SAMUEL-DIEUDONNÉ EKONG

Sur les automorphismes de certains groupes algébriques affines semi-simples

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1974, tome 11, fascicule 3 , p. 29-38

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1974__11_3_29_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1974 t. 11-3

SUR LES AUTOMORPHISMES DE CERTAINS GROUPES ALGEBRIQUES AFFINES SEMI-SIMPLES

par Samuel-Dieudonné EKONG

Les notions d'automorphismes semi-simples et quasi-semi-simples ont été introduites par R. Steinberg dans [5] ; dans ce mémoire, il est prouvé que tout automorphisme semi-simple est quasi-semi-simple. Le but de ce travail est de montrer que dans une certaine classe de groupes algébriques affines connexes tout automorphisme quasi-semi-simple est aussi semi-simple.

1. - PRELIMINAIRES.

Tout les groupes considérés sont des groupes algébriques affines sur un corps K algébriquement clos au sens de [1] .

DEFINITION. - *On dit qu'un groupe algébrique* G *est algébriquement complet si*

(i) Le centre Z(G) *de* G *est réduit à l'élément neutre,*

(ii) tous les automorphismes (algébriques) de G *sont intérieures.*

PROPOSITION 1.1. - *Soit* G *un groupe algébrique affine, connexe et algébriquement complet.*

1°) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) G *est semi-simple ;*

b) G *est réductif.*

2°) G *est adjoint (i.e. isomorphe à son adjoint).*

Preuve. -

1°) C'est clair car le centre de G est trivial.

2°) Soit $\Pi : G \to H$ une isogénie centrale de G sur H ; G étant connexe, H est connexe et la trivialité du centre de G implique :

a) la trivialité du centre de H

b) que Π est un morphisme dominant injectif.

On en déduit donc que si K(G) (resp. K(H)) est le corps des fonctions rationnelles sur G (resp. sur H) le comorphisme Π_o de K(H) dans K(G) est un isomorphisme. Il existe alors, d'après [4, exposé 18], un isomorphisme de G sur H ; par conséquent G est isomorphe à son adjoint $\bar{G}$.

PROPOSITION 1.2. - *Soit* G *un groupe algébrique affine connexe sur un corps algébriquement clos de caractéristique* 0.

On suppose le centre Z(G) *de* G *trivial ; alors :*

a) Le groupe Aut(G) *des automorphismes (algébriques) de* G *est un groupe algébrique affine.*

b) Le groupe Int (G) *des automorphismes intérieurs de* G *est un sous-groupe connexe de* Aut(G).

c) Le centre $Z(Aut(G)^o)$ *de la composante connexe de l'élément neutre de* Aut(G) *est trivial.*

Preuve. - On sait, d'après [2], que sous ces hypothèses Aut(G) est un groupe algébrique affine et que l'application canonique ψ de G dans A t(G) qui a tout élément x de G associe l'automorphisme intérieur $\psi(x) = F_x$ est un morphisme de groupes affines.

b) Puisque G est connexe, on en déduit que son image $\psi(G) = \mathrm{Int}(G)$ est un sous-groupe connexe de Aut(G). La trivialité du centre Z(G) de G implique que le morphisme ψ est une bijection de G sur Int(G). Le centre de Int(G) est donc trivial et ψ est un isomorphisme (des groupes abstra abstraits sous - jacents) de G sur Int(G).

c) découle d'un résultat dû à G. Hochochild [3] : le centre de G étant trivial, le centralisateur $Z_{\mathrm{Aut}(G)}$ (Int(G)) de Int(G) dans Aut(G) est trivial ; puisque Int(G) est connexe, on a les inclusions suivantes :

$$\mathrm{Int}(G) \subset \mathrm{Aut}(G)^{\circ},$$

$$Z_{\mathrm{Aut}(G)}(\mathrm{Aut}(G)^{\circ}) \subset Z_{\mathrm{Aut}(G)}(\mathrm{Int}(G)) \quad ;$$

donc $Z_{\mathrm{Aut}(G)}(\mathrm{Aut}(G)^{\circ})$ est trivial et par conséquent $Z(\mathrm{A{\cdot}t}(G)^{\circ})$ est trivial.

2. - LE CAS DES GROUPES SEMI-SIMPLES ALGEBRIQUFMENT COMPLETS.

PROPOSITION 2.1. - *Soit* G *un groupe algébrique affine connexe algébriquement complet sur un corps algébriquement clos* .

1) Si la caractéristique de K *est* 0 *alors* Aut(G) = Int(G) *est un groupe algébrique affine connexe algébriquement complet.*

2) Si G *est semi-simple, tout automorphisme quasi-semi-simple de* G *est semi-simple.*

Preuve. -

1) La Première partie découle de la proposition 1.2 il existe d'autre part d'après la proposition 1.1 un isomorphisme f de G sur Int(G) . Soit ψ un automorphisme de Int(G) ; considérons la suite

$$G \xrightarrow{f} \mathrm{Int}(G) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Int}(G) \xrightarrow{f^{-1}} G$$

$f^{-1} \circ \psi \circ f$ est alors un automorphisme de G par conséquent il existe un unique élément x de G tel que $f^{-1} \circ \psi \circ f = F_x$ d'où

$$\psi = fF_xf^{-1}$$

$$\forall \alpha \in \mathrm{Int}(G)$$

$$\begin{aligned}\psi(\alpha) &= f(xf^{-1}(\alpha)\, x^{-1}) \\ &= f(x)\ \alpha\ f(x)^{-1} \\ &= F_{f(x)}\ (\alpha)\end{aligned}$$

donc $\psi = F_{f(x)}$, et par conséquent ψ est un automorphisme intérieur de Int(G) donc Int(G) est complet.

2) Si G est semi-simple et algébriquement complet, soit F un automorphisme de G. il existe un unique élément a de G tel que $F = F_a$. Si F

est quasi-semi-simple, il existe un sous-groupe de Borel B de G et un tore maximal T de G contenu dans B, F-invariants donc

$$F(B) = F_a(B) = aBa^{-1} = B \implies a \in B$$

$$F(T) = Fa(T) = aTa^{-1} = T \implies a \in N_G(T)$$ où $N_G(T)$ est le normalisateur de T dans G; comme $B \cap N_G(T) = Z_G(T)$ [1] et [4] où $Z_G(T)$ est le centralisateur de T dans G, on en déduit que a est un élément de $Z_G(T)$. G étant semi-simple $Z_G(T) = T$ donc a est un élément de T et par conséquent a est semi-simple donc $F = F_a$ est semi-simple.

THEOREME 1. - *Soit* G *un groupe algébrique affine sur un corps algébriquement clos*

1) Si un sous-groupe de Borel de G *est algébriquement complet, alors il en est de même de tous les sous-groupes de Borel de* G.

2) Si un sous-groupe de Borel de G *est algébriquement complet, alors, tout automorphisme de* G *qui laisse invariant un sous-groupe de Borel* B *et un tore maximal* T *contenu dans* B *, laisse invariant tout sous-groupe de Borel de* G *qui contient* T.

Preuve. -

1) Désignons par $\mathcal{B}$ l'ensemble des sous-groupes de Borel de G ; soit B un élément de $\mathcal{B}$; si B est algébriquement complet, le centre Z(B) de B est trivial par conséquent

$\forall B' \in \mathcal{B}$, $Z(B') = Z(G^\circ) = Z(B) = \{1\}$, où G° est la composante connexe de l'élément neutre 1. Les sous-groupes de Borel étant conjugués il existe un élément x de G tel que

$$B' = xBx^{-1}$$

désignons par F_x l'automorphisme intérieur $g \longrightarrow xgx^{-1}$ de G ; on a donc

$$B' = F_x(B)$$

Soit F' un automorphisme de B' , considérons la suite

$$B \xrightarrow{F_x} B' \xrightarrow{F'} B' \xrightarrow{F_{x-1}} B$$

$F = F_{x^{-1}} \circ F' \circ F_x$ est un automorphisme de B par conséquent, il existe un unique élément b de B tel que

$$F_{x^{-1}} \circ F' \circ F_x = F_b \quad ; \text{d'où}$$

$$F' = F_x \circ F \circ F_{x^{-1}} = F_{xbx^{-1}}$$

par conséquent F' est un automorphisme intérieur de B' ; donc B' est complet.

2) Si un sous-groupe de Borel B de G est algébriquement complet, d'après 1) tous les sous-groupes de Borel de B sont algébriquement complets.

Soient F un automorphisme de G, B un sous-groupe de Borel de G, T un tore maximal contenu dans B, F-invariants. La restriction F/B de F à B est un automorphisme de B ; donc $\exists !\, b \in B$, $F/B = F_b$.

Soient B' un sous-groupe de Borel de G, distinct de B et F' la restriction de F à B' ; puisque F(B') = F'(B') est un sous-groupe de Borel de G, il existe un élément y de G tel que $yF'(B')y^{-1} = B$; d'où la suite

$$B \xrightarrow{F_x} B' \xrightarrow{F'} F'(B') \xrightarrow{F_y} B$$

$F_y \circ F' \circ F_x$ est alors un automorphisme de B donc il existe un unique élément d de B tel que

$$F_y \circ F' \circ F_x = F_d$$

d'où $$F' = F_{y^{-1}dx^{-1}} \quad ; \text{ soit } C = y^{-1}\, d\, x^{-1}$$

La restriction de F à B' coïncide donc avec la restriction à B' de F_C ; explicitons l'élément C; on a $B' = x\, B\, x^{-1}$

$$\forall y \in B' \;,\quad \exists \beta \in B \;,\; y = x\, \beta\, x^{-1} \quad \text{d'où}$$

$$\begin{aligned} F(y) &= F(x)F(\beta)\, F(x)^{-1} \\ &= F(x)\; b\beta b^{-1} F(x)^{-1} \\ &= F(x) b x^{-1} x\beta x^{-1} x b^{-1} F(x)^{-1} \\ &= F_{F(x)bx^{-1}}(y) \end{aligned}$$

donc $C = F(x)bx^{-1}$.

Soit $\mathscr{B}^T$ l'ensemble (fini) des sous-groupes de Borel de G qui contiennent le tore maximal F-invariant T ; puisque F(T) est un tore maximal, on a F(T) = T ; si $B \in \mathscr{B}^T$ on a $F(T) = F_b(T) = bTb^{-1} = T$

On en déduit donc comme précédemment que b est un élément du centralisateur $Z_G(T)^\circ$ de T dans G.

Si B' appartient à $\mathscr{B}^T$, et est distinct de B, comme $Z_G(T)^\circ$ est contenu dans B' quelque soit l'élément B' de $\mathscr{B}^T$ [1] et [4] on en déduit que b appartient à B' ; si la restriction F/B' de F à B' est F_C alors

$\forall t \in T$, $btb^{-1} = CtC^{-1}$; mais $btb^{-1} = t$ donc $CtC^{-1} = t$ donc $C \in Z_G(T)^\circ CB'$ d'où F(B') = B'   c.q.f.d.

THEOREME 2. - *Soit Γ un groupe algébrique affine tel que Γ possède un sous-groupe de Borel algébriquement complet.*

a) si Γ est connexe, alors Γ est algébriquement complet,

b) si Γ est un sous-groupe connexe, normal, fermé d'un groupe algébrique affine G, Γ est un facteur direct.

Preuve. - Désignons par H l'holomorphe de Γ(i.e. le produit semi-direct $\Gamma \rtimes \mathrm{Aut}(\Gamma) = H$) on sait [2] que, en caractéristique 0, H est un groupe algébrique affine. Tout automorphisme de G est induit par un automorphisme intérieur de H donc : $\forall F \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$, $\exists h \in H$ tel que $F_h/\Gamma = F$; puisque tout automorphisme de Γ laisse invariant un sous-groupe de Borel B de Γ (d'après [5]) on a $F(B) = F_h(B) = B$; donc F_h/B est un automorphisme de B par conséquent il existe un unique élément b de B tel que :

$h x h^{-1} = b x b^{-1}$, $\forall x \in B$; donc $b^{-1}h$ centralise B et par conséquent $F_{b^{-1}h}(\gamma) = \gamma$, $\forall \gamma \in \Gamma$, donc

$$F_h/G = F_b = F$$

par conséquent tous les automorphismes de Γ sont intérieurs. Γ étant connexe le centre de Γ est le même que celui d'un de ses sous-groupes de Borel donc $Z(\Gamma) = \{1\}$ et par conséquent Γ est algébriquement complet.

b) Si Γ est un sous-groupe connexe normal fermé, d'un groupe algébrique affine G, Γ étant algébriquement complet (compte tenu de a/) est un facteur direct (ceci est un fait bien connu)

d'où

$$G = \Gamma \times Z \quad \text{où } Z \text{ est le centralisateur dand } G \text{ de } \Gamma.$$

THEOREM 3. - *Soit* G *un groupe algébrique affine réductif sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.*
Si un sous-groupe de Borel de G *est algébriquement complet, tout automorphisme quasi-semi-simple de* G *est semi-simple.*

Preuve. - Si G possède un sous-groupe de Borel algébriquement complet, alors, la composante connexe G° de l'élément neutre de G est un groupe algébriquement complet réductif. Soient B un sous-groupe de Borel de G et T un tore maximal de G contenu dans B ; désignons par S(B,T) l'ensemble des automorphismes quasi-semi-simples de G qui laissent simultanément invariant B et T. Puisque Aut(G) opère à gauche sur l'ensemble $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{C}$) des sous-groupes de Borel (resp. des tores maximaux) de G, S(B,T) est l'intersection des stabilisateurs de B et T dans Aut(G).

On sait [1] que : Aut(G) = Int(G). S(B,T) et que Aut(G)/Int(G) est un groupe fini. Par conséquent si F est un élément de S(B,T), la restriction de F à B est de la forme F_b où b est un élément de B appartenant au centralisateur connexe $Z_G(T)^{\circ} = T$, de T donc b est semi-simple ; soient

$\bar{F}$ la classe de F dans Aut(G)/Int(G) et m l'ordre de $\bar{F}$ alors F^m est un automorphisme intérieur de F par conséquent il existe un élément a de G, tel que

$F^m = F_a$ mais $F^m/B = F_b^m = F_{b^m}$ donc $a = zb^m$ où $z \in Z_G(B) = Z_G(G^\circ)$

comme $Z_G(G^\circ)$ est fini et que la caractéristique du corps de base est nulle, on en déduit que z est semi-simple donc F est semi-simple.

COROLLAIRE. - *Soit* G *un groupe algébrique affine semi-simple. Si* G *possède un sous-groupe de Borel algébriquement complet, alors tout automorphisme de* G *est produit d'un automorphisme intérieur et d'un automorphisme semi-simple.*

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. BOREL, *Linear algebraic groups*, W.A. BENJAMIN, Inc. (1969).

[2] G. HOCHSCHILD and G. MOSTOW, *Automorphisms of affine algebraic groups*, J. algebra, t. 13 (1969), p. 535-543.

[3] G. HOCHSCHILD, *Automorphism towers of affine algebraic groups*, J. Algebra, t. 22 (1972) ; p. 365-373.

[4] SEMINAIRE CHEVALLEY, *Classification des groupes de Lie algébriques*, Ecole Normale Supérieure, Paris, (1958), 2 vol.

[5] R . STEINBERG, *Endomorphisms of linear algebraic groups*, Mem. Math. Soc. n° 80 (1969).

S.D. EKONG
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11-novembre-1918
69621-VILLEURBANNE