

ANDRÉ ROUX

**Catégories, complexes et homotopie**

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1975, tome 12, fascicule 1  
, p. 13-24

[http://www.numdam.org/item?id=PDML\\_1975\\_\\_12\\_1\\_13\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1975__12_1_13_0)

© Université de Lyon, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## CATEGORIES, COMPLEXES ET HOMOTOPIE

par André ROUX

### 0. INTRODUCTION.

L'objet de cet article est une démonstration simple du résultat suivant dû à D. Quillen (cf. [2] , ch. 6, § 3) :  $\mathcal{C}$  étant la catégorie des espaces topologiques, soient  $H$  la classe des équivalences faibles d'homotopie et  $\mathcal{H} = \mathcal{C} [H^{-1}]$  la catégorie "homotopique" ;  $B = T\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  étant le foncteur classifiant (au sens de G. Segal [3] ) de la catégorie  $\mathcal{C}$  des petites catégories dans  $\mathcal{C}$  , soit  $\Sigma$  la classe des foncteurs  $f$  tels que  $Bf \in H$  ; alors  $B$  induit une équivalence de catégories de  $\mathcal{C} [\Sigma^{-1}]$  dans  $\mathcal{H}$  dont l'équivalence inverse est induite par  $ES : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}$  , où  $S$  est le foncteur complexe singulier et  $E$  le foncteur explosion (pour les définitions, voir le § 1).

En fait,  $\mathcal{Y}$  étant la catégorie des complexes (semi simpliciaux), soit  $\Theta$  la classe des morphismes de complexes tels que  $Tf \in H$  (où  $T$  est le foncteur réalisation géométrique ) ;  $T$  et  $S$  sont en adjonction et on voit facilement

que  $T$  induit une équivalence de  $\mathcal{S}[\Theta^{-1}]$  dans  $\mathcal{H}$  dont l'équivalence inverse est induite par  $S$ . Il suffit donc de montrer que le foncteur injection canonique  $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$  induit une équivalence de  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  dans  $\mathcal{S}[\Theta^{-1}]$  dont l'équivalence inverse est induite par  $E$  ; dans ce but, on établit l'existence de morphismes fonctoriels  $j : E\Delta \rightarrow 1_{\mathcal{C}}$  et  $k : \Delta E \rightarrow 1_{\mathcal{S}}$  qui, par passage aux catégories de fractions, donnent l'équivalence cherchée.

Le plan de cet article est le suivant : on donne (§1) les rappels des définitions des foncteurs  $\Delta$  et  $E$  et on construit le morphisme  $j$  ; on montre (§2) comment étendre à  $\mathcal{S}$  un foncteur de  $\mathcal{O}$  dans  $\mathcal{S}$  (où  $\mathcal{O}$  est la catégorie des ensembles finis totalement ordonnés) ; on en déduit (§3) que  $\Delta E$  est l'extension de  $E\Delta$  ce qui permet de construire le morphisme  $k$  et de montrer que  $k\Delta = \Delta j$  ; on rappelle alors (§4) l'adjonction entre les foncteurs  $S$  et  $T$  et on établit l'équivalence entre  $\mathcal{S}[\Theta^{-1}]$  et  $\mathcal{H}$  ; on montre (§5) que, pour un complexe  $K$ ,  $Tk_K : BEK \rightarrow TK$  est une équivalence d'homotopie et que, par suite,  $k$  et  $j$  induisent l'équivalence cherchée entre  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  et  $\mathcal{S}[\Theta^{-1}]$ .

On notera qu'aucun appel n'est fait aux notions d'homotopie simpliciale et de complexe de Kan.

1. Pour une petite catégorie  $A$ , soit  $\Delta A$  le complexe  $[n] \mapsto \mathcal{C}([n], A)$ , où  $[n]$  est la catégorie définie par l'ensemble ordonné  $\{0 < 1 < \dots < n\}$ . On définit ainsi un foncteur  $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$  pleinement fidèle dont l'image consiste en les complexes qui transforment les sommes fibrées de  $\mathcal{O}$  en produits fibrés dans  $\mathbf{Ens}$ .

$\Delta$  admet un adjoint à gauche  $G : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}$  tel que  $G\Delta = 1_{\mathcal{E}}$  et on note  $\varepsilon : 1_{\mathcal{P}} \rightarrow \Delta G$  l'autre morphisme d'adjonction. Explicitement, pour un complexe  $K$ , l'ensemble  $(GK)_0$  des objets de  $GK$  est  $K_0$  et l'ensemble  $(GK)_1$  des morphismes de  $GK$  est l'ensemble des suites finies  $(x_1, \dots, x_p)$  d'éléments de  $K_1$  tels que  $\delta_1 x_i = \delta_0 x_{i-1}$  passé au quotient par la relation d'équivalence engendrée par  $\delta_1 y = (\delta_2 y, \delta_0 y)$  pour tout  $y \in K_2$ .

Pour un complexe  $K$ , l'explosion de  $K$  est la catégorie  $EK$  dont l'ensemble des objets est  $(EK)_0 = \bigsqcup_m K_m = \{([m], x) / x \in K_m, m \in \mathbb{N}\}$  et dont l'ensemble  $(EK)_1$  des morphismes est  $\bigsqcup_{m,n} O([m], [n]) \times K_n = \{\theta : ([m], x) \rightarrow ([n], y) / \theta \in O([m], [n])$

avec  $\theta^* y = x\}$ . On définit ainsi un foncteur fidèle  $E : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}$ . Par exemple,  $E\Delta[n]$  est la catégorie dont les morphismes de  $[m] \xrightarrow{\alpha} [n]$  dans  $[p] \xrightarrow{\beta} [n]$  sont les applications croissantes  $\theta : [m] \rightarrow [p]$  vérifiant  $\beta \theta = \alpha$ ; en particulier,  $E\Delta[n]$  admet l'identité  $1_n : [n] \rightarrow [n]$  comme objet final.  $E$  admet un adjoint à droite  $D : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{P}$  et on note  $\phi : 1_{\mathcal{P}} \rightarrow DE$  et  $\psi : ED \rightarrow 1_{\mathcal{E}}$  les morphismes d'adjonction.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $\theta$  un morphisme dans  $E\Delta[n]$  de  $[m] \xrightarrow{\alpha} [n]$  dans  $[p] \xrightarrow{\beta} [n]$  on a  $\alpha(m) = \beta \theta(m) \leq \beta(p)$ , donc  $j_{[n]} : \alpha \mapsto \alpha(m)$  est un foncteur de  $E\Delta[n]$  dans  $[n]$ ; de plus, pour  $\gamma \in \theta([n], [n'])$ , on a le diagramme commutatif ci-dessous

$$\begin{array}{ccc}
 E\Delta[n] & \xrightarrow{j_{[n]}} & [n] \\
 \downarrow E\Delta\gamma & & \downarrow \gamma \\
 E\Delta[n'] & \xrightarrow{j_{[n']}} & [n']
 \end{array}
 ;$$

donc  $j_{[n]}$  est fonctoriel en  $[n]$  de  $\mathcal{O}$ . Pour une petite catégorie  $A$ , soit

$$i_n(A) = \mathcal{C}(j_{[n]}, A) : (\Delta A)_n = \mathcal{C}([n], A) \rightarrow \mathcal{C}(E\Delta[n], A) \approx \mathcal{S}(\Delta[n], DA) = (DA)_n ;$$

les  $(i_n(A))_n$  définissent un morphisme de complexes  $i_A : \Delta A \rightarrow DA$  qui est fonctoriel en  $A$  ; d'où un morphisme fonctoriel  $i : \Delta \rightarrow D$ . Par adjonction, il en résulte un morphisme fonctoriel  $j : E\Delta \rightarrow 1_{\mathcal{C}}$  ; explicitement, pour

$g \in (\Delta A)_p = \mathcal{C}([p], A)$  considéré comme un objet de  $E\Delta A$ , on a  $j_A(g) = g(p)$  et, pour  $\theta \in \mathcal{O}([m], [p])$  considéré comme un morphisme dans  $E\Delta A$  de  $([m], f=g \circ \theta)$  dans  $([p], g)$ , on a  $j_A(\theta) = g(\theta(m) \leftarrow p) : f(m) = j_A(f) \rightarrow j_A(g) = g(p)$ . On peut aussi

construire des morphismes  $p : E \rightarrow G$  et  $q : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow DG$  (se correspondant par adjonction) tels que  $p\Delta = j$  et  $q\Delta = i$ . Les morphismes  $i, j, p$  et  $q$  se déduisent de l'un quelconque d'entre eux.

2. Pour un complexe  $K$ , soit  $\pi_K : ([m], x) \rightsquigarrow [m]$  le foncteur projection de  $EK$  dans  $\mathcal{O}$ . Pour un foncteur  $F$  de  $\mathcal{O}$  dans  $\mathcal{S}$ , on définit le complexe  $\underline{FK}$  comme la limite à droite dans  $\mathcal{S}$  du foncteur  $F\pi_K$  de  $EK$  dans  $\mathcal{S}$  :

$$\underline{FK} = \varinjlim_{EK} F\pi_K.$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a donc  $(\underline{FK})_n = \bigsqcup_p (F([p])_n \times K_p) / \sim$ , où  $\sim$  est la relation d'équivalence engendrée par  $(a, \theta^* y) = ((F\theta)a, y)$ , pour tous  $a \in F([p]_m)$ ,  $y \in K_q$  et  $\theta \in \mathcal{O}([p], [q])$ . Il est évident que, si  $f : K \rightarrow L$  est un morphisme de complexes  $f$  induit canoniquement un morphisme de complexes  $\underline{Ff} : \underline{FK} \rightarrow \underline{FL}$ . Donc  $\underline{F}$  est un foncteur de  $\mathcal{S}$  dans elle-même.

Par exemple, il est bien connu que, pour  $\Delta: 0 \rightsquigarrow \mathcal{G}$ , on a  $\lim_{\rightarrow EK} \Delta\pi_K = K$ , donc  $\underline{\Delta} = 1_{\mathcal{G}}$ . D'autre part, on voit facilement que  $\underline{F}\Delta[m] = F[m]$ ; donc  $\underline{F}\Delta = F$  (mais,  $F$  étant donné, cette égalité ne détermine pas entièrement  $\underline{F}$ ).

Enfin,  $\underline{F}$  est fonctoriel en  $F$  au sens suivant : un morphisme  $\rho$  entre deux foncteurs  $F$  et  $F'$  de  $\mathcal{O}$  dans  $\mathcal{G}$ , se prolonge canoniquement en un morphisme  $\underline{\rho}$  entre les foncteurs  $\underline{F}$  et  $\underline{F}'$ .

Pour un foncteur  $G$  de  $\mathcal{G}$  dans elle-même, on a un morphisme canonique de  $\underline{G}\Delta$  dans  $G$ , mais ce morphisme n'est pas nécessairement un isomorphisme (pour un exemple voir §3). Soit  $K$  un complexe, on a  $EK = F(\lim_{\rightarrow EK} \Delta\pi_K) = \lim_{\rightarrow EK} E\Delta\pi_K$  car  $E: \mathcal{G} \rightsquigarrow \mathcal{E}$  préserve les limites droites. Pour une petite catégorie  $A$ , on a une application canonique  $\rho$  de  $\lim_{\rightarrow EK} \mathcal{E}(A, E\Delta\pi_K)$  dans  $\mathcal{E}(A, \lim_{\rightarrow EK} E\Delta\pi_K) = \mathcal{E}(A, EK)$ . De façon précise, on a  $\lim_{\rightarrow EK} \mathcal{E}(A, E\Delta\pi_K) = \coprod_n \mathcal{E}(A, E\Delta[n]) \times K_n / \sim$ , où  $\sim$  est la relation d'équivalence engendrée par  $(\phi, \theta^* y) = ((E\Delta\theta)\phi, y)$  pour tous  $\phi \in \mathcal{E}(A, E\Delta[m]), y \in K_p$  et  $\theta \in O([m], [p])$ . Soit  $(\phi, x) \in \mathcal{E}(A, E\Delta[m]) \times K_m$ ; pour un objet  $a$  de  $A$ , on a  $\phi(a) \in O([n_a], [m])$  et pour un morphisme  $f: a \rightarrow b$  de  $A$ ,  $\phi(f) \in O([n_b], [n_a])$  vérifie  $\phi(b)\phi(f) = \phi(a)$ ; donc,  $\phi(a)^* x = \phi(f)^* \phi(b)^* x$ , c'est-à-dire que  $\phi(f)$  est un morphisme dans  $EK$  de  $([n_a], \phi(a)^* x)$  dans  $([n_b], \phi(b)^* x)$ . Par suite,  $\hat{u}(a \mapsto ([n_a], \phi(a)^* x), f \mapsto \phi(f))$  est un foncteur  $\phi_x$  de  $A$  dans  $EK$  et il est facile de voir que  $\phi_x$  ne dépend que de la classe d'équivalence de  $(\phi, x)$ ; par passage au quotient,  $(\phi, x) \mapsto \phi_x$  définit l'application canonique  $\rho$  de  $\lim_{\rightarrow EK} \mathcal{E}(A, E\Delta\pi_K)$  dans  $\mathcal{E}(A, EK)$ .

On suppose maintenant que  $A$  a un objet final  $*$ , et on note  $\tilde{a}: a \rightarrow *$  la projection canonique. Pour  $\psi \in \mathcal{E}(A, EK)$ , on pose  $\psi(a) = ([n_a], x_a)$ ; pour  $f: a \rightarrow b$

dans  $A$ ,  $\psi(f) \in O([n_a], [n_b])$  vérifie  $\psi(f)^* x_b = x_a$  et, comme  $\tilde{b}f = \tilde{a}$ , on a  $\psi(\tilde{b})\psi(f) = \psi(\tilde{a}) \in O([n_a], [n_*])$  ; il en résulte que  $(a \mapsto \psi(\tilde{a}), f \mapsto \psi(f))$  est un foncteur  $\tilde{\psi}$  de  $A$  dans  $E\Delta[n_*]$  . Soit  $\lambda\psi$  la classe de  $(\tilde{\psi}, x_*)$  dans  $\lim_{\rightarrow EK} \mathcal{C}(A, E\Delta\pi_K)$  ; on a  $\tilde{\psi}_x(a) = ([n_a], \psi(\tilde{a})^* x_* = x_a)$ , donc,  $\rho\lambda$  est l'application identique de  $\mathcal{C}(A, EK)$ . Pour  $(\phi, x) \in \mathcal{C}(A, E\Delta[m]) \times K_m$ ,  $a \mapsto \phi(\tilde{a})$  est un foncteur  $\tilde{\phi}$  de  $A$  dans  $E\Delta[n_*]$  , et pour  $\theta = \phi(*) \in O([n_*], [m])$ , on a  $(E\Delta\theta)\tilde{\phi} = \phi$  , d'où  $(\phi, x) \sim (\tilde{\phi}, \theta^* x) = \lambda(\phi_x) = \lambda\rho(\phi, x)$ , c'est-à-dire que  $\lambda\phi$  est l'application identique de  $\lim_{\rightarrow EK} \mathcal{C}(A, E\Delta\pi_K)$ . On a démontré ceci : si  $A$  est une petite catégorie possédant un objet final,  $\rho$  est une bijection de  $\lim_{\rightarrow EK} \mathcal{C}(A, E\Delta\pi_K)$  sur  $\mathcal{C}(A, EK)$  ; par la suite on identifie ces deux ensembles à l'aide de cette bijection.

3. La petite catégorie  $[m]$  possède  $m$  comme objet final ; donc, pour un

$$\begin{aligned} \text{complexe } K, \text{ on a } (\Delta EK)_m &= \mathcal{P}(\Delta[m], \Delta EK) = \mathcal{C}([m], EK) = \lim_{\rightarrow EK} \mathcal{C}([m], E\Delta\pi_K) = \\ &= \bigcup_n \mathcal{C}([m], E\Delta[n]) \times K_n / \sim \\ &= \bigcup_n (\Delta E\Delta[n])_m \times K_n / \sim = (\bigcup_n \Delta E\Delta[n] \times K_n / \sim)_m = (\underline{\Delta E\Delta} K)_m. \end{aligned}$$

Il en résulte que le morphisme canonique de  $\underline{\Delta E\Delta}$  dans  $\Delta E$  est un isomorphisme ; par la suite, on identifie  $\underline{\Delta E\Delta}$  et  $\Delta E$  à l'aide de cet isomorphisme.

On a vu (§1) que l'on avait un morphisme  $j: E\Delta \rightarrow 1_{\mathcal{C}}$ , d'où un morphisme  $\Delta j$  de  $\Delta E\Delta$  dans  $\Delta$  ; par restriction à la catégorie  $O$  puis extension, on en déduit un morphisme  $k = \underline{\Delta j}: \Delta E = \underline{\Delta E\Delta} \rightarrow \underline{\Delta} = 1_{\mathcal{P}}$ . Explicitement, soit  $(\phi, x) \in \mathcal{C}([m], E\Delta[n]) \times K_n$  un représentant d'un élément  $s \in (\Delta EK)_m$ , alors  $(j_{[n]}\phi, x) \in \mathcal{C}([m], [n]) \times K_n$  est un représentant de  $ks \in K_m$ .

$G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  étant l'adjoint à gauche de  $\Delta$ , il est facile de voir que le morphisme d'adjonction  $\epsilon: 1_{\mathcal{D}} \rightarrow \Delta G$  s'identifie au morphisme canonique de  $1_{\mathcal{D}} = \underline{\Delta} = \underline{\Delta G \Delta}$  dans  $\Delta G$ . Il en résulte que le diagramme ci-dessous est commutatif ;

$$\begin{array}{ccc}
 1_{\mathcal{D}} = \underline{\Delta G \Delta} & \xrightarrow{\epsilon} & \Delta G \\
 \uparrow & & \uparrow \Delta p \\
 k = \underline{\Delta j} = \underline{\Delta p \Delta} & & \Delta E = \underline{\Delta E \Delta}
 \end{array}$$

d'où  $\epsilon k = \Delta p$ . On en déduit :  $k \Delta = (\epsilon \Delta)(k \Delta) = (\epsilon k) \Delta = \Delta p \Delta = \Delta j$ . On a de même :  $p = G \Delta p = G(\epsilon k) = (G \epsilon)(G k) = G k$ .  $k$  détermine les morphismes  $i, j, p, q$ , mais ceux-ci ne déterminent pas (directement)  $k$  qui apparaît comme un morphisme fondamental.

On notera que les morphismes  $E k$  et  $j E$  de  $E \Delta E$  dans  $E$  sont distincts (et de même,  $\phi k \neq i E: \Delta E \rightarrow DE$ ).

4. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $B[n] = \{ t = (t_1, \dots, t_n) \in I^n / 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1 \}$ . Pour

$\theta \in O([m], [n])$ , on définit  $\theta_*: B[m] \rightarrow B[n]$  par

$$\theta_*(s_1, \dots, s_m) = (t_1, \dots, t_n), \text{ où } t_j = s_{i_j} \text{ avec } i_j = \min(i / \theta(i) \geq j).$$

On obtient ainsi un foncteur  $B$  de  $O$  dans  $\mathcal{C}$ .  $t = (t_1, \dots, t_n)$  est intérieur à  $B[n]$  (en abrégé  $t \in B^0[n]$ ) si et seulement si  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1$ . Les résultats suivants sont faciles à vérifier :

(i) pour  $t \in B[n]$ , il existe  $\alpha \in O([m], [n])$  injectif et  $s \in B^0[m]$  uniques tels que  $t = \alpha_* s$  ;



- (ii) pour  $t \in B^0[n]$  et  $\beta \in O([n], [m])$  surjectif, on a  $\beta_* t \in B^0[m]$  ;  
 (iii) pour  $s \in B^0[m]$ ,  $\theta \mapsto \theta_* s$  est injectif de  $O([m], [n])$  dans  $B[n]$  ;  
 (iv) pour  $s$  et  $s'$ , il existe  $t$  et  $\beta, \beta'$  surjectifs et tels que  $s = \beta_* t$  et  $s' = \beta'_* t$  ;  
 de plus, si  $s$  et  $s'$  sont intérieurs, on peut choisir  $t$  intérieur.

(Pour démontrer (iv), on range les éléments de  $s$  et  $s'$  dans l'ordre croissant)

La réalisation géométrique d'un complexe  $K$  est l'espace topologique

$TK = \lim_{\substack{\rightarrow \\ EK}} B\pi_K$ , c'est-à-dire  $TK = \bigcup_n B[n] * K_n / \sim$  où  $\sim$  est la relation d'équivalence engendrée par  $(t, \theta_* x) = (\theta_* t, x)$  pour tous  $t \in B[p]$ ,  $x \in K_m$  et  $\theta \in O([p], [m])$ .

On dit que  $(s, x) \in B[m] * K_m$  est non dégénérée si  $s$  est intérieur et  $x$  non dégénéré (dans  $K$ ) ; d'après le lemme d'Eilenberg-Zilber et les propriétés de  $B$  rappelées ci-dessus, chaque élément de  $\bigcup_n B[n] * K_n$  est équivalent à un unique élément non dégénéré. Ceci montre que  $TK$  est naturellement muni d'une structure de CW-complexe (on notera qu'un polyèdre géométrique  $P$  s'identifie à la réalisation géométrique du complexe ordonné associé au schéma simplicial définissant  $P$ , avec un ordre total sur les sommets de  $P$ ).

Pour un morphisme de complexes  $f: K \rightarrow L$ , on note  $Tf: TK \rightarrow TL$  l'application (cellulaire) induite par  $(s, x) \mapsto (s, fx)$ .  $T$  est alors un foncteur de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{E}$ .

On montre facilement (voir [1]) :

- 1)  $T$  transforme les injections (resp. surjections) en monomorphismes (resp. épimorphismes stricts).
- 2)  $T$  préserve les limites gauches fines,
- 3)  $T$  préserve les limites droites.

En particulier,  $T$  admet un adjoint à droite  $S : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  appelé le *foncteur (complexe) singulier* ; explicitement, pour un espace topologique  $X$ ,  $SX = \mathcal{C}(B[.], X)$ . On note  $\mu : 1_{\mathcal{D}} \rightarrow ST$  et  $\nu : TS \rightarrow 1_{\mathcal{C}}$  les morphismes définissant cette adjonction.

Soit  $H$  la classe des équivalences faibles d'homotopie et soit  $\mathcal{K} = \mathcal{C}[H^{-1}]$  la catégorie homotopique. On rappelle le résultat classique de J.H.C. Whitehead [4] ; pour tout espace topologique  $X$ ,  $\nu_X : TSX \rightarrow X$  est une *équivalence faible d'homotopie*.

Soit  $\Theta$  la classe des morphismes de complexes  $f$  tels que  $Tf \in H$ . Alors,  $T$  induit un foncteur  $\bar{T}$  de  $\mathcal{P}[\Theta^{-1}]$  dans  $\mathcal{K}$ . D'autre part, pour une application continue  $f : X \rightarrow Y$ , on a le diagramme commutatif ci-dessous ; donc  $f \in H$  est équivalent à  $Sf \in \Theta$ .

$$\begin{array}{ccc}
 TSX & \xrightarrow{Tsf} & TSY \\
 \nu_X \downarrow & & \downarrow \nu_Y \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

En particulier,  $S$  induit un foncteur  $\bar{S}$  de  $\mathcal{K}$  dans  $\mathcal{P}[\Theta^{-1}]$  et  $\nu$  induit un isomorphisme de  $\bar{TS}$  dans  $1_{\mathcal{K}}$ . De plus, pour un complexe  $K$ ,  $\nu_{TK} T\mu_K = 1_{TK}$  donc  $T\mu_K \in H$  et par suite  $\mu_K \in \Theta$ . Il en résulte que  $\mu$  induit un isomorphisme de  $1_{\mathcal{P}[\Theta^{-1}]}$  dans  $\bar{ST}$ . Donc  $(\bar{T}, \bar{S}, \bar{\nu}, \bar{\mu})$  définit une équivalence entre les catégories  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{P}[\Theta^{-1}]$ .

5. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $T\Delta[n] = B[n]$ . Plus généralement, pour une petite catégorie  $A$ ,  $T\Delta A$  est appelé le *classifiant* de  $A$  et noté  $BA$ .  $B = T\Delta$  est un foncteur de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{P}$  qui préserve les produits finis ; en particulier,  $B(A \times I) = BA \times B[I] = (BA) \times I$ . En interprétant un morphisme fonctoriel  $h$  entre deux foncteurs  $f$  et  $g: A \rightsquigarrow C$  comme un foncteur de  $A \times I$  dans  $C$ , on en déduit que  $Bh: (BA) \times I \rightarrow BC$  est une homotopie entre  $Bf$  et  $Bg: BA \rightarrow BC$ . Par exemple, pour des foncteurs en adjonction  $f: A \rightarrow C$  et  $g: C \rightarrow A$ ,  $Bf$  et  $Bg$  sont des équivalences d'homotopie inverses l'une de l'autre ; en particulier, si  $A$  a un objet final ou initial,  $BA$  a le type d'homotopie de  $B[0] = \text{pt}$  ; donc  $BA$  est contractible.

Pour un complexe  $K$ , on a  $BEK = T\Delta EK = \coprod_m B[m] \times (\Delta EK)_m / \sim_m$  ; or, d'après le §3, on a  $(\Delta EK)_m = \coprod_p (\Delta E\Delta[p])_m \times K_p / \sim_p$  ; d'où  $BEK = \coprod_p (\coprod_m B[m] \times (\Delta E\Delta[p])_m / \sim_m) \times K_p / \sim_p = \coprod_p T\Delta E\Delta[p] \times K_p / \sim_p = \coprod_p BE\Delta[p] \times K_p / \sim_p = \lim_{\rightarrow EK} (BE\Delta)\pi_K$ .

Alors, l'application  $Tk_K: BEK \rightarrow TK = \coprod_p B[p] \times K_p / \sim_p$  est induite par les  $Tk_{\Delta[p]} = Bj_{[p]}$  de  $BE\Delta[p]$  dans  $B[p]$  qui sont des équivalences d'homotopie puisque  $E\Delta[p]$  et  $[p]$  ont des objets finaux ; par functorialité de ces équivalences d'homotopie,  $Tk_K: BEK \rightarrow TK$  reste une équivalence d'homotopie. On a donc montré :

Pour tout complexe  $K$ ,  $k_K: \Delta EK \rightarrow K$  appartient à  $\mathcal{O}$ .

Soit  $\Sigma$  la classe des foncteurs  $f$  tels que  $\Delta f \in \mathcal{O}$  (c'est-à-dire  $Bf \in \mathcal{H}$ ). Alors,  $\Delta$  induit un foncteur  $\bar{\Delta}$  de  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  dans  $\mathcal{P}[\mathcal{O}^{-1}]$ . D'autre part, pour un morphisme de complexes  $f: K \rightarrow L$ , on a le diagramme commutatif ci-dessous

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta EK & \xrightarrow{\Delta Ef} & \Delta EL \\
 \downarrow k_K & & \downarrow k_L \\
 K & \xrightarrow{f} & L
 \end{array}$$

et, puisque  $k_K$  et  $k_L$  appartiennent à  $\Theta$ ,  $\Delta Ef \in \Theta$  est équivalent à  $f \in \Theta$ . En particulier,  $E$  induit un foncteur  $\bar{E}$  de  $\mathcal{P}[\Theta^{-1}]$  dans  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  et  $k$  induit un isomorphisme de  $\bar{\Delta} \bar{E}$  dans  ${}^1 \mathcal{P}[\Theta^{-1}]$ . De plus, pour une petite catégorie  $A$ ,  $\Delta j_A = k_{\Delta A} \in \Theta$  donc  $j_A \in \Sigma$  et par suite,  $j$  induit un isomorphisme de  $\bar{E} \bar{\Delta}$  dans  ${}^1 \mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ . Par suite,  $(\bar{\Delta}, \bar{E}, k, (\bar{j})^{-1})$  définit une équivalence entre les catégories  ${}^2 \mathcal{P}[\Theta^{-1}]$  et  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ .

REMARQUE. - On notera que, si la première équivalence entre  $\mathcal{P}[\Theta^{-1}]$  et  $\mathcal{C}$  est induite par des foncteurs en adjonction entre  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{C}$ , l'équivalence entre  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  et  $\mathcal{P}[\Theta^{-1}]$  est induite par des foncteurs entre  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{P}$  qui ne sont pas en adjonction (bien que chacun d'eux admette un adjoint); la seule difficulté est, en fait, la construction et les propriétés des morphismes fonctoriels  $j$  et  $k$ . Le foncteur composé  $GS$  est bien connu: c'est le foncteur groupoïde fondamental; par contre, les foncteurs  $D$  et  $TD$  n'apparaissent pas dans la littérature.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] P. GABRIEL et M. ZISMAN, *Calculus of fractions and homotopy theory*, Erg. Dep. Math. Band 35, Berlin (Springer), 1967).
- [2] L. ILLUSIE, *Complexe cotangent et déformations*, II, Lect. Notes in Math., n° 283, Berlin (Springer), 1972.
- [3] G. SEGAL, *Classifying spaces and spectral sequences*, Publ. Math. de l'I.H.E.S., n° 34 (1968), p. 105-112.
- [4] J.H.C. WHITEHEAD, *Simplicial spaces, nuclei and  $\pi$ -groups*, Proc. London Math. Soc., (2) 45 (1939), p. 243-327.

Manuscrit remis le 25 septembre 1974

André ROUX  
Département de Mathématiques  
Université Claude Bernard - Lyon 1  
43, boulevard du 11 novembre 1918  
69621 - VILLEURBANNE