

RAYMOND HEITZ

Sur les groupes $\mathbb{K}_{Top}(S_n)$

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1976, tome 13, fascicule 2
, p. 103-132

[<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1976__13_2_103_0>](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1976__13_2_103_0)

© Université de Lyon, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES GROUPES $K_{\text{Top}}(\mathbb{S}_n)$

par M. Raymond HEITZ

Le point de départ du présent travail est l'article fondamental de MILNOR [15], paru en 1964, où il introduit la notion de microfibré et en développe la théorie, ce qui lui permet d'avancer l'étude des structures différentielles sur les variétés topologiques. Il démontre, entre autres, le théorème suivant ([15], Th. 9.5) : " Il existe une variété topologique V telle qu'aucun produit cartésien $V \times V$ ne puisse être muni d'une structure différentielle C^∞ ." Il démontre aussi que le fibré tangent à une variété C^∞ n'est pas, en général, un invariant topologique.

Pour étudier le problème de la classification des structures différentielles possibles sur une variété topologique V , il est amené à définir le groupe abélien $K_{\text{Top}}(V)$ qui est l'analogue des groupes $K_0(V)$, $K_G(V)$, $K_{\text{PL}}(V)$ etc. (C'est d'ailleurs à partir de l'étude de $K_{\text{Top}}(\mathbb{S}_8)$ qu'il démontre le théorème ci-dessus). Cependant, on n'y trouve pas de calcul explicite pour ces groupes ni, semble-t-il, ailleurs dans la littérature.

J'ai beaucoup profité de l'aide et des conseils de M. A. ROUX, ainsi que de MM. J. CERF, C. MORLET et L.C. SIEBENMANN ; qu'ils veuillent bien trouver ici l'expression de toute ma gratitude . Je remercie également de tout coeur L. BRACONNIER ainsi que M. COMBET.

Le but de ce travail est de calculer les groupes $K_{\text{Top}}(S_n)$ pour quelques valeurs de $n \in \mathbb{N}$: le résultat peut être trouvé, pour $n \leq 7$, dans KIRBY-SIEBENMANN (cf. [16], [11]). Pour n grand, le problème semble difficile ; il est, en tout cas, ouvert.

On a essayé ici un calcul, dans le cas $n \leq 3$, en utilisant des résultats de CERF et une démonstration (seule originalité, peut-être, qu'on peut trouver ici), à l'aide du théorème d'immersion de LEES, d'une propriété de stabilité pour les groupes $\text{Top}(n)$:

$$\pi_k(\text{Top}(n)) \approx \pi_k(\text{Top}(n+1)) \quad \text{si } k < n-1 \quad \text{et } k = 1 \text{ ou } 2$$

(5.10 et A.1).

(En admettant la validité d'une conjecture de KIRBY, entraînant $\pi_*(\text{Top}^+(4) - \bullet)$).

1 - LES MICROFIBRES.

Pour simplifier, on suppose que les espaces topologiques qui interviennent sont des CW-complexes (ou complexes simpliciaux) de dimension finie. On considère des *fibrés* (localement triviaux) au sens de STEENROD [18] (ou fibrés topologiques) :

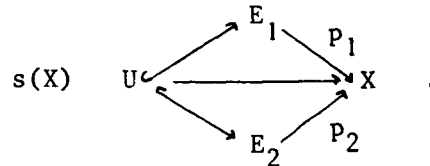
$$\xi : \mathbb{R}^n \xrightarrow{i} E \xrightleftharpoons[s]{p} X \quad (\text{les applications sont continues}),$$

où X est la *base*, E l'*espace total*, i une injection, p la projection, s la section nulle, n la dimension. Le groupe structural est le groupe (topologique) des homéomorphismes de $\mathbb{R}^n$ laissant l'origine invariante, noté $\text{Top}_0(n)$.

On suppose maintenant que les fibrés qui interviennent ont une même dimension donnée n .

On dit que des fibrés ξ_1 et ξ_2 , ayant même base X , sont *micro-identiques*, si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) Il existe un ouvert U commun à E_1 et E_2 et contenant $s_1(X)$ et $s_2(X)$;
- (ii) Il y a coïncidence des sections nulles : $s_1(X) = s_2(X)$;
- (iii) Les projections restreintes à U coïncident, soit $p_1|_U = p_2|_U$, c'est-à-dire qu'on a le diagramme commutatif suivant :



On dit que des fibrés ξ_1 et ξ_2 sont *micro-concordants* si leurs bases X_1 et X_2 sont des sous-espaces d'un espace V tels que leurs restrictions à $X = X_1 \cap X_2$ soient des fibrés micro-identiques de base X .

1.1. DEFINITION. - Soit $X = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$ un recouvrement ouvert de X . Un *prémicrofibré* au-dessus de X est un ensemble $\{\xi_{\alpha}\}$ de fibrés (ξ_{α} ayant pour base V_{α}), deux à deux micro-concordants.

On dit que deux prémicrofibrés $\{\xi_{\alpha}\}$ et $\{\xi_{\beta}\}$ au-dessus de X sont strictement équivalents si leur réunion $\{\xi_{\alpha}\} \cup \{\xi_{\beta}\}$ est encore un prémicrofibré. (Il s'agit bien d'une relation d'équivalence).

1.2. DEFINITION. - On appelle microfibré une classe d'équivalence stricte de prémicrofibrés. (d'après KUIPER - LASHOF [13] ; MILNOR donne dans [15] une définition différente, mais équivalente).

Donc à chaque prémicrofibré correspond un microfibré unique, à savoir la classe qui le contient. Notamment, chaque fibré ξ au-dessus de X détermine un microfibré unique $\mu(\xi)$.

La réciproque est vraie :

1.3. THEOREME (KISTER-MAZUR). - Tout microfibré de base X contient un fibré, qui est unique à équivalence près.

(La démonstration est donnée au § 2).

Si π est un microfibré de base X , on note $\bar{\pi}$ l'unique fibré de base X qu'il contient. On a donc

$$\mu(\bar{\pi}) = \pi, \quad \overline{\mu(\xi)} = \xi.$$

1.4. CONSEQUENCES. - Les définitions et constructions données classiquement à propos des fibrés (voir STEENROD [18]) peuvent être transposées au cas des microfibrés.

a) Un microfibré est dit *trivial* (et noté e^n s'il est de dimension n) si le fibré qu'il contient est isomorphe au fibré trivial

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{i} \mathbb{R}^n \times X \xrightarrow[p_2]{(0,i)} X.$$

b) On dit que deux microfibrés π et π' au-dessus de X sont *isomorphes* si les fibrés associés $\bar{\pi}$ et $\bar{\pi}'$ sont isomorphes. On écrit : $\pi \sim \pi'$.

c) Soit $f : Y \rightarrow X$ une application continue. Si $\mathfrak{x}$ est un microfibré au-dessus de X , on définit le microfibré *induit* $f^*(\mathfrak{x})$ au-dessus de Y par l'égalité : $f^*(\mathfrak{x}) = \mu[f^*(\bar{\mathfrak{x}})]$. Si $Y \xrightarrow{i} X$ est l'inclusion, $i^*(\mathfrak{x})$ est noté $\mathfrak{x}/Y$: c'est la restriction de $\mathfrak{x}$ au-dessus de Y . Si $f : Y \rightarrow X$ et $g : Y \rightarrow X$ sont homotopes (Y para compact), alors les microfibrés induits $f^*(\mathfrak{x})$ et $g^*(\mathfrak{x})$ sont isomorphes (cf. [15]).

d) On définit la *somme de WITHNEY* de deux microfibrés $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{x}'$ (de même base X) par l'égalité : $\mathfrak{x} \oplus \mathfrak{x}' = \mu[\bar{\mathfrak{x}} \oplus \bar{\mathfrak{x}}']$. On a donc la même propriété que pour les fibrés : il existe un microfibré η au-dessus de X tel que $\mathfrak{x} \oplus \eta$ soit trivial ([18]).

e) On dit que les microfibrés $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{x}'$ (de même base X) sont *stablement isomorphes* (ou *s-isomorphes*) s'il existe des entiers q, r tels que $\mathfrak{x} \oplus e^q$ soit isomorphe à $\mathfrak{x}' \oplus e^r$. C'est une relation d'équivalence. La classe stable (ou *s-classe*) de $\mathfrak{x}$ notée $(\mathfrak{x})$. On écrit : $\mathfrak{x} \sim_s \mathfrak{x}'$ si $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{x}'$ sont *s-isomorphes*.

f) Puisque la relation d'équivalence stable est compatible avec l'addition (somme de WITHNEY), les *s-classes* de microfibrés au-dessus de X forment un groupe abélien noté $\mathbb{K}_{\text{Top}}(X)$ ([15], § 4). On a, en fait, un foncteur contravariant $\mathbb{K}_{\text{Top}}$, défini sur la catégorie des *CW-complexes* de dimension finie (mod. homotopie) et à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens.

1.5. EXEMPLE 1 (Microfibré tangent).

Soit X une variété topologique (de dimension n) et $X = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$ un atlas (par exemple l'atlas maximal).

Sur chaque V_{α} (qui est un ouvert homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ par $h_{\alpha} : V_{\alpha} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$), on définit le schéma $\xi_{\alpha} : \mathbb{R}^n \rightarrow V_{\alpha} \times V_{\alpha} \xrightleftharpoons[\delta]{p_1} V_{\alpha}$

$(\delta(x) = (x, x))$, qui constitue un fibré trivial, car le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & V_\alpha \times V_\alpha & & \\
 & \nearrow \delta & \downarrow \text{id}_{V_\alpha} \times (h_\alpha p_1 - h_\alpha p_2) & \searrow p_1 & \\
 V_\alpha & & V_\alpha \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{p_1} & V_\alpha \\
 \downarrow \text{id}_{V_\alpha} \times 0 & & & & \\
 & & & &
 \end{array}$$

Deux tels fibrés ξ_α et ξ_β sont micro-concordants ; on a donc défini un prémicrofibré au-dessus de X , qui détermine un microfibré sur X , appelé microfibré *tangent* et noté $\tau(X)$.

Si $\tau(X)$ est trivial, on dit que X est une variété topologiquement parallélisable.

1.6. EXEMPLE 2 (Microfibré normal).

Soient $X \xrightarrow{i} Y$ deux variétés séparables.

S'il existe un microfibré ν_X , de base X , tel que l'on ait $\tau(Y) / X = \tau(X) \oplus \nu_X$, on dit que ν_X est un microfibré *normal* de X dans Y . Deux tels microfibrés sont s -isomorphes, la s -classe de ν_X est bien déterminée : $(\nu_X) = i^* ((\tau(Y))) - (\tau(X))$. Il n'existe pas toujours de microfibré normal ; cependant on peut montrer (MILNOR [15], th. (5.8)) qu'on peut trouver un entier q tel qu'il existe un microfibré normal de $X \times \{0\}$ dans $Y \times \mathbb{R}^q$.

Pour que ce microfibré soit trivial il faut et il suffit que $(\tau(X)) = i^* ((\tau(Y)))$ (voir [15], Cor. 5.11). Cela équivaut à dire qu'il existe un voisinage U de X tel que la paire (U, X) soit homéomorphe à $X \times \mathbb{R}^n, 0$ ($n = \dim X$) ([15], lemme (5.1)).

2 - DEMONSTRATION DU THEOREME DE KISTER-MAZUR.

Voir p. ex. [12] et [13].

2.1 DEFINITION. - Soit x un point de $\mathbb{R}^n$. On pose $r(x)$ = distance de x à l'origine 0 , $\omega(x)$ = "argument" de $x \neq 0$ (= demi-droite $0x$). Le disque $B(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid r(x) \leq a\}$ a pour intérieur $\overset{\circ}{B}(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid r(x) < a\}$ pour extérieur $B'(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid r(x) > a\}$, et pour extérieur strict $\overset{\circ}{B}'(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid r(x) > a\}$.

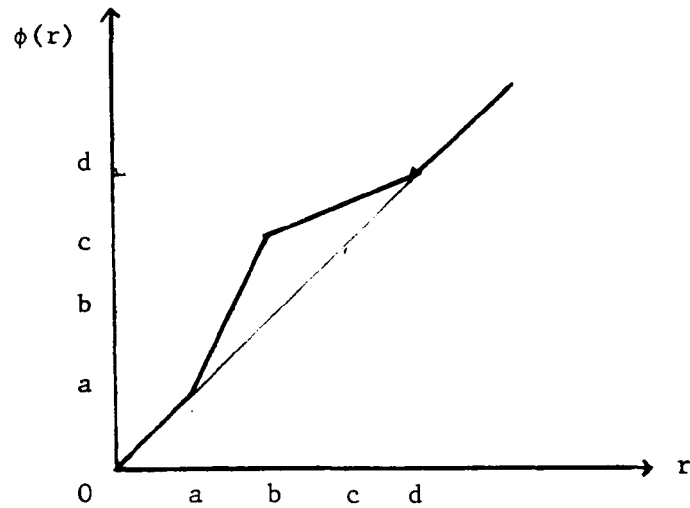
La démonstration du théorème se fait en utilisant un certain nombre de lemmes.

2.2 LEMME. - Si $0 < a < b < c < d$, il existe un homéomorphisme concentrique $\rho(a, b, c, d)$ de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même qui envoie $B(b)$ sur $B(c)$ et laisse $B(a)$ et $B'(d)$ invariants point par point.

DEMONSTRATION. - En coordonnées polaires, on pose

$$\rho(a, b, c, d)(r, \omega) = (\phi(r), \omega),$$

où la fonction à valeurs réelles ϕ est représentée ci-après :

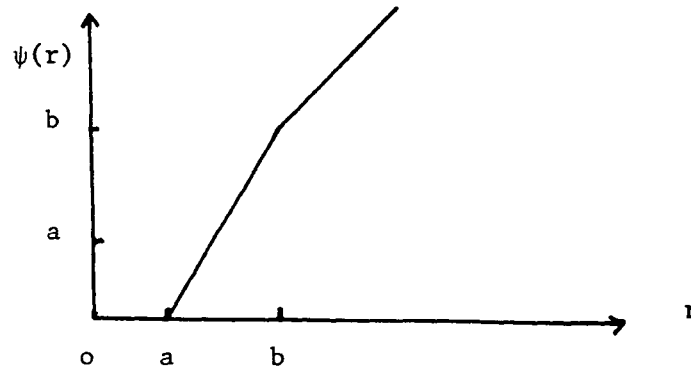


Elle est linéaire par intervalles.

Tous les hyperplans de $\mathbb{R}^n$ sont globalement invariants par ϕ .

2.3 LEMME. - Si $0 < a < b$, il existe une application continue $\lambda(a,b)$, dite "pincée", de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même, qui envoie $B(a)$ sur $B(0) = 0$; sa restriction à $B'(a)$ est un homéomorphisme sur $B'(0)$ et $B'(b)$ est invariant point par point.

DEMONSTRATION. - En coordonnées polaires, on pose : $\lambda(a,b)(r,\omega) = (\psi(r), \omega)$, où la fonction à valeurs réelles ψ est représentée ci-après :



Elle est linéaire par intervalles.

2.4 REMARQUE. - Si K est un complexe simplicial (un simplexe, p. ex.), on a l'homéomorphisme

$$\text{id}_K \times \rho(a,b,c,d) : K \times \mathbb{R}^n \rightarrow K \times \mathbb{R}^n ,$$

et la pincée $\text{id}_K \times \lambda(a,b) : K \times \mathbb{R}^n \rightarrow K \times \mathbb{R}^n$;

elles sont encore notées $\rho(a,b,c,d)$ et $\lambda(a,b)$ respectivement.

2.5 DEFINITION. - Si $f : B(b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un plongement, $\lambda = \lambda(a,b)$ étant la pincée définie ci-dessus (on suppose qu'on a toujours $0 < a < b$) , alors la transformée $f(\lambda)$ de la pincée λ est l'application continue $f(\lambda) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ donnée par

$$f(\lambda)(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \notin f(B(b)), \\ 0, & \text{si } x \in f(B(a)), \\ (f\lambda f^{-1})(x) & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

2.6 LEMME. - Pour chaque plongement $f : B(a) \rightarrow \mathbb{R}^n$ (on suppose $a > 1$),
tel que $f(o) = o$, il existe un homéomorphisme $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,
tel que $g(o) = o$, et que $f|_{B(1)} = g|_{B(1)}$.

DEMONSTRATION. - On pose $f = f_1$ et on définit par récurrence des
plongements $f_k : B(a) \rightarrow \mathbb{R}^n$ (pour k entier ≥ 1) par :

$$f_{k+1}(x) = \begin{cases} f_k(x), & \text{si } x \in B_k = B(a - \frac{a-1}{k}), \\ [f_k(\lambda_k)]^{-1} \rho_k[f_k(\lambda_k)] f_k(x), & \text{si } x \notin B_k, \end{cases}$$

avec $\lambda_k = \lambda(a - \frac{a-1}{k}, a - \frac{a-1}{k+1})$ (pincée),

$\rho_k = \rho(\epsilon, 2\epsilon, a+k-1, a+k)$ et $\epsilon > 0$

si petit que $B(2\epsilon) \subset f(B(1))$.

On a $f_k/B(1) = f/B(1)$.

A la limite, on obtient un homéomorphisme $f_\infty : B(a) \xrightarrow{o} \mathbb{R}^n$, avec
 $f_\infty(o) = o$ et $f_\infty/B(1) = f/B(1)$. Si $x = (r, \omega)$ ($x \neq o$), en posant
 $\mathcal{J}(x) = (\frac{1}{r}, \omega)$ et $\mathcal{J}(o) = o$, on définit un homéomorphisme

$g = f_\infty[\mathcal{J} \lambda(\frac{1}{a}, 1)^{-1} \mathcal{J}] : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g(o) = o$, tel que $g/B(1) = f/B(1)$,
qui est l'homéomorphisme cherché.

2.7 DEMONSTRATION DU THEOREME (1.3). -

a) Existence :

Soit π un microfibré de dimension n au-dessus de X , représenté par un prémicrofibré $\{\xi_\alpha, p_\alpha, V_\alpha\}$ (ξ_α désigne un fibré au-dessus de l'ouvert V_α et $X = \bigcup_\alpha V_\alpha$) est un complexe simplicial de dimension finie).

On choisit une triangulation T de X telle que chaque simplexe σ soit recouvert par au moins un V_α ; on pose $\xi_\sigma = \xi_\alpha|_\sigma$ (= restriction de ξ_α à $\sigma \subset V_\alpha$). Les fibrés ξ_σ pour $\sigma \in T$, sont deux à deux micro-concordants. Le microfibré est entièrement déterminé par un ensemble de fibrés (triviaux) micro-concordants, définis au-dessus de chaque simplexe $\sigma \in T$ qui n'appartient pas au bord d'un simplexe de dimension supérieure.

Soit Δ un simplexe qui est dans l'intersection de deux simplexes σ_1 et σ_2 ($\sigma_1 \neq \sigma_2$). Alors les fibrés $\xi_{\sigma_1}|_\Delta$ et $\xi_{\sigma_2}|_\Delta$ sont micro-identiques. Par hypothèse de récurrence, on suppose que $\xi_{\sigma_1}|_\Delta$ et $\xi_{\sigma_2}|_\Delta$ sont identiques pour tous les triplets $(\Delta, \sigma_1, \sigma_2)$ avec $\Delta \subset \sigma_1 \cap \sigma_2$ et $\dim(\Delta) < k$ ($k \geq 1$). C'est vrai pour $k = 1$. Donc, au-dessus du squelette de dimension $(k-1)$ de T , on a bien un fibré.

Soit maintenant Δ un k -simplexe avec $\Delta \subset \sigma_1 \cap \sigma_2$. Les fibrés ξ_{σ_1} et ξ_{σ_2} sont triviaux, donc aussi leurs restrictions à Δ . On peut donc les représenter, à l'aide des cartes k_1 et k_2 , par le fibré trivial de dim. n avec la section - nulle canonique :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} E_1 \xrightarrow{K_1} \Delta \times \mathbb{R}^n \\ \downarrow p_1 \qquad \downarrow \\ \Delta \qquad \qquad \Delta \end{array} & \text{et} & \begin{array}{c} E_2 \xrightarrow{K_2} \Delta \times \mathbb{R}^n \\ \downarrow p_2 \qquad \downarrow \\ \Delta \qquad \qquad \Delta \end{array}
 \end{array}$$

On a, par hypothèse de récurrence, l'identité des restrictions des deux fibrés à $\partial\Delta$ (= bord de Δ). D'où un homéomorphisme de $\partial\Delta \times \mathbb{R}^n$ sur lui-même :
 $f' = k_2 k_1^{-1} | \partial\Delta \times \mathbb{R}^n$, qui induit l'identité sur le premier facteur.

Les fibrés au-dessus de Δ sont micro-identiques. Par conséquent il existe $a > 0$ tel que cette micro-identité soit représentée par un plongement :

$f'' = k_2 k_1^{-1} | \Delta \times B(a) : \Delta \times B(a) \rightarrow \Delta \times \mathbb{R}^n$, qui induit l'identité sur le premier facteur et coïncide avec f' sur l'intersection de leurs domaines.

On peut supposer $a > 1$, en remplaçant k_1 par $\rho(\frac{a}{2}, a, 2, 3) k_1$ (remarque 2.3) éventuellement.

En combinant f' et f'' , on obtient un plongement
 $f : (\partial\Delta \times \mathbb{R}^n) \cup (\Delta \times B(a)) \rightarrow \Delta \times \mathbb{R}^n$ tel que $f(x, 0) = (x, 0)$.

Le lemme (2.5) fournit un homéomorphisme (induisant l'identité sur le premier facteur).

$g : \Delta \times \mathbb{R}^n \rightarrow \Delta \times \mathbb{R}^n$ tel que $g|_{\Delta \times B(1)} = f|_{\Delta \times B(1)}$; on définit une application continue $h' = g^{-1}f$, qui induit l'identité sur le premier facteur et se restreint à l'identité sur $\Delta \times B(1)$.

On représente Δ par un simplexe dans $\mathbb{R}^k$ avec centre $0 \in \mathbb{R}^k$ et $B'(1)$ par un disque épointé de centre $0 \in \mathbb{R}^n$, ce qui permet de prolonger l'application h' à $\Delta \times \mathbb{R}^n$, en posant, si $(x, y) \in \Delta \times B'(1)$,
 $h(x, y) = t^{-1} H(tx, ty) (t^{-1} \in]0, 1])$ étant tel que $(tx, ty) \in \partial(\Delta \times B'(1)) \subset \mathbb{R}^{k+n}$.

Donc $h : \Delta \times \mathbb{R}^n \rightarrow \Delta \times \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme qui induit l'identité sur le premier facteur.

Finale^{ment}, les fibrés triviaux au-dessus de σ_1 et σ_2 peuvent être identifiés grâce à l'homéomorphisme $\hat{f} = g h$, qui prolonge f . On a donc défini le fibré au-dessus de Δ , et par récurrence au-dessus de X (supposé de dimension finie).

b) Unicité.

En utilisant la même méthode, on montre que si deux fibrés de dimension n au-dessus de X sont micro-identiques, on obtient un isomorphisme de leurs restrictions au k -squelette à partir de celles au-dessus du $(k-1)$ -squelette, d'où, par récurrence, l'unicité à équivalence près.

3 . MICROFIBRES ET FIBRES VECTORIELS.

3.1. DEFINITION. - Soit ξ un fibré vectoriel de dimension n au-dessus de X , c'est-à-dire un fibré ayant pour fibre $\mathbb{R}^n$ et pour groupe structural $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ (ou le sous-groupe compact $\mathbf{O}(n, \mathbb{R}) = \mathbf{O}_n$). Comme $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ est un sous-groupe topologique de $\text{Top}_0(n)$ (voir ci-dessous 3.3), ξ détermine un fibré topologique, donc aussi un microfibré de dimension n au-dessus de X , appelé microfibré sous-jacent à ξ et noté $|\xi|$.

Si ξ et ξ' sont s -isomorphes, $|\xi|$ et $|\xi'|$ le sont aussi.

3.2. EXEMPLE. - MILNOR démontre le théorème suivant ([15], th. 2.2) :

Soit V une variété différentielle (C^∞) paracompacte, avec fibré vectoriel tangent t_V . Alors le microfibré sous-jacent $|t_V|$ est isomorphe au microfibré tangent $\tau(V)$.

3.3 DEFINITIONS. - On désigne par $Top(n)$ (resp. $Top_0(n)$) l'ensemble des homéomorphismes de $\mathbb{R}^n$ (resp. le sous-ensemble des homéomorphismes laissant l'origine invariante).

Ce sont des groupes topologiques (pour la topologie compacte-ouverte).

3.4 PROPOSITION. - Les groupes $Top(n)$ et $Top_0(n)$ ont les mêmes groupes d'homotopie (n entier donné quelconque).

DEMONSTRATION. - Le schéma $Top_0(n) \hookrightarrow Top(n) \xleftarrow{p} \mathbb{R}^n$ ($p(f) = f(o)$) constitue une fibration.

3.5. DEFINITIONS. -

Par une des constructions classiques (DOLD - LASHOF [7] , STEENROD [19] etc.), on peut associer au groupe topologique $Top_0(n)$ son espace classifiant $B Top_0(n)$ (c'est-à-dire la base d'un fibré universel $E_{Top_0}(n) \rightarrow B Top_0(n)$, de fibre $Top_0(n)$; $E_{Top_0}(n)$ étant contractile), défini au type d'homotopie près ; on peut donc aussi le noter $B Top(n)$. On sait que les classes d'isomorphismes de fibrés topologiques de dim. n au-dessus de X (CW-complexe de dimension finie) sont (fonctoriellement) en correspondance biunivoque avec les classes d'homotopie d'applications continues de X dans $B Top(n)$, c'est-à-dire $[X, B Top(n)]$.

On suppose maintenant X compact. En posant $Top = \varinjlim Top(n)$ et $B Top = \varinjlim B Top(n)$, on peut définir $[X, B Top]$. Puisque X est compact, un élément de $[X, B Top]$ correspond à un $* \in [X, B Top(n)]$; s'il correspond aussi à un $*' \in [X, B Top(m)]$ on a $* \sim_S *'$.

Réciproquement, si deux fibrés topologiques de base X sont s -isomorphes, ils déterminent le même élément de $[X, B Top]$. Par conséquent, on a $k_{Top}(X) = [X, B Top]$ (voir plus haut 1.4).

Pour les fibrés vectoriels, on définit de façon analogue $B \mathbb{O}_n$, $\mathbb{O} = \varinjlim \mathbb{O}_n$ et $B \mathbb{O} = \varinjlim B \mathbb{O}_n$, et si X est compact, on a $k_0(X) = [X, B \mathbb{O}]$. ($k_0(X)$ est noté $\tilde{k}_R(X)$ par ADAMS etc.).

k_0 et k_{Top} sont des foncteurs contravariants, définis sur la catégorie des CW -complexes de dimension finie (mod. homotopie), à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens.

3.6 RAPPEL.

DEFINITION. - Si E est un espace topologique, on note Ω_E son espace de lacets.

Un espace E est appelé *espace infini de lacets* ("infinite loop space") s'il existe une suite d'espaces E_n et des équivalences d'homotopie : $E_n \simeq \Omega E_{n+1}$, avec $E = E_0$ ($n \geq 0$).

Les espaces $\mathbb{O}, Top, B\mathbb{O}, B Top, Top/\mathbb{O} = \varinjlim Top(n)/\mathbb{O}_n$ sont tous des espaces infinis de lacets (BOARDMAN - VOGT [4]).

3.7 DEFINITION. - L'injection canonique $\mathbb{O} \hookrightarrow Top$ (induite par les injections canoniques $\mathbb{O}_n \hookrightarrow Top(n)$) induit une application continue $f : B\mathbb{O} \rightarrow B Top$. Comme $B\mathbb{O}$ est défini au type d'homotopie près, on peut considérer qu'il s'agit d'une fibration $B\mathbb{O} \xrightarrow{\tilde{f}} B Top$ (voir p. ex. [8], 1.10). Or, d'après la construction faite dans [19], on peut prendre pour $B Top(n)$ le groupe quotient $E_{Top(n)}/Top(n)$, et pour $B\mathbb{O}_n$ le groupe quotient $E_{Top}/\mathbb{O}_n$. Par conséquent, la fibre de l'application $B\mathbb{O}_n \rightarrow B Top(n)$ considérée comme fibration, a le type d'homotopie de l'espace homogène $Top(n)/\mathbb{O}_n$. Et la fibre de $\tilde{f}$ a le type d'homotopie de $Top/\mathbb{O} = \varinjlim Top(n)/\mathbb{O}_n$. On la désigne aussi par $Top/\mathbb{O}$.

Par conséquent, on a une suite exacte d'homotopie (avec les notations de [18], 11.3).

$$\dots \rightarrow \pi_n(\text{Top}/0) \xrightarrow{i^*} \pi_n(B0) \xrightarrow{\tilde{f}^*} \pi_n(B\text{Top}) \xrightarrow{\Delta} \pi_{n-1}(\text{Top}/0) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_0(B\text{Top}) \rightarrow 0.$$

3.8 PROPOSITION. - On a un diagramme commutatif induit par les applications classifiantes :

$$\begin{array}{ccccc} \pi_k(0) & \longrightarrow & \pi_k(\text{Top}) & \longrightarrow & \pi_k(\text{Top}/0) \\ & \searrow \mathfrak{J}_k & \nearrow & & \\ & \pi_k & & & \end{array} \quad (k > 0)$$

($\pi_k = \lim_n \pi_{k+n}(S_n)$, $\mathfrak{J}_k$ est le classique $\mathfrak{J}$ -homomorphisme).

DEMONSTRATION. - Soit $G(n)$ l'espace des équivalences d'homotopie de la sphère S_{n-1} : on a $\pi_k(G(n)) \cong \pi_{k+n-1}(S_{n-1})$ ($0 < k < n-2$) (voir par ex.

ADAMS [2]). Comme $\mathbb{R}^n - \{0\}$ a le type d'homotopie de S_{n-1} , on peut considérer qu'on a : $0_n \hookrightarrow \text{Top}_0(n) \hookrightarrow G(n)$, ce qui induit la décomposition

$$\begin{array}{ccc} \pi_k(0_n) & \rightarrow & \pi_k(G(n)) \cong \pi_{k+n-1}(S_{n-1}) \quad (0 < k < n-2) ; \\ & \searrow & \nearrow \\ & \pi_k(\text{Top}_0(n)) & \end{array}$$

$$\text{d'où par stabilité, } \pi_k(0) \xrightarrow{\mathfrak{J}_k} \pi_k \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} \pi_k \\ \pi_k(\text{Top}) \end{array}$$

car $\pi_{k+n-1}(S_{n-1})$ est isomorphe à π_k si $k < n-2$.

4 . LE THEOREME DE MILNOR.

On se pose maintenant la question : si V est une variété topologique (de dim. m), peut-on munir le produit $V \times \mathbb{R}^q$ d'une structure différentielle (c'est-à-dire différentielle C^∞) ?

4.1. THEOREME . ([15], Th. 5.12). - *Pour que le produit $V \times \mathbb{R}^q$ puisse être muni d'une structure différentielle C^∞ pour des valeurs de q assez grandes, il faut et il suffit qu'il existe un fibré vectoriel ξ au-dessus de V tel que le microfibré tangent $\tau(V)$ soit s -isomorphe à $|\xi|$. Alors le fibré tangent à cette variété différentielle est isomorphe à $\xi \times \varepsilon^q$ (ε^q désigne le fibré vectoriel trivial de dimension q).*

Pour la démonstration, on utilise le lemme classique suivant.

4.2. LEMME. - *Toute application continue d'une variété différentielle dans une autre est homotope à une application différentiable.*

4.3. DEMONSTRATION DU THEOREME (4.1).

a) Si $V \times \mathbb{R}^q$ peut être muni d'une structure différentielle avec fibré tangent t , alors on a $\tau(V \times \mathbb{R}^q) \approx \tau(V) \times \tau(\mathbb{R}^q) \approx |t|$, donc $\tau(V) \oplus \varepsilon_V^q \approx |t| / V$.

b) Réciproque. Supposons qu'il existe un fibré vectoriel ξ (de dim. m') au-dessus de V , tel que $|\xi|$ soit s -isomorphe à $\tau(V)$. On sait qu'on peut considérer V comme rétracte d'un certain voisinage $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}^{2m+1}$. Donc ξ est la restriction à V d'un certain fibré vectoriel ξ' au-dessus de $\mathcal{U}$. Ce fibré correspond à une application continue c de $\mathcal{U}$

dans l'espace classifiant des fibrés vectoriels de dimension m' , pour lequel on peut prendre une grassmannienne, c'est-à-dire une variété différentielle. D'après le lemme (4.2), on peut remplacer c par une application différentiable, qui induit un fibré différentiable isomorphe à ξ' , et encore noté ξ' . Son espace total $E(\xi')$ est donc une variété différentielle.

On a l'injection $V \subset \mathcal{U} \xrightarrow{i} E$, et $t_{\mathcal{U}} \oplus \xi' \approx t_E / \mathcal{U}$. En restreignant à V , on a $\varepsilon^{2m+1} \oplus \xi \approx t_E / V$. Donc le microfibré tangent à E , restreint à V , est isomorphe à $\varepsilon^{2m+1} \oplus |\xi|$, qui est s -isomorphe à $\tau(V)$. Par conséquent, pour σ assez grand, il existe un microfibré normal de $V \times \{0\}$ dans $E \times \mathbb{R}^\sigma$, et il est trivial (voir plus haut 1.6). Donc $V \times \mathbb{R}^q$ peut être considéré, après plongement, comme un ouvert de la variété différentielle $E \times \mathbb{R}^\sigma$ ($q = \dim E + \sigma - m$). Par conséquent, $V \times \mathbb{R}^q$ peut être muni d'une structure différentielle. De plus, le fibré tangent t à cette variété différentielle $V \times \mathbb{R}^q$ est isomorphe à $\xi \times \varepsilon^{2m+\sigma+1}$.

5. LES GROUPES $K_{\text{Top}}(S_n)$

Dans le cas où une variété topologique V donnée peut être munie d'une structure différentielle, il reste à faire la classification de toutes les structures possibles. Pour cela, il est utile d'étudier le groupe abélien $k_{\text{Top}}(V)$. On se limitera au cas des sphères S_n , pour certaines valeurs de la dimension n .

L'outil essentiel pour ce genre de calculs semble être le théorème d'immersion topologique de J. LEES.

5.1. PROPOSITION. - Il existe une transformation naturelle $k_0 \xrightarrow{\phi} k_{\text{Top}}$, c'est-à-dire que pour une application continue $\phi : Y \rightarrow X$, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} k_0(X) & \xrightarrow{\quad} & k_{\text{Top}}(X) \\ \phi_* \downarrow & & \downarrow \phi_* \\ k_0(Y) & \xrightarrow{\quad} & k_{\text{Top}}(Y) \end{array} .$$

(cf. [15], § 4).

DEMONSTRATION. - Un élément de $k_0(X)$ correspond à la s-classe d'un fibré vectoriel ξ au-dessus de X . On lui fait correspondre la s-classe du microfibré sous-jacent $|\xi|$ (voir plus haut 3.1), ce qui donne une transformation bien définie.

On peut aussi partir de l'application canonique $f : B0 \rightarrow B\text{Top}$.

Le théorème de MILNOR peut alors s'énoncer ainsi ([15], Th. 5.13) : si ξ est un fibré vectoriel au-dessus de la variété topologique V , il existe sur $V \times \mathbb{R}^q$ (q assez grand) une structure différentielle admettant un fibré tangent isomorphe à $\xi \times \epsilon^q$, si et seulement si l'homomorphisme $k_0(V) \longrightarrow k_{\text{Top}}(V)$ envoie la s-classe de ξ sur la s-classe de $\tau(V)$.

5.2. PROPOSITION. - On a des isomorphismes

$$k_0(S_n) \cong \pi_n(B0) \cong \pi_{n-1}(0),$$

et

$$k_{\text{Top}}(S_n) \cong \pi_n(B\text{Top}) \cong \pi_{n-1}(\text{Top}) \quad (n \geq 1).$$

DEMONSTRATION. - En effet, quel que soit le groupe topologique G , G et ΩBG (= espace des lacets de l'espace classifiant associé à G) ont le même type d'homotopie (voir p. ex. DOLD-LASHOF [7], 3.10).

5.3. PROPOSITION. - On a le diagramme commutatif suivant, où la ligne est une suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \pi_n(Top/0) & \rightarrow & k_0(S_n) & \xrightarrow{\mathcal{K}} & k_{Top}(S_n) & \rightarrow \pi_{n-1}(Top/0) \rightarrow \dots \rightarrow 0 \\ & & & \searrow & & \swarrow & \\ & & & \mathcal{J}_{n-1} & & & \\ & & & & & & \pi_{n-1} \end{array}$$

$$(k_{Top}(S_0) = 0),$$

où les flèches horizontales désignent des homomorphismes obtenus en composant les homomorphismes apparaissant dans la suite exacte de (3.7) avec les isomorphismes de (5.2).

5.4. RAPPELS. -

On sait que $\pi_i(0) \approx \pi_{i+8}(0)$ (BOTT) ; il y a donc aussi périodicité pour les groupes $k_0(S_n)$, d'où le tableau :

n	8k	8k+1	8k+2	8k+3	8k+4	8k+5	8k+6	8k+7	
$k_0(S_n)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	(k ∈ ℕ).

5.5 CALCUL DE $\pi_n(Top/0)$ pour $3 \leq n \leq 8$.

Soit θ_n le n groupe de h-cobordisme des sphères d'après KERVAIRE-MILNOR ([9]).

Le résultat $\pi_n(\text{Top/PL}) = 0$ pour $n \geq 4$ ([16]), combiné avec l'isomorphisme $\pi_n(\text{PL}/0) (= \Gamma_n) \approx \theta_n$ pour $n \geq 5$, ([17]), donne un isomorphisme $\pi_n(\text{Top}/0) \approx \theta_n$ pour $n \geq 5$. Par conséquent, $\pi_n(\text{Top}/0)$ est fini pour tout $n \geq 5$ (et aussi pour $n < 5$, d'après ce qui suit).

Or, $\theta_5 = \theta_6 = 0$, $\theta_7 = \mathbb{Z}_{28}$, $\theta_8 = \mathbb{Z}_2$, d'où les résultats :

$$\pi_5(\text{Top}/0) = \pi_6(\text{Top}/0) = 0, \pi_7(\text{Top}/0) = \mathbb{Z}_{28}, \pi_8(\text{Top}/0) = \mathbb{Z}_2.$$

KIRBY-SIEBENMANN montrent dans [11] que $\pi_3(\text{Top/PL}) = \mathbb{Z}_2$.

Comme $\Gamma_n = 0$ pour $n \leq 6$, on a $\pi_3(\text{Top}/0) = \mathbb{Z}_2$ et $\pi_4(\text{Top}/0) = 0$.

Dans le cas $0 \leq n \leq 2$, le calcul se fait en plusieurs étapes.

5.6. RAPPELS.

a) $\pi_k(SO_4) = 0$ si $k = 0$ ou 2 , $\pi_1(SO_4) = \mathbb{Z}_2$.

b) Pour tout $3 \geq k \geq 0$, il existe un isomorphisme $\pi_k(SO_4) \rightarrow \pi_k(\text{Top}^+(S_3))$ d'après CERF (cf. [6])¹, si $\text{Top}^+(S_3)$ désigne le groupe des homéomorphismes de la sphère S_3 , conservant l'orientation.

5.7. LEMME. - Soit $\text{Top}^+(m)$ le sous-groupe de $\text{Top}(m)$ formé par les homéomorphismes conservant l'orientation de $\mathbb{R}^m$.

a) $\text{Top}^+(m)$ est la composante connexe - par - arcs de l'identité

dans $\text{Top}(m)$, au moins pour $m \neq 4$, (d'après KIRBY [10]). (Et même pour $m=4$, si on admet la validité d'une conjecture de Kirby).

b) $\pi_k(SO_3) = \pi_k(\text{Top}^+(3))$ pour $2 \geq k \geq 0$.

(1) Notes aux C.R.A.S., t. 253, p. 365 (1961) et Lecture Notes in Math., n° 53 ("f"4 = 0").

DEMONSTRATION. - Dans le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccc} SO_3 & \longleftrightarrow & SO_4 & \xrightarrow{p} & S_3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Top^+(3) & \longleftrightarrow & Top^+(S_3) & \xrightarrow{q} & S_3 \end{array}$$

où q est la projection canonique et $p(f) = f(\infty)$, si $f \in Top^+(S_3)$, les lignes représentent des fibrations. D'où le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots \rightarrow \pi_k(SO_3) \rightarrow \pi_k(SO_4) \rightarrow \pi_k(S_3) \rightarrow \pi_{k-1}(SO_3) \rightarrow \pi_{k-1}(SO_4) \rightarrow \pi_{k-1}(S_3) \rightarrow \dots \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ \dots \rightarrow \pi_k(Top^+(3)) \rightarrow \pi_k(Top^+(S_3)) \rightarrow \pi_k(S_3) \rightarrow \pi_{k-1}(Top^+(3)) \rightarrow \pi_{k-1}(Top^+(S_3)) \rightarrow \pi_{k-1}(S_3) \rightarrow \dots \end{array}$$

On applique le lemme des cinq.

5.8. CONSEQUENCES. - On en déduit que :

- a) $\pi_0(Top(m)) = \mathbb{Z}_2$ (au moins pour $m \neq 4$), d'où par stabilité $\pi_0(Top) = \mathbb{Z}_2$.
- b) $\pi_k(Top^+(3)) = 0$ si $k = 0$ ou 2 , $\pi_1(Top^+(3)) = \mathbb{Z}_2$.

5.9. LEMME. - (J.A. LEES [14]). - Si $0 < k < m$, il y a correspondance biunivoque entre $\pi_k(Top^+(m))$ et les classes d'isotopie d'immersions (topologiques) : $B_k^K \rightarrow B_m^m$, qui s'étendent à des immersions de voisinages de B_k^K et induisent l'identité au voisinage de ∂B_k^K ; on identifie deux telles immersions si elles coïncident dans un voisinage de B_k^K (ici $B_k^{\mathbb{R}^l} =$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^l$).

(cité dans R. LASHOF and M. ROTHENBERG, Triangulation of Manifolds I, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), p. 753).

(2)
 5.10. PROPOSITION . - Si $k = 1$ ou 2 , l'inclusion naturelle
 $\text{Top}^+(m) \hookrightarrow \text{Top}^+(p)$ ($m \leq p$) induit un épimorphisme
 $\pi_k(\text{Top}^+(m)) \rightarrow \pi_k(\text{Top}^+(p))$ si $0 < k \leq p$, $p \geq 3$, et un monomorphisme
 $\pi_k(\text{Top}^+(m)) \rightarrow \pi_k(\text{Top}^+(p))$ si $0 < k < m-1$, $p > 5$.
 Donc, il y a isomorphisme $\pi_k(\text{Top}^+(m)) \cong \pi_k(\text{Top}^+(p))$ si
 $0 < k < m-1 < p$. ($k = 1$ ou 2).

DEMONSTRATION. - On note $i : B_k \hookrightarrow B_m \hookrightarrow B_p$ l'inclusion naturelle.

Soient U un voisinage de B_k dans B_p , $V \subset U$ un voisinage de ∂B_k^k .
 On pose : $U' = U \cap \mathbb{R}^m$, $V' = V \cap \mathbb{R}^m$.

Si $f : U \rightarrow B_p$, à valeurs dans B_p , est à valeurs dans $B_{m-1} \cup \{0\}$,
 il existe $f : U' \rightarrow B_m$ tel que $f|_{U'} = i_0 \tilde{f}$.

a) Surjectivité : il suffit de prendre $p \geq m+1$ et $p \geq 3$.

Soit h une immersion : $U \rightarrow B_p$ avec $h|_V = \text{id}_V$. On peut supposer
 (après "lissage") que h est une immersion différentiable ⁽¹⁾. En
 adaptant M. HIRSCH (Immersion of manifolds, Trans. of the Amer. Math.
 Soc. 93 (1959) ; pp. 254 et 269-270), on trouve que $h = h_0$ est isotope
 à $h_1 : U \rightarrow B_p$ (qui est une immersion vérifiant $h_1|_V = \text{id}_V$, et se
 factorise : $h_1|_{U'} = i_0 \tilde{h}_1$) par une isotopie $h_t(x) = H(x,t)$ vérifiant $H(x,t) : U \times I \rightarrow B_p \times I$
 $H(x,t) = i(x)$ si $x \in V$, t quelconque $\in I$. $H(x,t) : U \times I \rightarrow B_p \times I$
 $= B_{p+1}$

b) Injectivité : Il suffit de prendre $p \geq m+1 = k+3$, $p \geq 3$.

Soient deux immersions $f : U \rightarrow B_p$, $g : U \rightarrow B_p$, vérifiant $f|_V = \text{id}_V$,
 $g|_V = \text{id}_V$, et qui se factorisent : $f|_{U'} = i_0 \tilde{f}$, $g|_{U'} = i_0 \tilde{g}$. Si f et g
 sont isotopes par l'isotopie $K : U \times I \rightarrow B_{p+1}$ ($K_0 \cong f$, $K_1 \cong g$, $K_t|_V \cong \text{id}_V$, $U \xrightarrow{K_t} B_{p+1} \times \{t\}$)

(1) D'après C. MORLET. Voir appendice ci-dessous.

(2) On suppose toujours la validité de la conjecture de KIRBY. Voir ci-dessous p. 130.

pour tout $t \in I$, alors il existe $L : U \times I \times I \rightarrow B_{p+1}$ continue telle que $L(x, t, 1) : U' \times I \rightarrow B_{m+1}^{\{t\}}$ soit une isotopie vérifiant $\tilde{L}(x, 0, 1) = \tilde{f}$, $\tilde{L}(x, 1, 1) = \tilde{g}$ ($\tilde{L}(x, t_0, 1)/V' = id_{V'}$, pour tout $t_0 \in I$), en prenant pour $L(x, t, t')$ l'isotopie de HIRSCH.

5.11. CONSEQUENCES. -

a) L'injection naturelle $Top(3) \hookrightarrow Top$ induit un isomorphisme $\pi_1(Top(3)) \rightarrow \pi_1(Top)$, et un épimorphisme $\pi_2(Top(3)) \rightarrow \pi_2(Top)$. (En effet, $\pi_k(Top^+(m)) = \pi_k(Top(m))$ si $k \geq 1$).

Donc, d'après (5.8), $\pi_1(Top) = \mathbb{Z}_2$, $\pi_2(Top) = 0$
(et $\pi_1(Top(n)) = \mathbb{Z}_2$, $\pi_2(Top(n)) = 0$ si $n \geq 3$).

(On a aussi $\pi_0(Top) = \mathbb{Z}_2$). On en déduit que $\pi_n(Top/0) = 0$ pour $0 \leq n \leq 2$.

5.12. RESULTATS.

En rassemblant ce qui précède, on obtient, pour les premières valeurs de n , le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi_n(Top/0)$	0	0	0	$\mathbb{Z}_2$	0	0	0	$\mathbb{Z}_{28}$	$\mathbb{Z}_2$

En utilisant le diagramme de (5.3), les résultats rappelés dans (5.4), et le tableau ci-dessus, on obtient, pour $0 \leq n \leq 7$, $n \neq 4$, les résultats suivants :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$K_{\text{Top}}(S_n)$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$	0	0	0

(On obtient $K_{\text{Top}}(S_4) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ en utilisant un diagramme plus complet, qu'on peut trouver dans [16], p. 144).

5.13. CONSEQUENCES. -

a) Puisqu'on a le diagramme commutatif ;

$$\begin{array}{ccc}
 K_0(S_n) & \xrightarrow{\mathcal{K}} & K_{\text{Top}}(S_n) \\
 \searrow \mathcal{J}_{n-1} & & \nearrow \\
 & \pi_{n-1}^{\vee} &
 \end{array}$$

, et que $\mathcal{J}_{n-1}$ est injectif si

$n \not\equiv 0 \pmod{4}$ ($[3]$), $K_0(S_n) \rightarrow K_{\text{Top}}(S_n)$ est un monomorphisme si $n \not\equiv 0 \pmod{4}$.

Si $n = 4m$, on a la suite exacte

$\Pi_n(\text{Top}/0) \rightarrow K_{0 \bmod 4m}(S_{4m}) = \mathbb{Z} \rightarrow K_{\text{Top}}(S_n)$ et $K_0(S_n) \xrightarrow{\mathcal{K}} K_{\text{Top}}(S_n)$ est encore injectif, puisque $\Pi_n(\text{Top}/0)$ est fini pour tout n .

Finalement, l'homomorphisme $K_0(S_n) \xrightarrow{\mathcal{K}} K_{\text{Top}}(S_n)$ est un monomorphisme pour tout $n \geq 0$. Pour tout $n \geq 1$, on a donc la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow K_0(S_n) \rightarrow K_{\text{Top}}(S_n) \rightarrow \Pi_{n-1}(\text{Top}/0) \rightarrow 0.$$

b) D'après ce qui précède, on a :

$$K_{\text{Top}}(S_n) = \pi_{n-1}(\text{Top}/0) = \theta_{n-1} \text{ si } n \equiv 3, 5, 6 \text{ ou } 7 \pmod{8}.$$

Notamment :

$$K_{\text{Top}}(S_{13}) = 0, K_{\text{Top}}(S_{14}) = \mathbb{Z}_3, K_{\text{Top}}(S_{15}) = \mathbb{Z}_2, K_{\text{Top}}(S_{11}) = \theta_{10}$$

(6 éléments).

(D'après WILLIAMSON [20], $K_{\text{Top}}(S_8) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_4$) ; $K_{\text{Top}}(S_{10})$ a $2 \times 8 = 16$ éléments ; $K_{\text{Top}}(S_9)$ a $2 \times 2 = 4$ éléments.

On voit encore que, puisque $\pi_n(\text{Top}/0)$ est fini pour tout $n \geq 0$ et qu'on a la suite exacte ci-dessus, $K_{\text{Top}}(S_n)$ est fini si $n \not\equiv 0 \pmod{4}$, dénombrable si $n \equiv 0 \pmod{4}$.

MILNOR montre que $K_0(S_{4m}) \xrightarrow{\mathcal{K}} K_{\text{Top}}(S_{4m})$ n'est pas un isomorphisme ([15], § 8).

c) D'après [15] (Lemma 4.4), si A et B sont deux espaces topologiques et $f : A \rightarrow B$ une application continue, avec $i : B \hookrightarrow B \cup_f C A$ l'inclusion et $c : B \cup_f C A \rightarrow S A$ contractant B en un point (S X désignant la suspension de X et $B \cup_f C A$ le cône de f), on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots \rightarrow K_0(SB) & \xrightarrow{Sf^*} & K_0(SA) & \xrightarrow{c^*} & K_0(B \cup_f C A) & \xrightarrow{i^*} & K_0(B) & \xrightarrow{f^*} & K_0(A) \\ & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow \\ \dots \rightarrow K_{\text{Top}}(SB) & \xrightarrow{Sf^*} & K_{\text{Top}}(SA) & \xrightarrow{c^*} & K_{\text{Top}}(B \cup_f C A) & \xrightarrow{i^*} & K_{\text{Top}}(B) & \xrightarrow{f^*} & K_{\text{Top}}(A), \end{array}$$

où les lignes sont des suites exactes de PUPPE.

Soit X un CW - complexe compact ^{et connexe} de dimension ≤ 3 : en se servant du diagramme précédant, on trouve compte tenu de l'isomorphisme

$k_0(S_n) \xrightarrow{\cong} k_{Top}(S_n)$ pour $n = 1, 2, 3$, par induction sur la dimension, que l'homomorphisme $k_0(X) \xrightarrow{\cong} k_{Top}(X)$ est un isomorphisme.

On sait que $k_0(P_2) = k_0(P_3) = \mathbb{Z}_4$ (ADAMS [1]) (P_n désignant l'espace projectif réel de dimension n). Par conséquent :

$$k_{Top}(P_2) = k_{Top}(P_3) = \mathbb{Z}_4.$$

APPENDICE.

A.1.

Il s'agit de démontrer le résultat suivant (cf. plus haut 5.10):

Soient U un voisinage de B_k dans B_n ($k > 0$, n grand ; B_k désigne la boule unité fermée de $\mathbb{R}^k$) et $f : U \rightarrow B_k$ une immersion topologique, telle que $f|_V = id_V$, V désignant un voisinage de ∂B_k . Alors f est isotope à une immersion différentiable $\phi : U \rightarrow B_n$, vérifiant $\phi|_V = id_V$, par une isotopie f_t telle que $f_t|_V = id_V$ pour tout $t \in [0, 1]$ ($f_0 = f$, $f_1 = \phi$) , (au moins) si $k = 1$ ou 2 .

DEMONSTRATION. - On peut supposer que $U = B_k \times B_{n-k, \epsilon}^\circ$

$$(B_{n-k, \epsilon}^\circ = \{ x \in \mathbb{R}^{n-k} / \|x\| < \epsilon \}).$$

L'immersion $f : U \rightarrow B_n$ induit une structure différentielle sur U (U , muni de cette structure, est notée W) telle que : $f = h\rho$, avec $\rho : W \rightarrow B_n$ est une immersion différentiable, et $h : U \rightarrow W$ un homéomorphisme h/V étant différentiable.

Puisque n est supposé grand, par application de la théorie de l' "engulfing" ^(**), W est difféomorphe à $B_k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Par conséquent, (au moins si $k = 1$ ou 2) il est clair ^(*) qu'il existe $h^* : U \rightarrow W$, qui est un difféomorphisme ; avec $h^*|V = h|V$, et qui est isotope à h par une isotopie h_t vérifiant $h_t|V = h|V$ pour tout t ($h_0 = h$, $h_1 = h^*$).

Alors, l'immersion topologique f est isotope à l'immersion différentiable ϕ , en posant : $f_t = \rho h_t$ ($\phi = \rho h_1 = \rho h^*$).

A.2. Le résultat ci-dessus permet de démontrer que (voir plus haut 5.10).

$$\left. \begin{array}{l} \Pi_1(\text{Top}(m)) \approx \Pi_1(\text{Top}) (=Z_2) \\ \Pi_2(\text{Top}(m)) \approx \Pi_2(\text{Top}) (=0) \end{array} \right\} \quad \text{si } m \geq 3 \quad \begin{array}{l} \text{(en admettant la validité} \\ \text{de la conjecture de KIRBY,} \\ \text{cf. (**)).} \end{array}$$

(Dans [16], p. 143, SIEBENMANN démontre que $\Pi_k(\text{Top}, \text{Top}(m)) = 0$ pour $k < m$, mais seulement pour $m > 5$).

^{*} (version différentiable du lemme d EDWARDS-KIRBY, cf. T.B. RUSHING, Topological embeddings, Academic Press, New-York, 1973).

^{**} On peut même simplement supposer $n \geq 3$, en admettant la validité de la conjecture "A_n" de KIRBY: Actes du Congrès Intern. Math. (1970), Tome 2, p. 29.

BIBLIOGRAPHIE. -

- 1 J.F. ADAMS, Vector fields on spheres, *Ann. of Math.* 75 (1962), p. 603-632.
- 2 J.F. ADAMS, On the groups $J(X)$, Part I, *Topology* 2 (1963), p. 181-196.
- 3 J.F. ADAMS, On the groups $J(X)$, Part IV, *Topology* 5 (1966), 21-71.
- 4 J.M. BOARDMAN AND R./ . VOGT, Homotopy invariant Algebraic, Structures on topological spaces, *Lectures Notes* 347, (1973).
- 5 W. BROWDER Open and closed disk bundles, *Ann. of Math.* 83 (1966), p. 218-230.
- 6 J. CERF, Groupes d'automorphismes et groupes de difféomorphismes des variétés compactes de dimension 3, *Bull. Soc. Math. France*, 87 (1959), p. 319-329.
- 7 A. DOLD and R. LASHOF, Principal quasi-fibrations and fibre homotopy equivalence of bundles, *Illinois J. Math.*, 3 (1959) , p. 285-305.
- 8 A. DOLD und R. THOM, Quasifaserungen und unendliche Symmetrische Produkte, *Ann. of Math.* (2) 67 (1958), p. 239-281.
- 9 M. Kervaire and J. MILNOR, Groups of homotopy spheres, I, *Ann. of Math.* 77 (1963), p. 504-537.
- 10 R.C. KIRBY, Stable homeomorphisms and the annulus conjecture, *Ann. of math.* 89 (1969), p. 575-582.
- 11 R.C. KIRBY and L.C. SIEBENMANN, For manifolds the hauptvermutung and the triangulation conjecture are false, *notices Amer. Math. Soc.* 16 (1969), p. 695.
- 12 J.M. KISTER, Microbundles are fibre bundles, *Ann. Of Math.* 80 (1964), p. 190-199.
- 13 N.H. KUIPER and R.K. LASHOF, Microbundles and bundles, I, *Invent. Math.* 1 (1966), p. 1-17.

- 14 J.A. LEES, Immersions and surgeries of topological manifolds, *Bull. Amer. Soc.* 75 (1969), p. 529-534.
- 15 J. MILNOR, Microbundles, Part I, *Topology* 3 , Suppl. 1 (1964), p. 53-80.
- 16 L.C. SIEBENMANN, Topological manifolds, *Actes du Congrès Intern. Math.* (1970), tome 2, p. 133-163.
- 17 S. SMALE, On the structure of manifolds, *Amer. J. of Math.* 84 (1962), p. 387-399.
- 18 N.E. STEENROD, The topology of fibre bundles, *Princeton Math. Ser.* 14 (1951).
- 19 N.E. STEENROD, Milgram's classifying space of a topological group, *Topology* 7 (1968), p. 349-368.
- 20 R.E. WILLIAMSON, Jr. , Cobordism of combinatorial manifolds, *Ann. of math.* 83, (1966), p. 1-33.
