PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

R. SEROUL

Anneau de cohomologie entière et KU^*-théorie d'un produit symétrique d'une surface de Riemann

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1972, tome 9, fascicule 4
, p. 27-66

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1972__9_4_27_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1972 t.9-4

ANNEAU DE COHOMOLOGIE ENTIERE ET KU^*-THEORIE D'UN PRODUIT SYMETRIQUE D'UNE SURFACE DE RIEMANN

par R. SEROUL

§ 0 - INTRODUCTION

Soient X un espace topologique et $n \geq 1$ un entier. Sur l'espace X^n , le groupe symétrique S_n opère de manière naturelle par permutation des coordonnées. On pose $X(n) = X^n/S_n$ et on dit que X(n) est le n-ième produit symétrique de X. Si X est une surface de Riemann de genre $g \geq 0$, A. MATTUCK [5] a prouvé que pour $n > 2g-2$, l'espace X(n) était muni d'une structure de fibré projectif complexe au-dessus de la jacobienne de X. Ce résultat et un résultat de A. GROTHENDIECK [2], qui affirme que l'on a un isomorphisme d'anneaux $H^*(X(n) ; \mathbb{Q}) \cong H^*(X^n;\mathbb{Q})^{S_n}$, ont permis à J.C. MACDONALD [4] de déterminer explicitement l'anneau de cohomologie $H^*(X(n);\mathbb{Z})$. Nous profitons de l'occasion pour signaler que la détermination de cet anneau de cohomologie nous semble incorrecte, faute d'avoir explicité des générateurs de $H^*(X(n);\mathbb{Z})$ (prop. 7.1. p. 326 [4]).

Le but de ce travail consiste, pour une surface de Riemann X,
(i) à déterminer l'anneau de cohomologie $H^*(X(n) ; \mathbb{Z})$ de manière élémentaire (i.e. sans avoir recours à la géométrie algébrique).
(ii) à déterminer l'anneau $KU^*X(n)$.

Voici une brève description de la méthode employée. La donnée d'un point de base $* \in X$ définit une injection canonique $v_n : X(n) \longrightarrow X(n+1)$ qui identifie X(n) à une sous-variété analytique fermée de codimension 1 de X(n+1). Si l'on

pose $X_o = X - \{*\}$, il est clair que l'on a $X_o(n+1) = X(n+1)-X(n)$. On désigne par $w_n : X_o(n) \longrightarrow X(n)$ l'injection canonique.

Cela dit, on dispose d'une suite exacte de Gysin (coefficients $\mathbb{Z}$ omis) :

$$(E) \quad \ldots \longrightarrow H^i X(n) \xrightarrow{(v_n)_*} H^{i+2}X(n+1) \xrightarrow{w^*_{n+1}} H^{i+2}X_o(n+1) \longrightarrow H^{i+1}X(n) \longrightarrow \ldots .$$

Puisque X est une surface de Riemann de genre $g \geq 0$, X_o se rétracte par déformation sur un bouquet de 2g cercles. Soit $T = S^1 \vee \ldots \vee S^1$ (2g fois) ce bouquet de cercles Le foncteur produit symétrique étant compatible avec les homotopies, il s'ensuit que $X_o(n)$ et $T(n)$ ont le même type d'homotopie. Afin de tirer un rendement maximum de la suite exacte de Gysin (E), nous explicitons entièrement l'anneau de cohomologie $H^*(T(n),\mathbb{Z})$ [§ 3]. Ensuite, en utilisant la suite exacte (E) et une récurrence sur l'entier n [§4], nous retrouvons le résultat de J.C. MACDONALD concernant l'anneau $H^*(X(n);\mathbb{Z})$.

Cette méthode, convenablement transposée [§5], permet de prouver que l'anneau $KU^*X(n)$ est isomorphe à l'anneau $H^*(X(n);\mathbb{Z})$.

Citons aussi le théorème curieux que voici [§2] : si X est une variété topologique de dimension >0 et si $n \geq 2$ est un entier, alors X(n) est une variété topologique si et seulement si dim X = 2 , ce qui justifie à posteriori la considération de surfaces de Riemann.

Pour terminer, l'auteur du présent travail voudrait remercier J.P. JOUANOLOU pour la gentillesse et la patience dont il a fait preuve.

§ 1 - ANNEAUX DE MACDONALD

1.0 - Généralités et conventions.

Dans ce paragraphe, la lettre g désigne un entier $\geqslant 0$, fixé une fois pour toutes. Considérons l'algèbre $\mathbb{N}$-graduée

$$E = \Lambda(X_1,\ldots,X_{2g})\ [Y]\ ,$$

où $X_1,\ldots,X_{2g}$ sont de degré 1 et où Y est de degré 2 (si $g = 0$, on a simplement $E = \mathbb{Z}\ [Y]$). Dans E, considérons l'idéal :

$$\mathcal{A}_1 = \sum_{i-j \neq \pm g} E.X_iX_j + \sum_{1 \leqslant i \leqslant g} E.(X_iX_{i+g} - Y)$$

et posons

$$A_1 = E/\mathcal{A}_1.$$

Soit n un entier $\geqslant 1$. Le groupe symétrique S_n opère de manière naturelle sur l'anneau $\overset{n}{\otimes} A_1$. Dans son travail [4], MACDONALD donne une présentation explicite du sous-anneau A_n de $(\overset{n}{\otimes} A_1)^{S_n}$ engendré par les éléments de degrés 1 et 2. Le but de ce paragraphe est de retrouver les principales propriétés des anneaux A_n à l'aide de leur seule présentation.

Introduisons quelques notations. Pour $1 \leqslant i \leqslant g$, on définit les éléments de E

$$X_i' = X_{i+g}\ ,\quad S_i = X_iX_i'\ ,\quad Z_i = S_i - Y\ .$$

La lettre J désigne l'ensemble $\{1,\ldots,g\}$ si $g > 0$ et l'ensemble vide si $g = 0$. Sauf mention explicite du contraire, les lettres A, B, C désignent trois parties deux à deux disjointes de l'ensemble J. Par contre, sauf mention explicite du contraire, les lettres U et V désignent deux parties non nécessairement disjointes de l'ensemble J. Si X est un ensemble fini, on désigne par n_X son cardinal.

Ainsi, avec les notations précédentes, on a : $0 \leqslant n_A + n_B + n_C \leqslant g$ et $0 \leqslant n_U + n_V \leqslant 2g$.

De façon classique, on définit dans E les éléments

$$X_A = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad A = \emptyset . \\ X_{i_1} \ldots X_{i_a} \quad \text{si} \quad A = \{i_1 < \ldots < i_a\} \end{cases}$$

et de manière analogue on définit les éléments X'_B , S_C , Z_C , X_U, X'_V , etc..

Avec ces notations, si i est un entier, $1 \leqslant i \leqslant 2g$, une base de $\overset{i}{\Lambda}(X_1,\ldots,X_{2g})$. est constituée :

- soit par les éléments de la forme $X_U X'_V$ avec $n_U + n_V = i$,
- soit par les éléments de la forme $X_A X'_B S_C$ avec $n_A + n_B + 2n_C = i$.

Soit n un entier $\geqslant 1$. Dans l'algèbre E, considérons l'idéal

$$\mathcal{a}_n = \sum_{n_A+n_B+2n_C+q = n+1} E.\ X_A X'^{n_B}_B Z^{n_C}_C Y^q$$

et appelons anneau de MACDONALD l'anneau

$$A_n = E/\mathcal{a}_n .$$

Si le besoin s'en fait sentir, nous utiliserons la notation $A_n(g)$ afin d'exhiber l'entier $g \geqslant 0$. Il est clair que l'anneau de MACDONALD A_n est un anneau $\mathbb{N}$-gradué, unitaire, commutatif (au sens des anneaux gradués!) et qu'il est engendré en tant qu'anneau par les classes des éléments $X_1,\ldots,X_{2g}$ et Y de E. Afin de ne par surcharger les notations, nous désignerons par les lettres $x_1,\ldots,x_{2g}$ et y ces classes.

Si A est un anneau $\mathbb{N}$-gradué, on appelle anneau tronqué en degrés $> n$ déduit de A l'anneau

$$A^{\leqslant n} = A \ / \text{ idéal des termes de degré} > n.$$

Il est facile de s'assurer que dans l'algèbre E on a l'égalité suivante entre idéaux :

$$\mathcal{C}_n + (y) = (x_U x'_V \ : n_U + n_V = n+1) + (y).$$

Par conséquent, on a des isomorphismes d'anneaux gradués :

1.0.1. - $E/\mathcal{C}_n + (y) \overset{\sim}{=} \wedge(X_1,\ldots,X_{2g})/(X_U X'_V : n_U + n_V = n+1) \cong \wedge^{\leq n}(X_1,\ldots,X_{2g})$.

1.1. - PROPOSITION 1.1.1. (MACDONALD) - *Soit* i *un entier. Pour* i=2n, *on a un isomorphisme* $A_n^{2n} \overset{\sim}{=} \mathbb{Z}$. *D'une manière plus précise, l'élément* y^n *est un générateur de* A_n^{2n} *et si* $x_A x'_B s_C y^q$ *est de degré* 2n , *on a* $x_A x'_B s_C y^q = 0$ *si* $A \cup B \neq \emptyset$, *et* $s_C y^q = y^n$.

Preuve. Posons pour simplifier $m = x_A x'_B s_C y^q$. Prouvons que y^n engendre A_n^{2n} . Comme on peut écrire $m = \pm\, x_{A\cup C} x'_B y^q .\ x'_C$, on a m = 0 dans A_n dès que $n_{A\cup C} + n_B + q > n$. Si m est de degré 2n, on a $n_A+n_B+2n_C+2q = 2n$. On en tire $n_{A\cup C}+n_B+q = n+\frac{1}{2}(n_A+n_B)$, ce qui prouve que m = 0 si $A \neq \emptyset$ ou si $B \neq \emptyset$. Supposons maintenant $A = B = \emptyset$ et m de degré 2n et soit $2n_C+2q = 2n$. Si $n_C > 0$, on a $z_C y^q = 0$ dans A_n , puisque $2n_C+q = n+n_C > n$. De là, on déduit facilement par une récurrence sur l'entier n_C que l'on a l'égalité $s_C y^q = y^n$ dans A_n^{2n}.

Prouvons maintenant que l'on a un isomorphisme $A_n^{2n} \overset{\sim}{=} \mathbb{Z}$. Pour cela, on remarque que l'on peut considérer l'anneau $\mathbb{Z}[y]$ comme un sous-anneau de E. En outre, il est clair que dans E, on a l'égalité $\mathbb{Z}.y^{n+1} = \mathcal{C}_n \cap \mathbb{Z}[y]$. L'injection canonique $\mathbb{Z}[y] \longrightarrow E$ induit, par passage au quotient, un monomorphisme $\mathbb{Z}[y] / y^{n+1} \longrightarrow A_n$ qui est un isomorphisme en degré 2n.

Prouvons enfin que l'on a $A_n^i = 0$ en degrés i > 2n. Supposons m de degré > 2n, i.e. $n_A+n_B+2n_C+2q > 2n$. En vertu de ce qui précède, on a m = 0 si $A \neq \emptyset$ ou si $B \neq \emptyset$. Il reste à envisager le cas $m = s_C y^q$ avec $2n_C+2q > 2n$. Toujours en vertu de ce qui précède, on a $m = y^{q+n_C}$, d'où m = 0 puisque dans A_n, on a $y^{n+1} = 0$.

COROLLAIRE. - *Dans l'anneau* A_n, *si* $z_U s_V y^q$ *est de degré* $2n$, *on a*

$$z_U s_V y^q = (-1)^{n_U} i(U,V) Y^n ,$$

l'entier $i(U,V)$ *("indicateur d'inclusion") étant défini de la manière suivante :*

$$i(U,V) = \begin{cases} 0 & \text{si } U \not\subset V , \\ 1 & \text{si } U \subset V . \end{cases}$$

Preuve. On la fait par récurrence sur le cardinal de U. Si $n_U = 0$, il s'agit de 1.1.1. Ensuite. si k est un entier, $1 \leq k \leq g$, on peut écrire

$$z_k z_U s_V y^q = (s_k - y) z_U s_V y^q = s_k z_U s_V y^q - z_U s_V y^{q+1} .$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, cela s'écrit encore :

$$(-1)^{n_U} i(U,V \cup k) \{1 - i(k,V)\} y^n - (-1)^{n_U} i(U,V) y^n .$$

Le corollaire résulte alors de l'égalité :

$$i(U,V \cup k)(1 - i(k,V)) - i(U,V) = - i(U \cup k, V).$$

L'inclusion $\mathcal{A}_{n+1} \subset \mathcal{A}_n$ dans E, donne naissance, pour $n \geq 1$, à une suite exacte d'anneaux gradués

$$1.1.3 \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{A}_n / \mathcal{A}_{n+1} \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{V^*} A_n \longrightarrow 0$$

où l'homomorphisme v^* est déterminé (avec des abus évidents de notation) par les égalités.

$$V^*(x_i) = x_i \qquad 1 \leq i \leq 2g \qquad \text{et} \qquad v^*(y) = y .$$

Nous avons besoin d'informations concernant le noyau de v^*. Comme on a l'inclusion $y \mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$ dans l'algèbre E, le produit dans E induit un accouplement pour tout entier i

$$1.1.4. \qquad (\mathcal{A}_n / \mathcal{A}_{n+1})^{2(n+1)-i} \otimes_{\mathbb{Z}} (E/\mathcal{A}_{n+1} + (y))^i \longrightarrow (E/\mathcal{A}_{n+1})^{2(n+1)} .$$

Compte tenu des isomorphismes 1.0.1 et 1.1.1
$E/\mathcal{C}_{n+1}{}^+(y) \cong \overset{\leq n+1}{\wedge}(X_1,\ldots,X_{2g})$.

$(E/\mathcal{C}_{n+1})^{2(n+1)} \cong \mathbb{Z}$, on voit que l'accouplement 1.1.4 définit des homomorphismes de groupes abéliens

1.1.5. $$(\mathcal{C}_n/\mathcal{C}_{n+1})^{2(n+1)-i} \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(\overset{\leq n+1}{\wedge}(X_1,\ldots,X_{2g}))^i,\mathbb{Z}).$$

PROPOSITION. 1.1.6. - *Pour tout entier* $0 \leq i \leq n+1$, *le groupe abélien* $(\mathcal{C}_n/\mathcal{C}_{n+1})^{2(n+1)-i}$ *est de rang* $\geq \binom{2g}{i}$.

Preuve. Pour prouver l'inégalité $\mathrm{rang}(\mathcal{C}_n/\mathcal{C}_{n+1})^{2(n+1)-i} \geq \binom{2g}{i}$ pour $0 \leq i \leq n+1$, il suffit de prouver que les homomorphismes 1.1.5 sont surjectifs. Tout d'abord considérons les éléments de E.

1.1.6.1. $X_A X'_B S_C$ avec $n_A+n_B+2n_C = i$.

Il est clair que les classes des éléments 1.1.6.1. forment une base de $(E/\mathcal{C}_{n+1}{}^+(Y))^i \cong \overset{i}{\wedge}(X_1,\ldots,X_2)$. Considérons alors les éléments de E.

1.1.6.2. $X_B X'_A Z_C Y^{n+1-i}$ avec $n_A+n_B+2n_C = i$.

Les égalités $n_A+n_B+2n_C+(n+1-i) = n+1$ et $n_A+n_B+2n_C+2(n+1-i)=2(n+1)-i$ prouvent que les éléments 1.1.6.2. définissent des éléments de $(\mathcal{C}_n/\mathcal{C}_{n+1})^{2(n+1)-i}$.

La surjectivité des homomorphismes 1.1.5 résulte des congruences mod $\mathcal{C}_{n+1}$.

1.1.6.3. $$X_B X'_A Z_C Y^{n+1-i} \,.\, X_{A'} X'_{B'} S_{C'} \equiv \begin{cases} \pm Y^{n+1} & \text{si } (A,B,C) = (A',B',C'), \\ 0 & \text{si } (A,B,C) \neq (A',B',C'). \end{cases}$$

Les conditions sur les indices étant évidemment $n_A+n_B+2n_C = n_{A'}+n_{B'}+2n_{C'}=i$. (moralement, les classes des éléments 1.1.6.2 jouent le rôle d'une base duale pour la base formée des classes des éléments 1.1.6.1). Prouvons les congruences 1.1.6.3. Pour commencer, si $(A,B,C) = (A',B',C')$, on déduit de 1.1.2 que l'on a

$$X_B X'_A Y^{n+1-i} \cdot X_A X'_B S_C = \pm Z_C S_{A\ B\ C}\ Y^{n+1-i} \equiv \pm Y^{n+1} \mod \mathcal{O}_{n+1} .$$

Si $(A.B) \neq (A',B')$, on voit facilement à paritr de 11.1 que la congruence 1.1.6.3. est vérifiée . Enfin, si $(A,B) = (A',B')$, toujours en vertu de 1.1.2 , on a $X_B X'_A Z_C Y^{n+1-i} \cdot X_A X'_B S_{C'} \equiv \pm i(C, A \cup B \cup C')\ Y^{n+1} \mod \mathcal{O}_{n+1}$.
Si $C \neq C'$, on a nécessairement $i(C, A \cup B \cup C') = 0$, d'où le résultat.

1.2.

PROPOSITION 1.2.1 - *Il existe un unique morphisme de groupes abéliens gradués, de degré = +2*

$$V_* : A_n \longrightarrow A_{n+1} .$$

(i) $V_*(V^*a) = V_*(1).a$ *pour tout* $a \in A_{n+1}$ (formule de projection).
(ii) $V_*(1) = y$,

En outre, l'image de V_* *est un idéal de* A_{n+1} *et on a un isomorphisme d'anneaux gradués.*

$$A_{n+1}/\text{im } V_* \cong \bigwedge^{\leq n+1} (X_1,\ldots,X_{2g}).$$

Preuve. La condition $V_*(V^*a) = a\,y$ pour $a \in A_{n+1}$ prouve l'unicité de V_* car on sait que V^* est surjectif. L'inclusion $y\,\mathcal{O}_n \subset \mathcal{O}_{n+1}$ dans E prouve que dans l'anneau A_{n+1} on a $y.\text{Ker}V^* = 0$, i.e. que l'égalité $V^*a = V^*a'$ implique l'égalité $ay = a'y$. Cela prouve donc l'existence de V_* . Il est clair que l'image de V_* est l'idéal principal (y) de A_{n+1}. Par conséquent on a des isomorphismes d'anneaux gradués

$$A_{n+1}/\text{im } V_* \cong E/\mathcal{O}_{n+1}+(Y) \cong \bigwedge^{\leq n+1} (X_1,\ldots,X_{2g}).$$

PROPOSITION 1.2.2. - *Soit* n *un entier* ≥ 1. *Alors :*

(i) l'homomorphisme $v_* : A_n \longrightarrow A_{n+1}$ *est un monomorphisme.*

(ii) l'anneau A_n *est sans torsion, et pour tout entier* $0 \leq i \leq n$ *on a*

$$\operatorname{rg} A_n^i = \operatorname{rg} A_n^{2n-i} = \binom{2g}{i} + \binom{2g}{i-2} + \dots$$

(on rappelle que $\binom{n}{i} = \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{i!}$ est le coefficient du binôme de Newton).

Preuve. L'assertion (ii) est vrair pour l'entier n= 1. Supposons l'assertion (ii) vraie pour l'entier n. Nous allons montrer que cela implique l'assertion (i) pour l'entier n et l'assertion (ii) pour l'entier n+1.

Désignons par

1.2.2.1. $$w^* : A_{n+1} \longrightarrow \bigwedge^{\leq n+1}(X_1,\dots,X_{2g})$$

l'épimorphisme d'anneaux gradués déduit de 1.2.1. Soit K le noyau de v_*. Pour tout entier i, d'après 1.2.1. nous pouvons écrire une suite exacte

1.2.2.2. $$0 \longrightarrow K^{i-2} \longrightarrow A_n^{i-2} \xrightarrow{v_*} A_{n+1}^i \longrightarrow \left(\bigwedge^{\leq n+1}(X_1,\dots,X_{2g})\right)^i \longrightarrow 0$$

d'où l'égalité

$$\operatorname{rg} K^{i-2} = \operatorname{rg} A_n^{i-2} + \operatorname{rg}\left(\bigwedge^{\leq n+1}\right)^i - \operatorname{rg} A_{n+1}^i .$$

Compte tenu de 1.1.3 cela s'écrit encore

1.2.2.3. $$\operatorname{rg} K^{i-2} = \operatorname{rg} A_n^{i-2} - \operatorname{rg} A_n^i + \operatorname{rg}\left(\bigwedge^{\leq n+1}\right)^i - \operatorname{rg}(\mathcal{I}_n/\mathcal{I}_{n+1})^i .$$

Par hypothèse de récurrence, le rang de A_n est connu en tous degrés. La proposition 1.1.6. fournit une minoration du rang de $(\mathcal{I}_n/\mathcal{I}_{n+1})^i$; utilisant 1.2.2.3., on voit que $\operatorname{rg} K^{i-2} \leq 0$ quel que soit l'entier i. Par conséquent, puis A_n est supposé libre, cela prouve que l'on a $K = 0$, i.e. v^* est un monomorphisme. Sachant maintenant que K = 0, l'assertion (ii) relative à l'entier n+1 est une conséquence immédiate de 1.2.2.2.

En résumé, nous avons le

THEOREME . 1.2.3. - *Pour tout entier* $n \geqslant 1$ *et tout entier* $g \geqslant 0$, *l'anneau de MACDONALD* $A_n(g)$ *est sans torsion. En outre, si* i *est un entier, on a*

$$\operatorname{rg} A_n^i = \operatorname{rg} A_n^{2n-i} = \binom{2g}{i} + \binom{2g}{i-2} + \ldots \qquad \textit{pour} \quad 0 \leqslant i \leqslant n$$

et $A_n^i = 0$ *pour* $i > 2n$.

1.3 Remarque. Soient $n \geqslant 1$ et $g \geqslant 0$ deux entiers et soit $A_n(g)$ l'anneau de MACDONALD associé à ces entiers. Supposons donnés :

(1.3.1) un anneau A , $\mathbb{N}$-gradué, commutatif et unitaire.

(1.3.2) un épimorphisme d'anneaux gradués

$$v^* : A \longrightarrow A_n(g)$$

(1.3.3) un monomorphisme de groupes abéliens gradués, de degré + 2

$$v_* : A_n(g) \longrightarrow A$$

tel que l'on ait une "formule de projection"

$$v_*(v^* a) = v_*(1).a$$

pour tout $a \in A$. On suppose aussi que l'on a, dans l'anneau $A_n(g)$, l'égalité

$$v^* v_*(1) = y.$$

(1.3.4) un isomorphisme d'anneaux gradués

$$A/\operatorname{im} v_* \overset{\sim}{=} \bigwedge^{\leqslant n+1} (X_1, \ldots, X_{2g}).$$

où les éléments $X_1, \ldots, X_{2g}$ sont de degré 1.

On peut se demander si, dans ces conditions, l'anneau A est isomorphe à l'anneau $A_{n+1}(g)$ de MACDONALD. (On disposerait ainsi d'une définition récurrente des anneaux de MACDONALD). Malheureusement, la réponse est mitigée, ainsi que le prouve la

PROPOSITION 1.3.5. - *Soient* $n \geqslant 1$ *et* $g \geqslant 0$ *deux entiers et* (A, v^*, v_*), *satisfaisant aux conditions 1.3.1 à 1.3.4.*

(i) Si $n \geqslant 2g-1$, *l'anneau* A *est isomorphe à l'anneau de MACDONALD* $A_{n+1}(g)$.

(ii) Si $n = 1$ *et* $g = 2$ *pour tout entier* $k \in \mathbb{Z}$ *, considérons, dans l'algèbre* E, *l'idéal*

$$\mathcal{C}(k) = \sum_{i \neq j} E.X_i(S_j - kY) + \sum_{i \neq j} E\, X_i'(S_j - kY) + \sum_{n_A+n_B+2n_C=2} E.X_A X_B' Z_C Y .$$

Alors l'anneau A *est isomorphe à l'un des anneaux* $E/\mathcal{C}(k)$. *Réciproquement, pour tout entier* k, *il existe* v^* *et* v_* *tels que* $(E/\mathcal{C}(k), v^*, v_*)$ *vérifient les conditions 1.3.1 à 1.3.4.*

Preuve. - Les conditions 1.3.3 et 1.3.4 permettent d'écrire une suite exacte d'objets $\mathbb{N}$-gradués

1.3.5.1 $$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{v_*} A \xrightarrow{w^*} \bigwedge^{\leq n+1} (X_1, \ldots X_{2g}) \longrightarrow 0$$

où v_* est un morphisme de groupes abéliens, de degré +2, et où w^* est un morphisme d'anneaux gradués. La considération de 1.3.5.1 prouve aussitôt que

1.3.5.2 *l'anneau* A *est sans torsion et pour tout entier* i *on a* $rgA^i = rgA^i_{n+1}(g)$.

Puisque le groupe A^1 est libre de rang 2g, la condition 1.3.2 prouve que $v^* : A^1 \longrightarrow A^1_n$ est un isomorphisme. Par conséquent, cela permet de définir une base de A^1, notée $x_1, \ldots, x_{2g}$ par abus de notation, telle que $v^* x_i = x_i \quad 1 \leq i \leq 2g$. De même, en degré 1, $w^* : A^1 \longrightarrow \bigwedge^1(X_1, \ldots, X_{2g})$ est un isomorphisme. Cela permet de supposer que l'on a $w^* x_i = X_i$ $1 \leq i \leq 2g$. Enfin, avec un abus de notation, posons $y = v_*(1)$ dans A^2. D'après 1.3.3, on a donc $v^* y = y$. Prouvons maintenant que

1.3.5.3 *Les éléments* $x_1, \ldots, x_{2g}$ *et* y *engendrent* A *en tant qu'anneau* .

Pour cela, soit $a \in A$. On peut écrire $w^* a = P(x_1, \ldots, x_{2g})$ où P est un polynôme à coefficients entiers. En vertu de 1.3.5.1, on a alors $a = P(x_1, \ldots, x_{2g}) + v_*(Q(x_1, \ldots, x_{2g}, y))$ où Q est aussi un polynôme à coefficients entiers. Les égalités dans A_n $v^* x_i = x_i$ et $v^* y = y$ ainsi que la formule de projection, prouvent alors aussitôt que l'on a dans l'anneau A

$$a = P(x_1, \ldots, x_{2g}) + v_*(1).Q(x_1, \ldots, x_{2g}, y) = P(x_1, \ldots, x_{2g}) + yQ(x_1, \ldots, x_{2g}, y).$$

Définissons un homomorphisme d'anneaux gradués

$$f : E = \Lambda(X_1,\dots,X_{2g})[Y] \longrightarrow A$$

en posant $fX_i = x_i$ $1 \leqslant i \leqslant 2g$ et $fy = y$. D'après 1.3.5.3, f est un épimorphisme. Supposons avoir prouvé que f s'annule sur l'idéal $\mathcal{J}_{n+1}$ de E. Par passage au quotient, f induit un épimorphisme d'anneaux $A_{n+1}(g) \longrightarrow A$. Alors 1.3.5.2 prouve que cet épimorphisme est un isomorphisme.
Si $q > o$ est un entier, on peut écrire dans l'anneau A
$x_A x'_B z_C y^q = v_*(x_A x'_B z_C y^{q-1})$. Par conséquent

1.3.5.4 *dans l'anneau* A *on a* $x_A x'_B z_C y^q = 0$ dès que $n_A+n_B+2n_C+q = n+2$ *et* $q > o$.

Supposons $n \geqslant 2_{g-1}$ et prouvons que l'idéal $\mathcal{J}_{n+1}$ de E est alors engendré par les éléments $x_A x'_B z_C y^q$ tels que $n_A+n_B+2n_C+q = n+2$ et $q > o$.

Compte tenu de 1.3.5.4, nous aurons ainsi prouvé l'assertion (i). Nous avons $n_A+n_B+n_C \leqslant g$, ce qui implique $n+2 \leqslant g+n_C+q \leqslant 2g+q$. Comme $n \geqslant 2g-1$, on en déduit aussitôt que $q > o$.
Avant de passer à la démonstration de l'assertion (ii), prouvons tout d'abord le résultat suivant :

1.3.5.5 *pour tout entier* $o \leqslant i \leqslant n+1$, *la multiplication par* y^i *dans l'anneau* A *réalise un isomorphisme de* A^{n+1-i} *sur* A^{n+1+i}.

Ce résultat se démontre par récurrence sur l'entier n. Soit $a \in A^{n+1+i}$. Si on suppose $i \geqslant 1$, on a un isomorphisme $v_* : A_n^{n+i-1} \longrightarrow A^{n+i+1}$ en vertu de 1.3.5.1. Sachant d'autre part que la multiplication par y^{i-1} dans A_n réalise un isomorphisme de A_n^{n-i+1} sur A_n^{n+i-1} , on voit qu'on peut écrire $a = v_*(y^{i-1}.t)$ avec un $t \in A_n$ convenable. En utilisant la formule de projection, on obtient $a = y^i.a'$ avec $a' \in A$ convenable. Par conséquent, la multiplication par Y^i dans A induit un épimorphisme de A^{n+1-i} sur A^{n+1+i}. A cause de 1.3.5.2, cet épimorphisme est un isomorphisme.

Prouvons l'assertion (ii) : nous supposons désormais $n = 1$ et $g = 2$. Une base de A^1 est formée par les x_i $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ et une base de A^2 est formée par les $x_i x_j$ $1 \leqslant i < j \leqslant 4$ et y. En vertu de 1.3.5.5, on voit qu'une base de A^3 est formée par les $x_i y$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ et que y^2 est un générateur de A^4.

Nous pouvons alors écrire

$$s_1x_2 = n_1x_1b + n_2x_2b + n'_1x'_1b + n'_2x'_2b.$$

En multipliant cette égalité par x_i ($1 \leq i \leq 4$), et en tenant compte des égalités $s_iy = y^2$ $i = 1,2$ et $x_Ax'_By = o$ si $n_A+n_B = 2$ dues à 1.3.5.4, il est facile de voir que l'on a nécessairement $s_1x_2 = kx_2y$ et $s_1s_2 = ky^2$ avec $k \in \mathbb{Z}$. De même, on s'assure que l'on a nécessairement les égalités :

$$s_1x'_2 = kx'_2y \qquad s_2x_1 = kx_1y \qquad s_2x'_1 = kx'_1y.$$

Par conséquent , ces égalités, ainsi que les égalités dûes à 1.3.5.4 prouvent que l'on a un épimorphisme d'anneaux gradués $f : E/\mathcal{C}(k) \to A$ déterminé par $fx_i = x_i$ et $fy = y$. Nous allons maintenant prouver que l'anneau $E/\mathcal{C}(k)$ étant donné, il existe v^* et v_* tels que les conditions 1.3.1 et 1.3.4 soient satisfaites. Cela prouvera aussitôt que l'émimorphisme f est un isomorphisme. Traduits en termes d'idéaux de E, les propriétés 1.3.2 à 1.3.4 se réénoncent ainsi :

1.3.2' on a une inclusion $\mathcal{C}(k) \subset \mathcal{C}_1$.

1.3.3' la condition $a.Y \in \mathcal{C}(k)$ implique $a \in \mathcal{C}_1$.

1.3.4' on a l'égalité $\mathcal{C}(k)+(Y) = (X_UX'_V : n_U+n_V = 3) + (Y)$.

Les propriétés 1.3.2' et 1.3.4' se vérifient facilement. Reste à prouver 1.3.3'. Comme on a $\mathcal{C}_1^i = E^i$ pour $i \geq 3$, on voit qu'on peut supposer a de degré 1 ou 2 seulement. Si a est de degré 1, il est facile de s'assurer que la condition $aY \in \mathcal{C}(k)$ implique $a = o$. Si a est de degré 2, puisque $\mathcal{C}_1$ contient tous les termes $X_AX'_B$ de degré 2, on voit que l'on peut se borner à examiner le cas où $a = n_1S_1+n_2S_2+nY$. On a alors $aY = n_1(S_1-Y)Y+n_2(S_2-Y)Y+(n+n_1+n_2)Y^2 = n_1Z_1Y+n_2Z_2Y+(n+n_1+n_2)Y^2$. Comme Z_1Y et Z_2Y sont dans $\mathcal{C}(k)$, la relation $ay \in \mathcal{C}(k)$ exige $(n+n_1+n_2)Y^2 \in \mathcal{C}(k)$. On voit facilement que cela exige $n+n_1+n_2=0$, d'où $a = n_1Z_1+n_2Z_2 \in \mathcal{C}_1$. Terminons cette démonstration par deux *remarques*.

Tout d'abord, l'anneau $A_2(2)$ *de MACDONALD est l'anneau* $E/\mathcal{O}(1)$. Ensuite, considérons l'homomorphisme $p : \otimes^3(E/\mathcal{O}(k))^1 \to (E/\mathcal{O}(k))^3$ induit par le produit dans l'anneau $E/\mathcal{O}(k)$. Par définition même l'image de P est d'indice k^4 dans $(E/\mathcal{O}(k))^3 \cong Z^4$. *Cela prouve que pour* $0 \leq h < k$, *les anneaux* $E/\mathcal{O}(h)$ *et* $E/\mathcal{O}(k)$ *ne sont pas isomorphes.*

§ 2. PRODUITS SYMETRIQUES.

2.0. - Définitions et notations.

Soient X un espace topologique et $n \geq 1$ un entier. Sur l'espace X^n le groupe symétrique S_n opère de manière naturelle en permutant les coordonnées. L'espace quotient

$$X(n) = X^n/S_n$$

s'appelle n-ième produit symétrique de l'espace X. On note

$$q_n : X^n \longrightarrow X(n)$$

la projection canonique. Ainsi, $X(1) = X$ et $q_1 = id$. Par convention, on pose

$$X^\circ = X(o) = \text{un point} \quad q_o = id.$$

Se donner un point de X(n) revient à se donner n points de X, sans considérations d'ordre. Plus précisément, on voit, en regroupant les points confondus, que la donnée d'un point de X(n) consiste en la donnée :

- de r points de X ; $x_1, \ldots, x_r$ deux à deux distincts
- d'entiers $k_i \geq 1$ "(l'ordre de multiplicité de x_i") tels que

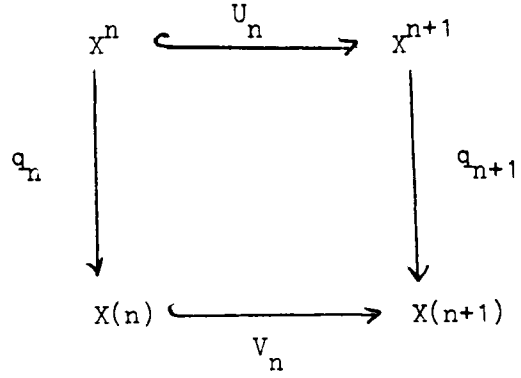
$$k_1 + \ldots + k_r = n.$$

De façon abrégée, nous noterons $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un point de X(n), ou bien $\{x_1(k_1), \ldots, x_r(k_r)\}$ s'il est besoin de plus de précision.

Supposons maintenant -X muni d'un point base, noté $*$, et posons

$$X_o = X + \text{point base.}$$

La donnée d'un point base dans X permet de définir le diagramme commutatif suivant



où $u_n(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_n,*)$ et $V_n\{X_1,\ldots,X_n\} = \{X_1,\ldots,X_n,*\}$.
L'injection (canonique) $V_n : X(n) \hookrightarrow X(N+1)$ permet d'identifier $X(n)$ à un sous espace fermé de $X(n+1)$. Il est alors clair que l'on a

$$X_o(n+1) = X(n+1) \setminus X(n)$$

On désignera par

$$w_n : X_o(n) \hookrightarrow X(n)$$

l'injection canonique.

Sauf mention explicite du contraire, les groupes de cohomologie H^*X désignent les groupes de cohomologie entière $H^*(X;\mathbb{Z})$ de l'espace X. Il est clair que l'homomorphisme image réciproque q_n^* en cohomologie. définit un homomorphisme, encore noté q_n^* par abus de notation, tel que

$$q_n^* : H^*(X(n);\mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(X^n;\mathbb{Z})^{S_n} .$$

2.1 - Quelques résultats généraux sur la cohomologie d'un produit symétrique.

Commençons par rappeler un résultat qui est un corollaire immédiat d'un théorème de GROTHENDIECK [2] (voir aussi [4]).

THEOREME 2.1.1.(GROTHENDIECK). *Soit* X *un espace séparé. Pour tout entier* $n \geq 2$, *l'homomorphisme image réciproque*

$$q_n^* : H^*(X(n);\mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(X^n;\mathbb{Q})^{S_n}$$

est un isomorphisme en cohomologie rationnelle;

Ce théorème a permis à MACDONALD [3] de déterminer explicitement les nombres de Betti de X(n), connaissant ceux de X. Son résultat s'énonce ainsi :

THEOREME 2.1.2 (MACDONALD) - *Soit* X *un espace séparé tel que* $H^*(X,\mathbb{Q})$ *soit de dimension finie et soient* b_i , $i \geq 0$, *ses nombres de Betti. Alors, le polynôme de Poincaré* $P(X(n),x)$ *de l'espace* X(n) *est le coefficient de* t^n *dans le développement en série entière de la fraction rationnelle*

$$\frac{(1+xt)^{b_1}\,(1+x^3t)^{b_3}\ldots}{(1-t)^{b_0}\,(1-x^2t)^{b_2}\ldots}$$

2.2. - Quand un produit symétrique est-il une variété topologique ?

Soit X un espace. On pose

$$\Gamma X = CX - X \tilde{=} (X \times \mathbb{R}_+)/X \times 0$$

($\mathbb{R}_+$ désigne l'ensemble des nombres réels ≥ 0), et on dit que ΓX est le "cône illimité" de base X. Avec cette notation on a le

LEMME . 2.2.1. - *Pour tout entier* $n \geq 1$ *et tout entier* $p \geq 1$ *, on a des homéomorphismes :*

(i) $\mathbb{R}(n) \tilde{=} \mathbb{R}_+^{n-1} \times \mathbb{R}$

(ii) $\mathbb{R}^2(n) \tilde{=} \mathbb{R}^{2n}$

(iii) $\mathbb{R}^p(2) \tilde{=} \Gamma\mathbb{R}P^{p-1} \times \mathbb{R}^p$.

Preuve. Dans le cas (i), un homéomorphisme est donné par l'application $(t_1,\ldots,t_n) \longmapsto \{t_n, t_n - t_{n-1}, \ldots, t_n - (t_{n-1}+\ldots+t_1)\}$.
Dans le cas (ii), il s'agit de l'homéomorphisme bien connu $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}(n)$ qui consiste à associer à chaque polynôme complexe unitaire de degré n l'ensemble de ses racines. Enfin, dans le cas (iii), un homéomorphisme $\Gamma\mathbb{R}P^{p-1} \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p(2)$ est fourni par $(\pm u, t, v) \longmapsto \{v+tu, v-tu\}$ avec $u \in S^{p-1}$, $t \in \mathbb{R}_+$ et $v \in \mathbb{R}^p$.

THEOREME 2.2.2 - *Soit* X *une variété topologique de dimension* $p \geq 1$ *et soit* $n \geq 2$ *un entier. Alors* X(n) *est une variété topologique (nécessairement de dimension* np*) si et seulement si* p = 2.

Preuve. Tout d'abord, puisque X est un espace séparé, il en est de même de X(n). Considérons un point de X(n) de la forme $\{x_1(k_1),\ldots,x_r(k_r)\}$. Puisque X est une variété de dimension p, il est possible de trouver des voisinages ouverts $U_1,\ldots,U_r$ des points $x_1,\ldots,x_r$ respectivement, deux à deux disjoints et homéomorphes à $\mathbb{R}^p$. De cela, on déduit que les ouverts de X(n)

$$q_n(U_1^{k_1} X \ldots X U_r^{k_r}) \cong U_1(k_1) X \ldots X U_r(k_r)$$

forment un système fondamental de voisinages du point $\{x_1(k_1),\ldots x_r(k_r)\}$ dans X(n). Si p = 2, il est clair en vertu de 2.2.1 que X(n) est une variété de dimension 2n. Supposons maintenant que X(n) soit une variété de dimension np avec $p \neq 2$. En considérant un point de X(n) de la forme $\{x_1(2),x_2,\ldots,x_{n-1}\}$ on voit que l'espace $W = \mathbb{R}^p(2) \times \mathbb{R}^{(n-2)p}$ doit être homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^{np}$. Si p = 1, grâce à 2.2.1, on peut écrire $W = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$. A cause de l'invariance du domaine, W ne peut pas être homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Supposons alors $p \geq 3$. En utilisant 2.2.1, on voit que $W = \Gamma\mathbb{R}P^{p-1} \times \mathbb{R}^{(n-1)p}$ est homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^{np}$. Par conséquent, puisque W est une variété connexe orientable de dimension np, la dualité de Poincaré montre que l'on a un isomorphisme $H^r X \cong \mathrm{Hom}(H_C^{np-r} W,\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Ext}(H_C^{np-r+1} W ; \mathbb{Z})$.

Comme W est contractile, cela exige pour $r \geq 0$ $\mathrm{Ext}(H_C^{np-r+1}W,\mathbb{Z}) = 0$.

Faisant $r = p-2 > 0$, il vient $H_C^{(n-1)p+3}W \cong H_C^3 \Gamma\mathbb{R}P^{p-1} \cong H^2\mathbb{R}P^{p-1} \cong \mathbb{Z}$

d'où une contradiction puisque l'on a $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$.

§ 3. ANNEAU DE COHOMOLOGIE ENTIERE D UN PRODUIT SYMETRIQUE D'UN BOUQUET DE CERCLES.

3.1. Soit T un bouquet de k cercles (k entier ≥ 1), i.e.

$$T = S^1 v \ldots v S^1 ,$$

Le point base de Z étant le point commun aux cercles. Ainsi, on a

$$T_o = \mathbb{R} \amalg \ldots \amalg \mathbb{R} \quad (k \text{ fois}).$$

Commençons par identifier la cohomologie à supports compacts de $T_o(n)$. Pour cela, nous avons besoin du lemme suivant, de preuve facile :

LEMME 3.1.1. - *Considérons un espace topologique, somme de* k *sous-espaces*

$$X = X_1 \amalg \ldots \amalg X_k.$$

Alors, pour tout entier $n \geq 0$, *on a un homéomorphisme*

$$X(n) \cong \coprod_{\substack{i_1 \geq 0, \ldots, i_n \geq 0 \\ i_1 + \ldots + i_k = n}} X_1(i_1) \times \ldots \times X_k(i_k) .$$

En considérant 3.1.1 avec 2.2.1 et la formule de Künneth, on arrive tout de suite à la :

PROPOSITION .3.1.2. - *Pour tout entier* $n \geq 1$ *on a un isomorphisme*

$$H^i_c(T_o(n) ; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{\binom{k}{n}} & \text{si } i = n \\ 0 & \text{si } i \neq n. \end{cases}$$

(on rappelle que l'on a $\binom{k}{n} = \frac{1}{n!} k(k-1)\ldots(k-n+1)$ et que par conséquent $\binom{k}{n} = 0$ si $n > k$,

On peut remarquer que 3.1.2. est en accord avec le théorème 2.1.2 (encore valable en cohomologie à supports compacts) de MACDONALD. En effet, ce théorème prouve que le polynôme de Poincaré $P(T_o(n),x)$ de $T_o(n)$ est de coefficient de t^n dans k développement en série entière de

$$(1+xt)^k = 1+\binom{k}{1}xt + \ldots + \binom{k}{n}x^n t^n + \ldots$$

3.2. - Déterminons maintenant les groupes de cohomologie de T(n). Toujours d'après 2.1.2, le polynôme de Poincaré $P(T(n),\mathbf{X})$ de T(n) est le coefficient de t^n dans le développement en série entière de $(1+xt)^k/1-t$. Autrement dit, on a :

3.2.1. $$P(T(n),\mathbf{X}) = 1+\binom{k}{1}X + \ldots+\binom{k}{n}X^n.$$

Il reste à régler le problème de la torsion de T(n). Nous allons prouver par récurrence sur l'entier n que l'espace T(n) est sans torsion. Tout d'abord $T(1) = S^1 \vee \ldots \vee S^1$ est sans torsion. Supposons alors T(n) sans torsion. On peut écrire une suite exacte illimitée :

3.2.2. $$\ldots \to H_C^i T_o(n+1) \longrightarrow H^i T(n+1) \xrightarrow{v_n^*} H^i T(n) \longrightarrow H_C^{i+1} T_o(n+1) \longrightarrow \ldots .$$

La considération de 3.2.2 et de 3.1.2 prouve que, pour $i > n+1$. D'après ou $i \neq 1 < n+1$, l'homomorphisme de restriction $v_n^* : H^i T(n+1) \to H^i T(n)$ est un isomorphisme. Pour $i = n, n+1$, on peut écrire un bout de 3.2.2. :

$$0 \longrightarrow H^n T(n+1) \xrightarrow{v_n^*} H^n T(n) \longrightarrow H_C^{n+1} T_o(n+1) \to H^{n+1} T(n+1) \longrightarrow 0 .$$

Puisque par hypothèse $H^n(T(n))$ est libre, il en est de même de $H^n(T.(n+1))$. D'après 3.2.1, les groupes $H^n(T.(n))$ et $H^n T(n+1)$ ont même rang $\binom{k}{n}$. On en déduit aussitôt que l'on a des isomorphismes

$$v_n^* : H^n T(n+1) \xrightarrow{\sim} H^n T(n) \quad \text{et} \quad H_C^{n+1} T_o(n+1) \xrightarrow{\sim} H^{n+1} T(n+1).$$

On peut remarquer que le deuxième isomorphisme prouve que 3.1.2 et 3.2.1 sont en accord. En résumé, on a la

PROPOSITION 3?2?3. - *Pour tout entier $n \geq 1$, les groupes de cohomologie entière de T(n) sont sans torsion et leur rang est donné par 3.2.1. En outre, l'homomorphisme de restriction*

$$v_1^* : H^*(T(n+1);\mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(T(n);\mathbb{Z})$$

est un isomorphisme en degrés $\neq n+1$.

3.3. - Occupons-nous maintenant d'anneaux de cohomologie. Commençons par l'anneau $H^*(T,\mathbb{Z})$. Soit $t_1,\ldots,t_k$ une base de H^1T. Puisque l'on a $H^iT = 0$ dès que $i>1$, il est clair que les éléments $t_1,\ldots,t_k$ engendrent H^*T en tant qu'anneau et qu'ils sont soumis aux relations $t_i.t_j = 0 \quad 1 \leqslant i,j \leqslant k$. En appliquant la formule de Künneth $H^*(T^n,\mathbb{Z}) \cong \overset{n}{\otimes} H^*(T,\mathbb{Z})$, on voit que H^*T^n est engendré, en tant qu'anneau, par les éléments de degré 1

3.3.2. $$t_{ir}(n).t_{js}(n) = 0 \quad \text{ssi} \quad r = s \ .$$

Afin de soulager les notations, nous écrirons dans la suite t_{ir} au lieu de $t_{ir}(n)$. L'action du groupe symétrique S_n sur H^*T^n est donnée par la formule

3.3.3. $$s.t_{ir} = t_{i\,s^{-1}(r)} \qquad \text{si} \qquad s \in S_n .$$

Cela permet de définir les éléments de $(H^1T^n)^{S_n}$

$$\bar{t}_i = t_{i1} + \ldots + t_{in} \ . \qquad 1 \leqslant i \leqslant k \ .$$

Enfin, il est clair que l'homomorphisme de restriction

$u_n^* : H^*T^{n+1} \longrightarrow H^*T^n$ se décrit comme suit

3.3.4. $$u_n^* t_{ir}(n+1) = \begin{cases} t_{ir}(n) & \text{si} \quad 1 \leqslant r \leqslant n \ , \\ 0 & \text{si} \quad r = n+1 \ . \end{cases}$$

En vertu de 3.2.3, on a des isomorphismes

$$H^1T. \xleftarrow[\sim]{v_1^*} H^1T(2) \xleftarrow[\sim]{v_2^*} \ldots \xleftarrow{\sim} H^1T(n) \xleftarrow[\sim]{v_n^*} H^1T(n+1) \xleftarrow{\sim} \cdots \ .$$

Cela permet de définir, par récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$, une base $t_1(n),\ldots,t_k(n)$ de $H^1(T(n);\mathbb{Z})$ telle que l'on ait

3.3.6. $$\begin{cases} t_i(1) = t_i \\ v_n^* t_i(n+1) = t_i(n) \end{cases} \qquad 1 \leqslant i \leqslant k$$

Une fois de plus, afin de soulager les notations, nous ferons l'abus de notations consistant à omettre l'indice n dans la notation $t_i(n)$.

LEMME 3.3.6. -

(i) *pour tout entier* $n \geq 1$, *les éléments* $\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_k$ *forment une base de* $H^1(T^n;\mathbb{Z})^{S_n}$.

(ii) *si* $n = k$, *k produit* $\bar{t}_1, \ldots \bar{t}_k$ *est un générateur de* $H^k(T^k,\mathbb{Z})^{S_k}$.

(iii) *pour tout entier* $n \geq 1$, *on a la formule (avec les abus de notations déjà signalés)*

$$q_n^* t_i = \bar{t}_i .$$

Preuve. - Prouvons (i). pour cela, soit $x \in (H^1T^n)^{S_n}$. En vertu de 3.3.1, on peut écrire $x = \sum_{i,r} n_{ir} t_{ir}$ avec $n_{ir} \in \mathbb{Z}$. Si $s \in S_n$, on peut écrire d'après 3.3.3 $s.x = \sum_{i,r} n_{ir} t_i s^{-1}(r)$. Si x est invariant sous l'action de S_n, on doit avoir $s.x = x$ quel que soit $s \in S_n$, i.e. x est une combinaison linéaire des éléments $\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_k$. Le reste de la démonstration est évident.

Pour prouver (ii), supposons que l'on ait $n = k$. Soit $I = (i_1, \ldots, i_k) \subset \{1, \ldots, k\}^k$ un multi-indice et posons

$$t_I = t_{i_1,1}\, t_{i_2,2} \cdots t_{i_x,k} .$$

A cause des relations 3.3.2, les éléments de la forme t_I forment une base de H^kT^k. Le groupe symétrique S_k opère de façon naturelle sur l'ensemble produit $\{1, \ldots k\}^k$ par permutation des coordonnées. Les relations 3.3.3 montrent que si $s \in S_k$ on a

$$s.\, t_I = e_s\, t_{s.I}$$

où e_s désigne la signature de la permutation s. Si $x \in H^kT^k$, on a $x = \sum n_I t_I$, la sommation portant sur tous les multi-indices I. Cherchons à quelles conditions x est invariant sous l'action de S_k.

Par exemple, considérons la permutation s = (1.2). On peut écrire :

$$x = \sum_{i_1 = i_2} n_I t_I + \sum_{i_1 \neq i_2} n_I t_I$$

$$s.x = - \sum_{i_2 = i_1} n_I t_I - \sum_{i_2 \neq i_1} n_I t_I .$$

Par conséquent, la relation x = s.x exige que l'on ait $n_I = o$ chaque fois que $i_1 = i_2$.dans le multi-indice I. En considérant les autres transpositions de S_k, on voit immédiatement qu'une condition nécessaire pour que x soit invariant est que l'on ait $n_I = 0$ chaque fois que deux indices sont égaux dans le multi-indice I. Par conséquent si x est invariant, on peut écrire $x = \sum' n_s t_{s(i,\ldots,k)}$ la sommation portant sur toutes les permutations $s \in S_k$. Soit $u \in S_k$ et exprimons que l'on a u.x = x. Il vient

$$\sum n_s t_{s(1,\ldots,k)} = \sum e_u n_s t_{ns(1,\ldots,k)}$$

ce qui exige les égalités $n_s = e_s . n i_d$

Par conséquent, on peut écrire :

$$x = n \sum_s' e_s t_{s(1,\ldots,k)} = n \sum_s' t_{1s(1)} t_{2s(2)} \cdots t_{ks(k)} = n \bar{t}_1 \cdots \bar{t}_k .$$

L'assertion (iii) se prouve par récurrence sur l'entier n. Pour n = 1, on a $\bar{t}_i = y\, t_i$ et $q_1^* = id$. Supposons alors l'assertion vraie pour l'entier n et considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (H^1T^1)^{S_n} & \xleftarrow{u_n^*} & (H^1T^{n+1})^{S_{n+1}} \\ \uparrow q_n^* & & \uparrow q_{n+1}^* \\ H^1T(n) & \xleftarrow{v_n^*} & H^1T(n+1) \end{array}$$

Avec les abus de notations déjà signalé, on a d'après 3.3.4 $u_n^* \bar{t}_i = \bar{t}_i$ pour $1 \leq i \leq k$. Par conséquent, d'après l'assertion (i) , u_n^* induit un isomorphisme sur les sous-groupes des invariants de degré 1. On peut alors écrire

$$q_{n+1}^* t_i = (u_n^*)^{-1} q_n^* v_n^* t_i \qquad \text{(commutativité du diagramme).}$$

$$= (u_n^*)^{-1} q_n^* t_i \qquad (3.3.5)$$

$$= (u_n^*)^{-1} \bar{t}_i \qquad \text{(récurrence)}$$

$$= \bar{t}_i \qquad (3.3.4) .$$

Avant d'arriver au résultat f ivial de ce numéro, nous avons besoin d'un lemme de nature algébrique.

LEMME 3.3.7. - *Soit* A *un anneau* $\mathbb{Z}$*-gradué, commutatif et unitaire. On suppose qu'en degrés* $i < 0$ *on a* $A^i = 0$ *et qu'il existe un entier* $k \geq 0$ *tel qu'en degrés* $i \geq 0$, A^i *soit libre de rang* $\binom{k}{i}$. *Soit* $a_1, \ldots, a_k$ *une base de* A^1 *et considérons le morphisme d'anneaux gradués*

$$f : \Lambda(X_1, \ldots, X_k) \longrightarrow A$$

(où $X_1, \ldots, X_k$ *sont de degré* 1*) défini par* $fX_i = a_i \quad 1 \leq i \leq k$. *Si le produit* $a_1 \ldots a_k$ *est un générateur de* A^k , *alors* f *est un isomorphisme d'anneaux gradués.*

Preuve. - Soit I une partie de $\{1, \ldots k\}$ et posons de façon classique

$$a_I = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad I = \emptyset , \\ a_{i_1} \ldots a_{i_\ell} & \text{si} \quad I = \{i_1 < i_2 < \ldots < i_\ell\} . \end{cases}$$

Si I est une partie de $\{1, \ldots, k\}$ désignons par I^c son complémentaire. Enfin, soit b un générateur de $A^k \cong \mathbb{Z}$. Avec ces notations, il est clair que l'on a

$$a_I . a_{Jc} = \begin{cases} \pm b & \text{si} \quad J = I \\ 0 & \text{si} \quad J \neq I \quad \text{et} \quad n_J = n_I . \end{cases}$$

(cela vient de ce que A^k est libre). Prouvons tout d'abord que la relation $a_1 \ldots a_k \neq 0$ implique que f est un monomorphisme. Il revient au même de prouver que pour chaque entier $1 \leq \ell \leq k$, les éléments a_I avec $n_I = \ell$ sont linéairement indépendants dans A^ℓ. Soit $\sum_{n_I = \ell} n_I a_I = 0$. Alors si $n_{I_o} = \ell$, on peut écrire :

$$\sum_{n_I = \ell} n_I \, a_{Ic_o} \, a_I = \pm n_{I_o} \, a_1 \ldots a_k = 0.$$

On en conclut $n_{I_o} = 0$, puisque A^k est sans torsion. Supposons prouvé que la relation $a_1 \ldots a_k = \pm b$ implique que l'image de f est un facteur direct du groupe abélien libre A. On en déduira aussitôt la surjectivité de f puisqu'en chaque degré im f de A ont même rang. Pour prouver que im f est un facteur direct de A, il suffit de prouver que im f est pur dans A. Soit donc $a \in A$ tel qu'il existe un entier $n \neq 0$ tel que $n.a \in$ im f On peut supposer a homogène de degré $1 \leq \ell \leq k$, ce qui permet d'écrire $n.a = \sum_{n_I = \ell} n_I . a_I$. En multipliant cette égalité par a_{Ic_o} avec $n_{I_o} = \ell$ il vient $n\, a_{Ic_o} = \sum n_I \, a_I \, a_{Ic_o} = \pm n_{I_o} \, b$. Comme aa_{Ic_o} est de degré k, on en déduit que n divise n_{I_o}, d'où le résultat

THEOREME 3.3.8 - *Soit* T *un bouquet de* k *cercles. Pour tout entier* $n \geq 1$, *on a un isomorphisme d'anneaux gradués*

$$H^*(T(n), \mathbb{Z}) \cong \overset{\leq n}{\Lambda} (t_1, \ldots, t_k).$$

où $t_1, \ldots, t_k$ *est la base de* $H^1(T(n); Z)$ *définie par 3.3.5.*

Preuve.- Supposons avoir prouvé le théorème lorsque n = k. Compte tenu de 3.2.3. et de 3.3.5. , le cas général en résulte aussitôt. Si n = k, prouvons que l'anneau $H^*T(K)$ remplit toutes les conditions du lemme 3.3.7. Tout d'abord en vertu de 3.2.3. $H^*T.(k)$ est libre et $rg.H^iT(k) = \binom{k}{i}$ pour $i \geq 0$. Reste à prouver que le produit $t_1 \ldots t_k$ est un générateur de $H^kT(k)$. Notant t un générateur de $H^kT(k)$, on peut écrire : $t_1 \ldots t_k = a.t$ avec $a \in \mathbb{Z}$. Par image réciproque on obtient $q_k^*(t_1 \ldots t_k) = a\, q_k^* t$, et comme on peut écrire $q_k^* t = b\, \bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_k$ d'après 3.3.6 (ii) avec $b \in \mathbb{Z}$, il vient, en utilisant 3.3.6. (iii) ; $\bar{t}_1 \ldots \bar{t}_k = ab\, \bar{t}_1 \ldots \bar{t}_k$. Par conséquent, on aura ab = 1, ce qui prouve le résultat.

3.4. Remarque.

Soient $Z_1,\ldots,Z_k$ k nombres complexes, deux à deux distincts, et posons :

$$U_k = \mathbb{C} - \{Z_1,\ldots,Z_k\}.$$

L'ouvert U_k a même type d'homotopie qu'un bouquet de k-cercles, soit T. Le produit symétrique étant compatible avec les homotopies, on en déduit que $U_k(n)$ a même type d'homotopie que T(n) pour tout entier $n \geq 1$. Utilisant l'homomorphisme 2.2.1. $\mathbb{C}(n) \cong \mathbb{C}^n$, il n'est pas difficile de donner une description de $U_k(n)$ en termes d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$. A cet effet, soient $\omega_1,\ldots,\omega_k$ les formes linéaires non homogènes sur $\mathbb{C}^n$ suivantes

$$\omega_i(X_1,\ldots,X_n) = X_1 + Z_iX_2 + Z_i^2X_3 + \ldots + Z_i^{n-1}X_n + Z_i^n .$$

Il est clair que $U_k(n)$ est homéomorphe à l'ouvert de $\mathbb{C}^n$ complémentaire des hyperplans affines d'équation $\omega_i = 0 \quad 1 \leq i \leq k$.

Le théorème 3.3.8 nous montre que l'anneau de cohomologie entière de cet ouvert est une algèbre extérieure sur k éléments de degré 1, tronquée en degrés $> n$.

§ 4. - ANNEAU DE COHOMOLOGIE ENTIERE D'UN PRODUIT SYMETRIQUE D'UNE SURFACE DE RIEMANN.

4.1. - Généralités.

Dans tout ce qui suit, sauf mention explicite du contraire, la lettre X désigne une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 0$. Rappelons [4] que l'on munit canoniquement X(n) d'une structure de variété analytique compacte de dimension complexe n. Si de plus on s'est donné un point base $* \in X$, l'injection canonique $v_n : X(n) \hookrightarrow X(n+1)$ identifie X(n) à une sous variété analytique fermée de codimension 1 de X(n+1).

Rappelons aussi [4] la structure d'anneau de $H^*(X^n ; \mathbb{Z})$. Pour n = 1 elle se décrit ainsi : on peut choisir une base $x_1,\ldots,x_{2g}$ de $H^1(X;\mathbb{Z})$ et un générateur y de $H^2(X;\mathbb{Z})$ tels que le cup-produit soit donné par les formules

$$x_ix_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i-j \neq \pm g, \\ y & \text{si } 1 \leq i \leq g \text{ et } j = i+g. \end{cases}$$

Appliquant la formule de Künneth $H^*(X^n;Z) \simeq \otimes H^*(X;Z)$, on en déduit que $H^*(X^n;\mathbb{Z})$ est engendré, en tant qu'anneau, par les éléments

$$4.1.1. \quad \begin{cases} x_{ir}(n) = 1 \otimes \dots \otimes x_i \otimes \dots \otimes 1, \\ y_r(n) = 1 \otimes \dots \otimes y \otimes \dots \otimes 1 . \end{cases}$$

avec x_i et y à la r-ième place , $1 \leq i \leq 2g$, $1 \leq r \leq n$. Toujours afin de soulager les notations, nous omettrons le plus souvent l'indice n dans les notations $x_{ir}(n)$ et $y_r(n)$. Les éléments 4.1.1. sont soumis aux relations

$$4.1.2. \quad \begin{cases} x_{ir}x_{js} = 0 \quad \text{ssi} \quad i-j \neq \pm g \quad \text{et} \quad r = s , \\ x_{ir}\, x_{i+g,r} = y_r \quad 1 \leq i \leq g. \quad 1 \leq r \leq n . \end{cases}$$

Le groupe symétrique S_n opère sur $H^*(X^n ; \mathbb{Z})$ de la manière suivante $(s \in S_n)$:

$$4.1.3. \quad \begin{cases} s.\, x_{ir} = x_{i,\bar{s}^1(r)} , \\ s\, y_r = y_{\bar{s}^1(r)} . \end{cases}$$

Cela permet d'introduire les éléments suivants de $H^*(X^n;\mathbb{Z})^{S_n}$

$$4.1.4. \quad \begin{cases} \bar{x}_i = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} \qquad (1 \leq i \leq 2g) , \\ \bar{y} = y_1 + y_2 + \dots + y_n . \end{cases}$$

Enfin, l'homomorphisme de rectriction $u_n^* : H^*(X^{n+1};\mathbb{Z}) \to H^*(X^n;\mathbb{Z})$ est déterminé par les formules

$$4.1.5. \quad \begin{cases} u_n^*\, x_{ir}(n+1) = \begin{cases} x_{ir}(n) & \text{si} \quad r < n+1 , \\ 0 & \text{si} \quad r = n+1 . \end{cases} \\ u_n^*\, y_r(n+1) = \begin{cases} y_r(n) & \text{si} \quad r < n+1 , \\ 0 & \text{si} \quad r = n+1 . \end{cases} \end{cases}$$

4.2. La proposition suivante est immédiate.

PROPOSITION 4.2.1. -

(i) Pour tout entier $n \geq 1$, *les éléments* $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{2g}$ *forment une base de* $H^1(X^n;\mathbb{Z})^{S_n}$, *l'homomorphisme de restriction*

$$u_n^* : H^1(X^{n+1};\mathbb{Z})^{S_{n+1}} \longrightarrow H^1(X^n;\mathbb{Z})^{S_n}$$

est un isomorphisme et on a l'égalité $u_n^* \bar{x}_i = \bar{x}_i$.

(ii) Pour tout entier $n \geq 2$, *les éléments* $\bar{x}_i\bar{x}_j$ *avec* $1 \leq i \leq j \leq 2g$ *et* $\bar{y}$ *forment une base de* $H^2(X_n ; \mathbb{Z})^{S_n}$; *l'homomorphisme de restriction*

$$U_n^* : H^2(X^{n+1};\mathbb{Z})^{S_{n+1}} \longrightarrow H^2(X^n ;\mathbb{Z})^{S_n}$$

est un isomorphisme et on a les égalités $U_n^*(\bar{x}_i\bar{x}_j) = \bar{x}_i\,\bar{x}_j$ *et* $U_n^* \bar{y} = \bar{y}$.

Remarque. On peut facilement prouver [4] que les éléments $\bar{x}_i\,\bar{x}_j$ $1 \leq i \leq j \leq 2g$ et $\bar{y}$, considérés comme éléments de $H^*(X^n,\mathbb{Q})$ engendrent le sous-anneau $H^*(X^n,\mathbb{Q})^{S_n}$. Ce résultat devient faux si on remplace $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{Z}$.

PROPOSITION 4.2.2. - *L'homomorphisme de rectriction.*

$$v_1^* : H^1(X(n+1);\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X(n);\mathbb{Z})$$

est un isomorphisme en degré 1 *pour* $n \geq 1$.

Preuve. - Si X est une surface de Riemann de genre $g \geq 0$, $X_o = X - \{*\}$ a même type d'homotopie qu'un bouquet de 2g cercles. Comme le foncteur produit symétrique est compatible avec les homotopies, 3.3.8 prouve que

4.2.2.1. $H^*(X_o(n);\mathbb{Z})$ *est une algèbre extérieure sur* 2g *éléments de degré* 1, *tronquée en degrés* $> n$. Comme $X_o(n)$ est une variété topologique connexe, orientable, de dimension réelle 2n, la dualité de Poincaré prouve que l'on a des isomorphismes

4.2.2.2. $$H_c^i(X_o(n);\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \bigwedge^{2n-i} \mathbb{Z}^{2g} & \text{si} \quad n \leq i \leq 2n \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Ceci dit, nous pouvons écrire une suite exacte pour $n \geq 1$

$$0 = H_n^1 X_o(n+1) \longrightarrow H^1X(n+1) \xrightarrow{v_n^*} H^1X(n) \longrightarrow H_c^2 X_o(n+1)$$

Cela prouve déjà que pour $n \geq 1$, v_n^* est injectif en degré 1. En considérant 2.1.1. et 4.2.1 (ou en utilisant directement 2.1.2), on voit que les groupes $H^1X(n+1)$ et $H^1X(n)$ ont même rang $2g$. Comme 4.2.2.2. prouve que $H_c^2 X_o(n+1)$ est libre, on en déduit que v_n^* est surjectif en degré 1.

La proposition 4.2.2. prouve que pour $n \geq 1$, on a des isomorphismes

$$H^1X \xleftarrow[\sim]{v_1^*} H^1X(2) \xleftarrow{\sim} \cdots \xleftarrow{\sim} H^1X(n) \xleftarrow[\sim]{v_n^*} H^1X(n+1) \xleftarrow{\sim} \cdots$$

Cela prouve aussitôt que $H^1X(n)$ est libre de rang $2g$. En outre, on peut définir par récurrence sur l'entier n, une base $X_1(n)\ldots X_{2g}(n)$ de $H^1X(n)$ en posant

4.2.3. $$\begin{cases} x_i(1) = x_i \ , \\ v_n^* \, x_i(n+1) = x_i(n) \qquad \text{avec} \quad 1 \leq i \leq 2g \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{et } n \geq 1. \end{cases}$$

Avec l'abus de notation qui consiste à oublier la lettre n dans la notation $x_i(n)$, on a tout de suite la proposition :

PROPOSITION. 4.2.4. - *Pour tout entier* $n \geq 1$, *l'homomorphisme image réciproque*

$$q_n^* : H^1(X(n);\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X^n;\mathbb{Z})^{S_n}$$

est un isomorphisme. D'une manière plus précise, on a les égalités :

$$q_n^* \, x_i = \bar{x}_i \qquad 1 \leq i \leq 2g \ .$$

Preuve. - Elle se fait par récurrence sur l'entier n de façon semblable à la démonstration de 3.3.6 (iii).

COROLLAIRE . 4.2.5. - *Pour tout entier* $n \geq 1$, *l'homomorphisme de restriction*

$$w_n^* : H^*(X(n);\mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(X_o(n);\mathbb{Z}).$$

est un émimorphisme. De plus, c'est un isomorphisme en degré 1.

Preuve. - En vertu de 4.2.2.1., il nous suffit de prouver que w_n^* est un isomorphisme en degré 1. Pour cela, considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (H^1X^n)^{S_n} & \xrightarrow{\text{restriction}} & (H^1X_o^n)^{S_n} \\ \uparrow{\scriptstyle q_n^*} & & \uparrow{\scriptstyle (q_n|X_o^n)^*} \\ H^1X(n) & \xrightarrow[w_n^*]{} & H^1X_o(n) \end{array}$$

D'après 4.2.4, q_n^* est un isomorphisme. De même, 3.3.6 (iii) prouve que $(q_n|X_o^n)^*$ est un isomorphisme. Enfin, il est clair que l'homomorphisme de restriction $(H^1X^n)^{S_n} \longrightarrow (H^1X_o^n)$ est lui aussi un isomorphisme. D'où le résultat.

PROPOSITION 4.2.6. - *Pour tout entier* $n \geq 1$ *on a une suite exacte courte de Gysin.*

$$4.2.6.1. \qquad 0 \to H^*(X(n);\mathbb{Z}) \xrightarrow{(v_n)_*} H^*(X(n+1);\mathbb{Z}) \xrightarrow{w_{n+1}^*} H^*(X_o(n+1);\mathbb{Z}) \to 0 ,$$

où (v_n^*) *est de degré* +2. *En outre,* X(n) *est sans torsion et pour tout entier* $0 \leq i \leq n$ *on a*

$$\operatorname{rg} H^i(X(n);\mathbb{Z}) = \operatorname{rg} H^{2n-i}(X(n);\mathbb{Z}) = \binom{2g}{i} + \binom{2g}{i-2} + \dots .$$

Preuve. - Puisque $v_n : X(n) \hookrightarrow X(n+1)$ est une sous variété analytique complexe fermée de codimension 1, on a une suite exacte de Gysin illimitée

$$\dots \to H^iX(n) \xrightarrow{(v_n)_*} H^{i+2}X(n+1) \xrightarrow{w_{n+1}^*} H^{i+2}X_o(n+1) \to H^{i+1}X(n) \to \dots$$

D'après 4.2.5., w_{n+1}^* est un épimorphisme. On en conclut aussitôt que 4.2.6.1. est une suite exacte. La fin de la démonstration se fait par récurrence sur l'entier $n \geq 1$, en utilisant 4.2.6.1. et 4.2.2.1.

4.3. Rappelons la propriété suivante, qui donne une interprétation géométrique de l'homomorphisme de Gysin. Soit B une variété analytique complexe et soit A une sous variété analytique fermée de codimension 1 de B. Désignons par $i : A \hookrightarrow B$ l'injection canonique et $\mathcal{J}$ l'idéal de définition de A. Soit E un fibré (vectoriel) analytique inversible de base B. Si k fibré E possède une section analytique qui s'annule exactement sur A, on a

4.3.1. $$c_1(E) = i_*(1)$$

dans $H^2(B;\mathbb{Z})$. Un exemple important d'un tel fibré E est le fibré de faisceau de sections $\check{\mathcal{J}}$. Par exemple, considérons le cas B = X et A = * (le point base de X). Désignons par la lettre L le fibré analytique inversible de faisceau de sections $\check{\mathcal{J}}$ et par S une section analytique de L telle que $S(*) = 0$. et $S(X) \neq 0$ si $x \in X_o$. On a donc, d'après 4.3.1., $c_1(L) = i_*(1) \in H^2(X;\mathbb{Z})$. Ecrivons un bout de suite exacte de Gysin

$$H^*(*) \xrightarrow{i_*} H^2X \longrightarrow H^2X_o = 0$$

Nécessairement, on a $i_*(1) = \pm y$, y générateur de H^2X. Quitte à remplacer y par -y , on peut supposer que l'on a

4.3.2. $$c_1(L) = y$$

dans $H^2(X,Z)$.

L'entier $n \geq 1$ étant donné, désignons par $p_i = X^n \longrightarrow X$ les n projections $1 \leq i \leq n$ et posons

$$L_i = p_i^* L .$$

Sur le fibré inversible $L_1 \otimes \ldots \otimes L_n$ de base X^n , le groupe symétrique S_n opère de façon compatible avec son action sur la base. On constate facilement que l'espace

4.3.3 $$E_n = L_1 \otimes \ldots \otimes L_n / S_n$$

est canoniquement muni d'une structure de fibré vectoriel analytique inversible de base X(n), pour laquelle on a un isomorphisme

4.3.4. $$q_n^* E_n = L_1 \otimes \ldots \otimes L_n .$$

Traduite en termes de classes de Chern , 4.3.4. signifie que l'on a dans $H^2(X^n;\mathbb{Z})$

4.3.5. $$q_n^* c_1(E_n) = y_1+\ldots+y_n = \bar{y}.$$

Considérons la section $p_1^*(s) \otimes \ldots \otimes p_n^*(s)$ du fibré $L_1 \otimes \ldots \otimes L_n$ au-dessus de X^n. Par passage au quotient, cette section définit une section analytique du fibré E_n au-dessus de X(n), section qui s'annule exactement sur X(n-1). Par conséquent, 4.3.1 montre que l'on a dans $H^2(X(n);\mathbb{Z})$

4.3.6 $$(V_{n-1})_*(1) = c_1(E_n) \qquad \text{pour} \qquad n \geq 2 .$$

Prouvons aussi que l'on a

4.3.7. $$v_n^* (v_1)_*(1) = c_1(E_n) \qquad \text{pour} \quad n \geq 1 .$$

Puisque X(n) est sans torsion (4.2.6), le théorème 2.1.1. prouve que

4.3.8. *L'homomorphisme de restriction* $q_n^* : H^*(X(n);\mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(X^n;\mathbb{Z})^{S_n}$ *est un monomorphisme.*

Par conséquent, il nous suffit de vérifier que pour $n \geq 1$, on a $q_n^* v_n^* (v_n)_*(1) = q_n^* c_1(E_{n+1})$

On peut écrire :

$q_n^* v_n^* (v_n)_*(1) = q_n^* v_n^* c_1(E_{n+1})$ 4.3.6.

$= u_n^* q_{n+1}^* c_1(E_{n+1})$

$= u_n^* y$ (4.3.5)

$= \bar{y}$ (4.1.5)

$= q_n^* c_1(E_n)$ (4.3.5) ,

Pour $n \geq 1$, considérons l'élément

$$y(n) = v_n^*(v_n)_*(1) = c_1(E_n)$$

de $H^2(X(n);\mathbb{Z})$. On a donc

$$4.3.9. \qquad \begin{cases} y(1) = y \\ v_{n+1}^* y(n+1) = y(n) \qquad \text{pour} \quad n \geq 1. \end{cases}$$

(La première assertion provient de 4.3.2, la deuxième est une conséquence immédiate de 4.3.8 et 4.3.5 . Avec l'abus de notation consistant à omettre l'entier n dans $y(n)$ on a la proposition suivante :

PROPOSITION 4.3.10. - *Pour tout entier* $n \geq 2$, *l'homomorphisme image réciproque*

$$q_n^* : H^2(X(n),\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X^n,\mathbb{Z})^{S_n}$$

est un isomorphisme. D'une manière plus précise, les éléments $x_i.x_j \quad 1 \leq i < j \leq 2g$ *et* y *forment une base de* $H^2(X(n),\mathbb{Z})$ *et on a les égalités*

$$q_n^*(x_i x_j) = \bar{x}_i.\bar{x}_j \qquad q_n^* y = \bar{y}$$

Preuve. D'après 4.3.8., q_n^* est un monomorphisme. Pour la surjectivité, il suffit de se rappeler qu'une base de $(H^2 X_n)^{S_n}$ est constituée par les éléments $\bar{x}_i\bar{x}_j \quad 1 \leq i < j \leq 2g$ et $\bar{y}$ (4.2.1. partie ii) et d'utiliser 4.2.4. ainsi que 4.3.5.

PROPOSITION 4.3.11. - *Pour tout entier* $n \geq 1$, *les éléments* $x_1,\ldots,x_{2g}$ *et* y *engendrent* $H^*(X(n);\mathbb{Z})$ *en tant qu'anneau.*

Preuve.- Elle se fait par récurrence sur l'entier n de façon analogue à la preuve de 1.3.5.3.

THEOREME 4.3.12. - *Soit* X *une surface de Riemann de genre* $g \geq 0$. *Pour tout entier* $n \geq 1$, *soit* $A_n(g)$ *l'anneau de MACDONALD. On a un isomorphisme d'anneaux gradués*

$$f : A_n(g) \longrightarrow H^*(X(n);\mathbb{Z})$$

caractérisé par les égalités

$$f(x_i) = x_i \quad (1 \leq i \leq 2g) \qquad \text{et} \quad fy = y.$$

Preuve - La proposition 4.3.11 montre que l'on définit un épimorphisme d'anneaux gradués.

$$f : E = \Lambda(X_1,\ldots,X_{2g})[Y] \longrightarrow H^*(X(n),\mathbb{Z})$$

en posant

$$f(X_i) = x_i \quad 1 \leq i \leq 2g \quad \text{et } f(Y) = y.$$

Supposons avoir prouvé que f s'annule sur l'idéal $\mathcal{O}\mathcal{L}_n$ de E. Par passage au quotient, on obtient alors un épimorphisme d'anneaux, encore noté f,

$$f : A_n(g) \longrightarrow H^*(X(n),\mathbb{Z})$$

qui est nécessairement un isomorphisme puisque $A_n(g)$ et $H^*(X(n),\mathbb{Z})$ sont libres et ont même rang en chaque degré (1.2.3. et 4.2.6). Par conséquent, tout revient à prouver que dans l'anneau $H^*X(n)$ on a

$$x_A x'^{z}_{B} z_C y^q = 0 \quad \text{dès que } n_A+n_B+2n_C+q = n+1 .$$

Sachant (4.3.8) que q_n^* est un monomorphisme, il revient au même de prouver que l'on a

$$q_n^*(x_A x'^{z}_{B} z_C y^q) = 0 \quad \text{si} \quad n_A+n_B+2n_C+q = n+1.$$

On peut écrire :

$q_n^* x_i = \bar{x}_i = x_{i1}+\ldots+x_{in}$

$q_n^* x'_i = \bar{x}'_{i1} +\ldots+x'_{in}$ (on rappelle que $x'_{ir} = x_{i+g,r.}$).

$q_n^* y = \bar{y} = y_1+\ldots+y_n$

$q_n^* z_i = \bar{z}_i = \bar{x}_i\bar{x}'_i - \bar{y} = \sum_{k \neq \ell} x_{ik}x'_i$ (car $Y = x_{ir}x'_{ir}$).

Posons $A = \{i_1 < \ldots < i_k\}$, $B = \{j_1 < \ldots < j_b\}$ et $C = \{k_1 < \ldots < k_c\}$.
En développant $q_n^*(x_A x'^{z}_{B} z_C y^q) = \bar{x}_A \bar{x'}^{\bar{z}}_{B} \bar{z}_C \bar{y}^q$, on botient une somme de monôme de la forme

$$4.3.1.2.1 \quad (x_{i_1 p_1}\ldots x_{i_a p_a})(x'_{j_1 q_1}\cdots x'_{j_b q_b}).(x_{k_1 r_1}x'_{k_1 s_1}\cdots x_{k_c r_2}x'_{k_c s_c})y_{b_1}\cdots y_{b_q}$$

avec $r_i \neq s_i$ pour $1 \leq i \leq 2g$. A cause des relations 4.1.2, pour qu'un monôme 4.3.12.1 soit non nul il est nécessaire que les indices $p_1\ldots p_a$, $q_1\ldots q_b$, $r_1\ldots r_c$, $s_1,\ldots,s_c$ et $t_1,\ldots,t_q$ soient deux à deux distincts. Comme ces indices sont compris entre 1 et n, on en déduit que l'on doit avoir $n_A+n_B+2n_C+q \leq n$, ce qui est impossible, vu que l'on a $n_A+n_B+2n_C+q=n+1$. Par conséquent, deux des indices au moins sont égaux, ce qui prouve le résultat.

§ 5. - KU THEORIE D'UN PRODUIT SYMETRIQUE D'UNE SURFACE DE RIEMANN.

5.1. - Si X est un CW compact (ou un espace ayant même type d'homotopie qu'un CW complexe compact), on désigne par AH(X) la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch

$$E_2^{p+q}(X) = H^p(X, KU^q(pt)) \Longrightarrow KU^{p+q}(X).$$

Dans un but de simplification, on utilisera désormais la notation $K^*(X)$ pour désigner la KU^* théorie de l'espace X. On rappelle que la notation

$$ch : K^*(X) \longrightarrow H^*(X;\mathbb{Q})$$

désignera le caractère de Chern. Enfin, on note

$$\rho_* : H^*(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(X;\mathbb{Q})$$

l'homomorphisme induit par l'inclusion canonique $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$.

LEMME 5.1.1. - *Soit* $a \in H^1(X,\mathbb{Z})$ *une classe de cohomologie entière de degré* 1. *Alors il existe* $\alpha \in \tilde{K}^1(X)$ *tel que l'on ait*

$$ch\,\alpha = \rho_*(a).$$

Preuve. - On considère le diagramme commutatif suivant, où les flèches horizontales sont les isomorphismes de suspension

5.1.1.1.
$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}^1 X & \xrightarrow[\sim]{\sigma} & \tilde{K}^0 \Sigma X \\ \Big\downarrow ch & & \Big\downarrow ch \\ H^{impair}(X;\mathbb{Q}) & \xrightarrow[\sim]{\sigma} & \tilde{H}^{pair}(\Sigma X;\mathbb{Q}). \end{array}$$

Soit E un fibré inversible de base ΣX tel que $c_1(E) = \sigma a \in H^2(\Sigma X;\mathbb{Z})$. Considérons l'élément $[E]-1 \in \tilde{K}^0 \Sigma X$. On peut écrire

$$ch([E]-1) = a' + \frac{i}{2!}\, a'^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\, a'^n + \ldots$$

avec $a' = \rho_* \sigma a = \sigma \rho_* a$. Puisque dans l'anneau de cohomologie d'une suspension le cup produit est trivial, il reste $ch([E]-1) = \sigma\, \rho_*\, a$. Si on définit $\alpha \in \tilde{K}^1 X$ par la condition $\sigma\alpha = [E]-1$, la commutativité du diagramme 5.1.1.1. prouve que l'on a

$$ch\,\alpha = \sigma^{-1}\, ch\, \sigma\alpha = \sigma^{-1}\, ch([E]-1) = \sigma^{-1}\sigma\, \rho_* a = \rho_*\, a.$$

COROLLAIRE. 5.1.2. *Soit T un bouquet de k-cercles. Alors, pour tout entier* $n \geq 1$ *le caractère de Chern induit un isomorphisme d'anneaux*

$$ch : K^* T(n) \longrightarrow H^*(T(n);\mathbb{Z}).$$

Preuve. - D'après 3.3.8, on a un isomorphisme d'anneaux gradués $H^*(T(n);\mathbb{Z}) \tilde{=} \overset{\leq n}{\Lambda}(t_1,\ldots,t_k)$ où $t_1,\ldots,t_k$ sont de degré 1. Puisque $H^*(T(n),\mathbb{Z})$ est sans torsion, ρ_* permet d'identifier $H^*(T(n),\mathbb{Z})$ à un sous-anneau de $H^*(T(n);\mathbb{Q})$. Appliquant 5.1.1. on sait qu'il existe des éléments $\alpha_1,\ldots,\alpha_k \in K^{-1}T(n)$ tels que $ch\,\alpha_i = t_i \quad 1 \leq i \leq k$. Nous savons déjà que le caractère de Chern est injectif, puisque T(n) est sans torsion. La démonstration sera terminée si nous prouvons que les éléments $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ engendrent $K^* T(n)$ en tant qu'anneau. Soit donc $\alpha \in \tilde{K}^* T(n)$. On peut écrire

$$ch\,\alpha = \frac{1}{\ell!} P_\ell(t_1,\ldots,t_k) + \frac{1}{(\ell+1)!}P_{\ell+i}(t_1,\ldots,t_k)+\ldots+\frac{1}{n!}P_n(t_1,\ldots,t_k),$$

où $P_\ell,\ldots,P_n$ sont des polynômes à coefficients entiers, homogènes de degrés respectivement $\ell,\ldots,n$. En vertu des théorèmes d'intégralité, $\frac{1}{\ell!} P_\ell(t_1,\ldots,t_k)$ est une classe entière, i.e $\frac{1}{\ell!}P_\ell$ est un polynôme à coefficients entiers. Par conséquent, on aura

$$ch\left[\alpha - \frac{1}{\ell!}P_\ell(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)\right] = \frac{1}{(\ell+1)!} P_{\ell+1}(t_1,\ldots,t_k)+\ldots+\frac{1}{n!}P_n(t_1,\ldots,t_n).$$

par application répetée des théorèmes d'intégralité et en utilisant l'injectivité du caractère de Chern, on voit facilement que les polynômes $\frac{1}{\ell!} P_\ell,\ldots,\frac{1}{n!} P_n$ sont à coefficients entiers et que l'on a dans $K^* T(n)$ l'égalité

$$\alpha = \frac{1}{\ell!}P_\ell(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)+\ldots+\frac{1}{n!}P_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_k).$$

5.2. - Dans ce qui suit, la lettre X désigne une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 0$. Puisque X(n) est sans torsion, en vertu de 5.1.1. il existe des éléments $\alpha_1(n),\ldots,\alpha_{2g}(n)$ de $K^{-1}X(n)$ tels que l'on ait dans $H^1(X(n);\mathbb{Z})$ l'égalité

5.2.1. $$ch\,\alpha_i(n) = x_i(n) \qquad 1 \leq i \leq 2g .$$

On pose aussi, dans $\tilde{K}^o X(n)$,

$$\beta(n) = [E_n]^{-1}$$

où E_n est le fibré analytique inversible de base $X(n)$ défini par 4.3.3. Puisque on a posé $y(n) = c_1(E_n) \in H^2(X(n);\mathbb{Z})$, on a donc dans $H^{pair}(X(n);\mathbb{Q})$:

5.2.2.2 $$\mathrm{ch}\,\beta(n) = y(n) + \frac{1}{2!}\,y(n)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\,y(n)^n.$$

Une fois de plus, nous omettrons systématiquement l'indice n dans les notations $\alpha_i(n)$, $\beta(n)$, etc...

PROPOSITION 5.2.3. -

(i) Pour tout entier $n \geq 1$, on a une suite exacte correcte " de Gysin"

5.2.3.1. $$0 \longrightarrow K^*(X(n)) \xrightarrow{(v_n)_*} K^*X(n+1) \xrightarrow{w^*_{n+1}} K^*X_o(n+1) \longrightarrow 0$$

(ii) Dans $K^*X(n)$, on a les égalités

$$-\beta = v_n^*\,(v_n)_*(1) \quad \textit{pour} \quad n \geq 1 \quad \textit{et}$$

$$-\beta = (v_{n-1})_*(1) \quad \textit{pour} \quad n \geq 2.$$

(iii) Pour tout entier $n \geq 1$, les éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2g}$ et β engendrent $K^*X(n)$ en tant qu'anneaux.

Preuve. - (i) L'injection canonique $v_n : X(n) \hookrightarrow X(n+1)$ définit, en KU théorie, un homomorphisme de Gysin, $(v_n)_* : K^*X(n) \longrightarrow K^*X(n+1)$ qui, composé avec l'homomorphisme de restriction $w^*_{n+1} : K^*X(n+1) \longrightarrow K^*X_o(n+1)$, donne l'homomorphisme nul. Les morphismes de suites spectrales

$$(v_n)_* : A\,H\,X(n) \longrightarrow AH\,X(n+1)$$

$$w^*_{n+1} : A\,H\,X(n+1) \longrightarrow AH\,X_o(n+1)$$

induisent sur les termes E_2 une suite exacte courte de Gysin

$$0 \longrightarrow E_2X(n) \xrightarrow{(v_n)_*} E_2X(n+1) \xrightarrow{w^*_{n+1}} E_2X_o(n+1) \longrightarrow 0$$

Comme les espaces $X(n)$, $X(n+1)$ et $X_o(n+1)$ sont sans torsion, leurs suites spectrales d'Atiyah-Hirezebruch sont dégénérées et par conséquent on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathrm{grad}\,K^*(X(n) \xrightarrow{\mathrm{grad}(v_n)_*} \mathrm{grad}\,K^*X(n+1) \xrightarrow{\mathrm{grad}w^*_{n+1}} \mathrm{grad}\,K^*X_o(n+1) \longrightarrow 0$$

Pour conclure, il ne reste plus qu'à se servir du lemme algébrique évident que voici

LEMME. 5.1.3.2. - *Soient* M', M, M'' *trois groupes abéliens filtrés,* $f : M' \longrightarrow M$ *et* $g : M \longrightarrow M''$ *deux morphismes de groupes abéliens filtrés. On suppose que l'on a*

(i) $g \circ f = 0$

(ii) $M = \bigcup F^p M$ *et* $F^p M = 0$ *dès que* p *est assez grand.*

Dans ces conditions, si la suite

$$\operatorname{grad} M' \xrightarrow{\operatorname{grad} f} \operatorname{grad} M \xrightarrow{\operatorname{grad} g} \operatorname{grad} M''$$

est une suite exacte, il en est de même de la suite

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''.$$

Prouvons maintenant les formules de la partie (ii). Puisque le fibré E_n possède une section analytique au dessus de $X(n)$ qui s'annule exactement sur $X(n-1)$, il est bien connu [1] que l'on a

$$(v_{n-1})_*(1) = \lambda_{-1}(E_n) = 1 - [E_n] = -\beta \quad \text{si} \quad n \geq 2.$$

D'autre part, comme $v_n^* E_{n+1} = E_n$, on déduit aussitôt de cette égalité que l'on a aussi

$$-\beta = 1 - [E_n] = v_n^*(1-[E_{n+1}]) = v_n^*(v_n)_*(1) \quad \text{si} \quad n \geq 1.$$

Prouvons enfin la partie (iii). La démonstration se fait par récurrence sur l'entier n, de façon analogue à la preuve de 1.3.5.3., en utilisant les parties (i) et (ii). Le seul point délicat est le suivant :

5.2.3.3. Les éléments $w_{n+1}^* \alpha_i$, $1 \leq i \leq 2g$, engendrent $K^*X_o(n+1)$ en tant qu'anneau.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K^*X(n+1) & \xrightarrow{w_{n+1}^*} & K^*X_o(n+1) \\ \downarrow{\scriptstyle ch} & & \downarrow{\scriptstyle ch} \\ H^*(X(n+1),\mathbb{Q}) & \xrightarrow{w_{n+1}^*} & H^*(X_o(n+1),\mathbb{Q}) \end{array}$$

On a $ch\ w_{n+1}^* \alpha_i = w_{n+1}^*\ ch\ \alpha_i = w_{n+1}^* x_i \quad 1 \leq i \leq 2g$ dans $H^1(X_o(n+1);\mathbb{Z})$.

D'après 4.2.5, les éléments $w_{n+1}^* x_i$ engendrent $H^*(X_o(n+1),\mathbb{Z})$. Comme 5.1.2. prouve que l'on a un isomorphisme $ch : K^*X_o(n+1) \to H^*(X_o(n+1);\mathbb{Z})$, on en déduit que les éléments $w_{n+1}^* \alpha_i$, $1 \leq i \leq 2g$, engendrent $K^*X_o(n+1)$ en tant qu'anneau.

THEOREME . 5.2.4. - *Soient X une surface de Riemann de genre* $g \geq 0$ *et* $n \geq 1$ *un entier. Notant* $A_n(g)$ *l'anneau de MACDONALD, on a un isomorphisme d'anneau*

$$f : A_n(g) \longrightarrow K \cup^* X(n)$$

tel que $f\ X_i = \alpha_i \quad 1 \leq i \leq 2g$ *et* $f\ Y = \beta$.

Preuve. - Elle se fait de façon analogue à celle du théorème 4.3.12. Puisque $H^*(X(n);\mathbb{Z})$ est sans torsion, il en est de même de $K^*X(n)$. D'autre part, en utilisant 5.2.3.1 et 5.1.2, une récurrence sur l'entier n prouve que l'on a $rg\ K^*X(n) = rg\ A_n(g)$. Par conséquent, posant dans $K^*X(n)$,

$$\alpha_i' = \alpha_{i+g} \quad 1 \leq i \leq 2g \quad \text{et} \quad \gamma_i = \alpha_i \alpha_i' - \beta$$

on voit qu'on est ramené à prouver que dans $K^*X(n)$ on a

$$\alpha_A \alpha_B \gamma_C \beta^q = 0 \qquad \text{si} \qquad n_A+n_B+2n_C+q = n+1.$$

Considérons le monomorphisme composé

$$h : K^*X(n) \xrightarrow{ch} H^*(X(n);\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} A_n(g) \otimes \mathbb{Q}.$$

On peut écrire, par définition même des α_i et de β

$h(\alpha_i) = x_i$

$h(\beta) = y + \frac{1}{2!} y^2 + \ldots + \frac{1}{n!} y^n = y.P.$

$h(\gamma_i) = z_i - (\frac{1}{2!} y^2 + \ldots + \frac{1}{n!} y^n) = z_i + y^2 Q.$

La démonstration sera terminée si nous prouvons que dans l'anneau $A_n \otimes \mathbb{Q}$ on a $x_A x_B' (z_i + y^2.Q)_C y^q = 0$ si $n_A+n_B+2n_C+q = n+1$. Si nous développons cette expresion, il vient

$$x_A x'_B (z_i + y^2.Q)_C y^q = x_A x'_B \left[z_C + \ldots\ldots + \left(\sum_{C_i} z_{C_i}\right) y^{2i} Q^i + \ldots + y^{2n_C} Q^{n_C} \right] y^q ,$$

où le symbole $\sum_{C_i}$ signifie que la sommation se fait sur toutes les parties $C_i \subset C$ de cardinal $n_{C_i} = n_C - i$ ($0 \leq i \leq n_C$). Mais alors $x_A x'_B z_{C_i} Y^{2i+q} = 0$ puisque $n_A + n_B + 2n_{C_i} + (2i+q) = n_A + n_B + 2(n_C - i) + (2i+q) = n+1$.

Pour finir, déterminons les opérations Ψ^K d'Adams dans $K^\circ X(n)$. Comme $K^\circ X(n)$ est engendré, en tant qu'anneau, par les éléments $\alpha_U \alpha_V$ avec $n_u + n_v$ pair et β , tout revient à calculer $\Psi^k(\alpha_U \alpha_V)$ et $\Psi^k(\beta)$.

Supposant toujours $n_U + n_V$ pair, on a $ch(\alpha_U \alpha_V) = x_U x'_V$ et par conséquent $ch\ \Psi^k(\alpha_U \alpha_V) = k^{\frac{1}{2}(n_U+n_V)} x_U x'_V = ch(k^{\frac{1}{2}(n_U+n_V)} \alpha_U \alpha_V)$, d'où l'on déduit aussitôt l'égalité

$$\Psi^k(\alpha_U \alpha_V) = k^{\frac{1}{2}(n_U+n_V)} \alpha_U \alpha_V .$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} \Psi^k \beta &= \Psi^k([E_n] - 1) \\ &= \Psi^k([E_n]) - 1 \\ &= [E_n]^k - 1 \qquad \text{(car } E_n \text{ est de rang 1)} \\ &= (1+\beta)^k - 1 . \end{aligned}$$

En résumé :

PROPOSITION 5.2.5 - *Dans* $K^\circ X(n)$ *les opérations* Ψ^k *d'Adams sont déterminés par les formules*

$$\Psi^k(\alpha_U \alpha_V) = k^{\frac{1}{2}(n_U+n_V)} \alpha_U \alpha_V \qquad (n_U+n_V \text{ pair}) ,$$

$$\Psi^k(\beta) = (1+\beta)^k - 1 .$$

BIBLIOGRAPHIE.

1 M.F. ATIYAH
F. HIRZEBRUCH : *Analytic cycles on complex manifolds.*
Topology 1 - (1961) - pp. 25-45.

2 A. GROTHENDIECK : *Sur quelques points d'algèbre homologique.*
Tohoku Math. J. 9 (1957) pp. 119-221.

3 J.G. MACDONALD : *The Poincare polynomial of a symmetric product.*
Proc. Camb. Phil. Soc. 58 - (1962). pp. 563-568.

4 I.G. MACDONALD : *Symetric product of an algebraic curve.*
Topology 1 (1962) pp. 319-343.

5 A. MATTUCK : *Picard bundles.*
Illinois J. Math. 5§1961) pp. 540-560.

SEROUL Raymond
U.E.R. DE MATHEMATIQUES
7, rue René Descartes
67 - STRASBOURG