit ordinaire des fonctions sur X ? En d'autres termes, X et $\hat{X}$ peuvent-ils être muni de structures d'hypergroupes ? Formellement, les "produit de convolutions" $\bullet$ sur X et $\hat{\bullet}$ sur $\hat{X}$ se définissent bien ; précisément, où en est-on ?

Partant du fait que Z_μ est paramétré par R_+ au moyen des fonctions ϕ_λ sphériques ϕ_λ définies par $\phi_\lambda(x) = \int_B P(x,b)^{1/2+i\lambda}\, db$, où $P(x,b)$, défini sur $X \times B$, est le noyau de Poisson usuel sur le disque unité ; en fait, ce noyau de Poisson est interprété comme étant la fonction de densité indiquant la quasi-invariance de la mesure canonique db (sur l'espace homogène $B = K/M$) par l'action canonique de G (ou de X) sur B.

Soit $f \in \mathcal{D}(X)$, la transformée $\tilde{f}$ sur $Z_\mu \times B$ est définie par $\tilde{f}(\lambda,b) = \int_X P(x,b)^{1/2+i\lambda} f(x)dx$ et $f \mapsto \tilde{f}$ se prolonge en un isomorphisme isométrique de $L^2(X,dx)$ sur $L^2(Z_\mu \times B, d_\mu \otimes db)$; d'autre part, pour tout $f \in \mathcal{D}(X)$, on a $\tilde{f} \in L^1(Z_\mu \times B, d_\mu \otimes db)$ et on a $f(x) = \int_{Z_\mu \times B} \tilde{f}(\lambda,b)P(x,b)^{1/2-i\lambda} d\mu(\lambda)db$

D'autre part soit ν une mesure sur X bornée et à support compact ; alors $\tilde{\nu}(\lambda,b) = \int_X P(x,b)^{1/2+i\lambda}d\nu(x)$ existe et $\tilde{\nu}$ appartient à $L^\infty(Z_\mu \times B, d_\mu \otimes db)$ (si ν est définie par $f(x)dx$, avec $f \in \mathcal{D}(X)$, nous retrouvons la transformation précédente).

Soit $M_c^1(X)$ l'ensemble des mesures bornées à support compact sur X ; pour ν, $\nu' \in M_c^1(X)$ posons par définition $\nu \bullet \nu'$ la distribution définie pour $f \in \mathcal{D}(X)$, par $\nu \bullet \nu'(f) = \langle \tilde{\nu}\tilde{\nu}', \tilde{f}\rangle$, (le crochet est le crochet de dualité entre L^1 et L^∞ sur $Z_\mu \times B$) ; Ainsi nous avons un produit de convolution sur $M_c^1(X) \times M_c^1(X)$ à valeurs dans $\mathcal{D}'(X)$; et nous avons $\nu \bullet \nu'(f) = \int_X \int_X \left[\int_X f(z)K(x,y;z)dz\right] d\nu(x)d\nu'(y)$, où $z \mapsto K(x,y;z)$ est le noyau distribution défini par

$$K(x,y;z) = \int_{Z_\mu \times B} P^{1/2+i\lambda}(x,b)\, P^{1/2+i\lambda}(y,b)P^{1/2-i\lambda}(z,b)d\mu(\lambda)db.$$

Or, comme $\tilde{\delta}_x(\lambda,b) = P^{1/2+i\lambda}(x,b)$ pour tout $x \in X$, $\lambda \in Z_\mu$ et $b \in B$, $z \mapsto K(x,y;z)$ définit tout simplement la distribution $\delta_x \bullet \delta_y$ et on peut écrire $\nu \bullet \nu'(f) = \int_X \int_X \delta_x \bullet \delta_y(f)\, d\nu(x)d\nu'(y)$, pour ν et $\nu' \in M_c^1(X)$.

Le *problème est le suivant* . L'application $z \mapsto K(x,y;z)$ définit-elle une mesure bornée sur X pour tout x et tout $y \in X$? Si oui et si, de plus, l'application $(\nu,\nu') \mapsto \nu \bullet \nu'$ de $M_c^1(X) \times M_c^1(X)$ dans $\mathcal{D}'(X)$ possède de bonnes propriétés de continuité, alors $M^1(X)$ sera une algèbre de convolution commutative et $L^1(X,dx)$ un idéal fermé.

Comme je ne suis pas arrivé à montrer directement que $\delta_x \bullet \delta_y$ est une mesure, j'ai essayé d'étudier le lien plus profond entre noyau de Poisson et fonctions sphériques, le rôle de B et ce qui permet, dans la démonstration de S. Helgason, de démontrer l'isométrie entre $L^2(\underline{X},dx)$ et $L^2(Z_\mu \times B, d\mu \otimes db)$.

En d'autres termes, peut-on trouver d'autres couples de Gelfand (G,K) un espace compact B sur lequel G agit et pour lesquels on peut définir, comme pour les groupes de Lie semi-simples (non compacts de rang réel 1) une transformation de Fourier aboutissant, entre autres, à une isométrie entre $L^2(X,dx)$ et $L^2(Z_\mu \times B, d\mu db)$.

(I,3) L'HYPOTHÈSE (P).

En éliminant un certain nombre de tatonnements, je vais donner les remarques qui m'ont permis de mettre au point une hypothèse (P), laissant entrevoir la possibilité d'une analyse harmonique commutative pour certains espaces homogènes. Cette recherche s'est faite en regardant ce qui se passe pour d'autres couples de Gelfand, comme ceux provenant de groupes de déplacements, de groupes compacts de groupes commutatifs et de ceux cités auparavant.

Soit (G,K) un couple de Gelfand, où G est un groupe de Lie semi-simple non compact ; alors G agit sur la frontière de Fürstenberg B. Soit s une fonction continue sur G × B vérifiant

i) $s(k,b) = 1$, pour $k \in K$ et $b \in B$

ii) $s(g_1 g_2, b) = s(g_1, b)\ (g_2, g_1^{-1}(b))$ pour $g_1, g_2 \in G$ et $b \in B$

iii) $|s(g,b)| = 1$ pour $g \in G$ et $b \in B$.

Alors on peut faire les remarques suivantes :

1) La fonction ϕ_s définie sur G par $\phi_s(g) = \int_B s(g,b)\ P^{1/2}(g,b)db$ est une fonction sphérique zonale de type positif.

2) Pour tout $f \in L^2(B,db)$, soit $\Pi_s(g)(f)$ l'opérateur défini par $\Pi_s(g)(f)(b) = s(g,b)P^{1/2}(g,b)f(g^{-1}(b))$; alors $(\Pi_s, L^2(B,db)$ est une représentation unitaire de G et elle est irréductible.

Voici l'hypothèse (P) pour un couple de Gelfand (G,K).

(P). - *i) Il existe un espace compact* B, *muni d'une mesure* db *et il existe une action transitive et propre de* G *sur* B *tels que* db *soit quasi-invariante par* G *et invariante par* K.

Soit $P(g,b) = \dfrac{dg^{-1}(b)}{db}$ et soit $\mathcal{S} = \mathcal{S}(G,B)$ l'ensemble des fonctions s complexes mesurables définies sur $G \times B$ et vérifiant

(a) $s(k,b) = 1$, pour $k \in K$ et $b \in B$,

(b) $s(g_1 g_2, b) = s(g_1,b)s(g_2, g_1^{-1}(b))$, pour $g_1, g_2 \in G$ et $b \in B$;

(c) $|s(g,b)| = 1$, pour $g \in G$ et $b \in B$.

ii) Pour tout $\phi \in Z_\mu$ *, il existe* $s \in \mathcal{S}$ *tel que* $\phi = \phi_s$ *, où*

$\phi_s(g) = \int_B s(g,b)P^{1/2}(g,b)db$ *pour* $g \in G$.

iii) Pour presque tout $\phi_s \in Z_\mu$ *, la représentation* Π_s *est irréductible.*

(*iii)* a un sens, car, si $\phi_{s_1} = \phi_{s_2} \in Z$, alors Π_{s_1} est équivalente à Π_{s_2}).

Soit maintenant (G,K) un couple de Gelfand vérifiant (P) et supposons donné, une fois pour toute, un représentant et un seul $s \in \mathcal{S}$ tel que $\phi_s = \phi$, pour tout $\phi \in Z_\mu$. Soit $\dot{\mathcal{S}}$, l'espace quotient de $\mathcal{S}$ par la relation d'équivalence $\Pi_s \simeq \Pi_{s'}$; $\dot{\mathcal{S}}$ s'identifie à Z.

Etant donnée une section mesurable σ de Z dans $\mathcal{S}$ tel que $\phi_{\sigma(\phi)} = \phi$ pour tout $\phi \in Z$, alors $\dot{\mathcal{S}} \xrightarrow{\sim} \sigma(Z)$.

Soit $f \in \mathcal{K}(X)$; posons $\tilde{f}(s,b) = \int_G s(g,b)P^{1/2}(g,b)f(g)dg$ pour $s \in Z_\mu$ et $b \in B$; $\tilde{f}$ est une fonction continue sur $Z_\mu \times B$ et elle est bornée par $||f||_1 \cdot \sup\limits_{\substack{g \in \mathrm{Supp}\, f \\ b \in B}} P(g,b)$. On dit que $\tilde{f}$ est la transformée de Fourier de f.

L'application $f \mapsto \tilde{f}$ coïncide avec la transformation de Fourier définie par S. Helgason [1] pour les groupes de Lie semi-simples non compacts. et, en fait, en reprenant (mutatis mutandis) la démonstration de S. Helgason, on voit que cette transformation de Fourier possède les propriétés suivantes :

PROPOSITION (I.3.1). - *i) L'application* $f \mapsto \tilde{f}$ *se prolonge en un isomorphisme isométrique de* $L^2(X,dx)$ *sur* $L^2(Z \times B,\ d\mu \otimes db)$.

ii) Pour tout $f \in \mathscr{D}(X)$, *l'ensemble des fonctions* $\mathscr{C}^\infty$ *à support compact sur* X, *au sens de F. Bruhat, on a*

$$f(x) = \int_{Z \times B} \tilde{f}(s,b)\overline{s(x,b)}\ P^{1/2}(x,b)d\mu(s)db \text{ pour } x \in X.$$

La démonstration en fait s'appuie sur le lemme suivant :

LEMME (I.3.2). - *Pour tout* $f \in \mathscr{K}(X)$ *et tout* $s \in Z$, *on a*

$$f * \phi_s(x) = \int_B \tilde{f}(s,b)\overline{s(x,b)}db.$$

REMARQUE. - L'hypothèse (P) a, en fait, été posée de telle manière que nous ayons (I.3.2) et (I.3.1).

(I.4) EXEMPLES DE COUPLES DE GELFAND VÉRIFIANT L'HYPOTHÈSE (P).

(I.4.1). - Soient G un groupe *commutatif* et K un sous-groupe compact de G ; alors (G,K) est un couple de Gelfand. On a $X = A = K \backslash G / K$; prenons $B = \{e\} = K/K$, $P(g,b) = 1$ et, par suite, $\mathscr{E} = Z = \widehat{G/K}$; l'hypothèse (P) est trivialement réalisée ; et on retrouve la transformation de Fourier ordinaire sur le groupe quotient G/K.

(I.4.2). - Soit G un groupe de Lie *semi-simple connexe non compact* de centre fini et de rang réel 1, et soit K un sous-groupe compact maximal de G. Soit $G = K A_1 K$ la décomposition de Cartan de G, et $G = K A_1 N$ celle d'Iwasawa, où A_1 est un sous-groupe à un paramètre de G. On a $X = G/K$,

$A = K\backslash G/K \simeq \{a(t) \in A_1 / t \in \mathbb{R}_+\}$. Soit M le centralisateur dans K de A_1.
Prenons $B = K/M \simeq G/MA_1N$; soit db la mesure sur B image de la mesure dk sur K. G agit canoniquement sur B et $P(g,b) = \frac{dg^{-1}(b)}{db}$ s'appelle le *noyau de Poisson*. L'espace Z_μ est paramétré par $\mathbb{R}_+$ au moyen de $\lambda \mapsto \phi_\lambda(g) = \int_B P^{1/2+i\lambda}(g,b)db$. Et l'hypothèse (P) est vérifiée.

(I.4.3) Soit G le groupe des *déplacements de* $\mathbb{R}^n$; G est le produit semi-direct de $\mathbb{R}^n$ par SO(n) ; soit K = SO(n) ; alors (G,K) est un couple de Gelfand, tel que $X = G/K \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ et $A \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^+$. Prenons $B = SO(n)/SO(n-1) = S^{n-1}$. Pour tout $g = (x,k) \in \mathbb{R}^n \times SO(n)$, l'action de G sur B définie par $g(b) = (x,k)(b) = k.b$ provient de l'action canonique de K sur B. Soit db la mesure image de dk ; alors $P(g,b) = 1$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $s_\lambda(g,b) = S_\lambda((x,k),b) = e^{i\lambda(x.b)}$, où x.b est le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$; alors $s_\lambda \in \mathscr{E}$. D'autre part, comme Z s'identifie à $\mathbb{R}^+$ par $\lambda \mapsto \phi_\lambda$, avec $\phi_\lambda(g) = \phi_\lambda(x,k) = \frac{1}{(2\Pi)^n} \int_{S_{n-1}} e^{i\lambda(x.b)}db$, l'hypothèse (P) est vérifiée.

On aurait pu prendre le cas plus général d'un groupe de "déplacements" G = N.K, où l'action de canonique de K dans $\hat{N}$ est telle qu'en dehors de l'orbite nulle, il n'y a qu'un seul type d'orbite, donc un seul "petit groupe" M et, en prenant B = K/M, on a le couple de Gelfand (G,K) vérifiant l'hypothèse (P).

(I.4.4) REMARQUES.

1) Dans ces trois types d'exemples, nous avons B = K/M, où M est un sous-groupe de K et (K,M) forme un couple de Gelfand.

2) Dans ces trois types d'exemples, à chaque $\phi \in Z$, on associe un choix canonique et mesurable $s = s_\phi \in \mathscr{E}$ tel que $\phi = \phi_s$; ainsi la transformation de Fourier $f \mapsto \tilde{f}$ est elle-même canonique.

(I.5) OÙ INTERVIENNENT LES REPRÉSENTATIONS INDUITES.

Avant de commencer ce paragraphe, il fait dire un mot sur la méthode car ici elle intervient de manière importante dans ce travail. Chaque semaine, G. Arsac, P. Bonnet et A. Ben Abdallah, (qui écoutent et parfois supportent mes divagations et qui, grâce à une perspicacité qui me manque de tout évidence dans certains domaines de la théorie des groupes, m'ont montré à quel point je regardais les choses par le petit bout de la lorgnette) m'ont fait comprendre que

a) d'une part, l'hypothèse (P) provenait certainement de la théorie des représentations induites.

b) D'autre part, il faut préciser sérieusement le lien entre la transformation de Fourier définie sur $X = G/K$ dans le paragraphe (I.3) et la transformation de Fourier sur le groupe G.

Dans ce paragraphe nous allons examiner le point a) et le paragraphe suivant sera consacré au point b).

(I.5.11). - *Soit* (G,K) *un couple de Gelfand, où* G *est séparable. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) Le couple (G,K) *vérifie l'hypothèse* (P)

ii) Il existe un sous-groupe fermé H *de* G *tel que*

a) G/H *est compact,*

b) la mesure canonique $d\dot{g}$ *sur* G/H *est invariante par* K,

c) presque toute représentation de classe 1 *de* G *est équivalente à une représentation unitaire irréductible induite par un caractère (représentation de dimension 1) de* H.

En effet i) $\Longrightarrow$ ii). En prenant $H = \{g \in G \mid g(b) = b \text{ pour tout } b \in B\}$, alors, pour "presque tout" s, Π_s est équivalente à la représentation induite par $h \mapsto s(h,\dot{e})$, car B s'identifie à G/H du fait des propriétés de l'action de G sur B.

Inversement ii) $\Longrightarrow$ i), Prenons $B = G/H$ et $db = d\dot{g}$; lorsqu'on se donne une section mesurable de G/H dans G on retrouve facilement l'hypothèse et, de plus, chaque section de G/H dans G fixe canoniquement un seul $s \in \mathcal{S}$ pour chaque $\phi \in Z$.

(I.6) OÙ L'ON ESSAIE DE VOIR LES CHOSES DE PLUS HAUT..

Soient (G,K) un couple de Gelfand et Z le dual sphérique de (G,K). Nous noterons $\chi = (\Pi_\chi, \mathcal{H}_\chi)$ les éléments de $\hat{G}$ et, si χ est de classe 1, c'est-à-dire associé à un élément $\phi \in Z$, nous noterons $\chi = \chi_\phi = (\Pi_\phi, \mathcal{H}_\phi)$. Nous noterons $d\mu(\chi)$ la mesure de Plancherel sur $\hat{G}$ et $d\mu(\phi)$ sa restriction à Z.

Pour tout $f \in L^1(G)$, soit $\hat{f}(\chi)$ la transformée de Fourier au point $\chi \in \hat{G}$ définie par $\hat{f}(\chi) = \int_G \Pi_\chi(f)f(g)dg$; l'opérateur $\hat{f}(\chi)$ est borné sur $\mathcal{H}_\chi$ et cette transformation de Fourier se prolonge en un isomorphisme isométrique de $L^2(G,dg)$ sur $\int_{\hat{G}}^{\oplus} \mathcal{L}_2(\mathcal{H}_\chi)d\mu(\chi)$, où $\mathcal{L}_2(\mathcal{H}_\chi)$ désigne l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur $\mathcal{H}_\chi$. C'est le théorème de Plancherel (pour les groupes unimodulaires de type I).

Exploitons le fait que $\mathcal{L}_2(\mathcal{H}_\chi)$ s'identifie à $\mathcal{H}_\chi \otimes \overline{\mathcal{H}}_\chi$. Pour tout $\chi \in \hat{G}$, soit $\mathcal{K}_\chi = \{u \in \mathcal{H}_\chi / \Pi_\chi(k)u = u \text{ pour tout } k \in K\}$. Comme (G,K) est un couple de Gelfand, on a $\dim(\mathcal{K}_\chi) = 0$ si $\chi \notin Z$ et $\dim(\mathcal{K}_\chi) = 1$ si $\chi = \chi_\phi$, avec $\phi \in Z$.

Pour tout $\phi \in Z$, prenons un vecteur $\omega_\phi \in \mathcal{K}_{\chi_\phi} = \mathcal{K}_\phi$ de norme 1.

Soit U_1 l'isomorphisme canonique entre $\mathcal{L}_2(\mathcal{H}_\chi)$ et $\mathcal{H}_\chi \otimes \overline{\mathcal{H}}_\chi$ et soit $f \in K(G)$ telle que f soit invariante à droite par K. si ε_K est la mesure de Haar sur K, considérée comme mesure bornée sur G, on a $f * \varepsilon_K = f$; donc $\hat{f}(\chi) = \Pi_\chi(f) = \Pi_\chi(f * \varepsilon_K) = \Pi_\chi(f)\Pi_\chi(\varepsilon_K)$. Or, comme $\varepsilon_K * \varepsilon_K = \varepsilon_K$; $\Pi_\chi(\varepsilon_K)$ est un projecteur dans $\mathcal{H}_\chi$; c'est le projecteur orthogonal sur $\mathcal{K}_\chi$ et ainsi

$$\Pi_\chi(f)u = \langle u|\omega_\chi\rangle \; \Pi_\chi(f)u, \text{ pour tout } u \in \mathcal{H}_\chi .$$

Comme, par définition de U_1, on a $U_1(u \mapsto \langle u|v\rangle w) = w \otimes v$, on a $U_1(\Pi_\chi(f)) = \Pi_\chi(f)w_\chi \otimes \overline{w}_\chi$ et, en conséquence, $L^2(X,dx) = L^2(G/K,dg)$ s'identifie à $\int_Z^{\oplus} \mathcal{H}_\phi \otimes \overline{\mathcal{K}}_\phi \, d\mu(\phi)$ par $U_1 \circ \mathcal{F}$, où $\mathcal{F}(f)(\chi) = \hat{f}(\chi)$.

Soit U_2 définie, pour tout $\phi \in Z$, comme application de $\mathcal{H}_\phi \otimes \overline{\mathcal{K}}_\phi$ dans $\mathcal{H}_\phi$, par $U_2(u \otimes w_\phi) = u$.

On a $L^2(X,dx) \xrightarrow[U_2 o U_1 \circ \mathcal{F}]{\sim} \int_Z^{\oplus} \mathcal{H}_\phi \, d\mu(\phi)$, avec $U_2 o U_1 \circ \mathcal{F}(f) = \hat{f}(\chi)\omega_\chi$.

(I.6.1) Supposons maintenant que le couple (G,K) vérifie l'hypothèse (H) suivante :

Pour presque tout $\phi \in Z$, *la représentation* χ_ϕ *se réalise dans l'espace* $\mathscr{H}_\phi = L^2(B,db)$, *où* B *est un espace localement compact fixé, et, de plus, l'application* $\phi \mapsto \omega_\phi \in L^2(B,db)$ *est mesurable (où* ω_ϕ *est un vecteur de norme* 1 *stable par* $\chi_\phi(\varepsilon_K)$).

REMARQUE. - L'hypothèse (P) est un cas particulier de l'hypothèse (H), car (P) donne d'une part l'existence de B (compact) et d'autre part le choix de $\omega_\phi \equiv 1$ sur B, pour tout $\phi \in Z$.

Si (G,K) est un couple de Gelfand vérifiant l'hypothèse (H), on a alors

$$\int_Z^{\oplus} \mathscr{H}_\phi d_\mu(\phi) \xrightarrow[\sim]{U_3} \int_Z^{\oplus} L^2_\phi(B,db)d\mu(\phi) \xrightarrow[\sim]{U_4} L^2(Z \times B, d\mu\otimes db)$$

et on a, pour tout $f \in L^2(X,dx)$, $U_4 o U_3 o U_2 o U_1 o \mathscr{F}(f)(\phi,b) = [\hat{f}(\phi)(\omega_\phi)](b)$.

Et $U_4 o U_3 o U_2 o U_1 o \mathscr{F}$ est une isométrie de $L^2(X,dx)$ sur $L^2(Z \times B, d\mu\otimes db)$.

Nous posons $\tilde{f}(\phi,b) = [\hat{f}(\phi)(\omega_\phi)](b)$, pour $f \in L^2(X,dx)$.

En particulier, si (G,K) vérifie l'hypothèse (P), pour $f \in \mathscr{D}(X)$, on a

$$\tilde{f}(\phi,b) = [\hat{f}(\phi)(\omega_\phi)](b) = \int_X [\Pi_\phi(x)\omega_\phi](b)f(x)dx = \int_X s(x,b)P^{1/2}(x,b)f(x)dx.$$

Le lien est ainsi fait entre la transformation de Fourier sur le groupe G et la transformation de Fourier définie précédemment sur l'espace homogène $X = G/K$, lorsque (G,K) est un couple de Gelfand vérifiant l'hypothèse (P) et on retrouve directement la proposition (I.3.1).

(I.6.2) DEFINITION DE LA TRANSFORMATION DE FOURIER SUR $M^1(X)$.

Soit (G,K) un couple de Gelfand vérifiant l'hypothèse (H).

Soit $\nu \in M^1(X)$, c'est-à-dire soit $\nu \in M^1(G)$ avec $\nu * \varepsilon_K = \nu$; alors on a $\hat{\nu}(\phi)\omega(\phi) \in \mathscr{H}_\phi$ pour tout ϕ et $b \mapsto [\hat{\nu}(\phi)\omega(\phi)]b \in L^2(B,db)$ et de norme $\leq ||\nu||$.

Ainsi, on peut poser $\check{\nu}(\phi,b) = [\hat{\nu}(\phi)\omega(\phi)](b)$, qui existe pour tout $\phi \in Z$ et pour presque tout $b \in B$ et on a, $d\mu(\phi) \otimes db$ presque partout,

$$\tilde{\nu}(\phi,b) = \int_X s_\phi(x,b)P^{1/2}(x,b)d\nu(x),$$ si (G,K) est un couple de Gelfand vérifiant l'hypothèse (P).

De plus, l'opérateur $\phi \mapsto \|\tilde{\nu}(\phi,o)\|_2$ est borné par $\|\nu\|$ sur Z.

Ainsi soit (G,K) un couple de Gelfand vérifiant l'hypothèse (P) ; avec des notations évidentes, la restriction de la transformation de Fourier sur G à X donne les isomorphismes suivants (des injections canoniques sont précisées, en utilisant le fait que B est compact).

$$\begin{array}{lcccc}
L^2(X) = L^2(G) * \varepsilon_K & \xmapsto{\sim} & L^2(Z,L^2(B)) & \xmapsto{\sim} & L^2(Z \times B, d\mu \otimes db) \\
A(G) * \varepsilon_K & \xmapsto{\sim} & L^1(Z,L^2(B)) & \hookrightarrow & L^1(Z \times B, d\mu \otimes db) \\
B_\rho(G) * \varepsilon_K & \xmapsto{\sim} & M^1(Z,L^2(B)) & \hookrightarrow & M^1(Z \times B) \\
VN(G) * \varepsilon_K & \xmapsto{\sim} & L_\infty(Z,L^2(B)) & \hookleftarrow & L_\infty(Z\times B, d\mu \otimes db) \\
C^*_\rho(G) * \varepsilon_K & \xmapsto{\sim} & \mathcal{K}_\infty(Z,L^2(B)) & \hookleftarrow & \mathcal{K}_\infty(Z \times B) \\
M^1(G) * \varepsilon_K & \hookrightarrow & \mathcal{C}_b(Z,L^2(B)) & \hookleftarrow & \mathcal{C}_b(Z \times B) \\
L^1(G) * \varepsilon_K & \hookrightarrow & \mathcal{K}_\infty(Z,L^2(B)) & \hookleftarrow & \mathcal{K}_\infty(Z \times B)
\end{array}$$

Donc, si, pour tout $\nu \in M^1(X)$, $\check{\nu}$ est continue sur $Z \times B$ on peut obtenir une analyse harmonique commutative satisfaisante ; en particulier, $\check{\nu}$ est continue si $x \mapsto P(x,b)$ est bornée pour tout $b \in B$.

(I.7) GÉNÉRALISATIONS.

Ici on fait l'autruche : on cache ses préoccupations derrière des essais de généralisations plutôt que d'examiner le cas simple, mais épineux, du groupe SL(2,ℝ).

Alors rapidement :

(I.7.1) Si l'on étudie les groupes de déplacements et notamment la méthode des petits groupes (de Mackey), nous pouvons poser l'hypothèse (P') suivante pour un couple de Gelfand (G,K).

(P') *i) Il existe une famille dénombrable d'espaces compacts mesurés* $(B_i, db_i)_{i\in I}$ *sur chacun desquels* G *agit transitivement et proprement et telle que chaque mesure* db_i *soit quasi-invariante par* G *et invariante par* K.

Pour $i \in I$, soient $P_i(g,b)$ et $\mathcal{E}_i(G,B_i)$ définis comme dans l'hypothèse (P).

ii) Pour tout $\phi \in Z_\mu$, *il existe un seul* $i \in I$ *et un* $s_\phi \in \mathcal{E}_i$ *tels que* $\phi(g) = \int_{B_i} s_\phi(g,b) P_i^{1/2}(g,b)db$ *et, pour presque tout* $\phi \in Z_\mu$, Π_{s_ϕ} *est irréductible.*

EXEMPLES. - a) Si (G,K) vérifie (P), il vérifie (P') avec I réduit à un élément.

b) Si (G,K) est un couple de Gelfand associé à un groupe de déplacements pour lequel la méthode des petits groupes s'applique bien (ce qui est toujours le cas dans les exemples).

Soit (G,K) un couple de Gelfand vérifiant l'hypothèse (P') et soit une section mesurable de Z_μ dans $\bigcup_{i\in I} \mathcal{E}_i$ telle que $\phi_{\sigma(\phi)} = \phi$; ainsi Z_μ est partitioné par $(Z_i)_{i\in I}$.

Posons pour tout $f \in K(X)$ et tout $(\phi_s, b) \in \bigcup_{i\in I} Z_i \times B_i$

$$\tilde{f}(\phi_s, b) = \int_G s(g,b)\, P_i^{1/2}(g,b)dg ,$$

avec $s = \sigma(\phi) \in \mathcal{E}_i$.

(I.7.1) PROPOSITION. - *i) L'application* $f \mapsto \tilde{f}$ *se prolonge en un isomorphisme isométrique de* $L^2(X,dx)$ *sur* $\bigoplus_{i \in I} L^2(Z_i \times B_i, d\mu_i \otimes db_i)$, où $d\mu_i = d\mu/Z_i$.

ii) Pour tout $f \in \mathscr{D}(X)$ *et tout* $x \in X$, *on a*

$$f(x) = \sum_{i \in I} \int_{Z_i \times B_i} \check{f}(s,b_i)\, \overline{s(x,b_i)}\, P_i^{1/2}(x,b_i)\, d\mu_i(s)\, db_i .$$

Cette proposition est une simple conséquence du paragraphe suivant.

(I.7.2) Reprenons l'idée developpée dans (I.6) et considérons l'hypothèse suivante pour un couple de Gelfand (H') *il existe une partition mesurable* $(Z_i)_{\in I}$ *de* Z_μ *par un ensemble d'indice* I *au plus dénombrable telle que, pour tout* $i \in I$ *et, presque tout* $\phi \in Z_i$ *(pour la mesure* $d\mu_i = d\mu/Z_i$*), la représentation* X_ϕ *se réalise dans l'espace* $\mathscr{H}_\phi = L^2(B_i, db_i)$, *où* B_i *est un espace localement compact fixé pour tout* i ; *et l'application* $\phi \mapsto \omega_\phi$ *de* Z_i *dans* $L^2(B_i,db_i)$ *est mesurable (où* ω_ϕ *est un vecteur de norme* 1 *stable par* $\Pi_\phi(\varepsilon_K)$*).*

EXEMPLE. - a) Si (G,K) vérifie (H) ou (P'), alors (G,K) vérifie (H').

b) Si (G,K) est un couple de Gelfand où G est *compact*, alors (G,K) vérifie (H') en partitionnant Z_μ par les dimensions des représentations.

Comme en (I.6.2), pour tout $\nu \in M^1(X)$ et tout $\phi \in Z_\mu$, on a $\hat{\nu}(\phi)\omega_\phi \in L^2(B_i,db_i)$ pour tout $\phi \in Z_i$ et $\|\hat{\nu}(\phi)\omega_\phi\|_2 \leq \|\nu\|_1$.

Posons alors $\tilde{\nu}(\phi,b) = [\hat{\nu}(\phi)\omega_\phi](b)$, qui existe pour tout $i \in I$, tout $\phi \in Z_u$ et presque tout $b \in B_i$; ainsi, pour tout couple de Gelfand (G,K) vérifiant l'hypothèse (H'), nous retrouvons la proposition (I.7.1), (i) ; et si, de plus (G,K) vérifie l'hypothèse (P'), on retrouve ii).

(I.8) CONCLUSION ET BIBLIOGRAPHIE.

(I.8.1) LES PROBLEMES.

Considérons le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^n$. Alors X s'identifie à $\mathbb{R}^n$, $Z_\mu \times B$ s'identifie aussi à $\mathbb{R}^n$ et la transformation $\nu \mapsto \tilde{\nu}$ s'identifie à la transformation de Fourier usuelle sur $\mathbb{R}^n$ (mais lue en coordonnées polaires). Ainsi, sur $L^1(X,dx)$ et $M^1(X)$, nous pouvons définir le produit de convolution par image réciproque du produit ordinaire sur $Z_\mu \times B$ par l'application $\nu \mapsto \tilde{\nu}$ et $M^1(X)$ devient une algèbre de Banach dont $L^1(X,dx)$ est un idéal fermé. Dans ce cas, on a $P(x,b) = 1$ pour tout (x,b).

PROBLEMES.

a) *Soit* (G,K) *un couple de Gelfand vérifiant l'hypothèse* (P) *et tel que* $P(x,b) = 1$, $M^1(X)$ *est-il une algèbre lorsqu'on on le munit du produit image réciproque par* $\nu \mapsto \tilde{\nu}$ *du produit ordinaire sur* $Z_\mu \times B$?

b) *Si* $P(x,b) \neq 1$ *(par exemple si* $G = SL(2,\mathbb{R})$, $K = SO(2)$) ; *a-t-on le même résultat et, sinon, pourquoi ?*

L'objet de mon travail à venir est la solution de ces deux problèmes, puis l'étude d'un produit de convolution sur le dual $Z_\mu \times B$ (image du produit ordinaire sur X par $\nu \mapsto \tilde{\nu}$).

Le problème qui m'intéresse à plus long terme est le suivant.

Prenons le groupe de Poincaré $G = \mathbb{R}^4 \times SL(2,\mathbb{C})$; le sous-groupe $H = SL(2,\mathbb{C})$ n'est pas compact ; donc nous n'avons plus de théorie de fonctions sphériques ; mais celle-ci pourra être remplacée par la théorie des distributions sphériques.

Si une étude similaire à celle-ci peut être menée un jour à bien pour des couples (G,H) avec H non compact et donnant lieu à une bonne théorie des distributions sphériques, on peut espérer qu'elle permettra une meilleure connaissance de structures sur le dual du groupe de Poincaré,dual dont on sait l'importance en mécanique quantique.

(I.8.2) BIBLIOGRAPHIE.

Pour le paragraphe (I.1), voir [1] M. MIZONY "Contribution à l'analyse harmonique sphérique" *Publ. du Dept. Math. Lyon,* (1975) t.12-1,p. 61-108.

Pour le paragraphe (I.2) voir [2] P. EYMARD, "Le noyau de Poisson et la théorie des groupes" exposé à l'I.N.A.M. de Rome (Mars 1976).

Pour le paragraphe (I.3) voir [3] S. HELGASON "Functions in symetric spaces" *Proceedings of symposia in pure Math.* 26 (1973), ;p. 101-146.

Pour le paragraphe (I.6) voir [4] R. LIPSMAN, , Non-abelian Fourier analysis, *Bull. Sc. Math.,* 2ème série, 98 (1974), p. 209-233.

Signalons, pour terminer, deux lectures , qui posent d'autres problèmes, que j'ai effectuées pendant la rédaction de ces quelques lignes :

R. DUMONT "L'utopie ou la mort" Le Seuil (1973).

Economie et Humanisme "La science comme pouvoir" n° 212 (1973).

Fait à Vaulx-en-Velin

Décembre 1977

M. MIZONY
Département de Mathématiques
43, bd du 11 novembre 1918
69621 VILLEURBANNE