

AUGUSTIN BANYAGA

Sur la structure de certains groupes de difféomorphismes

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1976, tome 13, fascicule 3
, p. 57-61

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1976__13_3_57_0

© Université de Lyon, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA STRUCTURE DE CERTAINS GROUPES DE DIFFÉOMORPHISMES

par Augustin BANYAGA

Soit M une variété différentiable de classe C^∞ paracompacte et connexe et soit $\text{Diff}_k^k(M)$ le groupe des difféomorphismes de M de classe C^k , à support dans un compact fixe K de M , muni de la C^k -topologie. Le groupe des difféomorphismes de classe C^k à support compact noté $\text{Diff}^k(M)$, est la limite directe des $\text{Diff}_k^k(M)$. Désignons par $\text{Diff}^k(M)_0$ la composante connexe de l'identité dans $\text{Diff}^k(M)$.

Pour toute forme différentielle α de classe C^∞ sur M , on note par $\text{Diff}_\alpha^\infty(M)$, resp. $\text{Diff}_\alpha^\infty(M)_0$, le sous-groupe de $\text{Diff}^\infty(M)$, resp. de $\text{Diff}^\infty(M)_0$ formé des difféomorphismes qui laissent invariante la forme α . Dans la suite, nous nous intéresserons au cas où α est une forme-volume, une forme symplectique ou une forme de contact.

Rappelons qu'une *forme-volume* sur une variété différentiable de dimension n est une n -forme partout non nulle, qu'une *forme symplectique* sur une variété différentiable de dimension paire $2n$ est une 2-forme fermée Ω telle que $\Omega^n = \Omega \wedge \dots \wedge \Omega$ soit une forme-volume et, enfin, qu'une 1-forme ω sur une variété différentiable de dimension impaire $2n+1$ s'appelle une *forme de contact* si $\omega \wedge (d\omega)^n$ est une forme-volume. Soit ω une forme de contact sur une variété différentiable M .

On sait qu'alors sur M , il existe un champ de vecteurs X sans singularité tel que $i(X)\omega = 1$ et $i(X)d\omega = 0$, où $i(X)$ désigne le produit intérieur par X . On dit que ω est une forme de contact *régulière* si l'orbite de X est le cercle S^1 .

Le but de cet exposé est d'énoncer quelques résultats sur la structure des groupes de difféomorphismes qui préservent une forme-volume, une forme symplectique, ou une forme de contact régulière.

Plus généralement, si g est une structure géométrique sur une variété différentiable M , on peut se poser le problème d'étudier la structure algébrique du groupe $\text{Diff}_g(M)$ des automorphismes de cette structure. Les résultats obtenus dans ce domaine sont rares. Nous signalons ici un résultat sur la structure du groupe des automorphismes de T^n -fibrés principaux (T^n désignant le tore $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ de dimension n).

Un groupe G est dit parfait s'il est égal à son sous-groupe des commutateurs $[G, G]$, c.à.d. si son abélianisé $G/[G, G]$, noté $H_1(G)$, est trivial. Un groupe G est dit simple s'il ne possède pas d'autres sous-groupes normaux que les sous-groupes triviaux.

Le résultat fondamental suivant est dû à Mather [1] et à Thurston [2] pour le cas C^∞ .

THEOREME. 1. - *Soit M une variété différentiable paracompacte et connexe de dimension n . Pour $0 \leq k \leq \infty$, $k \neq n + 1$, le groupe $\text{Diff}^k(M)_0$ est un groupe simple.*

En adaptant judicieusement les techniques de démonstration du théorème 1 (cas C^∞), Thurston [3] a obtenu le résultat suivant :

THEOREME 2. - Si θ est une forme-volume sur une variété différentiable close et connexe M de dimension n , alors si $\widetilde{\text{Diff}}_\theta^\infty(M)_0$ est le revêtement universel du groupe $\text{Diff}_\theta^\infty(M)_0$, on a :

- (i) $H_1(\widetilde{\text{Diff}}_\theta^\infty(M)_0) \cong H^{n-1}(M, \mathbb{R})$ et $H_1(\text{Diff}_\theta^\infty(M)_0) \cong$ quotient de $H^{n-1}(M, \mathbb{R})$.
- (ii) $[\widetilde{\text{Diff}}_\theta^\infty(M)_0, \widetilde{\text{Diff}}_\theta^\infty(M)_0]$ est parfait et $[\text{Diff}_\theta^\infty(M)_0, \text{Diff}_\theta^\infty(M)_0]$ est simple.

En raffinant encore les techniques de démonstration du théorème 2 nous avons obtenu le résultat suivant [4] :

THEOREME 3. - Si Ω est une forme symplectique sur une variété close et connexe M , alors :

- (i) $H_1(\widetilde{\text{Diff}}_\Omega^\infty(M)_0) \cong H^1(M, \mathbb{R})$ et $H_1(\text{Diff}_\Omega^\infty(M)_0) \cong$ quotient de $H^1(M, \mathbb{R})$;
- (ii) $[\widetilde{\text{Diff}}_\Omega^\infty(M)_0, \widetilde{\text{Diff}}_\Omega^\infty(M)_0]$ est parfait et $[\text{Diff}_\Omega^\infty(M)_0, \text{Diff}_\Omega^\infty(M)_0]$ est simple.

Au cours de la démonstration du théorème 3, on obtient le résultat important suivant :

THEOREME 4. - Soit $\Omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \dots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}$ la forme symplectique canonique de $\mathbb{R}^{2n}$. On a :

- (i) $H_1(\widetilde{\text{Diff}}_\Omega^\infty(\mathbb{R}^{2n})_0) \cong \mathbb{R}$ et $H_1(\text{Diff}_\Omega^\infty(\mathbb{R}^{2n})) =$ quotient de $\mathbb{R}$
- (ii) $[\widetilde{\text{Diff}}_\Omega^\infty(\mathbb{R}^{2n})_0, \widetilde{\text{Diff}}_\Omega^\infty(\mathbb{R}^{2n})_0]$ est parfait et $[\text{Diff}_\Omega^\infty(\mathbb{R}^{2n})_0, \text{Diff}_\Omega^\infty(\mathbb{R}^{2n})_0]$ est simple.

Le résultat suivant se déduit du théorème 3 et du fait qu'une variété munie d'une forme de contact régulière est l'espace total d'un fibré S^1 -principal dont la base porte une forme symplectique à périodes entières.

THEOREME 5. - Si ω est une forme de contact régulière sur une variété différentiable close et connexe M , on a :

- (i) $H_1(\text{Diff}_\omega^\infty(M)_0) \cong \text{quotient de } S^1$
- (ii) $\widetilde{\text{Diff}}_\omega^\infty(M)_0 \cong [\widetilde{\text{Diff}}_\omega^\infty(M)_0, \widetilde{\text{Diff}}_\omega^\infty(M)_0] \times \mathbb{R}$
- (iii) $[\widetilde{\text{Diff}}_\omega^\infty(M)_0, \widetilde{\text{Diff}}_\omega^\infty(M)_0]$ et $[\text{Diff}_\omega^\infty(M)_0, \text{Diff}_\omega^\infty(M)_0]$ sont parfaits.

Soit G un groupe de Lie et soit $\pi : M \rightarrow B$ un fibré G -principal. Les difféomorphismes équivariants de M (i.e. les difféomorphismes qui commutent avec l'action de G sur M) se projettent sur les difféomorphismes de la base. Soit $\text{Diff}_G^k(M)_0$ la composante connexe de l'identité dans le groupe des difféomorphismes équivariants de classe C^k , on a un homomorphisme surjectif $p : \text{Diff}_G^k(M)_0 \rightarrow \text{Diff}^k(B)_0$. En étudiant le noyau de cette projection et en utilisant le théorème I, nous obtenons le résultat suivant [5] :

THEOREME 6. - Soit $M \rightarrow B$ un T^n fibré-principal, où M et B sont des variétés différentiables closes et connexes. Supposons que $m =$ (dimension de M) soit supérieure ou égale à $2n$. Alors, pour tout $k \neq m - n + 1$, $1 \leq k \leq \infty$, on a :

- (i) $H_1(\text{Diff}_{T^n}^k(M)_0)$ est isomorphe à un quotient d'un sous-groupe de $H^1(B, \mathbb{Z})$.
- (ii) si le fibré $M \rightarrow B$ est trivial, ou si $\pi_1(\text{Diff}^k(B)_0) = 0$, alors le groupe $\text{Diff}_{T^n}^k(M)_0$ est un groupe parfait.

BIBLIOGRAPHIE. -

- [1] MATHER J.M., Commutators of diffeomorphisms, I et II, *Comment. Math. Helv.* 49 (1974) p. 512-528, et 50 (1975), p. 33-40.
- [2] THURSTON W., Foliations and group of diffeomorphisms, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 80 (1974), p. 304-307.
- [3] THURSTON W., On the structure of volume preserving diffeomorphisms, *Preprint*.
- [4] BANYAGA A., Thèse, *Université de Genève*, 1976.
- [5] BANYAGA A., On the structure of the group of equivariant diffeomorphisms, *Preprint*.

A. BANYAGA
Université de Genève
Section de Mathématiques
2-4 rue du Lièvre
CH 1211 GENEVE 24
SUISSE