PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

A. TILLIER

Quelques applications géométriques des algèbres de Jordan

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1977, tome 14, fascicule 3
, p. 59-132
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1977__14_3_59_0>

...cations du
...ment de
...matiques
... 1977 t. 14-3

QUELQUES APPLICATIONS GEOMETRIQUES DES ALGEBRES DE JORDAN

par A. TILLIER

INTRODUCTION.

Le but de ce travail est de caractériser algébriquement certaines parties d'une algèbre de Jordan (composantes connexes de l'ouvert des éléments inversibles et du fermé des éléments involutifs) et de les munir d'une structure de variété pseudo-riemannienne symétrique grâce aux propriétés algébriques sous-jacentes.

Une algèbre $\mathcal{U}$ sur un corps K de caractéristique différente de 2 est dite <u>de Jordan</u> si elle est commutative et si, sans être associative, elle vérifie toutefois $x^2(xy) = x(x^2y)$. Alors l'algèbre $K[x]$ engendrée par x dans $\mathcal{U}$ est associative.

Notons $L(x)$ l'application $L(x)y = xy$, et posons $P(x) = 2L^2(x) - L(x^2)$; si $\mathcal{U}$ possède un élément unité e, $P(x)$ est un automorphisme involutif de $\mathcal{U}$ si et seulement si $x^2=e$. Les automorphismes de cette nature engendrent un groupe d'automorphismes , noté $\mathcal{A}_0$, appelé le groupe des automorphismes intérieurs de $\mathcal{U}$.

Soit c un idempotent de $\mathcal{U}$ ($c^2=c$). Posons $\mathcal{U}_\lambda(c) = \{x \in \mathcal{U},\ L(c) = \lambda c\}$. Alors $\lambda=1$, $1/2$ ou 0, et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_{1/2} \oplus \mathcal{U}_0$ (décomposition de Peirce), $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_0$ sont deux sous-algèbres de $\mathcal{U}$ vérifiant $\mathcal{U}_1\mathcal{U}_0 = \{0\}$ et $\mathcal{U}_{1/2}.\mathcal{U}_{1/2} \subset \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_0$. On appelle *rang* d'un idempotent c la dimension de $\mathcal{U}_1(c)$. Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel sur K muni d'une forme bilinéaire symétrique Q. Alors l'ensemble $K \times \mathcal{V}$ muni du produit $(\alpha,x)(\beta,y) = (\alpha\beta + Q(x,y),\ \alpha y + \beta x)$ est une algèbre de Jordan appelée <u>algèbre de Jordan de la forme quadratique</u> $Q(x,x)$. Pour qu'une algèbre de Jordan soit obtenue par cette construction(*), il faut et il suffit qu'elle possède un élément neutre e, et deux idempotents de rang 1, a et b vérifiant $ab = 0$ et $a+b = e$. Enfin $\mathcal{A}_0$ est transitif sur l'ensemble des idempotents de rang 1, sous certaines hypothèses acquises en particulier si $\mathcal{U}$ est de

(*) *(avec une forme quadratique* Q *positive).*

forme réelle.

Une algèbre de Jordan $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{R}$ est dite de forme réelle si $x^2+y^2 = 0$ implique $x = y = 0$. Les algèbres de Jordan sur $\mathbb{R}$ d'une forme quadratique définie positive sont de forme réelle. Si $\mathcal{U}$ est de forme réelle et de dimension finie sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{U}$ possède un élément neutre e et est semi-simple : nous supposerons désormais que *$\mathcal{U}$ est de forme réelle, de dimension finie et simple*. Un idempotent c est dit *primitif* si on ne peut l'écrire comme somme de deux idempotents non nuls ; c est primitif si et seulement s'il est de rang 1, et tout $x \in \mathcal{U}$ s'écrit $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$ ($\lambda_i \in \mathbb{R}$), où les c_i sont des idempotents primitifs vérifiant $c_i c_j = 0$ pour $i \neq j$ et $\sum_{i=1}^{r} c_i = e$. Cette décomposition n'est pas unique ; toutefois r (appelé le *degré de* $\mathcal{U}$) est entièrement déterminé par $\mathcal{U}$ et les applications $\mathrm{Tr}(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i$ et $\mathrm{Det}(x) = \prod_{i=1}^{r} \lambda_i$ sont bien définies ; Tr est linéaire et $\mathrm{Tr}(x(yz)) = \mathrm{Tr}((xy)z)$. De plus $\mathrm{Tr}(xy)$ *est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur* $\mathcal{U}$.

Désignons par I l'ensemble des involutifs de $\mathcal{U}$ (i.e. $x^2 = e$) ; alors I est fermé. $x \in I$ si et seulement si $x = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i c_i$, avec $\varepsilon_i = \pm 1$. Posons $I_k = \{x \in I \mid \varepsilon_i = +1 \text{ pour } 1 \leq i \leq k \text{ et } \varepsilon_i = -1 \text{ pour } k+1 \leq i \leq r\}$. Perfectionnant quelque peu le théorème de transitivité de $\mathcal{A}_0$, on peut montrer que *les* I_k *sont les composantes connexes de* I.

Pour $\mathcal{U}$ algèbre de Jordan à élément unité e, on dit que x est inversible s'il possède un inverse, noté x^{-1}, dans l'algèbre associative engendrée par x et e dans $\mathcal{U}$. Si le corps de base est $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{I}\mathrm{nv}(\mathcal{U})$ des éléments inversibles est un ouvert en général non connexe.

Soit de nouveau $\mathcal{U}$ de forme réelle et simple ; alors si $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$, $x \in \mathcal{I}\mathrm{nv}(\mathcal{U})$ si et seulement si $\lambda_i \neq 0$ ($\forall i$). Soit $\mathcal{I}\mathrm{nv}(\mathcal{U})_k = \{x \in \mathcal{I}\mathrm{nv}(\mathcal{U}) \mid \lambda_i > 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq k \text{ et } \lambda_i < 0 \text{ pour } k+1 \leq i \leq r\}$. En s'appuyant sur ce qui a été démontré pour I, on démontre que les $\mathcal{I}\mathrm{nv}(\mathcal{U})_k$ *sont les composantes connexes de* $\mathcal{I}\mathrm{nv}(\mathcal{U})$.

Une variété M (connexe) est appelée un *espace symétrique* s'il existe une application $(x,y) \longmapsto x.y$ C^∞ de $M{\times}M$ dans M vérifiant :

i) $x.x = x$

ii) $x.(x.y) = y$

iii) $x.(y.z) = (x.y).(x.z)$

iv) x est un point fixe isolé de l'application $S_x(y) = x.y$. Si de plus M est muni d'une structure pseudo-riemannienne g, de telle sorte que $S_x(y)$ représente le symétrique de y sur la géodésique joignant x à y (lorsque celle-ci existe), nous dirons que M est une variété *pseudo-riemannienne symétrique*.

Revenons à $\mathcal{U}$ et posons $f(x) = -\log|\mathrm{Det}(x)|$. Alors $D^2f(x)(\xi,\eta) = \mathrm{Tr}[(P(x^{-1})\xi)\eta]$, où D^2f représente la différentielle seconde de f, et où $\mathcal{U}$ est identifié à son espace tangent. Grâce à cette identification, en posant $g = D^2f$ et $x.y = P(x)y^{-1}$, chaque $\mathcal{I}nv(\mathcal{U})_k$ *devient une variété pseudo-riemannienne symétrique* et chaque I_k *devient une sous-variété pseudo-riemannienne symétrique compacte de* $\mathcal{I}nv(\mathcal{U})_k$.

CHAPITRE 1

PROPRIETES GENERALES DES ALGEBRES DE JORDAN

1. ALGEBRES COMMUTATIVES ; ALGEBRES ANTICOMMUTATIVES.

Dans tout ce qui suit K désignera un corps commutatif de caractéristique différente de 2.

(1.1) Algèbres associatives enveloppantes. - Rappelons qu'une K-algèbre consiste en la donnée d'un K-espace vectoriel $\mathfrak{A}$ et d'une application K-bilinéaire $(x,y) \longmapsto x.y$ de $\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}$ appelée la *multiplication* de l'algèbre considérée. Deux éléments d'une K-algèbre $\mathfrak{A}$ sont dits *orthogonaux* si leur produit est nul. S'il existe un élément u d'une K-algèbre $(\mathfrak{A}, .)$ tel que, pour tout $x \in \mathfrak{A}$, $u.x = x.u = x$, cet élément est unique ; on l'appelle l'*unité* de $\mathfrak{A}$. Pour tout élément a d'une K-algèbre $\mathfrak{A}$, on notera L(a) (resp. R(a)) l'endomorphisme $x \longmapsto a.x$ (resp. $x \longmapsto x.a$) du K-espace vectoriel $\mathfrak{A}$. Si pour tout $a \in \mathfrak{A}$, $L(a) = R(a)$ (resp. $L(a) = -R(a)$), ce qui revient à dire que la multiplication de $\mathfrak{A}$ est symétrique (resp. antisymétrique), on dit que l'algèbre $\mathfrak{A}$ est *commutative* (resp. *anticommutative*). A toute K-algèbre $(\mathfrak{A}, .)$ on associe canoniquement une K-algèbre commutative $\mathfrak{A}^+$ et une K-algèbre anticommutative $\mathfrak{A}^-$ sur le même K-espace vectoriel $\mathfrak{A}$, en prenant pour multiplication respectivement :

$$(x.y)_+ = \frac{1}{2}(x.y + y.x)$$

et

$$(x.y)_- = \frac{1}{2}(x.y - y.x).$$

Tout morphisme $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ de K-algèbres (i.e. une K-application linéaire transformant la multiplication de $\mathfrak{A}$ en celle de $\mathfrak{B}$) devient un morphisme d'algèbres : $\mathfrak{A}^+ \to \mathfrak{B}^+$ en même temps qu'un morphisme d'algèbres : $\mathfrak{A}^- \to \mathfrak{B}^-$; de la sorte on définit deux foncteurs : l'un de la catégorie des K-algèbres dans celle des K-algèbres commutatives, l'autre de la même catégorie dans celle des K-algèbres anticommutatives. Le cas le plus intéressant est celui d'une K-algèbre associative $\mathfrak{A}$ (i.e. les opérateurs L(x) et R(y) commutent pour tout couple (x,y) d'éléments de $\mathfrak{A}$), on a alors entre les deux lois $(.)_+$ et $(.)_-$ les relations suivantes :

$$((x.y)_+ . z)_+ - (x.(y.z)_+)_+ = ((x.z)_- . y)_- \quad ,$$
$$((x.y)_- . x)_+ = ((x.y)_+ . x)_- \quad ,$$

pour tout triple (x,y,z) d'éléments de $\mathfrak{A}$. Réciproquement, si deux opérateurs K-bilinéaires $\mathcal{V}\times\mathcal{V} \to \mathcal{V}$ donnés a priori sur un K-espace vectoriel $\mathcal{V}$, l'un commutatif $(x,y) \longmapsto (x.y)_+$, l'autre anticommutatif $(x,y) \longmapsto (x.y)_-$ vérifient les deux identités précédentes, alors l'algèbre anticommutative ainsi définie sur $\mathcal{V}$ est une K-algèbre de Lie, l'algèbre commutative ainsi définie sur $\mathcal{V}$ satisfait à l'identité (dite de Jordan) :

$$\text{(J)} \qquad x.(x^2.y) = x^2.(x.y) \qquad\qquad (x^2 = x.x)$$

et la forme K-bilinéaire $(x,y) \longmapsto (x.y)_+ + (x.y)_-$ fait de $\mathcal{V}$ une K-algèbre associative. Ceci conduit tout naturellement à étudier les K-algèbres commutatives remplissant la condition (J) ; c'est ce qu'on appelle les *K-algèbres de Jordan*. De façon plus spectaculaire (et souvent plus efficace) la condition J signifie que les opérateurs L(x) et $L(x^2)$ commutent dans l'algèbre associative $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ des K-endomorphismes linéaires de $\mathcal{V}$.

Les foncteurs $\mathfrak{A} \rightsquigarrow \mathfrak{A}^-$ et $\mathfrak{A} \rightsquigarrow \mathfrak{A}^+$ précédemment définis vont donc de la catégorie des K-algèbres associatives dans celle des K-algèbres de Lie et celle des K-algèbres de Jordan respectivement. Ces foncteurs admettent un adjoint à gauche (ce qui est bien connu pour le premier) : pour définir la *K-algèbre associative enveloppante d'une K-algèbre de Jordan* $(\mathcal{J}, .)$ on procède comme pour les algèbres de Lie, à la seule différence que l'idéal choisi dans la K-algèbre tensorielle $T\mathcal{J} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n\mathcal{J}$ pour passer au quotient est engendré par les éléments de la forme

$$x.y - \frac{1}{2}(x \otimes y + y \otimes x) \quad ;$$

il est clair alors que, si on désigne par Ass($\mathcal{J}$) la K-algèbre associative quotient ainsi définie, l'application canonique $\mathcal{J} \to \mathrm{Ass}(\mathcal{J})^+$ est un morphisme d'algèbres de Jordan et que tout morphisme de $\mathcal{J}$ dans l'algèbre de Jordan $\mathcal{A}^+$ d'une K-algèbre associative $\mathcal{A}$ se factorise canoniquement suivant $\mathcal{J} \to \mathrm{Ass}(\mathcal{J}) \to \mathcal{A}$ où $\mathrm{Ass}(\mathcal{J}) \to \mathcal{A}$ est un morphisme de K-algèbres associatives bien déterminé.

(1.2) Exemples d'algèbres de Jordan .

1) Sous-algèbres de Jordan d'une algèbre associative. - Soient ($\mathcal{A}$, .) une K-algèbre associative et $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}$. Pour que $\mathcal{B}$ soit une sous-algèbre de Jordan de $\mathcal{A}$ (i.e. un ensemble stable pour la multiplication symétrisée : $(x,y) \longmapsto \frac{1}{2}(x.y + y.x)$) il faut et il suffit que $\mathcal{V}$ soit stable pour les carrés, i.e. $x \in \mathcal{V} \Longrightarrow x^2 \in \mathcal{V}$. Un exemple particulièrement intéressant est fourni par les opérateurs hermitiens d'un espace de Hilbert réel, complexe ou quaternionique (dans ce cas $K=\mathbb{R}$).

2) Algèbre de Jordan d'une forme quadratique. - Soit Q une forme quadratique définie sur un K-espace vectoriel $\mathcal{V}$. Notons B la forme K-bilinéaire symétrique définie canoniquement par Q, i.e. :

$$B(x,y) = \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)).$$

On définit alors canoniquement sur l'espace vectoriel $K \oplus \mathcal{V}$ une K-algèbre de Jordan à unité en prenant pour "table" de multiplication :

$$(1,0)^2 = (1,0), \quad (1,0).(0,x) = (0,x).(1,0) = (0,x),$$
$$(0,x).(0,y) = (B(x,y), 0).$$

On montre aisément que l'algèbre associative enveloppante de cette algèbre de Jordan $\mathcal{U} = K\times\mathcal{V}$ devient, lorsqu'on y identifie l'unité de $\mathcal{U}$ à celle de K, une algèbre isomorphe à l'algèbre de Clifford C(Q) de la forme quadratique, ce qui permet d'identifier à la partie filtrée du premier degré de C(Q) laquelle est évidemment une sous-algèbre de Jordan de C(Q). (Pour la définition des algèbres de Clifford et leurs propriétés générales, on pourra se référer à BOURBAKI [1]).

Remarque. - La notion d'algèbre de Jordan d'une forme quadratique se con-

fond avec celle d'*algèbre de Dirac* définie par J.M. SOURIAU [22] : une **algèbre** de Dirac sur un K-espace vectoriel V consiste en un K-espace vectoriel $\mathcal{D}$ d'endomorphismes de V tel que, pour tout $A \in \mathcal{D}$, A^2 soit un **opérateur** scalaire (i.e. $A^2 \in K.id_V$). Il est clair qu'on définit de la **sorte** une K-forme quadratique Q sur $\mathcal{D}$ et que, pour $id_V \notin \mathcal{D}$, l'algèbre **de** Jordan de cette forme quadratique Q s'identifie canoniquement à la **sous**-algèbre de Jordan $\mathcal{D} + Kid_V$ de $\mathcal{L}(V)$ (Lorsque $id_V \in \mathcal{D}$, on a trivialement $\mathcal{D} = K.id_V$).

2. L'IDENTITE FONDAMENTALE ET SES PREMIERES APPLICATIONS.

(2.1) La relation fondamentale entre les opérateurs $L(x)$:

THEOREME 1. - *Pour tout couple* (x,y) *d'éléments d'une* K-*algèbre de Jordan* $\mathcal{U}$, *on a*

$$L(x^2y) - L(x^2) \circ L(y) = 2(L(xy) - L(x) \circ L(y)) \circ L(x).$$

LEMME. - *Le crochet* $[A,B]$ *désignant le commutateur* $A \circ B - B \circ A$ *de deux opérateurs* A *et* B *linéaires sur* $\mathcal{U}$, *on a*

$$[L(x), L(y^2)] + 2[L(y), L(xy)] = 0.$$

Preuve du lemme. - De l'identité

$$[L(x+ty), L((x+ty)^2)] = 0 \qquad , (t \in K)$$

on déduit, par bilinéarité

$$t([L(y), L(x^2)] + 2[L(x), L(x.y)]) + t^2([L(x), L(y^2)] + 2[L(y), L(x.y)]) = 0 ;$$

d'où, en raison du fait que t est quelconque dans K :

$$[L(y), L(x^2)] + 2[L(x), L(x.y)] = 0 = [L(x), L(y^2)] + 2[L(y), L(x.y)] .$$

Preuve du théorème 1. - Du lemme, on déduit que, pour tout triple (x,y,z) d'éléments de $\mathcal{U}$, on a :

$$L(x)(y^2.z) - L(y^2)(x.z) = 2(L(x.y)(y.z) - L(y)((x.y).z)),$$

soit, en raison de la commutativité :

$$L(y^2.z)(x) - (L(y^2) \circ L(z))(x) = 2((L(y.z) \circ L(y))(x) - \\ - L(y) \circ L(z) \circ L(y)(x)),$$

d'où l'identité :

$$L(y^2.z) - L(y^2) \circ L(z) = 2(L(y.z) - L(y) \circ L(z)) \circ L(y).$$

<u>THEOREME 2</u> (Puissance - associativité). - *Pour tout entier* $n \geqslant 2$ *et pour tout élément* $x \in \mathcal{U}$ *on définit par itération*

$$x^n = x^{n-1} . x.$$

Alors, pour tout couple (p,q) *d'entiers* $\geqslant 1$, *on a*

$$x^p . x^q = x^{p+q}.$$

Preuve. - On commence par démontrer ceci pour p=2, en procédant par récurrence sur q suivant la chaîne de déduction :

$$\begin{aligned} x^{n+1} = x^2(x^{n+1}) \Longrightarrow x^{n+2} &= x(x^{n+1}) \\ &= x(x^2(x^{n-1})) \\ &= x^2(x(x^{n-1})) \\ &= x^2.x^n. \end{aligned}$$

Le théorème 1 donne alors l'identité

$$L(x^{n+1}) = 2L(x^n) \circ L(x) + L(x^2) \circ L(x^{n-1}) - 2L(x) \circ L(x^{n-1}) \circ L(x)$$

qui assure en particulier que les opérateurs $L(x^n)$, $(n \geqslant 1)$ appartiennent tous à la sous-algèbre associative engendrée par $L(x)$ et $L(x^2)$ dans l'algèbre d'endomorphismes $\mathcal{L}(\mathcal{U})$ et, comme cette sous-algèbre est commutative du fait que $L(x)$ et $L(x^2)$ commutent, on a alors :

$$\begin{aligned} x^{p+q} = x^p.x^q \Longrightarrow x^{p+q+1} &= x^{p+q} . x \\ &= (x^p.x^q) . x \\ &= (L(x) \circ L(x^p))(x^q) \\ &= (L(x^p) \circ L(x))(x^q) \end{aligned}$$

$$= L(x^p)(x^{q+1})$$
$$= x^p \cdot x^{q+1}.$$

(2.2) Application à l'étude de la nilpotence. - Un élément x d'une K-algèbre de Jordan est dit nilpotent s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $x^n = 0$.

PROPOSITION. - *Pour qu'une* K-*algèbre de Jordan* $\mathcal{U}$ *n'ait que des* nilpotents nuls, *il faut et il suffit qu'elle remplisse la condition suivante :*

$$x \in \mathcal{U} \quad \text{et } x^2 = 0 \implies x = 0.$$

Preuve. - Cette condition assure que l'opérateur L(x), stable sur la sous-algèbre K[x] de $\mathcal{U}$ engendrée par le seul élément x de $\mathcal{U}$ est injective ; en effet, pour $P(x) = \sum_{i=1}^{n} a^i x^i$ et $xP(x) = 0$ on déduit, compte tenu de l'associativité de K[x] , que

$$0 = xP(x) = x^2P(x) = \ldots\ldots = x^nP(x)$$

d'où $(P(x))^2 = 0$ et, par conséquent, $P(x) = 0$.

Mais alors, on a en particulier, pour tout $x \in \mathcal{U}$ et tout entier $n \geq 1$:

$$x^n = 0 \implies x^{n-1} = 0 \implies \ldots \implies x = 0.$$

Exemple. - Pour que l'algèbre de Jordan d'une forme quadratique Q n'ait que des nilpotents nuls, il faut et il suffit que le cône d'isotropie de Q soit réduit à 0.

3. IDEMPOTENTS D'UNE ALGEBRE DE JORDAN.

(3.1) Décomposition de Peirce.

DEFINITION. - *Un élément* x *d'une* K-*algèbre est dit* idempotent *si* $x^2 = x$.

Exemple. - Les idempotents d'une algèbre de Jordan d'opérateurs hermitiens sont les projecteurs orthogonaux appartenant à cette algèbre.

Rappel. - Un élément x d'une K-algèbre associative $(\mathcal{Cl}, e)$ est dit algébrique s'il existe un polynôme $P \in K[1,X]$ non nul tel que $P(x) = 0$. Si de plus, on peut trouver parmi tous les polynômes annulés par x un polynôme complètement décomposable à racines simples

$$\prod_{i=1}^{r} (X-\alpha_i),$$

on dit que x est simple. Un tel élément algébrique simple se décompose canoniquement en une combinaison linéaire

$$x = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \, p_i$$

d'idempotents p_i, deux à deux orthogonaux, tels que

$$\sum_{i=1}^{r} p_i = e \quad ;$$

ces idempotents sont donnés par la formule

$$p_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} (\alpha_i - \alpha_j)^{-1}(x-\alpha_j).$$

Lorsque $(\mathcal{A}, e) = (\mathcal{L}(\mathcal{V}), \mathrm{id}_{\mathcal{V}})$, $\mathcal{V}$ étant un K-espace vectoriel, on obtient là la décomposition spectrale des opérateurs linéaires algébriques simples sur $\mathcal{V}$: $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont les valeurs propres de l'opérateur considéré et $p_1, \ldots, p_r$ sont les projecteurs canoniques de la décomposition directe

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{V}_r$$

de $\mathcal{V}$ en espaces propres pour cet opérateur.

Notations et définitions. - Pour tout couple $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ de sous-espaces vectoriels d'une K-algèbre de Jordan $\mathcal{U}$, on désignera par $\mathcal{V}.\mathcal{W}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}$ engendré par les produits v.w, $v \in \mathcal{V}$, $w \in \mathcal{W}$. Si ce sous-espace $\mathcal{V}.\mathcal{W}$ est réduit à 0, on dit que $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont orthogonaux. Si $\mathcal{V}.\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ (resp. $\mathcal{U}.\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$) on dit que $\mathcal{V}$ est une sous-algèbre (resp. un idéal) de $\mathcal{U}$. Par décomposition (+, -) de $\mathcal{U}$, on entendra la donnée d'un couple $(\mathcal{V},\mathcal{W})$ de sous-espaces vectoriels de $\mathcal{U}$ tel que $\mathcal{U} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, $\mathcal{V}.\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$, $\mathcal{V}.\mathcal{W} \subset \mathcal{W}$, $\mathcal{W}.\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$.

THEOREME DE DECOMPOSITION DE PEIRCE. - *Soit* c *un élément idempotent d'une* K-*algèbre de Jordan* $\mathcal{U}$. *Alors :*

i) L'opérateur L(c) *est algébrique simple de valeurs propres* $(0, \frac{1}{2}, 1)$.

ii) Pour chacune de ces valeurs propres α, *notons* $\mathcal{U}_\alpha(c)$ *le sous-espace propre de* L(c) *correspondant. Alors* $\mathcal{U}_\circ(c)$ *et* $\mathcal{U}_1(c)$ *sont deux sous-*algèbres orthogonales *de* $\mathcal{U}$ *et* $(\mathcal{U}_\circ(c) + \mathcal{U}_1(c), \mathcal{U}_{\frac{1}{2}}(c))$ *est une décomposition* (+, -)*de* $\mathcal{U}$.

Preuve. :-

i) Pour $x = y = z = c$ l'identité fondamentale devient

$$L(c) - (L(c))^2 = 2(L(c) - (L(c))^2) \circ L(c) \;;$$

de sorte que L(c) annule le polynôme

$$2X^3 - 3X^2 + X = X(2X-1)(X-1).$$

ii) Pour tout $x \in \mathcal{U}$, on a

$$L(cx) - L(c) \circ L(x) = 2(L(cx) - L(c) \circ L(x)) \circ L(c) \;;$$

d'où, pour $c.x = 0$:

$$L(c) \circ L(x) = 2(L(c) \circ L(x) \circ L(c))$$

et alors :

$$c.y = 0 \text{ ou } c.y = y \implies c.(x.y) = 0. \tag{1}$$

De même, pour $c.x = x$, on a :

$$c.y = y \text{ ou } c.y = 0 \implies (L(x) - L(c) \circ L(x)).y = 0$$

i.e. :

$$c.y = y \text{ ou } c.y = 0 \implies x.y = c.(x.y). \tag{2}$$

Or, de (1) et (2) il résulte bien que $\mathcal{U}_\circ(c)$ et $\mathcal{U}_1(c)$ sont deux sous-algèbres orthogonales de $\mathcal{U}$.

Pour $c.x = \frac{1}{2}x$, l'identité fondamentale donne :

$$\frac{1}{2} L(x) - L(c) \circ L(x) = (L(x) - 2L(c) \circ L(x)) \circ L(c) \;;$$

d'où alors :

$$c.y = 0 \quad \text{ou} \quad c.y = y \Longrightarrow \frac{1}{2}(L(x) - L(c) \circ L(x)).y = 0$$

i.e.

$$c.y = 0 \quad \text{ou} \quad c.y = y \Longrightarrow \frac{1}{2}\, x.y = c.(x.y).$$

Reste à voir que le produit de deux éléments de $\mathcal{U}_{1/2}(c)$ **appartient** à $\mathcal{U}_0(c) + \mathcal{U}_1(c)$; pour cela, il suffit de montrer que, pour tout $x \in \mathcal{U}_{1/2}(c)$, x^2 est annulé par le projecteur canonique de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{U}_{1/2}(c)$ et, comme ce projecteur est égal à $-4(L^2(c) - L(c))$ on est ramené à prouver que

$$c.x = \frac{1}{2}\, x \quad \Longrightarrow \quad c.(c.x^2 - x^2) = 0\,.$$

Or :

$$(c.x^2 - x^2).c = (L(x^2.c) - L(x^2) \circ L(c))(c).$$

Et , en vertu de l'identité fondamentale :

$$\begin{aligned} &= 2(L(x.c) - L(x) \circ L(c))(x.c) \\ &= (\tfrac{1}{2}\, L(x) - L(x) \circ L(c))(x) \\ &= \tfrac{1}{2}\, (x^2 - x^2). \end{aligned}$$

(3.2) Relation d'ordre fondamentale.

Notation. - Si deux idempotents (x,y) d'une K-algèbre de Jordan sont tels que $x.y = y$, on dira que x est plus grand que y, ce qu'on notera $x \geqslant y$. Dans ces conditions, il est aisé de s'assurer à partir de l'identité fondamentale, de la double égalité

$$(1-L(x)) \circ L(y) \circ (1-2L(x)) = 0 = L(y) \circ (1-L(x)) \circ (1-2L(y))$$

ce qui va permettre de montrer que la relation ainsi définie sur l'ensemble des idempotents de $\mathcal{U}$ est une relation d'ordre. Pour cela, il suffit de montrer que :

LEMME. - *Pour tout triple* (x,y,z) *d'idempotents de* $\mathcal{U}$:

$$x.y = y \text{ et } y.z = z \Longrightarrow x.z = z.$$

Preuve. - De l'identité, appliquée à z ,

$$L(y) \circ (\mathrm{id} - L(x)) \circ (\mathrm{id} - 2L(y)) = 0,$$

on déduit :

$$L(y) \circ (\mathrm{id} - L(x))(-z) = 0 ;$$

d'où : $z = y \,.\, (x.z)$.

De l'identité, appliquée à x,

$$(\mathrm{id} - L(y)) \circ L(z) \circ (\mathrm{id} - 2L(y)) = 0,$$

on déduit :

$$((\mathrm{id} - L(y)) \circ L(z))(x-2y) = 0 ;$$

d'où : $(1 - L(y))(x.z - 2z) = 0$,

soit $x.z = y \,.\, (x.z)$.

(3.3) Idempotents primitifs.

PROPOSITION 1. - *Pour un idempotent non nul* c *d'une* K*-algèbre de Jordan* $\mathcal{U}$*, les assertions suivantes sont équivalentes :*
i) c *est minimal dans l'ensemble des idempotents non nuls de* $\mathcal{U}$*.*
ii) Pour toute décomposition $c = c_1+c_2$ *de* c *en idempotents de* $\mathcal{U}$*, on a* $c_1 = 0$ *ou* $c_2 = 0$.

Preuve. - Si c n'est pas minimal, il existe un idempotent $c_1 \neq 0$ de $\mathcal{U}$ tel que $c_1.c = c_1$ et $c-c_1 \neq 0$ et alors :

$$(c-c_1)^2 = c+c_1 - 2c.c_1 = c-c_1.$$

Réciproquement, s'il existe une décomposition de c en idempotents non nuls :

$$c = c_1+c_2,$$

alors :

$$c_1+c_2 = (c_1+c_2)^2 = c_1+c_2 + 2c_1.c_2 \text{, d'où } c_1.c_2 = 0$$

et, par conséquent, $c.c_1 = c_1$ d'où $0 < c_1 < c_2$.

Remarquons que la propriété de décomposition d'un idempotent non primitif en d'autres idempotents peut se généraliser ainsi :

PROPOSITION 2. - *Soient* c *un idempotent de* $\mathcal{U}$ *et* $(c_1, \ldots, c_r)$ *un système* orthogonal *d'idempotents inférieurs à* c. *Alors* $c_1 + \ldots + c_r$ *et* $c - (c_1 + \ldots + c_r)$ *sont deux idempotents inférieurs à* c.

Preuve. - Pour $c_1 + \ldots + c_r$ ceci résulte de ce que :

$$(c_1 + \ldots + c_r)^2 = \sum_{i=1}^{r} c_i^2 + 2 \sum_{i<j} c_i . c_j = c_1 + \ldots + c_r$$

et de :

$$c(c_1 + \ldots + c_r) = c.c_1 + \ldots + c.c_r = c_1 + \ldots + c_r .$$

Pour $c - (c_1 + \ldots + c_r)$, il suffit de reprendre la démonstration précédente.

COROLLAIRE. - *Dans toute* K-*algèbre de Jordan de* dimension finie n, *tout idempotent* c *de* $\mathcal{U}$ *se décompose en une somme d'idempotents primitifs, deux à deux orthogonaux :*

$$c = c_1 + \ldots + c_p \quad ,$$

avec $p \leqslant n$.

Preuve. - Compte tenu de la proposition précédente, ceci résulte du fait que tout système orthogonal d'idempotents est linéairement libre et du

LEMME. - *Soient* c *et* d *deux idempotents orthogonaux et* d' *un idempotent inférieur à* d. *Alors* c *et* d' *sont orthogonaux.*

Preuve. - Par hypothèse on a $c \in \mathcal{U}_0(d)$ et $d' \in \mathcal{U}_1(d)$ d'où l'orthogonalité de c et d', en vertu du théorème de Peirce.

(3.4) Cas d'une algèbre de Jordan d'opérateurs linéaires. - Soit $\mathcal{U} = \mathcal{L}(\mathcal{V})$ l'algèbre de Jordan constituée par les opérateurs linéaires d'un K-espace vectoriel $\mathcal{V}$ au moyen de la forme bilinéaire symétrique

$$(A,B) \longmapsto \frac{A \circ B + B \circ A}{2} = A.B \ .$$

Il est clair que les idempotents de $\mathcal{U}$ sont les projecteurs sur les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{V}$. Soit P un projecteur d'image $\mathcal{Q}$; désignons par $\mathcal{B}$ l'image du projecteur complémentaire $id_{\mathcal{V}} - P$ de P ; alors la décomposition directe $\mathcal{V} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ permet d'écrire :

$$P = \begin{bmatrix} \mathrm{id}_{\mathcal{A}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{id}_{\mathcal{V}} - P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}$$

et, de façon plus générale, d'exprimer tout opérateur linéaire R de $\mathcal{V}$ sous la forme matricielle :

$$R = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} ;$$

de sorte que :

$$P.R = \begin{bmatrix} A & \frac{1}{2}B \\ \frac{1}{2}C & 0 \end{bmatrix}$$

et la décomposition de Peirce de R suivant les valeurs propres $(1, \frac{1}{2}, 0)$ s'exprime par :

$$R = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} .$$

En particulier, pour un projecteur Q, la relation $Q < P$, i.e. $P.Q = Q$ apparaît comme la relation d'ordre habituelle $P \circ Q = Q \circ P = Q$, qui consiste à dire que l'image de Q est incluse dans celle de P et que le noyau de Q contient celui de P. Notons aussi que l'orthogonalité de deux projecteurs P et Q se traduit par $P \circ Q = Q \circ P = 0$, i.e. l'un projette sur le noyau de l'autre et vice versa. Quant aux idempotents primitifs, ce sont ici les projecteurs de rang 1.

4. ELEMENTS INVOLUTIFS ET REPRESENTATION QUADRATIQUE.

DEFINITION 1. - *Soit* $(\mathcal{U}, e)$ *une* K-*algèbre de Jordan à unité. Un élément* s *de* $\mathcal{U}$ *est dit involutif si* $s^2 = e$.

LEMME. - *L'égalité*

$$p = \frac{e+s}{2}$$

met en correspondance biunivoque *les éléments involutifs* s *de* $\mathcal{U}$ *et les* idempotents p *de* $\mathcal{U}$.

(EVIDENT !)

DEFINITION 2. - *Pour toute* K-*algèbre de Jordan* $\mathcal{U}$, *on définit une application* P : $\mathcal{U} \to \mathcal{L}(\mathcal{U})$ *en posant*

$$P(x) = 2L^2(x) - L(x^2) \qquad (x \in \mathcal{U})$$

Cette application P *est appelée la* représentation quadratique *de* $\mathcal{U}$. *Son intérêt vis-à-vis des éléments involutifs de* $\mathcal{U}$ *tient au résultat suivant :*

PROPOSITION. - *Soit* s *un élément de* $\mathcal{U}$. *Alors* P(s) préserve *l'unité* e *si, et seulement si,* s *est* involutif *; dans ces conditions,* P(s) *est égal à la symétrie :*

$$x_+ + x_- \longmapsto x_+ - x_- ,$$

suivant la décomposition (+, -) *de* $\mathcal{U}$ *définie par l'idempotent* $\frac{1}{2}(e+s)$ *canoniquement associé à* s *(i.e.* $x_+ = x_1 + x_0$ *et* $x_- = x_{1/2}$*).*
De plus, cet automorphisme linéaire P(s) *préserve la* multiplication *de* $\mathcal{U}$ *; c'est donc un* automorphisme *involutif de l'algèbre de Jordan* $\mathcal{U}$.

Preuve. - La première assertion résulte de ce que $P(x)(e) = x^2$. Pour avoir la seconde, il suffit de remarquer que

$$s.x_1 = x_1, \qquad s.x_{1/2} = 0, \qquad s.x_0 = -x_0 \;;$$

d'où :

$$P(s)(x) = 2(x_1+x_0) - (x_1+x_{1/2} + x_0) = x_1 - x_{1/2} + x_0.$$

Enfin, pour avoir la dernière assertion, il suffit de remarquer que la décomposition (+, -) d'un produit x.y s'écrit :

$$x.y = (x_1.y_1 + x_0.y_0 + x_{1/2}.y_{1/2}) + (x_{1/2}(y_0+y_1) + y_{1/2}(x_0+x_1))\;;$$

d'où :

$$\begin{aligned} P(s)(x.y) &= (x_1.y_1 + x_0.y_0 + x_{1/2}.y_{1/2}) - (x_{1/2}(y_0+y_1) + y_{1/2}(x_0+x_1)) \\ &= P(s)(x).P(s)(y). \end{aligned}$$

Définition et notation. - Le groupe d'automorphismes de l'algèbre de Jordan $\mathcal{U}$ engendré par les P(s), $s^2=e$, sera noté $\mathcal{A}_\circ(\mathcal{U})$; ses éléments seront appelés les *automorphismes intérieurs* de $\mathcal{U}$.

Retour aux exemples fondamentaux :

1) Pour une algèbre de Jordan d'opérateurs linéaires, l'automorphisme défini canoniquement par une symétrie

$$S = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

est la transformation :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} A & -B \\ -C & D \end{bmatrix} \text{, i.e. } M \longmapsto S{\circ}M{\circ}S,$$

ce qui justifie la terminologie adoptée.

2) Si $\mathcal{U} = K \times \mathcal{V}$ est l'algèbre de Jordan d'un K-espace vectoriel quadratique $(\mathcal{V},Q)$, les éléments involutifs de $\mathcal{U}$ distincts des éléments évidents (1,0) et (-1,0) sont les éléments de la forme (0,x), Q(x) = 1, i.e. ils décrivent la quadrique unitaire $\mathcal{V}_Q$ de Q. Il est alors aisé de s'assurer que l'automorphisme de $\mathcal{U}$ canoniquement défini par un élément involutif (0,x) de $\mathcal{U}$ laisse $\mathcal{V}$ stable et que, dans ce sous-espace, c'est la symétrie d'axe x dans la direction de l'hyperplan tangent à $\mathcal{V}_Q$ en x, de sorte que le groupe $\mathcal{A}_\circ(\mathcal{U})$ s'identifie alors canoniquement au groupe O(Q) des automorphismes de l'espace quadratique $(\mathcal{V},Q)$.

5. IDEMPOTENTS DE RANG 1.

DEFINITION. - *Par rang d'un idempotent* c *d'une* K*-algèbre de Jordan* $\mathcal{U}$, *on entendra la dimension du* K*-espace vectoriel* $\mathcal{U}_1(c) = \{x \in \mathcal{U} \ ; \ c.x=x\}$.

Il est clair que tout idempotent de rang 1 est primitif ; la réciproque est fausse en général sauf pour les exemples fondamentaux suivants :

Exemples .—

1) Si $\mathcal{U} = K \times \mathcal{V}$ est l'algèbre de Jordan d'un K-espace vectoriel quadratique $(\mathcal{V},Q)$, alors tout idempotent distinct de l'unité (1,0), i.e. de la forme $\frac{1}{2}(1,x)$, Q(x) = 1, est de rang 1. En effet :

$$\frac{1}{2}(\beta,y).(1,x) = (\beta,y)$$

équivaut à :

$$y = \beta x \qquad \text{et} \qquad Q(x+y) = Q(y) + 1 + 2\beta$$

i.e., tout simplement à $y = \beta x$; d'où :

$$\mathcal{U}_1(\tfrac{1}{2}(1,x)) = K.(1,x).$$

2) Si $\mathcal{U}$ est l'algèbre de Jordan des opérateurs hermitiens d'un espace de Hilbert réel, complexe ou quaternionique, alors tout idempotent primitif de $\mathcal{U}$ est de rang 1. En effet, il est clair qu'un tel idempotent est la projection orthogonale sur une droite, ce qui fait que la décomposition canonique d'un hermitien H suivant P et le projecteur complémentaire I-P est

$$H = \begin{bmatrix} \alpha & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

d'où :

$$\frac{1}{2}(H_\circ P + P_\circ H) = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{1}{2}B \\ \frac{1}{2}B^* & 0 \end{pmatrix} .$$

Nota. - De façon plus générale nous démontrerons que, dans une $\mathbb{R}$-algèbre de Jordan de *forme réelle* (i.e. dans laquelle $x^2+y^2 = 0$ entraîne $x=y=0$), tout idempotent primitif de rang fini est de rang 1.

Voici un résultat sur les couples d'idempotents de rang 1 qui s'avèrera d'une grande importance par la suite :

<u>LEMME</u>. - *Soit* (a,b) *un couple d'idempotents de rang 1 d'une* K-*algèbre de Jordan* $\mathcal{U}$. *On suppose que* a *et* b *sont distincts et* non orthogonaux *et que la sous-algèbre de* $\mathcal{U}$ *qu'ils engendrent, notée* $\mathcal{U}$(a,b), *possède une unité* e. *Soit*

$$b = \lambda a + b_{1/2} + b.$$

la décomposition de Peirce de b *relative à* a. *Alors :*

i) $b_{1/2}$ *et* $b_\circ$ *ne sont pas nuls.*
ii) $\mathcal{U}(a,b)$ *est de dimension 3 et admet* $(a,b,b_{1/2})$ *pour base.*
iii) On note u *et* v *les éléments involutifs de* $\mathcal{U}(a,b)$ *définis par* a *et* b *(i.e.* $u = 2a-e$ *et* $v = 2b-e$*). Alors :*

$$u.v = (2\lambda-1)e,$$

ce qui fait que $\mathcal{U}(a,b)$ *s'identifie canoniquement à l'algèbre de la forme quadratique de matrice :*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2\lambda-1 \\ 2\lambda-1 & 1 \end{bmatrix}$$

suivant la base (u,v).

Preuve :

i) $b_{1/2} = 0$ entraîne que λa et $b_\circ$ sont deux idempotents inférieurs à b d'où $\lambda=0$, qui donne $a.b = 0$, ou bien $b_\circ=0$ qui donne $b=a$. $b_\circ=0$ donne :

$$b = \lambda a + b_{1/2} \quad , \quad ab = \lambda a + \frac{1}{2} b_{1/2},$$

d'où :

$$2a.b = \lambda a + b,$$

qui assure que $\mathcal{U}(a,b)$ est de dimension 2, ce qui permet d'écrire :

$$e = \alpha a + \beta b \qquad (\alpha, \ \beta \in K) \ ;$$

d'où :

$$(1-\alpha)a = \beta ab = \frac{1}{2}(\beta\lambda a + \beta b) \implies \beta = 0 \text{ et } \alpha = 1 \ ;$$

mais alors $a=e$, d'où $b = \lambda a$, i.e. $b = a$.

ii) Soit (α,β,γ) un triple d'éléments de K tel que :

$$\alpha a + \beta b + \gamma b_{1/2} = 0.$$

Alors :

$$(\alpha+\beta\lambda)a + (\beta+\gamma)b_{1/2} + \beta b_\circ = 0$$

ce qui, compte tenu de i), donne :

$$\alpha + \beta\lambda = \beta+\gamma = \beta = 0$$

i.e. : $\alpha = \beta = \gamma = 0.$

Puisque $a^2=a$, $b^2=b$ et $a.b = \lambda a + \frac{1}{2} b_{1/2}$, il reste à voir que $(b_{1/2})^2$ et $b_o.b_{1/2}$ sont des combinaisons linéaires de a, b et $b_{1/2}$. Or, de l'égalité :

$$b = b^2 = \lambda^2 a + (b_{1/2})^2 + (b_o)^2 + \lambda b_{1/2} + 2\, b_{1/2}.b_o$$

on déduit, compte tenu des propriétés de la décomposition de Peirce :

$$b_o.b_{1/2} = \frac{1-\lambda}{2}\, .\, b_{1/2}$$

et

$$\lambda^2 a + (b_{1/2})^2 + (b_o)^2 = \lambda a + b_o = b - b_{1/2}$$

et, comme de $\lambda a + b_o = b - b_{1/2}$, on déduit :

$$\lambda^2 a + b_o^2 = b - 2b.b_{1/2} + (b_{1/2})^2 \quad ;$$

d'où $$(b_{1/2})^2 - (b_o)^2 = \lambda^2 a - b + 2b.b_{1/2}.$$

Il ne reste donc plus qu'à prouver que $b.b_{1/2}$ est une combinaison linéaire de a, b et $b_{1/2}$; or

$$b.b_{1/2} = 2((a.b).b - \lambda(a.b))$$

et, en utilisant la décomposition de Peirce de a par rapport à b :

$$a = \mu b + a_{1/2} + a_o \quad ,$$

laquelle donne :

$$a.b = \mu b + \frac{1}{2} a_{1/2}$$

d'où :

$$(a.b).b = \frac{1}{2}(\mu b + a.b) \, ,$$

on obtient bien la combinaison linéaire :

$$b.b_{1/2} = \lambda(1-2\lambda)a + \mu b + (\frac{1}{2} - \lambda)b_{1/2}.$$

iii) Soit e l'unité de $\mathcal{U}(a,b)$. On a alors :

$$\begin{aligned} u.v &= (2a-e)(2b-e) \\ &= 4ab - 2(a+b) + e \\ &= 2(\lambda-1)a - 2b_o + e \quad . \end{aligned}$$

Or, e se décompose canoniquement suivant :

$$e = \alpha a + \beta b + \gamma b_{1/2}$$

qui donne :

$$a = \alpha a + \beta a.b + \frac{1}{2}\gamma b_{1/2} ,$$

soit :

$$((\alpha-1) + \beta\lambda)a + \frac{1}{2}(\beta+\gamma)b_{1/2} = 0 ;$$

d'où :

$$\beta+\gamma = 0 \qquad \text{et} \quad \alpha = 1 - \beta\lambda.$$

Ainsi : $\quad e = (1-\beta\lambda)a + \beta(b-b_{1/2}) = (1-\beta\lambda)a + \beta(\lambda a - b_\circ)$;

d'où :

$$b_{1/2} = \frac{1}{2}(1-\beta\lambda)b_{1/2} + \beta(\frac{\lambda}{2}\, b_{1/2} - b_{1/2}b_\circ)$$

et, comme on a vu en ii) que $b_{1/2}.b_\circ = \frac{1}{2}(1-\lambda)b_{1/2}$, cette égalité se réduit, du fait que $b_{1/2} \neq 0$, à :

$$\beta(\lambda-1) = 1,$$

ce qui assure que $\lambda\neq 1$ et $\beta = \frac{1}{\lambda-1}$, d'où $(\lambda-1)e = (\lambda-1)a - b_\circ$, et, par conséquent

$$u.v = 2(\lambda-1)e + e = (2\lambda-1)e.$$

Remarques .–

1. Du fait que u.v est symétrique par rapport à a et b, il résulte que si
$$a = \mu b + a_{1/2} + a_\circ$$
est la décomposition de Peirce de a par rapport à b, on a $\mu=\lambda$.

2. Pour $K=\mathbb{R}$, la forme quadratique de iii) est définie positive si $0 < \lambda < 1$, sinon elle est hyperbolique et alors les points u et v sont sur la même branche d'hyperbole unitaire si, et seulement si, $(2\lambda-1) \geqslant 1$, i.e. $\lambda > 1$.

6. ALGEBRES DE JORDAN D'UNE FORME QUADRATIQUE NON NEGATIVE.

Soit $(\mathcal{V},Q)$ un espace quadratique réel tel que dans la signature de Q il y ait au moins un signe +. Il existe alors dans l'algèbre de Jordan $\mathcal{U}$

de $\mathscr{V}$ des idempotents non triviaux, i.e. distincts de (1,0) et (0,0), ce sont les éléments $\frac{1}{2}$ (1,x), Q(x) = 1 ; tous ces idempotents sont de rang 1 et deux d'entre eux sont orthogonaux si, et seulement si, les éléments involutifs qu'ils définissent sont opposés, i.e. ces idempotents sont complémentaires. Réciproquement :

THEOREME. - *Soit $\mathscr{U}$ une algèbre de Jordan réelle admettant une unité* e *et deux idempotents* a *et* b complémentaires *(i.e.* a+b = e*)* , *de* rang *1. Alors* a *et* b *sont orthogonaux,* a-b = s *est un élément involutif,* $\mathscr{U}_\circ(a) = \mathscr{U}_1(b)$ *et* $\mathscr{U}_\circ(b) = \mathscr{U}_1(a)$ *et* $\mathscr{U}_{1/2}(a) = \mathscr{U}_{1/2}(b)$ $(=\mathscr{V})$, *on a la décomposition en somme directe :*

$$\mathscr{U} = \mathbb{R}e \oplus \mathbb{R}s \oplus \mathscr{V}$$

et $\mathscr{U}$ est l'algèbre d'une forme quadratique non négative *sur* $\mathbb{R}s \oplus \mathscr{V}$.

Preuve. - Les trois premières assertions sont évidentes et conduisent à la décomposition de Peirce :

$$\mathscr{U} = \mathbb{R}a \oplus \mathbb{R}b \oplus \mathscr{V}$$

d'où

$$\mathscr{U} = \mathbb{R}e \oplus \mathbb{R}s \oplus \mathscr{V}$$

et, comme $s^2 = e$ et s est orthogonal à $\mathscr{V}$, il ne reste plus qu'à prouver que, pour tout $x \in \mathscr{V}$, $x^2 \in \mathbb{R}e$, ce qui résulte du :

LEMME. - *Soit* a *et* b *deux idempotents orthogonaux de rang 1 d'une* K-*algèbre de Jordan $\mathscr{V}$. Alors, tout élément* x^2, $x \in \mathscr{U}_{1/2}(a) \cap \mathscr{U}_{1/2}(b)$ *s'écrit canoniquement sous la forme :*

$$x^2 = \lambda\,(a+b) \qquad , \qquad \lambda \in K.$$

Preuve. - Désignons par $\mathscr{W}$ l'algèbre de Jordan $\mathscr{U}_1(a+b)$; alors $x \in \mathscr{W}$, ainsi que a et b et

$$\mathscr{W}_1(a) = \mathscr{W}_\circ(b), \qquad \mathscr{W}_1(b) = \mathscr{W}_\circ(a)\,;$$

d'où $x^2 \in \mathscr{W}_1(a) + \mathscr{W}_1(b) = Ka + Kb$, i.e. :

$$x^2 = \lambda a + \mu b \qquad (\lambda,\ \mu \in K).$$

Mais alors, en multipliant par a, on obtient :

$$ax^2 = \lambda a \ ;$$

d'où :

$$(ax^2)x = \frac{\lambda}{2}\, x \ ;$$

or :

$$(ax^2)x = (ax)x^2 = \frac{1}{2}\, x^3 \ ;$$

d'où :

$$x^3 = \lambda x.$$

De même la multiplication par b conduirait à :

$$x^3 = \mu x;$$

d'où $\lambda = \mu$.

Exemple. - Dans l'algèbre $\mathcal{H}_2(\mathbb{R})$ des matrices réelles symétriques :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

on a évidemment deux idempotents complémentaires de rang 1, à savoir :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est clair alors que l'espace quadratique dont il est question dans le théorème est constitué par les matrices de trace nulle :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

et la forme bilinéaire symétrique

$$(A,B) \longmapsto \mathrm{Tr}(AB).$$

CHAPITRE 2

ALGEBRES DE JORDAN SANS ISOTROPIE

1. ALGEBRES DE JORDAN A ISOTROPIE MODEREE.

Soit $\mathcal{U}$ une K-algèbre de Jordan. Un K-sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ est dit *isotrope* s'il existe un élément $x \neq 0$ de $\mathcal{V}$ tel que, pour tout $y \in \mathcal{V}$, $x.y = 0$. Si l'espace Kx est isotrope, on dit que x est isotrope ce qui revient à dire plus simplement qu'on a à la fois $x \neq o$ et $x^2 = 0$. Un K-sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ est dit *totalement isotrope* si tous ses éléments non nuls sont tous isotropes, ce qui suffit à assurer que la restriction à $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ de la multiplication de $\mathcal{U}$ est nulle.

Exemple. - Si $\mathcal{U} = K \times \mathcal{V}$ est l'algèbre de Jordan d'un K-espace vectoriel quadratique $(\mathcal{V},Q)$, les éléments isotropes de $\mathcal{U}$ sont les éléments isotropes de l'espace quadratique $(\mathcal{V},Q)$, i.e. les couples $(0,x)$, $x \neq 0$ et $Q(x) = 0$. De ceci, il est aisé de déduire que les sous-espaces isotropes (resp. totalement isotropes) de $\mathcal{U}$ sont exactement les sous-espaces isotropes (resp. totalement isotropes) de l'espace quadratique $(\mathcal{V},Q)$. Cet exemple justifie la terminologie adoptée ici.

PROPOSITION 1. - *Pour une* K-*algèbre de Jordan* $\mathcal{U}$ *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) Toute sous-algèbre de $\mathcal{U}$ non totalement isotrope *possède un* idempotent non nul.

ii) Pour tout élément x *de* $\mathcal{U}$, non isotrope, *qui engendre une sous-algèbre* K[x] *de* dimension finie, *il existe un* idempotent non nul *dans* K[x].

iii) Tout nilpotent non nul *de* $\mathcal{U}$ *est* isotrope.

Preuve. - L'équivalence de i) et ii) étant évidente, il ne reste plus qu'à montrer celle de ii) et iii).

Supposons ii) satisfaite et considérons un nilpotent $x \neq 0$ de $\mathcal{U}$; il existe donc un plus petit entier $n \geqslant 2$ tel que $x^n = 0$; a fortiori $K[x]$ est de dimension finie, ce qui permet, à supposer que $x^2 \neq 0$, de disposer d'un polynôme à une indéterminée $p(X) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i X^i$, $\alpha_i \in K$, tel que $xp(x)$ soit un idempotent non nul de $K[x]$; mais alors X^n divise $Xp(X)(Xp(X)-1)$ sans diviser $Xp(X)-1$, i.e., X^n divise $Xp(X)$, ce qui se trouve en contradiction avec $xp(x) \neq 0$, et $x^n = 0$.

Supposons iii) satisfaite et considérons un élément non isotrope x de $\mathcal{U}$ tel que $K[x]$ soit de dimension finie. Alors, la suite décroissante des sous-espaces vectoriels $x^k K[x]$ de $K[x]$ est stationnaire, ce qui permet de disposer d'un entier $r \geqslant 1$ et d'un polynôme $q(X) = \sum_{i=1}^{s} \beta_i X^i$ tel que $X^r = X^{2r}q(X)$ d'où $(X^r q(X))^2 = X^r q(X)$; mais, comme par hypothèse x n'est pas nilpotent, on a $x^r q(x) \neq 0$, ce qui achève la démonstration.

<u>DEFINITION</u>. - *Une* K-*algèbre de Jordan non totalement isotrope est dite à* isotropie modérée *si elle satisfait aux conditions équivalentes de la proposition précédente et si, de plus, pour toute sous-algèbre $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$, de dimension finie, et tout idempotent $c \in \mathcal{V}$, on a $\mathcal{V}_0(c) = \mathcal{V}_{1/2}(c) = 0$ dès que $c \neq 0$ et $\mathcal{V}_0(c)$ est totalement isotrope.*

Voici deux exemples pour justifier l'intérêt de ces algèbres de Jordan :

<u>PROPOSITION 2</u> .-

i) L'algèbre de Jordan $K \times \mathcal{V}$ d'un K-*espace quadratique $(\mathcal{V}, Q)$ non totalement isotrope, est à isotropie modérée.*

ii) Si une algèbre de Jordan ne possède pas d'élément isotrope, *elle est à* isotropie modérée.

Preuve .-

i) Considérons un élément (α, x) tel que $(\alpha,x)^2 \neq 0$, i.e., $\alpha \neq 0$, ou $Q(x) \neq 0$. Alors, de

$$(\alpha,x)^2 - 2\alpha\ (\alpha,x) = (Q(x) - \alpha^2,\ 0)\ ,$$

on déduit :

$$Q(x) \neq \alpha^2 \Longrightarrow (1,0) = \frac{1}{Q(x)-\alpha^2}\left((\alpha,x)^2 - 2\alpha(\alpha,x)\right)\ ,$$

$$Q(x) = \alpha^2 \implies \left(\frac{1}{2\alpha}(\alpha,x)\right)^2 = \frac{1}{2\alpha}(\alpha,x).$$

Pour terminer, il suffit de se rappeler que les idempotents de $\mathcal{U}$ différents de $(1,0)$ et $(0,0)$ sont les éléments de la forme $\frac{1}{2}(1,x)$, $Q(x) = 1$ et que, pour un tel idempotent c, $\mathcal{U}_0(c) = Kc'$, d'où $\mathcal{W}_0(c) \subset Kc'$ pour toute sous-algèbre $\mathcal{W}$ de $\mathcal{U}$ contenant c, avec $c' = e-c$.

ii) Le fait que x n'ait pas d'éléments isotropes assure que, pour tout élément $x \neq 0$ de $\mathcal{U}$, l'opérateur $L(x)$ est injectif sur l'algèbre $K[x]$; mais, comme $K[x]$ est stable pour $L(x)$, l'opérateur linéaire ainsi défini sur $K[x]$ est surjectif si $K[x]$ est de dimension finie, ce qui assure l'existence d'un polynôme $p(x) \in K[x]$ tel que $xp(x) = x$, d'où $p(x) \neq 0$ et $(p(x))^2 = p(x)$.

Pour en terminer avec ce cas, il suffit de considérer un idempotent $c \neq 0$ tel que $\mathcal{U}_0(c) = 0$ et de montrer que $\mathcal{U}_{1/2}(c) = 0$; or :

$$cx = \frac{1}{2}x \implies (cx)x^2 = \frac{1}{2}x^3 \implies (cx^2)x = \frac{1}{2}x^3$$

$$\implies x^3 = \frac{1}{2}x^3 \implies x^3 = 0 \quad ;$$

mais alors $x=0$, d'après (I.2.2). c.q.f.d.

L'importance des algèbres de Jordan à isotropie modérée tient au résultat suivant :

<u>THEOREME 1</u>. - *Toute sous-algèbre de* dimension finie *d'une* K-*algèbre de Jordan* $\mathcal{U}$ *à* isotropie modérée *possède* un élément unité .

Preuve. - Comme il est clair que toute sous-algèbre d'une algèbre de Jordan à isotropie modérée est aussi à isotropie modérée, on est ramené à prouver que toute K-algèbre de Jordan $\mathcal{U}$ à isotropie modérée et de dimension finie, possède une unité.

Puisque $\mathcal{U}$ n'est pas totalement isotrope, elle possède un idempotent non nul c_1. Si $\mathcal{U}_0(c_1)$ est totalement isotrope, c_1 est une unité et c'est terminé ; sinon, il existe un idempotent $d \neq 0$ dans $\mathcal{U}_0(c_1)$ et alors $c_2 = c_1+d$ est un idempotent $\notin \mathcal{U}_1(c)$, d'où :

$$\mathcal{U}_1(c_1) \subsetneq \mathcal{U}_1(c_2)$$

On fait alors pour c_2 ce qu'on a fait pour c_1 et ainsi de suite, ce qui donne une chaîne d'inclusion stricte

$$\mathcal{U}_1(c_1) \subsetneq \mathcal{U}_1(c_2) \subsetneq \cdots ,$$

laquelle est forcément finie du fait que la dimension de $\mathcal{U}$ est finie; de sorte que le dernier terme $\mathcal{U}_1(c_n)$ fournit une unité c_n pour $\mathcal{U}$.

Voici une application spectaculaire de ce théorème :

THEOREME 2. - *Soit* (a,b) *un couple d'idempotents distincts, de rang 1, dans une algèbre de Jordan* réelle $\mathcal{U}$, de dimension finie, *à* isotropie modérée. *On suppose que le coefficient* λ *de la décomposition de Peirce :*

$$b = \lambda a + b_{1/2} + b_0$$

est strictement positif *(ce qui assure que* a *et* b *ne sont pas orthogonaux et que, en vertu du lemme de (I, 5),* λ *est aussi le coefficient de Peirce de* a *par rapport à* b*). Alors, il existe un élément involutif* w *de* $\mathcal{U}$ *tel que l'automorphisme* P(w) *de* $\mathcal{U}$ échange a *et* b *et* laisse invariant *tout élément de* $\mathcal{U}$ orthogonal *à* b *et* a.

Preuve. - Puisque, d'après le théorème 1, la sous-algèbre $\mathcal{U}(a,b)$ possède une unité e_1, on peut appliquer le lemme (I, 5), ce qui fait que $\mathcal{U}(a,b)$ est l'algèbre de Jordan d'une forme quadratique définie positive pour $0 < \lambda < 1$ et hyperbolique pour $\lambda > 1$ (le cas $\lambda = 1$ ne peut avoir lieu) et, dans ce dernier cas, les éléments involutifs de $\mathcal{U}(a,b)$ associés canoniquement à a et b sont sur la même branche d'hyperbole unitaire. Dans ces deux cas, on peut trouver un élément $w_1 \in \mathcal{U}(a,b)$ involutif tel que $P(w_1)a = b$ et $P(w_1)b = a$. Soit e l'unité de $\mathcal{U}$; alors $e_0 = e - e_1$ est l'unité de $\mathcal{U}_0(e_1)$ et $w = e_0 + w_1$ répond à la question ; en effet, du fait que $\mathcal{U}(a,b) \subset \mathcal{U}_1(e_1)$, e_0 est orthogonal à $\mathcal{U}(a,b)$ d'où

$$L(w)(x) = L(w_1)(x) \qquad (x \in \mathcal{U}(a,b)) ;$$

d'où :

$$P(w)(x) = P(w)(x) .$$

Par ailleurs, si c est orthogonal à a et b, on a :

$$b_{1/2}.c + b_{\circ}.c = 0, \quad b_{1/2}.c \in \mathcal{U}_{1/2}(a),\ b_{\circ}.c \in \mathcal{U}_{\circ}(a)\,;$$

d'où $b_{1/2}.c = 0$, ce qui fait que c est orthogonal à $\mathcal{U}(a,b)$; d'où $c \in \mathcal{U}_{\circ}(e_1)$ et, par conséquent $c \in \mathcal{U}_1(w)$; d'où :

$$P(w)(c) = c.$$

Remarques . -

1. Si $\mathcal{U}$ est sans élément isotrope, on a nécessairement $0 < \lambda < 1$, du fait que, pour $\mathcal{U}(a,b)$, le cas hyperbolique ne peut se produire.
2. Lorsque $\mathcal{U} = \mathbb{R}\times\mathcal{V}$ est l'algèbre de Jordan d'un espace quadratique $(\mathcal{V},Q)$, l'automorphisme $P(w)$ échangeant a et b a une signification précise ; il n'existe que lorsque les éléments involutifs u et v canoniquement associés à a et b sont sur la même composante connexe de la conique passant par ces deux points sur la quadrique unitaire $\mathcal{V}_Q$ et, alors, $P(w)$ est la symétrie axiale oblique échangeant ces deux points.

2. SEMI-SIMPLICITE DES ALGEBRES DE JORDAN SANS ISOTROPIE.

THEOREME 1. - *Pour une* K-*algèbre de Jordan, de dimension finie,* sans éléments isotropes, *les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) L'unité e *de* $\mathcal{U}$ *est le seul idempotent non nul* c *tel que* $\mathcal{U}_{1/2}(c)$ *soit réduit à 0.*

ii) Il n'existe pas de décomposition de $\mathcal{U}$ *en produit de 2 algèbres de Jordan non nulles.*

iii) Les seuls idéaux de $\mathcal{U}$ *sont* $\mathcal{U}$ *et* $\{0\}$.

Preuve. - S'il existe un idempotent distinct c de e tel que $\mathcal{U}_{1/2}(c) = 0$, la décomposition de Peirce :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\circ}(c) \oplus \mathcal{U}_1(c) = \mathcal{U}_{\circ}(c) \oplus \mathcal{U}_1(e-c)$$

fait que $\mathcal{U}$ est isomorphe à un produit de deux algèbres non nulles.

Comme iii) $\Longrightarrow$ ii) évidemment, il ne reste plus qu'à prouver i) $\Rightarrow$ iii). A cet effet, considérons un idéal $\mathcal{J}$ de $\mathcal{U}$; il possède une unité propre u et, pour tout $x \in \mathcal{U}_{1/2}(u)$, on a $ux = \frac{1}{2} x$ et $ux \in \mathcal{I}$, d'où $x \in \mathcal{I}$; mais alors $u.x = x$, d'où $x=0$; de sorte que, par hypothèse $u=e$ ou 0, et c'est terminé.

DEFINITION. - *Sous les conditions équivalentes du théorème 1 on dit que* $\mathcal{U}$ *est une algèbre de Jordan* simple.

THEOREME 2. - *Toute* K-*algèbre de Jordan de* dimension finie $\mathcal{U}$, sans isotropie, *se décompose canoniquement en un produit fini de* K-*algèbres de Jordan simples*

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_p.$$

Preuve. - Pour avoir une telle décomposition il suffit de procéder par récurrence sur la dimension de $\mathcal{U}$ en partant d'un idempotent $c_1 \neq 0$ tel que $\mathcal{U}_{1/2}(c_1) = 0$.

Supposons l'existence d'une seconde décomposition en produit d'algèbres simples :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}'_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}'_q \quad ;$$

alors, l'unité e'_1 de $\mathcal{U}'_1$ se décompose en une somme d'idempotents orthogonaux :

$$e'_1 = c_1 + \dots + c_p \qquad (c_i \in \mathcal{U}_i)$$

et il est aisé de vérifier que, pour tout c_i, on a $c_i = 0$ ou $c_i = e_i$; d'où :

$$\mathcal{U}'_1 = \bigoplus_{c_i \neq 0} \mathcal{U}_i,$$

ce qui, en vertu de la simplicité de $\mathcal{U}'_1$, assure que $\mathcal{U}'_1$ coïncide avec un $\mathcal{U}_i$; d'où l'unicité de la décomposition à l'ordre des facteurs $\mathcal{U}_i$ près.

3. SYSTEMES ORTHOGONAUX D'IDEMPOTENTS DE RANG 1.

Dans tout ce paragraphe, $\mathcal{U}$ désigne une K-algèbre de Jordan *sans isotropie, simple,* de dimension finie > 1.

LEMME 1. - *Sur tout système orthogonal* $\mathcal{S}$ *d'idempotents de rang 1, la relation* R *définie par*

$$\mathcal{U}_{1/2}(a) \cap \mathcal{U}_{1/2}(b) \neq \{0\}.$$

est une relation d'équivalence.

Preuve. - La réflexivité de R tient à ce que $\mathcal{U}$ est simple. La symétrie de R étant évidente, il ne reste plus qu'à prouver la transitivité de R. De façon précise, nous allons prouver que, pour tout élément non nul x de $\mathcal{U}_{1/2}(a) \cap \mathcal{U}_{1/2}(b)$ et tout élément non nul y de $\mathcal{U}_{1/2}(b) \cap \mathcal{U}_{1/2}(c)$ $(a,b,\ c \in \mathcal{S})$, x.y est un élément non nul de $\mathcal{U}_{1/2}(a) \cap \mathcal{U}_{1/2}(c)$. En effet, de $\mathcal{U}_{1/2}(a) \cap \mathcal{U}_{1/2}(b) \subset \mathcal{U}_1(a+b) \subset \mathcal{U}_\circ(c)$ et de $\mathcal{U}_\circ(c).\ \mathcal{U}_{1/2}(c) \subset \mathcal{U}_{1/2}(c)$, on déduit que $x.y \in \mathcal{U}_{1/2}(c)$; d'où, en échangeant le rôle de a et c : $y.x \in \mathcal{U}_{1/2}(a)$. Pour vérifier que $x.y \neq 0$, écrivons conformément au lemme de (I.6), $x^2 = \lambda(a+b)$, $\lambda \neq 0$; il résulte alors de l'identité fondamentale :

$$(L(x^2b) - L(x^2) \circ L(b))(y) = 2((L(xb) - L(x) \circ L(b)) \circ L(x))(y) :$$

$$\frac{\lambda}{2}\, y - \frac{\lambda}{4}\, y = x(xy - b(xy))$$

i.e. :
$$y = \frac{2}{\lambda}\, x(xy - b(xy))\ ;$$

d'où $\quad xy \neq 0. \qquad$ c.q.f.d.

Il est clair que, pour cette équivalence, il existe deux classes au plus. En fait, nous allons montrer qu'il n'en existe qu'une. Pour cela, nous nous appuierons sur le résultat général que voici :

<u>LEMME 2.</u> - *Soient* $(\mathcal{U}, e)$ *une* K-*algèbre de Jordan à unité, de dimension finie, et* a *un idempotent de* $\mathcal{U}$. *On considère des décompositions*

$$a = c_1 + \dots + c_p \quad , \qquad e - a = c_{p+1} + \dots + c_n$$

en idempotents primitifs orthogonaux. Alors, pour que $\mathcal{U}_{1/2}(a) = \{0\}$, *il suffit que, pour tout* $1 \leqslant i \leqslant p$ *et tout* $p+1 \leqslant j \leqslant n$ *:*
$\mathcal{U}_{1/2}(c_i) \cap \mathcal{U}_{1/2}(c_j) = \{0\}$.

Preuve. - Tout d'abord, il est clair que $c_i \in \mathcal{U}_1(a)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$ et $c_i \in \mathcal{U}_\circ(a)$ pour $p+1 \leqslant i \leqslant n$ et comme $\mathcal{U}_1(a).\,\mathcal{U}_{1/2}(a) \subset \mathcal{U}_{1/2}(a)$, on a, pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$:

$$\mathcal{U}_{1/2}(a) = (\mathcal{U}_{1/2}(a) \cap \mathcal{U}_\circ(c_i)) \oplus (\mathcal{U}_{1/2}(a) \cap \mathcal{U}_{1/2}(c_i)) \oplus (\mathcal{U}_{1/2}(a) \cap \mathcal{U}_1(c_i)) \quad ;$$

or, pour $x \in \mathcal{U}_{1/2}(a) \cap \mathcal{U}_1(c_i)$, on a $a.x = \frac{1}{2}x$ et $c_i x = x$, d'où $(a-c_i).x = -\frac{1}{2}x$ et, comme $a-c_i$ est un idempotent, ceci ne peut avoir lieu que pour $x=0$; d'où :

$$\mathcal{U}_{1/2}(a) = (\mathcal{U}_{1/2}(a) \cap \mathcal{U}_\circ(c_i)) \oplus (\mathcal{U}_{1/2}(a) \cap \mathcal{U}_{1/2}(c_i)).$$

Nous allons montrer maintenant que l'hypothèse faite sur les $\mathcal{U}_{1/2}(c_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, assure que $\mathcal{U}_{1/2}(a) \cap \mathcal{U}_{1/2}(c_i) = \{0\}$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$. En effet, le fait que $c_j \in \mathcal{U}_\circ(a) \cap \mathcal{U}_\circ(c_i)$ pour $p+1 \leqslant j \leqslant n$ assure que, pour tous ces indices j :

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{1/2}(a) \cap \mathcal{U}_{1/2}(c_i) = {} & (\mathcal{U}_{1/2}(a) \cap \mathcal{U}_{1/2}(c_i) \cap \mathcal{U}_\circ(c_j)) \\ & \oplus (\mathcal{U}_{1/2}(a) \cap \mathcal{U}_{1/2}(c_i) \cap \mathcal{U}_{1/2}(c_j)) \\ & \oplus (\mathcal{U}_{1/2}(a) \cap \mathcal{U}_{1/2}(c_i) \cap \mathcal{U}_1(c_j)) \quad ;\end{aligned}$$

or, par hypothèse, le deuxième terme de cette décomposition est nul et, par ailleurs, $\mathcal{U}_{1/2}(a) \cap \mathcal{U}_1(c_j) = \{0\}$ du fait que $a.x = \frac{1}{2}x$ et $c_j.x = x$ entraîne $(a+c_j)x = \frac{3}{2}x$ alors que $a+c_j$ est un idempotent ; il ne reste donc plus que :

$$\mathcal{U}_{1/2}(a) \cap \mathcal{U}_{1/2}(c_i) = \mathcal{U}_{1/2}(a) \cap \mathcal{U}_{1/2}(c_i) \cap \mathcal{U}_\circ(c_j)$$

i.e. pour tout $x \in \mathcal{U}_{1/2}(a) \cap \mathcal{U}_{1/2}(c_i)$ et tout $p+1 \leqslant j \leqslant n$, on a $c_j.x = 0$; d'où $(e-a)x = 0$ et $a.x = \frac{1}{2}x$ d'où $x=0$.

Ainsi, on a bien pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$:

$$\mathcal{U}_{1/2}(a) = \mathcal{U}_{1/2}(a) \cap \mathcal{U}_\circ(c_i)$$

i.e. pour tout $x \in \mathcal{U}_{1/2}(a)$ et tout $1 \leqslant i \leqslant p$, on a $c_i x = 0$; d'où $\frac{1}{2}x = a.x = 0$.

DEFINITION. - *Par* système total orthogonal *(en abrégé s.t.o.) d'idempotents d'une* K-*algèbre de Jordan à unité* $(\mathcal{U},e)$ *on entendra, tout ensemble* *fini d'idempotents de* $\mathcal{U}$, *deux à deux orthogonaux et de somme* e.

PROPOSITION. - *Supposons l'existence d'un s.t.o.* $\mathcal{S}$ *d'*idempotents de rang 1 *de* $\mathcal{U}$. *Alors, pour tout couple* (c,d) *d'éléments de* $\mathcal{S}$, *on a :*

$$\mathcal{U}_{1/2}(c) \cap \mathcal{U}_{1/2}(d) \neq 0 .$$

Preuve. - En effet, si a est la somme des éléments s de $\mathcal{S}$ tels que $\mathcal{U}_{1/2}(c) \cap \mathcal{U}_{1/2}(s) \neq \{0\}$, on a bien, d'après les lemmes 1 et 2, $\mathcal{U}_{1/2}(a) = 0$; d'où a=e en raison de la simplicité de $\mathcal{U}$.

4. UNE PROPRIETE CARACTERISTIQUE DES ALGEBRES DE JORDAN DE FORME REELLE.

Rappelons qu'une $\mathbb{R}$-algèbre de Jordan $\mathcal{U}$ est dite de forme réelle si, pour tout couple (x,y) d'éléments de $\mathcal{U}$:

$$x^2+y^2 = 0 \implies x = 0 = y.$$

En particulier, une telle algèbre est sans isotropie et :

PROPOSITION. - *Dans une algèbre de Jordan formelle réelle de dimension finie, tout idempotent primitif* c *est de rang 1.*

Preuve. - En effet, pour tout élément $x \neq 0$ de $\mathcal{U}_1(c)$, la sous-algèbre $\mathbb{R}[x]$ possède une unité qui ne peut être que c, ce qui assure que x est inversible dans $\mathbb{R}[x]$, de sorte que $\mathbb{R}[x]$ est un corps commutatif , extension de degré fini de $\mathbb{R}c$ qui, du fait que $\mathcal{U}$ est de forme réelle, ne peut être que $\mathbb{R}c$.

Réciproquement :

THEOREME. - *Si une algèbre de Jordan réelle* $\mathcal{U}$ *de dimension finie est sans isotropie (elle possède donc une unité* e*) et si, pour tout élément* x *de* $\mathcal{U}$ *les idempotents primitifs de* $\mathbb{R}[e,x]$ *sont de rang 1, alors cette algèbre* $\mathcal{U}$ *est de forme réelle et tout élément* x *de* $\mathcal{U}$ *se décompose canoniquement en :*

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i ,$$

où $\{c_1,\dots,c_r\}$ *est un s.t.o. d'*idempotents *et les nombres* $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ *sont* tous distincts.

Preuve. - La construction d'une telle décomposition se fait dans l'algèbre commuto-associative $\mathcal{V} = \mathbb{R}[e,x]$ par récurrence sur la dimension de cette algèbre, compte tenu du fait que, dans toute décomposition de Peirce, les sous-espaces $\mathcal{V}_{1/2}(c)$ sont nuls. On arrive ainsi à trouver une suite finie d'idempotents primitifs $(c_1,\ldots,c_r)$ de $\mathbb{R}[e,x]$ telle que $\mathcal{V}$ soit le produit direct des algèbres $\mathbb{R}c_i$.

Inversement, si une telle décomposition a lieu, elle fournit pour tout polynôme $p(X)$:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{r} p(\lambda_i)c_i,$$

ce qui assure que $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_r\}$ est l'ensemble des racines du polynôme minimal de $x \in \mathbb{R}[e,x]$ et que ces racines sont simples, ce qui fait que les c_i s'exprime par les formules habituelles :

$$c_i = \prod_{j\neq i} (\lambda_i-\lambda_j)^{-1}(x - \lambda_j e).$$

Considérons maintenant deux éléments x et y de $\mathcal{U}$ tels que $x^2+y^2 = 0$ et leurs décompositions canoniques :

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i c_i \qquad\qquad y = \sum_{j=1}^{q} \mu_j d_j \quad ,$$

ce qui donne les décompositions canoniques :

$$x^2 = \sum_{i\in I} \lambda_i^2 c_i' \qquad\qquad y^2 = \sum_{j\in J} \mu_j^2 d_j' \quad ,$$

où I (resp. J) est une partie de $[1,p]$ (resp. $[1,q]$) telle que, pour tout $i \notin I$, il existe $i' \in I$ tel que $\lambda_i^2 = \lambda_{i'}^2$ (resp. pour tout $j \notin J$, il existe $j' \in J$ tel que $\mu_j^2 = \mu_{j'}^2$). Précisons aussi que chaque c_i' (resp. d_j') est une somme de $c_{i'}$ (resp. $d_{j'}$). Mais alors, l'hypothèse $x^2 = -y^2$ permet de supposer, sous réserve de renuméroter les μ_j, que J=I et :

$$c_i' = d_i' \qquad \text{et} \qquad \lambda_i^2 + \mu_i^2 = 0 \quad , \qquad i \in I \, ,$$

d'où :

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0 = \mu_1 = \ldots = \mu_p.$$

COROLLAIRE. - *Pour qu'une* $\mathbb{R}$*-algèbre de Jordan* $\mathcal{U}$ *de dimension finie soit de* forme réelle, *il faut et il suffit que, pour tout* $x \in \mathcal{U}$, $\mathbb{R}[e,x]$ *le soit.*

5. LA TRACE.

Soit $\mathcal{U}$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Jordan de forme réelle, simple. Du lemme de (I.6) et de la proposition du paragraphe 3, on déduit que, pour tout couple orthogonal (a,b) d'idempotents primitifs de $\mathcal{U}$, il existe une sous-algèbre de $\mathcal{U}$ isomorphe à $\mathcal{H}_2(\mathbb{R})$ qui contient a et b. Ceci permet, comme pour le théorème 2 du paragraphe 1, de trouver encore un élément involutif w de $\mathcal{U}$ tel que P(w) permute a et b et laisse invariant tout élément c de $\mathcal{U}$ orthogonal à a et b, d'où il va résulter que :

PROPOSITION. - *Pour tout idempotent* b *de* $\mathcal{U}$, *considérons deux décompositions en s.o.i.p. :*

$$c_1 + \dots + c_p = b = d_1 + \dots + d_q, \qquad p \leq q.$$

Alors il existe un automorphisme intérieur Φ *de* $\mathcal{U}$ *tel que :*

$$\Phi(c_1) = d_1, \dots, \quad \Phi(c_p) = d_p \quad \text{et} \quad \Phi(b) = b.$$

Preuve. - Notons e l'unité de $\mathcal{U}$. On peut alors trouver un élément involutif w_1 de $\mathcal{U}$ tel que $P(w_1)(c_1) = d_1$ et $P(w_1)(e-b) = e-b$. Ceci étant, on peut trouver un nouvel élément involutif w_2 de $\mathcal{U}$ tel que $P(w_2)$ laisse invariants e, b et d_1 et transforme $P(w_1)(c_2)$ en d_2. Par itération, on arrive à trouver une suite d'éléments involutifs $(w_1, w_2, \dots, w_p)$ de $\mathcal{U}$ telle que $P(w_p) \circ P(w_{p-1}) \circ \dots \circ P(w_1)$ transforme $(e_1,\dots, e_p)$ en $(d_1,\dots, d_q)$ et laisse e-b invariant et, comme e est invariant par les $P(w_i)$, c'est terminé.

COROLLAIRE. - *Dans* toute $\mathbb{R}$-*algèbre de forme réelle* $\mathcal{V}$ *deux décompositions en s.o.i.p. d'un même idempotent comportent le même nombre de termes.*

Preuve. - Ceci est trivial lorsque $\mathcal{V}$ est simple, compte tenu de l'existence d'un automorphisme intérieur Φ transportant l'une de ces décompositions en une partie de l'autre sans modification de l'idempotent. Sinon il suffit de considérer la décomposition canonique

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{V}_r$$

en facteurs simples ; tout idempotent se décompose en un système orthogonal d'idempotents :

$$b = b_1 + \ldots + b_r \qquad ; b_1 \in \mathcal{V}_1, \ldots, b_r \in \mathcal{V}_r,$$

ce qui fait que toute décomposition de b en s.o.i.p. se disloque en une décomposition de b_1 en s.o.i.p., une décomposition de b_r en s.o.i.p., etc.

DEFINITION. - *Ce nombre de termes ainsi associé à tout idempotent* b *d'une* $\mathbb{R}$*-algèbre de forme réelle s'appelle le* **degré** *de* b *(on le note* **deg(b)***).*

THEOREME 1. - *Soit* $\mathcal{U}$ *une algèbre de Jordan de* **forme réelle de dimension finie.** *Alors il existe une* $\mathbb{R}$*-forme linéaire unique*

$$\mathrm{Tr} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$$

telle que, pour tout idempotent c *de* $\mathcal{U}$, $\mathrm{Tr}(c) = \deg(c)$.

Preuve. - Si une telle forme linéaire existe, elle est déterminée sur un élément x de $\mathcal{U}$ au moyen de la décomposition canonique en s.o.i. :

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i \quad ;$$

on a, en effet, par linéarité :

$$\mathrm{Tr}\, x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \deg(c_i).$$

Pour construire une telle forme linéaire, on considère un s.t.o.i.p. $(c_1, \ldots, c_n)$ de $\mathcal{U}$ et, pour tout $x \in \mathcal{U}$, la décomposition de Peirce relative à c_i :

$$x = \lambda_i c_i + x_{i,1/2} + x_{i,0} \quad ;$$

il est clair alors que $x \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ est une forme linéaire. Reste à voir que, si x est un idempotent primitif, cette somme de scalaires réels vaut 1, or on sait, d'après la 1ère remarque suivant le lemme de

(I.5) que, si

$$d = \delta_i c_i + d_{i,\frac{1}{2}} + d_{i,0}$$

est la décomposition de Peirce d'un idempotent primitif d relativement à c_i,

$$c_i = \delta_i d + c_{i,\frac{1}{2}} + c_{i,0}$$

est la décomposition de Peirce de c_i par rapport à d; d'où :

$$e = \sum_{i=1}^{n} c_i = (\sum_{i=1}^{n} \delta_i)d + \sum_{i=1}^{n} c_{i,\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{n} c_{i,0}$$

ce qui réduit à :

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} c_{i,\frac{1}{2}} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} c_{i,0} = e-d.$$

DEFINITION. - Tr(x) *est appelé la* trace *de* x.

COROLLAIRE 1. - Tr *est* invariant *par tout* automorphisme *de l'algèbre de Jordan* $\mathcal{U}$.

COROLLAIRE 2. - *Pour tout idempotent* c *de* $\mathcal{U}$, Tr *s'annule sur le sous-espace* $\mathcal{U}_{1/2}(c)$.

Preuve. - Si w est l'élément involutif associé à c, on sait que, pour tout $x \in \mathcal{U}_{1/2}(c)$, $P(w)(x) = -x$ d'où, compte tenu du corollaire 1, $\mathrm{Tr}\, x = -\mathrm{Tr}\, x$.

THEOREME 2. - *Sur toute algèbre de forme réelle de dimension finie, la trace est une forme linéaire* associative, *i.e., pour tout triple*(a,b,c) *d'éléments de* $\mathcal{U}$, *on a :*

$$\mathrm{Tr}(a(bc)) = \mathrm{Tr}((ab)c).$$

Preuve. - Il est clair qu'en raison de la linéarité de Tr , on peut se limiter au cas où b est un idempotent primitif. Notons alors

$$a = \lambda b_1 + a_{1/2} + a_\circ \quad , \quad c = \mu b_1 + c_{1/2} + c_\circ$$

les décompositions de Peirce de a et c par rapport à b. Il est aisé de s'assurer que

$$a(bc) - (ab)c = \frac{\mu}{4} a_{1/2} - \frac{\lambda}{4} c_{1/2} + \frac{1}{2} a_\circ c_{1/2} - \frac{1}{2} a_{1/2} c_\circ$$

i.e., en résumé, cette différence appartient à $\mathcal{U}_{1/2}(b)$ et il suffit, pour conclure, d'appliquer le corollaire 2 du théorème 1.

c.q.f.d.

La trace permet de munir toute algèbre de Jordan $\mathcal{U}$ de forme réelle, et de dimension finie, d'une structure hilbertienne canonique ; de façon précise :

THEOREME 3. - *L'application* $(x,y) \longmapsto \mathrm{Tr}(xy)$ *est une forme bilinéaire symétrique* définie positive *sur* $\mathcal{U}$.

Preuve. - La bilinéarité symétrique de cette fonction réelle résulte évidemment de la linéarité de la trace et de la bilinéarité symétrique du produit de Jordan. Reste à voir que $\mathrm{Tr}\, x^2 > 0$ sauf pour $x=0$. En effet, pour toute décomposition $x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i$, à l'aide d'un s.t.o.i.p. (c_i), on a $\mathrm{Tr} x^2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2$ et il s'agit bien là d'une quantité positive qui ne s'annule qu'avec tous les μ_i.

DEFINITION. - *La topologie ainsi définie sur* $\mathcal{U}$ *s'appelle la* topologie canonique.

6. ELEMENTS POSITIFS.

Soit $\mathcal{U}$ une algèbre de Jordan de forme réelle et de dimension finie. Un élément x de $\mathcal{U}$ est dit positif (resp. strictement positif) si dans sa décomposition canonique $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$ tous les coefficients sont $\geqslant 0$ (resp. > 0). Il est clair que ceci signifie aussi qu'il existe un s.t.o.i.p. (d_j) et une famille (μ_j) de nombres $\geqslant 0$ (resp. > 0) tels que $x = \Sigma \mu_j d_j$. Notons aussi que les éléments positifs de $\mathcal{U}$ sont exactement les carrés y^2, $y \in \mathcal{U}$.

Voici un résultat dont l'intérêt tient à l'ampleur de ses conséquences :

PROPOSITION 1. - *L'ensemble* $\mathcal{P}$ *des éléments* positifs *de* $\mathcal{U}$ *possède les propriétés suivantes :*

i) Pour tout couple (x,y) *d'éléments de* $\mathcal{P}$, $\mathrm{Tr}(xy) \geqslant 0$.

ii) Inversement, si un élément x *de* $\mathcal{U}$ *est tel que, pour tout élément* y *de* $\mathcal{P}$, $\mathrm{Tr}(xy) \geqslant 0$, *alors* x *est positif.*

Preuve :

ii) Soit $x = \Sigma\, \alpha_i a_i$ la décomposition canonique de x. L'hypothèse assure alors que, compte tenu de ce que tout idempotent est positif,
$\alpha_i = \mathrm{Tr}\ x.a_i \geqslant 0$.

i) Soient (c_i), (d_j) deux s.t.o.i.p. et (λ_i), (μ_j) deux familles de nombres positifs tels que :

$$x = \Sigma\lambda_i c_i \qquad\qquad y = \Sigma\, \mu_j d_j.$$

Alors : $\quad x.y = \Sigma\, \lambda_i\mu_j\ c_i d_j.$

Il suffira donc de prouver que, pour tout idempotent primitif d, $\mathrm{Tr}\ c_i.d \geqslant 0$. Or si :

$$d = \lambda_i c_i + d_{i,\frac{1}{2}} + d_{i,0}$$

est la décomposition de Peirce suivant c_i, on a

$$c_i d = \lambda_i c_i + \frac{1}{2}\, d_{i,\frac{1}{2}}$$

d'où

$$\mathrm{Tr} c_i.d = \lambda_i$$

compte tenu de (5., th. 1, cor. 2). Or on sait que $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$.

COROLLAIRE 1. - $\mathcal{P}$ *est un cône convexe fermé et, en particulier, toute somme finie d'éléments positifs est un élément positif.*

COROLLAIRE 2. - *Pour tout couple* (x,y) *d'éléments de* $\mathcal{U}$, *il existe un élément* z *de* $\mathcal{U}$ *tel que* $x^2+y^2 = z^2$.

COROLLAIRE 3. - *Pour toute suite finie* $(x_1,\dots,x_n)$ *d'éléments de* $\mathcal{U}$, *on a*

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0 \Longrightarrow x_1 = \dots = x_n = 0.$$

PROPOSITION 2. - *Deux éléments* positifs x *et* y *de* $\mathcal{U}$ *sont orthogonaux (i.e.* $xy = 0$*) dès que* $Tr(xy) = 0$.

Preuve. - Soit $x = \Sigma\, \lambda_i c_i$ et $y = \Sigma\, \mu_j d_j$ des décompositions suivant des s.t.o.i.p. avec des coefficients positifs. Alors l'hypothèse assure que $Tr(c_i . d_j) = 0$ pour $\lambda_i\, \mu_j \neq 0$. Pour s'assurer que $x.y = 0$ il suffit de supposer que x et y sont deux idempotents primitifs.
Mais alors, si

$$y = \lambda x + y_{1/2} + y_o$$

est la décomposition de Peirce de y suivant x, on a :

$$xy = \lambda x + \frac{1}{2}\, y_{1/2} \;;$$

d'où $$0 = Tr(xy) = \lambda \;;$$

ce qui entraîne $y = y_o$.

THEOREME 1. - L'intérieur *de* $\mathcal{P}$ *(pour la topologie canonique de* $\mathcal{U}$ *) est constitué par les* éléments strictement positifs *de* $\mathcal{U}$.

Preuve. - Si $x \in \mathcal{P}$ n'est pas strictement positif, alors dans sa décomposition canonique $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$ un des coefficients (on peut supposer que c'est le premier) est nul ; il est clair alors que la suite

$$x_n = -\frac{1}{n}\, c_1 + \sum_{i=2}^{r} \lambda_i c_i$$

est une suite d'éléments non positifs de $\mathcal{U}$ qui tend vers x. Reste donc à voir que tout élément strictement positif x de $\mathcal{U}$ est intérieur à $\mathcal{P}$.
Soit $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$ la décomposition canonique de x ; on a alors $\inf \lambda_i = \lambda > 0$ et, de $\sum_{i=1}^{r} c_i = e$, on déduit que x s'écrit sous la forme $x = \lambda e + y$, $y \in \mathcal{P}$ et, comme $\mathcal{P}$ est un cône convexe, il ne reste plus qu'à montrer que l'unité e est intérieure à $\mathcal{P}$. A cet effet, considérons la boule-unité ouverte

$$B = \{y \in \mathcal{U} \;;\; Tr\, y^2 < 1\}$$

i.e., $y = \sum_{j=1}^{s} \mu_j d_j$ étant la décomposition canonique de $y \in B$, $\sum_{j=1}^{s} \mu_j^2 < 1$;

a fortiori tous les $|\mu_j|$ sont < 1 ; d'où

$$y \in B \Longrightarrow e+y = \sum_{j=1}^{s} (1+\mu_j)c_j \in \mathcal{P}.$$

Remarque. - Du corollaire 1 de la proposition 1, il résulte qu'on définit sur toute algèbre de Jordan $\mathcal{U}$ de forme réelle un ordre compatible avec l'addition en posant $x \geqslant y$ si, et seulement si, $x-y$ est positif, i.e., est un "carré parfait" z^2.

Nous allons voir que cet ordre induit sur l'ensemble des idempotents de $\mathcal{U}$ l'ordre fondamental défini dans le Chapitre 1. A cet effet, nous aurons besoin de ceci :

LEMME. - *Soient* x *un élément* positif *de* $\mathcal{U}$ *et* b *un* idempotent primitif *de* $\mathcal{U}$. *Alors, dans la décomposition de Peirce :*

$$x = \lambda b + x_{1/2} + x_o,$$

le nombre λ *est* positif.

Preuve. - De

$$xb = \lambda b + \frac{1}{2} x_{1/2} \quad ,$$

on déduit, compte tenu de (5, th. 1, cor. 2) :

$$\mathrm{Tr}(xb) = \lambda,$$

et λ est positif par la proposition 1.

PROPOSITION 3. - *Soient* a *et* b *deux* idempotents *de* $\mathcal{U}$ *tels que* a-b *soit un élément positif* x *de* $\mathcal{U}$. *Alors* x *est un idempotent orthogonal à* b.

Preuve. - Par récurrence sur le degré de b, compte tenu de (prop. 1, cor. 1), on se ramène au cas où b est un idempotent primitif.

Soit $$x = \lambda b + x_{1/2} + x_o$$

la décomposition de Peirce de x relative à b. Alors :

$$a = (1+\lambda)b + x_{1/2} + x_o.$$

est la décomposition de Peirce de l'idempotent a relative à b d'où :

$$(1+\lambda)b + x_{\circ} = (1+\lambda)^2 b + (x_{1/2})^2 + (x_{\circ})^2$$

et, par conséquent :

$$(1+\lambda)\lambda + \operatorname{Tr} b(x_{1/2})^2 + \operatorname{Tr} bx_o^2 = 0 \text{ ,}$$

ce qui, par associativité de la trace, se réduit à :

$$(1+\lambda)\lambda + \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(x_{1/2})^2 = 0 .$$

et comme, d'après le lemme, $\lambda \geqslant 0$, et $\operatorname{Tr}(x_{1/2})^2 \geqslant 0$, il s'ensuit que $\lambda = 0$ et $\operatorname{Tr}(x_{1/2})^2 = 0$, d'où $x_{1/2} = 0$; de sorte que $x = x_{\circ}$ et, par conséquent, $a = b + x^2$ d'où $x^2 = x$.

CHAPITRE 3

DOMAINES DE POSITIVITE

1. DEFINITIONS ; GENERALITES.

Soit X un espace vectoriel topologique réel. Pour toute forme bilinéaire symétrique f, continue sur X×X, notons Ker f l'ensemble des $a \in X$ tels que, pour tout $x \in X$, $f(a,x) = 0$; c'est un sous-espace vectoriel fermé de X. Si Ker f = $\{0\}$ (resp. Ker f $\neq \{0\}$) on dira que f est *régulière* (resp. *singulière*).

DEFINITION 1. - *On dit qu'un* ouvert Y *de* X *est* f-*positif si, pour tout couple* (a,b) *d'éléments de* Y, $f(a,b) \geqslant 0$. *Par continuité de* f, *ceci reste vrai pour tout couple* (a,b) *d'éléments de l'adhérence* $\overline{Y}$ *de* Y.

PROPOSITION 1. - *Soient* Y *un* ouvert f-positif *de* X *et* $a \in \overline{Y}$. *S'il existe* $y \in Y$ *tel que* $f(a,y) = 0$, *alors* $a \in$ Ker f.

Preuve. - Y étant ouvert, pour tout $x \in X$ il existe $\lambda > 0$ tel que $y + \lambda x \in Y$ d'où :

$$0 \leqslant f(a, y+\lambda x) = f(a,y) + \lambda f(a,x) = \lambda f(a,x).$$

Ainsi, pour tout $x \in X$, $f(a,x) \geqslant 0$, ce qui, par linéarité par rapport à x, donne $f(a,x) = 0$.

COROLLAIRE 1. - *Si* (-a) *appartient à* $\overline{Y}$ *lui aussi, alors* $a \in$ Ker f.

Preuve. - Par continuité de f, on a alors, pour tout $y \in Y$, $f(a,y) \geqslant 0$ et $f(-a,y) \geqslant 0$; d'où $f(a,y) = 0$.

COROLLAIRE 2. - *Si* $a \in \overline{Y} \setminus$ Ker f *alors, pour tout* $y \in Y$: $f(a,y) > 0$.

Preuve. - Ceci résulte par contraposition de la proposition 1, compte tenu de ce que, pour tout couple (a,b) de points de $\overline{Y}$, $f(a,b) \geqslant 0$.

DEFINITION 2. - *On dit qu'un ouvert* f *positif non vide* Y *de* X *est un* **domaine** de positivité *de* caractéristique f *si un point* x *de* X *appartient à* Y *dès que, pour tout* $a \in \overline{Y} \setminus \operatorname{Ker} f$, $f(a,x) > 0$.

PROPOSITION 2. - *Soit* Y *un* domaine de positivité *de* X *de caractéristique* f. *Alors :*

i) Y *est un* cône convexe.

ii) Pour tout $x \in X \setminus \overline{Y}$ *il existe* $a \in Y$ *tel que* $f(a,x) < 0$.

Preuve .-

i) Soient y_1 et y_2 deux points de Y. De (prop. 1, cor. 2) on déduit que, pour tout $a \in Y \setminus \operatorname{Ker} f$: $f(a,y_1) > 0$ et $f(a,y_2) > 0$, d'où $f(a,y_1 + y_2) > 0$. Mais alors, en vertu de la définition, $y_1 + y_2 \in Y$. De la même manière, on montre que pour tout $y \in Y$ et tout $\lambda > 0$, $\lambda y \in Y$.

ii) $X \setminus \overline{Y}$ étant un ouvert de X, pour tout $y \in Y$ il existe $\lambda > 0$ tel que $x + \lambda y \notin \overline{Y}$. Si pour tout $z \in Y$ on avait $f(x,z) \geqslant 0$ il en résulterait alors :

$$f(z,x + \lambda y) = f(z,x) + \lambda f(z,y) > 0$$

ce qui, en vertu de la définition 2, donnerait $x + \lambda y \in Y$; or ceci est en contradiction avec $x + \lambda y \notin \overline{Y}$.

COROLLAIRE 1. - $\operatorname{Ker} f \subset \overline{Y} \setminus Y$.

Preuve. - De ii) il résulte clairement que $\operatorname{Ker} f \subset \overline{Y}$ et, comme il est évident que $\operatorname{Ker} f \cap Y = \emptyset$, c'est terminé.

COROLLAIRE 2. - *Pour toute autre caractéristique* g *de* Y, *on a :*

$$\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f.$$

Preuve. - Si $a \in \operatorname{Ker} f$, alors $-a \in \operatorname{Ker} f$; ainsi a et -a appartiennent à $\overline{Y}$ d'après le corollaire 1, ce qui, en vertu de (Prop. 1, cor. 1), donne $a \in \operatorname{Ker} g$. En intervertissant le rôle de f et g, on aurait $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} f$.

PROPOSITION 3. - *Désignons par* $\dot{X}$ *l'e.v.t. séparé quotient de* X *par* Ker f *et par* $\dot{f}$ *la forme bilinéaire symétrique régulière induite par* f *sur* $\dot{X}$. *Alors, pour tout domaine de positivité* Y *de* X *de caractéristique* f, *l'i-*

mage canonique $\dot{Y}$ *de* Y *dans* $\dot{X}$ *est un domaine de positivité de caractéristique* $\dot{f}$.

Preuve. - Il est clair que $\dot{Y}$ est un ouvert de $\dot{X}$ (la définition 2 entraîne que $Y + \mathrm{Ker}\, f \subset Y$) et que cet ouvert est f-positif. Si $y \in \overline{Y} \setminus \mathrm{Ker}\, f$, alors il est aisé de s'assurer (grâce à prop. 2, cor. 1) que $\dot{y} \in \dot{Y} \setminus \{\dot{0}\}$, de sorte que, si $\dot{x} \in \dot{X}$ est tel que, pour tout $\dot{y} \in \dot{Y} \setminus \{\dot{0}\}$, $\dot{f}(\dot{x},\dot{y}) > 0$, on a alors, pour tout $x \in \dot{x}$ et tout $y \in \overline{Y} \setminus \mathrm{Ker}\, f$, $f(x,y) > 0$, d'où $x \in Y$, i.e. $\dot{x} \in \dot{Y}$.

Nota bene. - Cette proposition permet de supposer que X est *séparé* et f *régulière*.

Voici une propriété intéressante des domaines de positivité qui, cependant ne les caractérise pas.

PROPOSITION 4. - *Tout domaine de positivité* Y *de caractéristique* f *est* maximal *parmi les* ouverts f-positifs *de* X.

Preuve. - Soit Z un ouvert f-positif contenant Y. Si $x \notin Y$, il existe, en vertu de la définition 2, un $a \in \overline{Y} \setminus \mathrm{Ker}\, f$ tel que $f(a,x) \leqslant 0$. Or, en vertu de (prop. 2, cor. 1), un tel a appartient à $\overline{Z} \setminus \mathrm{Ker}\, f$ ce qui, compte tenu de (prop. 1, cor. 2), donne pour tout $z \in Z$, $f(a,z) > 0$; de sorte que $x \notin Z$.

Par contre, la propriété suivante concerne la frontière

$$\mathrm{Fr}(Y) = \overline{Y} \setminus Y.$$

PROPOSITION 5. - *Pour tout* $a \in \mathrm{Fr}\, Y \setminus \mathrm{Ker}\, f$, *il existe* $b \in \mathrm{Fr}\, Y \setminus \mathrm{Ker}\, f$ *tel que* $f(a,b) = 0$.

Preuve. - En vertu de la définition 2, il existe $b \in \overline{Y} \setminus \mathrm{Ker}\, f$ tel que $f(a,b) \leqslant 0$ et comme on a aussi $f(a,b) \geqslant 0$, il en résulte que $f(a,b) = 0$. De plus, d'après (prop. 1, cor. 2), $b \notin Y$, ce qui donne bien en définitive $b \in \mathrm{Fr}\, Y \setminus \mathrm{Ker}\, f$.

COROLLAIRE. - *Pour qu'un ouvert de positivité* Y *de caractéristique* f *de* X *soit un domaine de positivité, il faut et il suffit que* Y *soit* l'intérieur *d'une partie* Z *de* X *possédant les propriétés suivantes :*

i) un point $x \in X$ *appartient à* Z *dès que pour tout* $z \in Z \setminus \operatorname{Ker} f$, $f(z,x) \geqslant 0$.

ii) Pour tout $x \in Z \setminus Y$ *il existe* $y \in Z \setminus (Y \cup \operatorname{Ker} f)$ *tel que* $f(x,y) = 0$.

Preuve. - Si Y est un domaine de positivité, c'est un cône convexe ouvert d'où $Y = \mathring{\overline{Y}}$ et $\overline{Y}$ vérifie i) et ii). Réciproquement, du fait que Y soit un ouvert de positivité et de i), on déduit que Z est un cône convexe fermé d'où $Z=\overline{Y}$; de ii) on déduit alors qu'un point $x \in X$ appartient à Y dès que pour tout $z \in Z \setminus \operatorname{Ker} f$, $f(z,x) > 0$.

Un premier exemple. - Dans le plan $\mathbb{R}^2$, les cônes convexes ouverts sont les intérieurs des angles de sommet O. Si, pour le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^2$, un tel angle est un domaine de positivité, la proposition 5 assure que les côtés de cet angle sont perpendiculaires de sorte qu'on peut affirmer que les *domaines de positivité des espaces vectoriels euclidiens de dimension 2 sont les intérieurs des angles droits.*

2. LE DOMAINE DE POSITIVITE D'UNE ALGEBRE DE JORDAN DE FORME REELLE.

Soit $\mathcal{U}$ une algèbre de Jordan de forme réelle et de dimension finie. Désignons par $\mathcal{U}^+$ l'ensemble des éléments "strictement positifs" de $\mathcal{U}$ c'est-à-dire des éléments $x \neq 0$ tels que dans la décomposition canonique $x = \Sigma \lambda_i c_i$ *tous* les λ_i soient > 0. Il revient au même de dire que ce sont les combinaisons linéaires à coefficients > 0 d'un s.t.o.i.p. quelconque de $\mathcal{U}$. Cet ensemble $\mathcal{U}^+$ a déjà été étudié au chapitre 2 ; on a vu, en particulier, que c'est l'intérieur de l'ensemble des x^2, $x \in \mathcal{U}$, et que ce dit ensemble satisfait aux conditions de la proposition 5 du § 1. Il reste donc à voir, pour s'assurer que $\mathcal{U}^+$ est un domaine de positivité, que, pour tout couple (x,y) d'éléments de $\mathcal{U}^+$, $\operatorname{Tr}(x,y) > 0$; or si

$$x = \Sigma \lambda_i c_i \qquad ; \qquad y = \Sigma \mu_j d_j$$

sont les décompositions canoniques de x et y, on a

$$\operatorname{Tr}(xy) = \Sigma \lambda_i \mu_j \operatorname{Tr}(c_i d_j),$$

tous les produits $\lambda_i \mu_j$ sont >0 et, comme tous les c_i ne sont pas tous orthogonaux aux d_j, on dispose au moins d'un couple $(i_\circ, j_\circ)$ tel que $Tr(c_{i_\circ} d_{j_\circ}) > 0$ et, comme tous les $Tr(c_i d_j)$ sont $\geqslant 0$, c'est terminé.

Notons aussi qu'on peut caractériser autrement ce domaine de positivité $\mathcal{U}^+$.

DEFINITION. - *Un élément* x *d'une algèbre de Jordan* $\mathcal{U}$ *à unité* e *est dit* inversible *s'il est inversible dans l'algèbre associative* $\mathcal{U}(e,x)$. *Il est clair que, lorsque* $\mathcal{U}$ *est de dimension finie, ceci a lieu si, et seulement si, il existe un polynôme* $p(X) = \sum_{i=1}^{r} a_i X^i$ *tel que :*

$$p(x) = e,$$

ce qui assure en particulier que les valeurs propres de x *sont toutes non nulles. Cette remarque permet dans le cas d'une algèbre de Jordan* $\mathcal{U}$ *de forme réelle de caractériser les éléments inversibles de* $\mathcal{U}$ *au moyen de la décomposition canonique : pour qu'un élément* x *de décomposition canonique :*

$$x = \sum_i \lambda_i c_i$$

soit inversible, il faut et il suffit que tous *les coefficients* λ_i *soient non nuls ; à partir de là, il est clair que :*

PROPOSITION 1.

$$\mathcal{U}^+ = \{x^2 \ ; \ x \in \mathrm{Inv}\, \mathcal{U}\},$$

Inv $\mathcal{U}$ *étant l'ensemble des éléments inversibles de* $\mathcal{U}$.

Pour l'étude du domaine de positivité d'une algèbre de Jordan de forme réelle, notons qu'on peut se ramener au cas d'une algèbre simple ; en effet :

PROPOSITION 2. - *Pour tout couple* $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ *d'algèbres de Jordan de forme réelle, on a :*

$$(\mathcal{U} \times \mathcal{V})^+ = \mathcal{U}^+ \times \mathcal{V}^+.$$

Preuve. - Comme il est clair que $\mathcal{U}^+ \times \mathcal{V}^+ \subset (\mathcal{U} \times \mathcal{V})^+$, il ne reste plus qu'à montrer l'inclusion inverse à savoir que :

$$(x,y) \in (\mathcal{U} \times \mathcal{V})^+ \Longrightarrow x \in \mathcal{U}^+ \quad \text{et} \quad y \in \mathcal{V}^+.$$

Or, pour tout couple $(a,b) \in \overline{\mathcal{U}}^+ \times \overline{\mathcal{V}}^+$, on a $(a,o) \in \overline{\mathcal{U}}^+ \times \overline{\mathcal{V}}^+$ et $(o,b) \in \overline{\mathcal{U}}^+ \times \overline{\mathcal{V}}^+$ d'où :

$$\mathrm{Tr}(x,y)(a,0) > 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Tr}(x,y)(0,b) > 0$$

i.e. :

$$\mathrm{Tr}(x.a) > 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Tr}(yb) > 0$$

d'où

$$x \in \mathcal{U}^+ \qquad \text{et} \qquad y \in \mathcal{V}^+.$$

c.q.f.d.

Ceci va permettre de donner une interprétation géométrique intéressante des idempotents primitifs de $\mathcal{U}$.

DEFINITION. - *Rappelons qu'une génératrice* G *d'un cône convexe* Γ *est dite* extrêmale *s'il existe* $x \in G \setminus \{0\}$ *tel que :*

$$x = y+z \quad \text{et} \quad y \in \Gamma \quad \text{et} \quad z \in \Gamma \Longrightarrow y \in G \quad \text{et} \quad z \in G.$$

THEOREME. - *Pour qu'un élément* non nul x *de* $\overline{\mathcal{U}}^+$ *soit colinéaire à un* idempotent primitif *il faut et il suffit que la demi-droite* $\{\lambda x \; ; \; \lambda \geqslant 0\}$ *soit une* génératrice extrêmale *du cône* $\overline{\mathcal{U}}^+$.

Preuve. - Considérons une décomposition

$$x = \sum_{i=1}^{r} \mu_i d_i \qquad , \qquad \mu_i > 0,$$

(d_i) étant un s.t.o.i.p.; l'un des coefficients μ_i étant non nul, on peut supposer qu'il s'agit de μ_1. Si λx, $\lambda > 0$, n'est pas un idempotent primitif l'un des μ_i, $i \geqslant 2$, n'est pas nul et on a alors avec $y = \mu_1 d_1$ et $z = \sum_{i=2}^{r} \mu_i d_i$ une décomposition $x = y+z, y,z \in \overline{\mathcal{U}}^+$ et $y.z = 0$, de sorte que la génératrice de $\overline{\mathcal{U}}^+$ passant par x n'est pas extrêmale.

Réciproquement, considérons un idempotent primitif d de $\mathcal{U}$ et montrons que la génératrice $\{\lambda d \; ; \; \lambda \geqslant 0\}$ est extrêmale dans $\overline{\mathcal{U}}^+$. Soit :

$$d = y+z \quad , \quad y \in \overline{\mathcal{U}^+} \quad \text{et} \quad z \in \overline{\mathcal{U}^+}.$$

Notons

$$y = \lambda d + y_{1/2} + y_\circ$$

la décomposition de Peirce de y relative à d ; alors :

$$z = (1-\lambda)d - y_{1/2} - y_\circ$$

est la décomposition de Peirce de z relative à d, ce qui fait que si $w = 2d-e$ est l'élément involutif de $\mathcal{U}$ canoniquement associé à d, on a :

$$P(w)y = \lambda d - y_{1/2} + y_\circ$$

et, comme il est clair que $\overline{\mathcal{U}^+}$ est stable par les automorphismes de $\mathcal{U}$, on a : $\lambda d - y_{1/2} + y_\circ \in \overline{\mathcal{U}^+}$; d'où, puisque $\overline{\mathcal{U}^+}$ est un cône convexe :

$$\lambda d + y_\circ = \frac{1}{2}(y+P(w)y) \in \overline{\mathcal{U}^+} .$$

De même, en considérant z au lieu de y, on obtient :

$$(1-\lambda)d-y_\circ \in \overline{\mathcal{U}^+} .$$

Mais, comme on peut écrire $y_\circ = \sum_{i=1}^{r} \mu_i d_i$ avec des d_i tels que $(d,d_1, \ldots, d_n)$ soit un s.t.o.i.p. , $\lambda d + y_\circ \in \overline{\mathcal{U}^+}$ implique que les μ_i sont tous positifs alors que $(1-\lambda)d-y_\circ \in \overline{\mathcal{U}^+}$ implique que ces mêmes μ_i sont tous négatifs; d'où $y_\circ = 0$.

On a donc :

$$y = \lambda d + y_{1/2}$$

et, comme $y \in \overline{\mathcal{U}^+}$, il existe $u \in \mathcal{U}$ tel que $y = u^2$. Mais la décomposition de Peirce de u relative à d :

$$u = \mu d + u_{1/2} + u_\circ$$

fait que $(u_{1/2})^2$ est un élément positif de l'algèbre de Jordan de forme réelle $\mathcal{U}_1(d) \oplus \mathcal{U}_\circ(d)$, ce qui, compte tenu de la proposition 2, permet d'écrire :

$$(u_{1/2})^2 = v^2 + w^2 \quad , \quad v \in \mathcal{U}_1(d), \ w \in \mathcal{U}_\circ(d).$$

Mais alors :

$$u_\circ^2 + w^2 = y_\circ = 0 \;;$$

d'où $u_\circ = w = 0$ et ceci entraîne la nullité de $u_{1/2}$ aussi et, en définitive, $y = \mu^2 d$, et on montrerait de même que z est colinéaire à d.

Remarque. - Cette propriété permet de caractériser le cône positif d'une algèbre de Jordan de forme réelle complètement décomposable i.e. d'un espace $\mathbb{R}^n$. Rappelons à cet effet qu'un cône est dit *simplicial* s'il admet un simplexe pour base ; dans ces conditions, d'après un célèbre théorème de Carathéodory (cf. Rockafellar), la décomposition d'un élément de cette base en un barycentre positif de points extrêmaux est unique, d'où :

COROLLAIRE. - *Pour que le cône de positivité d'une algèbre de Jordan de forme réelle* $\mathcal{U}$ *et de dimension* n *soit* simplicial, *il faut et il suffit que* $\mathcal{U}$ *soit isomorphe à* $\mathbb{R}^n$.

Preuve. - Cette condition est évidemment suffisante. Réciproquement, si le cône de positivité de $\mathcal{U}$ est simplicial, l'unité de $\mathcal{U}$ se décompose en un s.t.o.i.p. unique, à l'ordre près il n'existe alors qu'un seul s.t.o.i.p., ce qui permet une décomposition de tous les éléments de suivant les mêmes idempotents primitifs, i.e., en bref, le degré de $\mathcal{U}$ est égal à sa dimension n ce qui ne peut se produire que pour $\mathbb{R}^n$, à un isomorphisme près.

3. UN EXEMPLE REMARQUABLE.

Il est clair que l'algèbre de Jordan $\mathcal{U} = \mathbb{R} \times \mathcal{V}$ d'un espace quadratique réel $(\mathcal{V}, Q)$ est de forme réelle si, et seulement si, Q est définie positive. Le domaine de positivité $\mathcal{U}^+$ est alors :

$$\{(t,\vec{x}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{V} \quad ; \quad t^2 > Q(x) \quad \text{et } t > 0\}$$

Dans le cas notable où $\mathcal{V}$ est l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, on retrouve ainsi le cône du futur de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^4$. Notons aussi qu'on peut alors identifier, au moyen de :

$$(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3) \longmapsto \begin{pmatrix} x_0 & x_1 i + x_2 j + x_3 k \\ -x_1 i - x_2 j - x_3 k & x_0 \end{pmatrix},$$

l'algèbre de Jordan $\mathcal{U}$ à la sous-algèbre de Jordan de $\mathcal{H}_2(\mathbb{H})$ constituée par les matrices :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix},$$

où $a \in \mathbb{R}$ et b est un quaternion pur. Cet isomorphisme transporte le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^4$ en le produit scalaire

$$(A,B) \longmapsto \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\frac{A \circ B + B \circ A}{2}\right).$$

CHAPITRE 4

COMPOSANTES CONNEXES DE L'ENSEMBLE DES ELEMENTS INVERSIBLES

1. DECOMPOSITION DE BRAUN-KOECHER.

LEMME 1. - *Soient $\mathcal{U}$ une K-algèbre de Jordan quelconque et* (a,b) *un couple d'idempotents orthogonaux de $\mathcal{U}$. Alors :*

$$\mathcal{U}_{1/2}(a) = (\mathcal{U}_0(b) \cap \mathcal{U}_{1/2}(a)) \oplus (\mathcal{U}_{1/2}(b) \cap \mathcal{U}_{1/2}(a)).$$

Preuve. - Du fait que $b \in \mathcal{U}_0(a)$ et que $\mathcal{U}_0(a)\,\mathcal{U}_{1/2}(a) \subset \mathcal{U}_{1/2}(a)$, il résulte que :

$$\mathcal{U}_{1/2}(a) = (\mathcal{U}_0(b) \cap \mathcal{U}_{1/2}(a)) \oplus (\mathcal{U}_{1/2}(b) \cap \mathcal{U}_{1/2}(a)) \oplus (\mathcal{U}_1(b) \cap \mathcal{U}_{1/2}(a)).$$

Mais comme $bx = x$ et $ax = \frac{1}{2}x$ entraînent $(a+b)x = \frac{3}{2}x$, alors que $a+b$ est un idempotent de $\mathcal{U}$, on a $\mathcal{U}_1(b) \cap \mathcal{U}_{1/2}(a) = \{0\}$.

LEMME 2. - *Soient* a, b, c *trois idempotents deux à deux orthogonaux de $\mathcal{U}$. Alors :*

$$\mathcal{U}_{1/2}(a) \cap \mathcal{U}_{1/2}(b) \subset \mathcal{U}_0(c).$$

Preuve. - Comme $c \in \mathcal{U}_0(a) \cap \mathcal{U}_0(b)$, $\mathcal{U}_{1/2}(a) \cap \mathcal{U}_{1/2}(b)$ est stable par $L(c)$ d'où :

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{1/2}(a) \cap \mathcal{U}_{1/2}(b) = {} & \mathcal{U}_{1/2}(a) \cap \mathcal{U}_{1/2}(b) \cap \mathcal{U}_0(c) \\ & \oplus \mathcal{U}_{1/2}(a) \cap \mathcal{U}_{1/2}(b) \cap \mathcal{U}_{1/2}(c) \\ & \oplus \mathcal{U}_{1/2}(a) \cap \mathcal{U}_{1/2}(b) \cap \mathcal{U}_1(c)\ ;\end{aligned}$$

mais, le système (a,b,c) étant orthogonal, on a :

$$\mathcal{U}_{1/2}(a) \cap \mathcal{U}_{1/2}(b) \cap \mathcal{U}_{1/2}(c) = \{0\} = \mathcal{U}_{1/2}(a) \cap \mathcal{U}_{1/2}(b) \cap \mathcal{U}_{1}(c).$$

<u>LEMME 3</u>. - *Si* $\mathcal{U}$ *admet un système total orthogonal d'idempotents* $(c_1,\dots,c_n)$, *alors, pour tout* $i \in [1,n]$, *on a :*

$$\mathcal{U}_{1/2}(c_i) = \bigoplus_{j\neq i} \mathcal{U}_{1/2}(c_i) \cap \mathcal{U}_{1/2}(c_j).$$

Preuve. - Par changement de numérotation, on peut supposer $i=1$; les c_j, $j \neq 2$, constituent alors un s.t.o.i. de $\mathcal{U}_{0}(c_2)$, ce qui permet de procéder par récurrence sur n à partir de l'égalité fournie par le lemme 1 :

$$\mathcal{U}_{1/2}(c_i) = (\mathcal{U}_{1/2}(c_1) \cap \mathcal{U}_{1/2}(c_2)) \oplus (\mathcal{U}_{1/2}(c_1) \cap \mathcal{U}_{0}(c_2))$$

et du fait que, si on pose $\mathcal{U}_{0}(c_2) = \mathcal{V}$:

$$\mathcal{U}_{1/2}(c_1) \cap \mathcal{U}_{0}(c_2) = \mathcal{V}_{1/2}(c_1),$$

alors que, grâce au lemme 2 on a pour $j \notin \{1,2\}$:

$$\mathcal{V}(c_1) \cap \mathcal{V}(c_j) = \mathcal{U}_{1/2}(c_1) \cap \mathcal{U}_{1/2}(c_j).$$

<u>THEOREME DE DECOMPOSITION</u>. - *Soit* $\mathcal{U}$ *une algèbre de Jordan de forme* ***réelle*** *de dimension finie* n *et de degré* r. *Considérons un s.t.o.i.p.* $(c_1,\dots,c_r)$ *de* $\mathcal{U}$ *et posons, pour tout couple* (i,j) *d'indices de* [1,r], *tels que* $i < j$ *:*

$$\mathcal{U}_{ij} = \mathcal{U}_{1/2}(c_i) \cap \mathcal{U}_{1/2}(c_j).$$

Alors :

i) Tous les espaces vectoriels réels $\mathcal{U}_{ij}$ *ont la même dimension* q.

ii) $\mathcal{U} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{R}\, c_i \oplus (\bigoplus_{i<j} \mathcal{U}_{ij})$.

iii) La décomposition ii) est orthogonale *pour la* forme trace $(a,b) \longmapsto \mathrm{Tr}(a.b)$.

Preuve :

i) Soient (i,j), (i',j') deux couples d'entiers de [1,r] tels que $i < j$,

et $i' < j'$. On sait qu'il existe alors un automorphisme intérieur P de $\mathcal{U}$ **tel** que $P(c_i) = c_{i'}$ et $P(c_j) = c_{j'}$, d'où $P(\mathcal{U}_{ij}) = \mathcal{U}_{i'j'}$.

ii) Ceci se démontre par récurrence à partir de

$$\mathcal{U} = \mathbb{R}c_1 \oplus \mathcal{U}_{1/2}(c_1) \oplus \mathcal{U}_o(c_1) ,$$

compte tenu de $\mathcal{U}_{1/2}(c_1) = \underset{i<j}{\oplus} \mathcal{U}_{ij}$ (lemme 3) et de ce que, grâce au **lemme** 2 :

$$1 < i < j \Longrightarrow \mathcal{U}_{ij} \subset \mathcal{U}_o(c_1).$$

iii) Si $(i,j) \neq (i',j')$, on a :

$$\mathcal{U}_{ij} \subset \mathcal{U}_o(c_{i'}) \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{U}_{ij} \subset \mathcal{U}_o(c_{j'})$$

d'où :

$$\mathcal{U}_{ij}.\mathcal{U}_{i'j'} \subset \mathcal{U}_{1/2}(c_{i'}) \quad \text{ou} \quad \mathcal{U}_{ij}.\mathcal{U}_{i'j'} \subset \mathcal{U}_{1/2}(c_{j'})$$

et, comme on sait que la forme trace s'annule sur les espaces $\mathcal{U}_{1/2}(.)$, **on** voit bien que $\mathcal{U}_{ij}$ et $\mathcal{U}_{i'j'}$ sont orthogonaux pour la structure hilbertienne canonique de $\mathcal{U}$.

Par ailleurs, pour $1 \leq i < j \leq r$ et pour un indice $k \in [1,r]$ distinct de i et j, $c_k \mathcal{U}_{ij} = \{0\}$ d'après le lemme 2, alors que $c_i \mathcal{U}_{ij} \subset \mathcal{U}_{1/2}(c_i)$ et $c_j\mathcal{U}_{ij} \subset \mathcal{U}_{1/2}(c_j)$.

Voici une application importante de ce théorème de décomposition :

__PROPOSITION 1.__ - *Soit* $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$ *un élément de* $\mathcal{U}$ *se décomposant "simplement" suivant le s.t.o.i.p.* $(c_1,\dots,c_r)$ *(i.e. tout idempotent canonique de* x *est une somme de* c_i*). Pour que* L(x) *soit inversible dans l'anneau* $\mathcal{L}(\mathcal{U})$ *des endomorphismes de l'espace vectoriel* $\mathcal{U}$*, il faut et il suffit que* x *soit inversible dans* $\mathcal{U}$ *(i.e. tous les* λ_i *sont non nuls) et que pour tout couple* (i,j), $1 \leq i < j < r$, *on ait* $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$.

Preuve. - Tout élément y de $\mathcal{U}$ se décomposant en :

$$y = \sum_i \mu_i c_i + \sum_{i<j} y_{ij} \quad , \qquad y_{ij} \in \mathcal{U}_{ij},$$

on a alors :

$$xy = \sum_i \lambda_i \mu_i c_i + \sum_{i<j} \frac{\lambda_i+\lambda_j}{2} y_{ij}.$$

Ainsi, s'il existe un couple $(i_\circ, j_\circ)$, $1 \leqslant i_\circ < j_\circ \leqslant r$, tel que $\lambda_{i_\circ}+\lambda_{j_\circ} = 0$, pour tout élément $y \neq 0$ de $\mathcal{U}_{i_\circ j_\circ}$ (et il en existe du fait que les $\mathcal{U}_{ij}$ sont tous non réduits à o), on a $xy=0$, i.e. $L(x)$ n'est pas inversible dans $\mathcal{L}(\mathcal{U})$. Pour la réciproque, il suffit de remarquer que l'existence d'un $y \neq 0$ tel que $xy = 0$ implique soit que l'un des λ_i est nul, soit que $\lambda_i+\lambda_j = 0$ pour un certain couple (i,j), $1 \leqslant i < j \leqslant r$.

COROLLAIRE. - *Pour tout* $x \in \mathcal{U}^+$ *ou* $x \in -\mathcal{U}^+$, $L(x)$ *est inversible dans* $\mathcal{L}(\mathcal{U})$.

2. LA RACINE CARREE DANS LE DOMAINE DE POSITIVITE $\mathcal{U}^+$.

PROPOSITION 1. - *L'application* $\Phi : x \longmapsto x^2$ *est un* difféomorphisme C^∞ *de* $\mathcal{U}^+$ *sur lui-même.*

Preuve. - Il est clair que cette application est bijective et que $D\Phi(x) = 2L(x)$. Mais, comme $L(x)$ est inversible dans $\mathcal{L}(\mathcal{U})$, d'après le corollaire précédent, Φ est bien un difféomorphisme d'après le théorème des difféomorphismes locaux.

COROLLAIRE. - *L'application* $x \longmapsto \sqrt{x}$, *inverse de* Φ *sur* $\mathcal{U}^+$ *est un difféomorphisme* C^∞ *de* $\mathcal{U}^+$ *sur lui-même.*

Pour pouvoir faire une étude différentielle de l'ensemble $\mathcal{I} \cap \mathcal{U}$ des éléments inversibles d'une algèbre de Jordan $\mathcal{U}$, il convient de noter le résultat général que voici :

PROPOSITION 2. - *Soit* $(\mathcal{U}, e)$ *une algèbre de Jordan réelle de dimension finie à unité* e. *Alors l'ensemble* $\mathcal{I} \cap \mathcal{U}$ *des éléments inversibles de* $\mathcal{U}$ *est un* ouvert *pour la topologie canonique de* $\mathcal{U}$.

Preuve. - Remarquons tout d'abord que l'ensemble des éléments $x \in \mathcal{U}$ tels que $L(x)$ soit inversible dans $\mathcal{L}(\mathcal{U})$ est un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de e, du fait que L est continue et que l'ensemble des éléments inversibles de l'algèbre associative $\mathcal{L}(\mathcal{U})$ est un ouvert de cette algèbre.

Soit $x_o \in \mathcal{J} n\, \mathcal{U}$. Il existe alors un polynôme $P_o(X) = \sum_{i=1}^{r} a_i X^i$ sans terme constant tel que $P_o(x_o) = e$ et alors $P_o^{-1}(\mathcal{V})$ est un voisinage ouvert de x_o dans $\mathcal{U}$ en raison de la continuité de P_o et, comme il est clair que $P_o^{-1}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{J} n\, \mathcal{U}$, c'est terminé.

PROPOSITION 3. - *Soit $\mathcal{U}$ une algèbre de Jordan de forme réelle de dimension finie. Notons* $I(\mathcal{U})$ *l'ensemble des éléments involutifs de $\mathcal{U}$. Alors on définit une* surjection canonique σ *de* $\mathcal{J} n\, \mathcal{U}$ *dans* $I(\mathcal{U})$ *de classe* C^∞ *en posant pour toute décomposition canonique :*

$$x = \sum_i \lambda_i c_i \ .$$

$$\sigma(x) = \sum_i \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} c_i .$$

De façon plus implicite, on a $\sigma(x) = P((\sqrt[4]{x^2})^{-1})(x)$

Preuve. - Pour tout y possédant les mêmes idempotents canoniques que x, i.e. :

$$y = \sum \mu_i c_i$$

on a :

$$P(y)(x) = L(y)^2 x = \sum \mu_i^2\, \mu_i c_i$$

et c'est notamment le cas de :

$$(\sqrt[4]{x^2})^{-1} = \sum_i \frac{1}{|\lambda_i|^{1/2}} c_i \ ;$$

d'où :

$$P(\sqrt[4]{x^2})^{-1}(x) = P((\sqrt[4]{x^2})^{-1})(x) = \sum_i \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} c_i .$$

Le caractère C^∞ de σ résulte alors du corollaire de la proposition 2.

3. LES ENSEMBLES $I_k(\mathcal{U})$.

Dans tout ce qui suit $\mathcal{U}$ désigne une algèbre de Jordan de forme réelle de dimension finie n et de degré r. Notons $I(\mathcal{U})$ l'ensemble des éléments involutifs de $\mathcal{U}$. Un élément $\omega \in I(\mathcal{U})$ est dit de degré k si son idempotent associé $\frac{1}{2}(\omega+e)$ est de degré k ; ce nombre k est donc un entier compris entre s et r. Notons que ceci signifie aussi qu'on peut trouver un s.t.o.i.p. d_i, $1 \leqslant i \leqslant r$ suivant lequel ω se décompose en :

$$\omega = \sum_{i=1}^{k} d_i - \sum_{i=k+1}^{r} d_i.$$

De façon plus générale, le *degré* d'un élément $x \in \mathscr{I}nv\ \mathcal{U}$ est défini comme étant celui de l'élément involutif $\sigma(x) = P(\sqrt[4]{x^2})^{-1}(x)$. Il est alors clair que :

PROPOSITION 1. - *Un élément* $x \in \mathscr{I}nv(\mathcal{U})$ *est de degré* k *si, et seulement si, on peut trouver un s.t.o.i.p.* $(d_1,\dots,d_r)$ *tel que*

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i d_i \quad ,$$

où $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ *sont* >0, *alors que* $\lambda_{k+1},\dots,\lambda_r$ *sont* <0.

Notation. - L'ensemble des éléments de $\mathscr{I}nv(\mathcal{U})$ (resp. $I(\mathcal{U})$) de degré k sera noté $\mathscr{I}nv_k\ \mathcal{U}$ (resp. $I_k(\mathcal{U})$).

PROPOSITION 2. - *Pour tout entier* $k \in [1,r]$, $I_k(\mathcal{U})$ *est un* rétracte de déformation *de* $\mathscr{I}nv(\mathcal{U})$.

Preuve. - Pour avoir une déformation continue de $\mathscr{I}nv_k\ \mathcal{U}$ qui se réduise à l'identité sur $I_k(\mathcal{U})$, il suffit de poser pour :

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i d_i \qquad ; \quad \lambda_i > 0 \ ; \quad (d_i) : \text{s.t.o.i.p.}$$

$$H_t(x) = \sum_{i=1}^{r} \left(t\lambda_i + (1-t)\frac{\lambda_i}{|\lambda_i|}\right) d_i.$$

L'importance des ensembles $I_k\ \mathcal{U}$ tient à ce que :

THEOREME. - *Les* $I_k(\mathcal{U})$, $0 \leqslant k \leqslant r$, *sont les* composantes connexes *de* $I(\mathcal{U})$.

Preuve. - Compte tenu du fait que l'application continue $Tr : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ prend sur chaque I_k la valeur constante $2k-r$, il suffit de montrer que chaque I_k est une partie connexe de $\mathcal{U}$. A cet effet, considérons deux s.t.o.i.p. $(c_1,\dots,c_r)$ et $(c'_1,\dots,c'_r)$ un système de coefficients $\varepsilon_i = \pm 1$;

nous allons montrer par itération qu'on peut joindre $w = \Sigma\, \varepsilon_i c_i$ à $w' = \Sigma\, \varepsilon_i c'_i$ par un chemin dans I_k (k étant le nombre de $\varepsilon_i > 0$). Rappelons tout d'abord (cf. II, 1, th. 2) qu'on dispose d'une sous-algèbre $\mathcal{U}_1$ de dimension 3, contenant c_1 et c'_1, isomorphe à celle d'une forme quadratique définie positive ; ceci permet, si on désigne par e_1 l'unité de $\mathcal{U}_1$, de disposer d'un élément involutif w_1 de $\mathcal{U}_1$ tel que $P(e_1 - e + w_1)(c_1) = c'_1$. Soit $2c_1 - e_1 = w_\circ$ l'idempotent canoniquement associé à c_1 dans $\mathcal{U}_1$. Alors, du fait que $I(\mathcal{U}_1)$ est une quadrique ellipsoïdale, on peut trouver un chemin $f : [\,0,1\,] \to \mathcal{U}_1$ tel que $f(0) = w_\circ$ et $f(1) = w_1$ d'où, en posant $g(t) = e_1 - e + f(t)$ un chemin $g : [0,1] \to \mathcal{U}$ tel que :

$$g(0) = e_1 - e + w_\circ = 2c - e, \quad g(1) = e_1 - e + w_1$$

et, puisque la représentation quadratique $P : \mathcal{U} \to \mathcal{L}(\mathcal{U})$ est continue, $P(g(t))$ est alors un chemin de $\mathcal{L}(\mathcal{U})$ tel que $P(g(0))(c_1) = c_1$ et $P(g(1))(c_1) = c'_1$; d'où $P(g(0))(w) = w$ du fait que $g(0)$ est l'élément involutif associé à c_1 et que la composante de w suivant $\mathcal{U}_{1/2}(c_1)$ est nulle. Mais alors $P(g(t))(w)$ est un chemin dans $I_k(\mathcal{U})$ qui joint w à

$$w_1 = \varepsilon_1 c'_1 + \sum_{i=2}^{r} \varepsilon_i P(g(1))c_i \;;$$

mais comme $c'_1, P(g(1))c_2, \ldots, P(g(1))c_r$ est un s.t.o.i.p. et que c'_1 est orthogonal à c'_2, on peut renouveler ce procédé sur le couple $(P(g(1))c_2, c'_2)$ ce qui, par itération, fournit des chemins de I_k

$$w \to w_1 \to w_2 \ldots w_r \to w'.$$

COROLLAIRE. - *Les ensembles* $\mathcal{I}\mathrm{nv}_k(\mathcal{U})$ $0 \leq k \leq r$ *sont les* composantes connexes *de l'ouvert* $\mathcal{I}\mathrm{nv}\ \mathcal{U}$.

Preuve. - Ceci résulte du théorème précédent et de la proposition 2.

4. LES GROUPES $O_k(\mathcal{U})$.

On désignera par $O_k(\mathcal{U})$ (resp. $G_k(\mathcal{U})$) le groupe d'automorphismes de l'algèbre $\mathcal{U}$ (resp. de l'espace vectoriel $\mathcal{U}$) engendré par les $P(x)$,

$x \in I_k(\mathcal{U})$ (resp. $x \in \mathcal{I}nv_k(\mathcal{U})$). Notons que la *connexité de* $I_k(\mathcal{U})$ *entraîne celle* de $O_k(\mathcal{U})$.

THEOREME 1 .—

i) $O_\circ(\mathcal{U}) = O_r(\mathcal{U}) = \{id_{\mathcal{U}}\}$.

ii) Pour $1 \leq k \leq r-1$ *et tout couple* (c_i), (c_i'), $1 \leq i \leq s$, *de* s.o.i.p. *(système orthogonal d'idempotents primitifs de* $\mathcal{U}$*), il existe* $\Phi \in O_k(\mathcal{U})$ *tel que :*

$$\Phi(c_1) = c_1', \ \ldots, \ \Phi(c_s) = c_s'.$$

Preuve. - Ceci se démontre par itération à partir d'une sous-algèbre $(\mathcal{U}_1, e_1)$ de $(\mathcal{U}, e)$ de dimension 3 contenant c_1 et c_1', isomorphe à celle d'une forme quadratique définie positive, ce qui permet d'avoir un élément involutif w_1 de $\mathcal{U}_1$ tel que $P_1(w_1)c_1 = c_1'$ (P_1 : représentation quadratique de $\mathcal{U}_1$). En remplaçant alors dans l'élément involutif $e-e_1+w_1$ de $\mathcal{U}$, $e-e_1$ par un élément involutif de degré k-1 en jouant sur les coefficients canoniques (ε_i) de $e-e_1$, on obtient un $w \in I_k(\mathcal{U})$ tel que $P(w)c_1 = c_1'$ et $P(w)a = a$ pour tout idempotent orthogonal à c_1 et c_1'. L'itération se poursuit alors comme dans la démonstration de (II.5. prop).

THEOREME 2. - *Soit* $k \in [0,r]$. *Alors :*

i) $I_k(\mathcal{U})$ *est un espace* $O_k(\mathcal{U})$-homogène *(i.e. c'est une partie stable pour* O(k) *et ce groupe opère transitivement sur elle).*

ii) $\mathcal{I}nv_k(\mathcal{U})$ *est un espace* $G_k(\mathcal{U})$-homogène.

Preuve .—

i) Pour tout $w \in I_k$, on a $P(w)w = w$ d'où, en raison de la connexité de I_k, $P(w)I_k(\mathcal{U}) \subset I_k(\mathcal{U})$. Le fait que $O_k(\mathcal{U})$ opère alors transitivement sur $I_k(\mathcal{U})$ résulte alors du théorème 1.

ii) Pour $x \in \mathcal{I}nv_k(\mathcal{U})$, on a $P(x) = x^3$, or $x^3 \in \mathcal{I}nv_k(\mathcal{U})$ d'où $P(x)\ \mathcal{I}nv_k(\mathcal{U}) \subset \mathcal{I}nv_k(\mathcal{U})$ en raison de la connexité de $\mathcal{I}nv_k(\mathcal{U})$. Pour s'assurer que $G_k(\mathcal{U})$ opère transitivement sur $\mathcal{I}nv_k(\mathcal{U})$ il suffit de faire appel à l'application canonique $\sigma : \mathcal{I}nv_k(\mathcal{U}) \to I_k(\mathcal{U})$: en effet, pour tout couple (x,y) d'éléments de $\mathcal{I}nv_k(\mathcal{U})$ les éléments $\bar{x} = P(\sqrt[4]{x^2})^{-1}(x)$ et $\bar{y} = P(\sqrt[4]{y^2})^{-1}(y)$ appartiennent à $I_k(\mathcal{U})$ et alors si

$\Phi \in O_k(\mathcal{U})$ transforme $\bar{x}$ en $\bar{y}$ on a :

$$y = P(\sqrt[4]{y^2}) \circ \Phi \circ P(\sqrt[4]{x^2})^{-1}(x).$$

Remarques .–

1) $\mathcal{I}nv_{r-k}(\mathcal{U}) = - \mathcal{I}nv_k(\mathcal{U})$, $I_{r-k}(\mathcal{U}) = -I_k(\mathcal{U})$.

2) $\mathcal{I}nv_r(\mathcal{U}) = \mathcal{U}^+$, on retrouve ainsi le fait connu que $\mathcal{U}^+$ est un domaine de positivité homogène.

CHAPITRE V

LA STRUCTURE PSEUDO-RIEMANNIENNE DES $\mathcal{I}nv_k(\mathcal{U})$

$\mathcal{U}$ désignera encore une algèbre de Jordan de forme réelle de dimension finie n et degré r.

1. LE DETERMINANT.

Le déterminant d'un élément x de $\mathcal{U}$ peut être défini à partir de la décomposition canonique :

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c_i$$

de cet élément suivant :

$$\det x = \prod_{i=1}^{k} \lambda_i^{\deg c_i} .$$

On a aussi, de façon moins intrinsèque, à l'aide d'un s.t.o.i.p. d_j, $1 \leqslant j \leqslant r$, suivant lequel x se "diagonalise" (i.e. chaque c_i est une somme de d_j) :

$$\det x = \prod_{j=1}^{r} \mu_j$$

si

$$x = \sum_{j=1}^{r} \mu_j d_j .$$

Exemple. - Reprenons celui fourni par l'algèbre de Jordan $\mathcal{U} = \mathbf{R} \times \mathcal{V}$ d'un espace quadratique défini positif $(\mathcal{V}, Q)$. Les idempotents canoniques d'un élément non nul $\overline{x} = (\xi, x)$ sont alors $\frac{1}{2}(1, Q(x)^{-\frac{1}{2}} x)$ et $\frac{1}{2}(1, -Q(x)^{-\frac{1}{2}} x)$, ce qui permet d'avoir les coefficients de la décomposition canonique de $\overline{x}$; ce sont $\xi + Q(x)^{\frac{1}{2}}$ et $\xi - Q(x)^{\frac{1}{2}}$ d'où :

$$\text{dét}\ \overline{x} = \xi^2 - Q(x)$$

ce qui, sous une forme plus intrinsèque s'écrit :

(1) $$\text{dét}\ \overline{x} = \frac{1}{2}((\text{Tr}\ \overline{x})^2 - \text{Tr}(\overline{x}^2))$$

du fait qu'on a alors

$$\text{Tr}(\xi,x) = 2\xi.$$

Notons que ceci donne pour tout élément y de $\mathcal{V}$ conjugué à x (i.e. $y = y_{1/2}$ dans la décomposition de Peirce relative aux idempotents associés à x) :

(1') $$\text{dét}(\overline{x}+y) = \text{dét}\ \overline{x} - \frac{1}{2}\ \text{Tr}(y^2).$$

Remarque. - Soit c un idempotent de $\mathcal{U}$. Alors pour tout élément x de $\mathcal{U}$ dont la décomposition de Peirce relative à c se réduit à

$$x = x_\circ + x_1$$

(i.e. $x_{1/2} = 0$), on a :

$$\text{dét}_{\mathcal{U}}\, x = \text{dét}_{\mathcal{U}_1} x_1 \ .\ \text{dét}_{\mathcal{U}_\circ}\, x_\circ \quad ,$$

où $\mathcal{U}_1 = \{y \in \mathcal{U} \ ;\ cy = y\}$ et $\mathcal{U}_\circ = \{y \in \mathcal{U} \ ;\ cy = 0\}$.

Cette remarque permet, compte tenu de l'exemple précédent, de calculer le déterminant d'un élément de $\mathcal{U}$ qui, suivant un s.t.o.i.p. $d_1,\dots,d_r$ se décompose en :

$$y = \sum_{j=1}^{r} \mu_j d_j + x_{\alpha\beta} \quad , \quad 1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant r \quad ,$$

$$x_{\alpha\beta} \in \mathcal{U}_{\alpha\beta}.$$

(Rappelons que, suivant la notation de IV, 1.

$$\mathcal{U}_{\alpha\beta} = \mathcal{U}_{1/2}(d_\alpha) \cap \mathcal{U}_{1/2}(d_\beta) \ ).$$

On a alors en posant :

$$\mathcal{U}_\circ = \sum_{j \notin \{\alpha,\beta\}} \mathbb{R}\, d_j \qquad , \qquad \mathcal{U}_1 = \mathbb{R}d_\alpha + \mathbb{R}d_\beta + \mathcal{U}_{\alpha\beta}$$

et en se rappelant que $\mathcal{U}_1$ s'identifie à l'algèbre de Jordan d'une forme quadratique sur $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ admettant $d_\alpha + d_\beta$ pour unité :

$$\text{dét } y = \prod_{j \notin \{\alpha,\beta\}} \mu_j \cdot (\mu_\alpha\mu_\beta - \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\, x_{\alpha\beta}^2) \quad ,$$

grâce à la formule (1') de l'exemple précédent. Lorsque $x = \sum_{j=1}^{r} \mu_j d_j$ est un élément inversible de $\mathcal{U}$, le déterminant de $y = x+x_{\alpha\beta}$ s'exprime de façon plus intrinsèque suivant :

$$\text{dét}(x + x_{\alpha\beta}) = (1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{Tr}\, x_{\alpha\beta}^2}{\mu_\alpha\mu_\beta}) \text{ dét } x.$$

Cette formule va se généraliser de la façon suivante :

<u>PROPOSITION</u> (Règle à la Sarrus !). - *Soit* $(d_1,\ldots,d_r)$ *un s.t.o.i.p. de* $\mathcal{U}$. *Considérons un élément* $x \in \mathcal{I}\mathrm{nv}\,\mathcal{U}$ *se diagonalisant suivant ce s.t.o.i.p., i.e. :*

$$x = \sum_{j=1}^{r} \mu_j d_j \qquad , \qquad \mu_j \in \mathbb{R}$$

et prenons pour tout couple $((\alpha,\beta), (\gamma,\delta))$ *d'éléments de l'ensemble* $\{(i,j)\ ;\ 1 \leq i < j \leq r\}$ *un élément* $x_{\alpha\beta} \in \mathcal{U}_{\alpha\beta}$ *et un élément* $x_{\gamma\delta} \in \mathcal{U}_{\gamma\delta}$. *Alors :*

$$\text{dét}(x+x_{\alpha\beta}+x_{\gamma\delta}) = (1 - \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{Tr}\, x_{\alpha\beta}^2}{\mu_\alpha\mu_\beta} - \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{Tr}\, x_{\gamma\delta}^2}{\mu_\gamma\mu_\delta}).\ \text{dét } x.$$

Preuve. - Dans le cas où les ensembles $\{\alpha,\beta\}$ et $\{\gamma,\delta\}$ sont disjoints, ceci se montre aisément en appliquant la remarque précédente à une décomposition

$$x = (x_\circ + x_{\alpha\beta}) + (x_1 + x_{\gamma\delta})$$

où

$$x = x_\circ + x_1$$

est la décomposition de Peirce de x suivant $\sum_{j \in J} d_j$ où J est une partie de $[1,r]$ contenant $\{\alpha,\beta\}$ et disjointe de $\{\gamma,\delta\}$.

Dans le cas où les ensembles $\{\alpha,\beta\}$ et $\{\gamma,\delta\}$ ont un élément commun, on peut alors, sous réserve de renuméroter les indices j, supposer $\beta=\gamma$ et que, grâce à la remarque précédente, $\mathcal{U}$ se réduit à :

$$\mathcal{U} = \mathbb{R}d_\alpha + \mathbb{R}d_\beta + \mathbb{R}d_\gamma + \mathcal{U}_{\alpha\beta} + \mathcal{U}_{\beta\gamma} + \mathcal{U}_{\alpha\gamma} \quad .$$

On est donc ramené au cas où le degré r de $\mathcal{U}$ est égal à 3. D'après Braun et Koecher, $\mathcal{U}$ est alors isomorphe à l'algèbre de Jordan $\mathcal{H}_3(K)$ où K est égal à l'un des trois corps $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ ou encore à l'algèbre $\mathbb{O}$ des octaves de Cayley. On peut alors définir le déterminant d'une matrice hermitienne

$$\begin{bmatrix} \alpha & a & b \\ \bar{a} & \beta & c \\ \bar{b} & \bar{c} & \gamma \end{bmatrix}$$

par la règle de Sarrus ordinaire du fait que α, β et γ sont des nombres réels. Dans le cas particulier qui nous occupe, $x + x_{\alpha\beta} + x_{\beta\delta}$ s'identifie à une matrice

$$\begin{bmatrix} \mu_\alpha & \xi_{\alpha\beta} & 0 \\ \bar{\xi}_{\alpha\beta} & \mu_\beta & \xi_{\beta\delta} \\ 0 & \bar{\xi}_{\beta\delta} & \mu_\delta \end{bmatrix} \quad ;$$

d'où :

$$\text{dét}(x + x_{\alpha\beta} + x_{\beta\delta}) = \mu_\alpha\mu_\beta\mu_\delta - |\xi_{\alpha\beta}|^2\mu_\delta - |\xi_{\beta\delta}|^2\mu_\alpha$$

et, comme on a clairement :

$$\mu_\alpha\mu_\beta\mu_\delta = \text{dét } x \quad ,$$

$$|\xi_{\alpha\beta}|^2 = \frac{1}{2}\,\text{Tr } x_{\alpha\beta}^2 \qquad , \qquad |\xi_{\beta\delta}|^2 = \frac{1}{2}\,\text{Tr } x_{\beta\delta}^2$$

il en résulte bien :

$$\text{dét}(x + x_{\alpha\beta} + x_{\beta\delta}) = \text{dét } x - \frac{1}{2}\,\mu_\delta \text{Tr } x_{\alpha\beta}^2 - \frac{1}{2}\,\mu_\alpha \text{ Tr } x_{\beta\delta}^2 \quad .$$

Ce résultat va permettre d'établir le fait fondamental que voici :

THEOREME. - *Pour tout élément* $x \in \mathcal{I}nv(\mathcal{U})$, *le* hessien D^2f *de la fonction* $f(x) = -\mathrm{Log}|\text{dét } x|$ *est égal à la forme bilinéaire symétrique*

$$(u,v) \longmapsto \mathrm{Tr}(P(x^{-1})u.v).$$

Preuve. - De la proposition précédente, il résulte clairement que, t et s désignant deux variables réelles :

$$\left.\frac{d^2}{dt\,ds}\right|_{t=s=o} \text{dét}(x + tx_{\alpha\beta} + sx_{\gamma\delta}) = 0,$$

ce qui assure que les sous-espaces $\mathcal{U}_{ij}$ sont deux à deux orthogonaux pour ce hessien.

De même, on prouve à partir de la formule :

$$\text{dét}(x + td_\alpha + sx_{\beta\gamma}) = (1 - \frac{s^2}{2}\,\frac{\mathrm{Tr}\, x^2_{\beta\gamma}}{\mu_\beta\mu_\gamma})(1 + \frac{t}{\mu_\alpha})\text{dét } x$$

valable pour $\alpha \notin \{\beta,\gamma\}$, que d_α est alors orthogonal à $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ pour ce hessien. Dans le cas où $\alpha \in \{\beta,\gamma\}$, e.g. $\alpha = \beta$, on a alors :

$$\text{dét}(x + td_\alpha + sx_{\alpha\gamma}) = (1 - \frac{s^2}{2}\,\frac{\mathrm{Tr}\, x^2_{\beta\gamma}}{(\mu_\beta+t)\mu_\gamma})(1 + \frac{t}{\mu_\alpha})\text{dét } x.$$

Cette formule apparemment plus compliquée donnant par équivalence, lorsque t tend vers O, la même forme que précédemment, on peut affirmer que tous les d_i sont orthogonaux à tous les $\mathcal{U}_{ij}$ pour le hessien de f.

La formule évidente

$$\left.\frac{d^2}{dt\,ds}\right|_{t=s=o} f(x + td_i + sd_j) = \frac{\delta_{ij}}{\mu_i\mu_j}$$

assure en particulier que pour $i\neq j$, $\mathbb{R}c_i$ et $\mathbb{R}c_j$ sont orthogonaux pour D^2f.

Enfin, pour avoir la restriction de D^2f à $\mathcal{U}_{ij}$ remarquons que :

$$f(x + tx_{ij}) = -\mathrm{Log}(1 - \frac{t^2}{2}\,.\,\frac{\mathrm{Tr}\, x^2_{ij}}{\mu_i\mu_j}) - \mathrm{Log}\,|\text{dét } x|$$

et de l'équivalence, pour t tendant vers 0 :

$$- \operatorname{Log}\left(1 - \frac{t^2}{2} \cdot \frac{\operatorname{Tr} x_i^2}{\mu_i \mu_j}\right) \sim \frac{t^2}{2} \cdot \frac{\operatorname{Tr} x_{ij}^2}{\mu_i \mu_j} ,$$

on déduit que la restriction de $D^2 f$ à $\mathcal{U}_{ij}$ est égale à

$$(u,v) \longmapsto \frac{1}{\mu_i \mu_j} \operatorname{Tr} u.v \; .$$

Or :

LEMME. -

i) $P(x^{-1})d_i = \frac{1}{\mu_i^2} d_i$

ii) Pour tout $y \in \mathcal{U}_{ij}$:

$$P(x^{-1})y = \frac{1}{\mu_i \mu_j} y.$$

Preuve :

i) On a évidemment :

$$x^{-1} d_i = \frac{1}{\mu_i} d_i, \qquad (x^{-1})^2 d_i = \frac{1}{\mu_i^2} \; ;$$

d'où :

$$P(x^{-1})d_i = 2x^{-1}(x^{-1}d_i) - (x^{-1})^2 d_i$$

$$= \left(\frac{2}{\mu_i^2} - \frac{1}{\mu_i^2}\right) d_i .$$

ii) $x^{-1}y = \left(\frac{d_i}{\mu_i} + \frac{d_j}{\mu_j}\right) y$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_i} + \frac{1}{\mu_j}\right) y.$$

De même : $(x^{-1})^2 y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_i^2} + \frac{1}{\mu_j^2}\right) y$;.

d'où :

$$P(x^{-1})y = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{\mu_i} + \frac{1}{\mu_j}\right)^2 - \left(\frac{1}{\mu_i^2} + \frac{1}{\mu_j^2}\right)\right) y.$$

2. QUELQUES REMARQUES SUR LA REPRESENTATION QUADRATIQUE.

Chez Braun et Koecher, on trouvera les résultats suivants relatifs à la représentation quadratique P d'une algèbre de Jordan de dimension finie :

1° Pour tout couple (x,y) d'éléments de $\mathcal{U}$, on a :

$$P(P(x)y) = P(x) \circ P(y) \circ P(x).$$

2° Un élément x de $\mathcal{U}$ est inversible si, et seulement si, $P(x)$ l'est dans $\mathcal{L}(\mathcal{U})$ et alors :

$$P(x)^{-1} = P(x^{-1}).$$

2° Pour tout couple (x,y) d'éléments de $\mathcal{I}nv(\mathcal{U})$, $P(x)y \in \mathcal{I}nv(\mathcal{U})$.

De plus, si $\mathcal{U}$ est de forme réelle :

LEMME 1. - *Pour tout* $x \in \mathcal{U}$, $P(x)$ *est* auto-adjoint *pour la forme* trace $(u,v) \longmapsto \mathrm{Tr}\, uv$.

Preuve. - Par associativité de la trace on a en effet :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(L^2(x)u.v) &= \mathrm{Tr}((ux^2)v) \\ &= \mathrm{Tr}(u(x^2v)) \\ &= \mathrm{Tr}(u.L^2(x)v) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(L(x)^2u.v) &= \mathrm{Tr}((x(xu))v) \\ &= \mathrm{Tr}(L(x)u.L(x)v). \end{aligned}$$

LEMME 2. - *La restriction de* P *à* $\mathcal{I}nv(\mathcal{U})$ *est* injective.

Preuve. - Compte tenu du lemme 1, il suffit de montrer que la forme quadratique $u \longmapsto \mathrm{Tr}(P(x)u.u)$ est non dégénérée, ce qui résulte trivialement du lemme terminal du paragraphe 1.

LEMME 3. - *Pour tout couple* (x,y) *d'éléments de* $\mathcal{I}nv(\mathcal{U})$:

$$(P(x)y)^{-1} = P(x^{-1})y^{-1}.$$

Preuve. - Compte tenu du lemme 2 il suffit de prouver que

$$P(P(x)y)^{-1} = P(P(x^{-1})y^{-1}).$$

Or, d'après 1° et 2° :

$$P(P(x)y) = P(x) \circ P(y) \circ P(x)$$
$$P(P(x^{-1})y^{-1}) = P(x)^{-1} \circ P(y)^{-1} \circ P(x)^{-1};$$

d'où

$$P(P(x)y) \circ P(P(x^{-1})y^{-1}) = \mathrm{id}_{\mathcal{U}}.$$

3. L'ESPACE PSEUDO-RIEMANNIEN SYMETRIQUE $\mathcal{I}nv(\mathcal{U})$.

Rappelons (cf. LOOS I) qu'un espace symétrique (réel de classe C^∞) consiste en la donnée d'une variété M et d'une famille d'applications $S_x : M \to M$ telle que :

a) $(x,y) \longmapsto S_x.y$ soit de classe C^∞.
b) Tout $x \in M$ est un point fixe isolé de S_x.
c) Pour tout $x \in M$, $S_x^2 = \mathrm{id}_M$.
d) Pour tout couple (x,y) de points de M :

$$S_x \circ S_y \circ S_x = S(S_x y)$$

i.e. si on pose $S_x y = x * y$, pour tout triple (x,y,z) de points de M :

$$x * (y * z) = (x * y) * (x * z).$$

Dans ces conditions on peut construire une *connexion affine* ∇ unique, sans torsion et invariante par les symétries S_x. Cette connexion est complète et elle est déterminée par les S_x. Si Exp est l'application exponentielle associée à ∇, on a :

$$S_x(\mathrm{Exp}\ \xi) = \mathrm{Exp}(-\xi).$$

Si de plus il existe sur M une structure pseudo-riemannienne g invariante par les symétries S_x, on dit que (M,g,S_x) est un espace pseudo-riemannien symétrique :

THEOREME. - *Pour tout couple* (x,y) *d'éléments de* $\mathcal{I}nv(\mathcal{U})$ *on pose*

$$x * y = P(x)y^{-1}.$$

Alors $\mathcal{I}nv\,\mathcal{U}$ *est un espace* pseudo-riemannien symétrique *pour la structure :*

$$g_x(u,v) = Tr(P(x^{-1})u.v).$$

Preuve. - Du lemme 3 du paragraphe 2, on déduit :

$$x * (x * y) = P(x)(P(x)y^{-1})^{-1} = (P(x) \circ P(x^{-1})y = y$$

et

$$\begin{aligned}(x * y) * (x * z) &= P(P(x)y^{-1})\ (P(x)z^{-1})^{-1} \\ &= P(x)P(y)^{-1}P(x)P(x)^{-1}z \\ &= P(x)(P(y)z^{-1})^{-1} \\ &= x * (y * z).\end{aligned}$$

De plus $P(x)x^{-1} = x$ et, du fait que $P(x)$ est inversible, il résulte que x est le seul point fixe de S_x.

Reste à montrer que, pour tout couple (x,y) d'éléments de $\mathcal{I}nv(\mathcal{U})$ et tout couple (u,v) d'éléments de $\mathcal{U}$:

$$g_y(u,v) = g_{x*y}(DS_x(y)u,\ DS_x(y)v).$$

Or, d'après (LOOS I, p. 69), la dérivée de $x \longmapsto x^{-1}$ est $-P(x^{-1})$, d'où :

$$DS_x(y) = -\ P(x) \circ P(y)^{-1},$$

d'où, après un calcul élémentaire :

$$g_{x*y}(DS_x(y)u,\ DS_x(y)v) = Tr(P(x)^{-1}u)(P(x)P(y^{-1})v),$$

ce qui, en raison du fait que les $P(z)$, $z \in \mathcal{U}$ sont auto-adjoints par rapport à la forme trace, se réduit bien à

$$g_{x*y}(DS_x(y)u,\ DS_x(y)v) = Tr(P(y^{-1})u.v).$$

<u>COROLLAIRE 1.</u> - *Les* $\mathcal{I}nv_k(\mathcal{U})$, $0 \leqslant k \leqslant r$, *sont des espaces pseudo-riemanniens symétriques connexes.*

Preuve. - Il suffit de remarquer que les composantes connexes de $\mathcal{I}nv(\mathcal{U})$ sont stables pour $(x,y) \longmapsto P(x)y^{-1}$ du fait que $P(x)x^{-1} = x$ (Argument de connexité standard !).

<u>COROLLAIRE 2.</u> - *Pour tout couple* (x,y) *d'éléments de* $\mathcal{I}nv_k(\mathcal{U})$ *on a :*

$$\text{dét } P(x)y = (\text{dét } x)^2 \text{ dét } y.$$

Preuve. - Ceci se déduit par connexité du résultat fondamental du paragraphe 1 :

$$D_x^2(y \longmapsto - \text{Log}|\text{dét } y|) = g_x,$$

compte tenu de l'invariance de g_x par les symétries S_x.

Remarque. - Ce résultat reste valable dans $\mathcal{I}nv(\mathcal{U})$ grâce à la théorie des mutations.

4. <u>LES ESPACES RIEMANNIENS SYMETRIQUES $I_k(\mathcal{U})$</u>.

Rappelons que $I_k(\mathcal{U})$ désigne l'ensemble des éléments involutifs de $\mathcal{U}$ de degré k.

<u>THEOREME</u>. - $I_k(\mathcal{U})$ *est un* sous-espace symétrique *compact de* $\mathcal{I}nv_k(\mathcal{U})$, défini négatif, *de dimension* $s = k(r-k)q$ $(q = \dim \mathcal{U}_{ij})$.

Preuve. - $I_k(\mathcal{U})$ est un fermé de $\mathcal{U}$ et comme $x \in I_k(\mathcal{U})$ implique $\text{Tr}(x^2) = \text{Tr } e = r$, c'est un compact de $\mathcal{U}$. Pour s'assurer que $I_k(\mathcal{U})$ est un sous-espace symétrique de $\mathcal{I}nv_k(\mathcal{U})$ il suffit, d'après (LOOS I, p. 125), de montrer alors sa stabilité pour la loi $(x,y) \longmapsto x * y$.

Or, pour $x \in I(\mathcal{U})$ et $y \in I_k(\mathcal{U})$ on déduit à partir de la décomposition canonique

$$(y^{-1}) = y = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i c_i \quad , \quad \varepsilon_i = \pm 1$$

la décomposition canonique :

$$P(x)y = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i P(x) c_i$$

compte tenu du fait que P(x) est un automorphisme de l'algèbre de Jordan $\mathcal{U}$.

Pour avoir l'espace tangent à $I_k(\mathcal{U})$ en un point x, il suffit de se rappeler que

$$D_x(y \mapsto y^2) = 2L(x)$$

et que

$$\mathrm{Ker}\, L(x) = \{u \in \mathcal{U} \;;\; P(x)u = -u\},$$

d'où

$$T_x(I_k \quad) = \{u \in \mathcal{U} \;;\; P(x)u = -u\} \;;$$

et il est clair que, pour tout couple (u,v) de vecteurs de cet espace tangent, on a :

$$g_x(u,v) = \mathrm{Tr}(P(x)u.v) = -\mathrm{Tr}(u.v).$$

Comme $\{u \in \mathcal{U} \;;\; P(x)u = u\}$ est supplémentaire de $T_x(I_k\mathcal{U})$, on voit que $\dim I_k(\mathcal{U}) = \mathrm{ind}\ g$.

Soit $c = e+x$. Alors $T_x(I_k\mathcal{U}) = \mathcal{U}_{1/2}(c)$ et $c = \sum_{i=1}^{k} c_i$, où les c_i sont primitifs. Prolongeant en un s.t.o.i.p. $\{c_1,\ldots,c_r\}$, il vient, d'après (IV. 1), $\mathcal{U}_{1/2}(c) = \bigoplus_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ k+1 \leqslant j \leqslant r}} \mathcal{U}_{ij}$. Puisque $\dim \mathcal{U}_{ij} = q$ pour tout couple (i,j), il s'ensuit que $\dim \mathcal{U}_{1/2}(c) = k(r-k)q$. c.q.f.d.

◇◇◇◇

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI N., *Algèbre*, Chap. IX, Hermann (1959).

[2] BOOTHBY W.M., *Symmetric Spaces*, Marcel Dekker, Inc. (1972).

[3] BRAUN H. und KOECHER M., *Jordan-Algebren*, Springer-Verlag (1966).

[4] HELGASON S., *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press (1962).

[5] HELWIG K.H., *Jordan-Algebren und kompakte symmetrische Räume I*, Math. Z., 115, p. 315-349 (1970).

[6] HIRZEBRUCH U., *Über Jordan-Algebren und kompakte symmetrische Räume wom Rang 1*, Math. Z, 90, p. 339-354 (1965).

[7] JACOBSON F.D. and JACOBSON N., *Classification and representation of semi-simple Jordan algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 65, p. 141-169 (1949).

[8] JACOBSON N., *General representation theory of Jordan algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., 70, p. 509-530 (1951).

[9] JANSSEN G., *Reelle Jordan algebren mit endlicher Spur*, manuscripta math. 13, p. 237-273 (1974).

[10] JANSSEN G., *Die Struktur endlicher schwach abgeschlossener Jordan-algebren*, manuscripta math. 16, p. 277-332 (1975).

[11] JORDAN P., *Über eine Klasse nicht-associative ring*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, p. 569-575 (1932).

[12] JORDAN P., *Über Verallgemeinerungsmöglichkeiten des Formalismus der Quantenmechanik*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, p. 209-214 (1933).

[13] KOECHER M., *Positivitätsbereiche im* $\mathbb{R}^n$, Amer. J. Math. 79, p. 575-596 (1957).

[14] KOECHER M., *Analysis in reellen Jordan-Algebren*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. - Phys., KL. II a, p. 67-74 (1958).

[15] KOECHER M., *Die Geodätischen von Positivitätsbereichen*, Math. Annalen, Bd. 135, p. 192-202 (1958).

[16] KOECHER M., *Jordan algebras and their applications*, Lectures Notes, U. of Minnesota, Minneapolis (1962).

[17] KOECHER M., *Jordan algebras and differential geometry*, Actes, Congrès intern. Math., 1970, Tome 1, p. 279-283.

[18] LOOS O., *Symmetric Spaces I : General Theory, II : Compact Spaces and Classification*, Benjamin (1969).

[19] MAC DONALD I.G., *Jordan algebraswith three generators*, Proc. London Math. Soc. 10, p. 395-408, (1960).

[20] MAC GRIMMON K., *Quadratics methods in Non associative algebras*, Proc. Int. Congress of Math., 1974, Tome 1, p. 325-330.

[21] ROCKAFELLAR R.T., *Convex Analysis*, Princeton University Press (1969).

[22] SOURIAU J.M., *Géométrie et relativité*, Hermann, Paris (1964).

[23] TILLIER A., *Sur les idempotents primitifs d'une algèbre de Jordan formelle-réelle*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 280, p. A767 - A769 (1975).

SYMBOLES UTILISES FREQUEMMENT

INDEX

INDEX

(Suite)