

JEAN-MARC BRAEMER

Cohomologies de certaines formes sphériques

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1972, tome 9, fascicule 3
, p. 67-90

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1972__9_3_67_0

© Université de Lyon, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COHOMOLOGIES DE CERTAINES FORMES SPHERIQUES

Jean-Marc BRAEMER

1. - INTRODUCTION.

1.1. Un vieux théorème de W. Killing et H. Hopf montre que si M est une variété riemannienne de dimension $n \geq 2$, et K un nombre réel, M est une variété complète connexe de courbure constante K , si et seulement si M est isométrique à l'une des variétés suivantes :

S^n/G où G est un sous-groupe de $O(n+1)$, si $K > 0$;

\mathbb{R}^n/G où G est un sous-groupe de $E(n)$ (groupe des déplacements de \mathbb{R}^n) si $K = 0$;

\mathbb{H}^n/G où \mathbb{H}^n est l'espace hyperbolique de dimension n , et G est un sous-groupe du groupe de Lorentz $O^1(n+1)$.

Dans tous les cas, G opère *proprement, discontinument, et librement* sur l'espace considéré.

Nous nous intéressons ici aux variétés de la première catégorie que l'on appelle les *formes sphériques* (et qui sont donc, à isométrie près, toutes les variétés riemanniennes complètes, connexes de dimension ≥ 2 , et de courbure constante positive).

Soit donc G un sous-groupe de $O(n+1)$ opérant *proprement, discontinument et librement* sur la sphère S^n ; puisque cette dernière est compacte, et que l'opération de G est propre et discontinue, G est nécessairement *fini*.

Dire que G opère librement signifie qu'il opère *sans point fixe*, i.e. que pour $x \in S^n$ et $s \in G$, $sx = x$ implique $s = 1$ (Voir (1)).

1.2. Dans sa thèse, G. Vincent se propose de classifier tous les sous-groupes finis des groupes orthogonaux opérant sans point fixe sur la sphère correspondante. Pour ce faire, il est amené à considérer ces groupes comme images de représentations *fidèles*, orthogonales de groupes finis abstraits (i.e. définis par générateurs et relations). Si $\pi : \Gamma \rightarrow O(n+1)$ est une telle représentation, elle doit être supposée *sans point fixe*, i.e. 1 est le seul élément de Γ dont l'image par π a +1 pour valeur propre (remarquons d'ailleurs que cette condition entraîne que π est fidèle). De plus, si π est une telle représentation sans point fixe, et π se décompose en une somme de représentations irréductibles $\pi_1 \oplus \pi_2 \oplus \dots \oplus \pi_k$ chaque π_i ($1 \leq i \leq k$) est sans point fixe, et réciproquement.

1.3. Plus généralement (voir ()), la recherche des sous groupes finis des groupes orthogonaux opérant sans point fixe sur la sphère correspondante, se ramène à la recherche des groupes finis admettant des représentations linéaires unitaires sans point fixe. Soit donc G un groupe fini, et $\rho : G \rightarrow U(n)$ une représentation unitaire sans point fixe de G , et soit $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$ un système complet de représentations (unitaires) irréductibles de G ; alors

$$\rho = \sum_{i=1}^p n_i \rho_i \quad (n_i \in \mathbb{N})$$

et on a vu que, si $n_i \neq 0$, ρ_i est sans point fixe.

Si G est abélien, chaque ρ_i est fidèle et de degré 1. G est donc isomorphe à un sous-groupe fini de $U(1) = S^1$; si g est l'ordre de G , G est donc le groupe des racines g -ième de l'unité, et G est un groupe cyclique. Les variétés obtenues en faisant opérer sans point fixe de tels groupes sur des sphères sont les *espaces lenticulaires*, dont la K -théorie (réelle et complexe) a été étudiée dans (12),(13) et surtout (14).

Si G n'est pas abélien, il résulte de ce qui précède que tous les sous-groupes abéliens de G sont cycliques. On démontre alors, cf. (3) que de tels groupes se caractérisent par l'une des conditions équivalentes suivantes :

- I) Tous les sous-groupes abéliens de G sont cycliques ;
- II) Tout p -sous-groupe de G est soit cyclique, soit un groupe quaternionique généralisé ;
- III) Les p -sous-groupes de Sylow de G sont de l'un des deux types suivant :
- (a) tous cycliques (y compris les 2 sous-groupes de Sylow)
- (b) cycliques si $p \neq 2$, quaternioniques généralisés si $p = 2$;
- IV) G est à cohomologie périodique de période > 0 . [3] p. 262)

1.4. Rappelons que si m est entier > 1 , le groupe quaternionique généralisé Q_m est le groupe engendré par deux générateurs s et t soumis aux relations :

$$s^{2m} = 1 ; t^2 = s^m ; tst^{-1} = s^{2m-1} = s^{-1}$$

Ce groupe est d'ordre $4m$, et ses éléments se mettent d'une manière unique sous forme canonique $r = s^k t^\alpha$ où $0 \leq k \leq 2m-1$ et $\alpha = 0, 1$.

Dans le cas où $m = 2$, le groupe Q_2 que l'on note simplement Q , et que l'on appelle le groupe quaternionique, est d'ordre 8 ; il est donc engendré par deux générateurs s et t soumis aux relations :

$$s^4 = 1 \quad s^2 = t^2 \quad tst^{-1} = s^3$$

Il peut être identifié au sous-groupe $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ de $Sp(1)$ (quaternions de norme 1), où $s = i$, $t = j$, $st = k$, d'où son nom.

Ce groupe a pour centre $Z(Q) = \{1, s^2\} \cong \mathbb{Z}_2$, et a d'autre part trois sous-groupes d'ordre 4 : les sous-groupes cycliques engendrés par s , t et st (notons que $(st)^2 = s^2$). Enfin, les classes de conjugaison de Q sont données par le tableau suivant :

1	s	s ²	t	st
	s ³		s ² t	s ³ t

On s'intéresse ici aux représentations linéaires unitaires sans point fixe de Q et aux formes sphériques qu'elles permettent de définir.

1.5. Q possède quatre représentations (unitaires) irréductibles de degré 1, données par

$$s \mapsto \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} 1 \qquad t \mapsto \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} 1$$

que nous noterons respectivement

$$1 = \xi_0 (s \mapsto 1, t \mapsto 1) ; \xi_1 (s \mapsto 1, t \mapsto -1) ; \xi_2 (s \mapsto -1, t \mapsto 1) ; \xi_3 (s \mapsto -1, t \mapsto -1),$$

La somme des carrés des degrés des représentations irréductibles de Q devant être égal à 8 (l'ordre du groupe), il ne peut rester qu'une représentation irréductible de degré 2 ; elle est définie par :

$$s \mapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note ρ cette représentation.

$\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ n'étant pas fidèles n'opèrent pas sans point fixe sur S^1 . Par contre on vérifie sans peine que ρ est une représentation sans point fixe (+1 n'étant jamais valeur propre de $\rho(r)$ pour $r \in Q, r \neq 1$). Il résulte alors d'une remarque faite plus haut que, *les seules sphères sur lesquelles Q opère sans point fixe sont les sphères S^{4n-1}* ; Q opère sur cette sphère au moyen de la représentation ρ_n . Dans ce qui suit, on pose :

$$\rho_n = \rho \circ c \text{ c'est une représentation unitaire de degré } 2n ;$$

$$X_n = S^{4n-1}/Q, Q \text{ opérant sur } S^{4n-1} \text{ au moyen de } \rho_n.$$

2. - COHOMOLOGIE ENTIÈRE ET COHOMOLOGIE MODULO 2 DE X_n .

2.1. Il est clair que X_n est une variété compacte connexe de dimension (réelle) $4n-1$. La suite spectrale suivante (Borel-Cartan) relie la cohomologie entière de X_n à la cohomologie de Q :

$$E_2^{pq} = H^p(Q, H^q(S^{4n-1}, \mathbb{Z})) \longrightarrow H^{p+q}(X_n, \mathbb{Z}).$$

Or, on connaît bien la cohomologie du groupe Q (voir [] p. 253, ou [] p. 59). Q opérant trivialement sur \mathbb{Z} , elle est périodique de période 4, et donnée par les formules suivantes :

$$H^0(Q, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

$$H^{4k+2}(Q, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}'_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

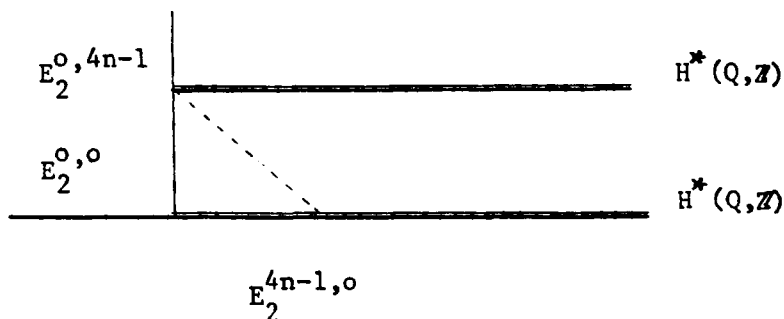
$$H^{4k+4}(Q, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_8$$

$$H^{2k+1}(Q, \mathbb{Z}) = 0$$

On vérifie d'abord, facilement, que pour tout $r \in Q$, $\det(\rho(r)) = +1$; il en résulte que l'opération de Q respecte l'orientation de S^{4n-1} , donc que X_n est orientable, et

$$H^0(X_n, \mathbb{Z}) = H^{4n-1}(X_n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

D'autre part, le support de la suite spectrale ci-dessus réduit à



Les seules différentielles éventuellement non nulles sont :

$$d_{4n} : E_{4n}^{k, 4n-1} \longrightarrow E_{4n}^{k+4n, 0}$$

On sait qu'il en résulte alors une suite exacte infinie :

$$\dots \xrightarrow{d} E_2^{k, 0} \longrightarrow E^k = H^k(X_n, \mathbb{Z}) \longrightarrow E_2^{k-4n+1, 4n-1} \xrightarrow{d} E_2^{k+1, 0} \longrightarrow \dots$$

On ne s'intéresse en fait qu'à $0 < k < 4n-1$, pour lesquels on a

$$E_2^{k-4n+1, 4n-1} = 0$$

et par conséquent

$$H^k(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} E_2^{k,0} \xrightarrow{\sim} H^k(Q, \mathbb{Z})$$

En résumé, la cohomologie entière de X_n est donnée par :

$$(2.1.1) \quad \left. \begin{aligned} H^0(X_n, \mathbb{Z}) &= H^{4n-1}(X_n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \\ H^{2k+1}(X_n, \mathbb{Z}) &= 0 & \text{si } 0 \leq k < 2n \\ H^{4k+2}(X_n, \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & \text{si } 0 \leq k \leq n-1 \\ H^{4k+4}(X_n, \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}_8 & \text{si } 0 \leq k < n-1 \end{aligned} \right\}$$

2.2. La cohomologie de X_n à coefficients dans \mathbb{Z}_2 est alors immédiatement donnée par la formule des coefficients universels :

$$0 \rightarrow H^k(X_n, \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow H^k(X_n, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \text{Tor}(H^{k+1}(X_n, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_2) \rightarrow 0$$

dont il résulte que

$$(2.2.1) \quad \left. \begin{aligned} H^0(X_n, \mathbb{Z}_2) &= H^{4n-1}(X_n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \\ H^{4p+1}(X_n, \mathbb{Z}_2) &= \text{Tor}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \\ H^{4p+2}(X_n, \mathbb{Z}_2) &= (\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2) \otimes \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \\ H^{4p+3}(X_n, \mathbb{Z}_2) &= \text{Tor}(\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \\ H^{4p}(X_n, \mathbb{Z}_2) &= \mathbb{Z}_8 \otimes \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2 \end{aligned} \right\}$$

3. - KU-THEORIE DE X_n .

3.1. Soit G un groupe fini, et soit $RU(G)$ son anneau des représentations (unitaires). Alors si $\rho : G \rightarrow U(n)$ est une représentation unitaire de degré n opérant sans point fixe sur S^{2n-1} , il résulte de l'isomorphisme de Thom en KU-théorie, une suite exacte :

$$(3.1.1) \quad 0 \rightarrow KU^1(S^{2n-1}/G) \rightarrow RU(G) \xrightarrow{\psi} RU(G) \rightarrow KU^0(S^{2n-1}/G) \rightarrow 0 \quad ,$$

où φ est la multiplication par $\lambda_{-1}(\rho)$, (voir (5), p. 102 et suivantes). Rappelons simplement que l'application naturelle $RU(G) \rightarrow KU^0(S^{2n-1}/G)$ est définie de la manière suivante : si σ est une représentation unitaire de G , de degré k ($k > 1$) G opère à gauche sur $S^{2n-1} \times \mathbb{C}^k$, au moyen de σ sur S^{2n-1} , et au moyen de σ sur \mathbb{C}^k . L'espace quotient $S^{2n-1} \times_G \mathbb{C}^k$ est un fibré vectoriel complexe de rang k sur S^{2n-1}/G , et l'application en question fait correspondre à la représentation σ la classe de ce fibré dans $KU^0(S^{2n-1}/G)$.

3.2. L'anneau $RU(Q)$: En 1.5. nous avons trouvé les représentations irréductibles $1 = \xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ et ρ de Q , qui donnent la structure additive de l'anneau $RU(Q)$. La structure multiplicative s'obtient facilement par produits tensoriels, et en utilisant le fait bien connu que deux représentations sont équivalentes si et seulement si leurs caractères sont les mêmes ; on obtient alors la table suivante :

$1 = \xi_0$	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ρ
ξ_1	1	ξ_3	ξ_2	ρ
ξ_2	ξ_3	1	ξ_1	ρ
ξ_3	ξ_2	ξ_1	1	ρ
ρ	ρ	ρ	ρ	$1 + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$

Pour calculer la KU -théorie de X_n , il convient donc maintenant de calculer $\lambda_{-1}\sigma_n$:

$$\lambda_{-1}\sigma_n = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \lambda^p \rho_n,$$

où $\lambda^p \rho_n$ est la p -ième puissance extérieure de ρ_n . Comme ρ est de degré 2,

$$\lambda^0 \rho = 1 \quad \lambda^1 \rho = \rho \quad \lambda^2 \rho = \det \rho = 1 \quad ;$$

par conséquent

$$\lambda_{-1}\sigma = 2-\sigma$$

On sait que l'application $\lambda_t : RU(Q) \rightarrow RU(Q)$ est multiplicative ; il en résulte alors immédiatement que

$$\lambda_{-1}\rho_n = (2-\rho)^n$$

Il faut maintenant décomposer cette représentation (virtuelle) en représentations irréductibles. Pour cela on remarque que :

$$\rho^0 = 1, \quad \rho^{2k-1} = 4^{k-1}\rho \quad \text{et} \quad \rho^{2k} = 4^{k-1}(1+\xi_1+\xi_2+\xi_3) \text{ pour } k \geq 1,$$

et un calcul simple montre que

$$\lambda_{-1}\rho_n = 2^{n-2} \left[(2^{n-1}+3) + (2^{n-1}-1)(\xi_1+\xi_2+\xi_3) - 2^n \rho \right]$$

que l'on peut aussi écrire

$$\lambda_{-1}\rho_n = 2^{n-2} \left[4 + (2^{n-1}-1)(1+\xi_1+\xi_2+\xi_3) - 2^n \rho \right]$$

3.3. Les notations étant celles de 3.1., $KU^0(X_n)$ est donc isomorphe à l'anneau quotient $RU(Q)/\text{Im } \varphi$. Pour calculer ce quotient, on utilise le calcul des facteurs invariants (voir par exemple (4) p. 26). Plus précisément, on sait qu'il existe une base $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ de $RU(Q)$, et des entiers $(a_i)_{0 \leq i \leq 4}$ non tous nuls (si $\text{Im } \varphi \neq 0$) tels que

- a_i divise a_{i+1} ,
- les $a_i \sigma_i$ forment une base de $\text{Im } \varphi$.

Il est clair que, si l'on trouve une telle base, et de tels entiers, on aura les générateurs du $KU^0(X_n)$ avec leurs ordres.

Pour faire ce calcul, il est pratique de prendre pour base de $RU(Q)$, non pas celle qui est formée par les représentations irréductibles, mais la suivante :

$1 = \xi_0$, $\xi_1' = \xi_1 - 1$, $\xi_2' = \xi_2 - 1$, $\alpha' = \alpha - 4$ où l'on a posé $\alpha = 1 + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ et enfin $\rho' = \rho - 2$.

Dans cette base, $\lambda_{-1}\rho_n = 2^{n-2} \left[(2^{n-1} - 1)\alpha' - 2^n \rho' \right]$;

$$\begin{aligned} \alpha' \xi_1' &= -4\xi_1' & , & & \rho' \xi_1' &= -2\xi_1' & , \\ \alpha' \xi_2' &= -4\xi_2' & , & & \rho' \xi_2' &= -2\xi_2' & , \\ \alpha' \rho' &= -2\alpha' & , & & & & , \\ \alpha'^2 &= -4\alpha' & , & & \rho'^2 &= \alpha' - 4\rho' & . \end{aligned}$$

Si $x = a_0 + a_1 \xi_1' + a_2 \xi_2' + a_3 \alpha' + a_4 \rho' \in RU(Q)$, $a_i \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi(x) = 2^{n-2} \left[(2^{n-1} - 1)\alpha' - 2^n \rho' \right] (a_0 + a_1 \xi_1' + a_2 \xi_2' + a_3 \alpha' + a_4 \rho') ,$$

$$\varphi(x) = 2^{n-2} \left[4a_1 \xi_1' + 4a_2 \xi_2' + ((2^{n-1} - 1)a_0 + 4a_3 - 2(2^n - 1)a_4)\alpha' - 2^n(a_0 - 4a_4)\rho' \right] .$$

Si $f : RU(Q) \rightarrow \mathbb{Z}$ est une forme linéaire, $f(\text{Im } \varphi)$ est un idéal de \mathbb{Z} ; il est donc de la forme $\mathbb{Z}a_f$ où a_f est un entier ; le problème est de trouver une forme linéaire g telle que $\mathbb{Z}a_g$ soit maximal parmi les $\mathbb{Z}a_f$. Il est clair que 2^{n-2} divisera tous les a_f ; d'autre part, il est possible de choisir les a_i de telle sorte que

$$(2^{n-1} - 1)a_0 + 4a_3 - 2(2^n - 1)a_4 = 1 ,$$

par exemple en prenant

$a_0 = -1$, $a_1 = a_2 = a_4 = 0$ et $a_3 = 2^{n-3}$, si bien que, si l'on appelle

p_0, p_1, p_2, p_3 et p_4 les projections canoniques de $RU(Q)$ sur \mathbb{Z} , et si l'on pose

$$\sigma_0 = \alpha' + 2^n \rho' ,$$

$$RU(Q) = \mathbb{Z}\sigma_0 \oplus \text{Ker } p_3, \text{ et}$$

$$\text{Im } \varphi = \mathbb{Z} 2^{n-2}\sigma_0 + \text{Im } \varphi \cap \text{Ker } p_3 \quad .$$

Les éléments de $\text{Im } \varphi \cap \text{Ker } p_3$ sont de la forme :

$$2^n \left[a_1 \xi_1' + a_2 \xi_2' - 2^{n-2} (a_0 - 4a_4) \rho' \right] \quad ,$$

$$\text{où } (2^{n-1} - 1)a_0 + 4a_3 - 2(2^n - 1)a_4 = 0 \quad .$$

Si l'on prend par exemple $a_0 = a_3 = a_4 = 0$ et $a_1 = a_2 = 1$, on voit qu'en posant

$$\sigma_1 = \xi_1' \quad /$$

$$\sigma_2 = \xi_2' \quad ,$$

$$RU(Q) = \mathbb{Z}\sigma_0 \oplus \mathbb{Z}\sigma_1 \oplus \mathbb{Z}\sigma_2 \oplus \text{Ker } p_3 \cap \text{Ker } p_1 \cap \text{Ker } p_2 \quad ,$$

$$\text{Im } \varphi = \mathbb{Z} 2^{n-2}\sigma_0 \oplus \mathbb{Z} 2^n\sigma_1 \oplus \mathbb{Z} 2^n\sigma_2 + \text{Im } \varphi \cap \text{Ker } p_3 \cap \text{Ker } p_2 \cap \text{Ker } p_1 \quad .$$

Les éléments de $\text{Im } \varphi \cap \text{Ker } p_3 \cap \text{Ker } p_2 \cap \text{Ker } p_1$ sont de la forme :

$$-2^{2n-2} (a_0 - 4a_4) \rho' \quad /$$

$$\text{où l'on a toujours } a_1 = a_2 = (2^{n-1} - 1)a_0 + 4a_3 - 2(2^n - 1)a_4 = 0 \quad .$$

Cette dernière relation montre en particulier que a_0 doit être *pair*, et l'on voit que ces relations peuvent être vérifiées en prenant $a_0 - 4a_4 = 2$ si

$a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $a_4 = 2^{n-1} - 1$, et $a_0 = 2(2^n - 1)$, ce qui permet de déterminer $\text{Im } \varphi$, en effet :

si l'on pose $\sigma_3 = \rho'$, alors :

$$RU(Q) = \mathbb{Z}\sigma_0 \oplus \mathbb{Z}\sigma_1 \oplus \mathbb{Z}\sigma_2 \oplus \mathbb{Z}\sigma_3 \oplus \mathbb{Z}.1$$

et

$$\text{Im } \varphi = \mathbb{Z} 2^{n-2}\sigma_0 \oplus \mathbb{Z} 2^n\sigma_1 \oplus \mathbb{Z} 2^n\sigma_2 \oplus \mathbb{Z} 2^{2n-1}\sigma_3 \quad .$$

Il résulte donc de la suite exacte (3.1.1) que

si $n > 2$	$\hat{K}U^0(X_n) = \mathbb{Z}_{2^{n-2}} \oplus \mathbb{Z}_{2^n} \oplus \mathbb{Z}_{2^n} \oplus \mathbb{Z}_{2^{2n-1}}$
si $n = 2$	$\hat{K}U^0(X_2) = \hat{K}U^0(S^7/Q) = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_8$

par contre, pour $n = 1$, il convient de refaire le calcul des facteurs invariants précédent. Dans ce cas, Q opère sur S^3 au moyen de ρ , et $\lambda_{-1}\rho = 2-\rho = -\rho'$; les éléments de $\text{Im}\varphi$ sont donc de la forme :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -\rho'(a_0 + a_1\xi_1' + a_2\xi_2' + a_3\alpha' + a_4\rho') \\ &= 2a_1\xi_1' + 2a_2\xi_2' + (2a_3 - a_4)\alpha' + (4a_4 - a_0)\rho' \end{aligned}$$

et l'on voit tout de suite que :

$$\text{Im}\varphi = \mathbb{Z}2\xi_1' \oplus \mathbb{Z}2\xi_2' \oplus \mathbb{Z}\alpha' \oplus \mathbb{Z}\rho', \text{ si bien que dans ce cas :}$$

$$\hat{K}U^0(X_1) = \hat{K}U^0(S^3/Q) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2,$$

ce qui achève le calcul de la KU-théorie des espaces X_n .

Remarque. - On sait qu'il existe une suite spectrale (Atiyah - Hirzebruch) qui relie la cohomologie de X_n à sa Ku-théorie :

$$E_2^{p,q} = \hat{H}^p(X_n, KU^q(\text{pt})) \Rightarrow \hat{K}U^{p+q}(X_n) \text{ qui dégénère dans notre cas.}$$

Cette suite spectrale ne permet pas de calculer complètement $\hat{K}U^0(X_n)$ mais on peut lire l'ordre de ce groupe sur la diagonale $p+q = 0$; on trouve en effet que l'ordre de $KU^0(X_n)$ est bien 2^{5n-3} ce qui est conforme aux résultats précédents.

3.4. Pour terminer ce paragraphe, il reste à calculer le noyau de φ qui donnera $KU^1(X_n)$. Soit donc $x = a_0 + a_1\xi_1' + a_2\xi_2' + a_3\alpha' + a_4\rho'$ un élément de $RU(Q)$, et regardons à quelles conditions $\varphi(x) = 0$:

- si $n = 1$, il faut et il suffit que $a_1 = a_2 = 0 = 2a_3 - a_4 = 4a_4 - a_0$

i.e. $a_1 = a_2 = 0, a_4 = 2a_3$ et $a_0 = 4a_4 = 8a_3$.

Structure multiplicative de $\widetilde{KU}^0(X_n)$: on l'obtient comme structure quotient de $RU(Q)$ puisque l'application $RU(Q) \longrightarrow \widetilde{KU}^0(X_n)$ est un homomorphisme d'anneaux

On trouve :

$$\sigma_0^2 = (\alpha' + 2^n \rho')^2 = -4 \alpha' - 2^{n+2} (\alpha' + 2^n \rho') + 2^{2n} \rho'^2 = -4 \alpha' = -4 \sigma_0 + 2^{n+2} \sigma_3 \quad ,$$

$$\sigma_0 \sigma_1 = -4 \sigma_1 \quad ,$$

$$\sigma_0 \sigma_2 = -4 \sigma_2 \quad ,$$

$$\sigma_0 \sigma_3 = (\alpha' + 2^n \rho') \rho' = (2^n - 2) \alpha' - 2^{n+2} \rho' = -2 \sigma_0 - 2^{n+1} \sigma_3 \quad ,$$

$$\sigma_1^2 = -2 \sigma_1 \quad ,$$

$$\sigma_1 \sigma_2 = \xi'_1 \xi'_2 = \alpha' - 2 \xi'_1 - 2 \xi'_2 = \sigma_0 - 2 \sigma_1 - 2 \sigma_2 - 2^n \sigma_3 \quad ,$$

$$\sigma_1 \sigma_3 = -2 \sigma_1 \quad ,$$

$$\sigma_2^2 = -2 \sigma_2 \quad ,$$

$$\sigma_2 \sigma_3 = -2 \sigma_2 \quad .$$

§ 4. KO-THEORIE DE X_n .

4.1. $RO(Q)$ et $RSp(Q)$: Soit $RO(Q)$ (resp. $RSp(Q)$) l'anneau des représentations réelles orthogonales (resp. le groupe des représentations quaternioniques) de Q . On sait qu'il existe des applications

$$RO(Q) \begin{array}{c} \xleftarrow{r} \\ \xrightarrow{c} \end{array} RU(Q) \begin{array}{c} \xrightarrow{q} \\ \xleftarrow{h} \end{array} RSp(Q)$$

définies de la manière suivante :

- si σ est une représentation unitaire de Q , $r(\sigma)$ est la *représentation réelle sous-jacente* à σ , et $q(\sigma) = \sigma \otimes 1_H$ est la *représentation "quaternifiée"* de σ .

- Si π est une représentation orthogonale, $c(\pi) = \pi \otimes 1_{\mathbb{C}}$ est la *représentation complexifiée* de π .

- enfin si θ est une représentation quaternionique de Q , $h(\theta)$ est la *représentation complexe sous-jacente*.

Ces diverses applications vérifient les relations suivantes :

$$r_o c = q_o h = 2 \quad ,$$

$c_o r(\sigma) = h_o q(\sigma) = \sigma + \bar{\sigma}$, où $\bar{\sigma}$ est la représentation conjuguée de σ . En particulier, c et h sont *injectives*, de plus, c est un *homomorphisme d'anneaux*, ce qui permet d'identifier $RO(Q)$ à un sous-anneau de $RU(Q)$, et $RSp(Q)$ à un sous-groupe de $RU(Q)$.

$RU(Q)$ a pour base canonique les représentations irréductibles $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ et ρ . Les représentations irréductibles de degré 1 sont réelles. Pour connaître la nature de la représentation ρ , on calcule la somme

$$S_\rho = \sum_{r \in Q} \chi_\rho(r^2) \quad (\text{voir [2], p. 149}) \quad .$$

Ici $r^2 = 1$ si $r = 1$ ou si $r = s^2$, et $r^2 = S^2$ dans tous les autres cas.

Comme

$$\rho(s^2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ,$$

$\chi_\rho(s^2) = -2$, et $S_\rho = -8$, donc ρ est autoconjuguée i.e. $\rho \sim \bar{\rho}$.
Il en résulte donc que

$$c(r(\rho)) = \rho + \bar{\rho} = 2\rho \quad ,$$

donc 2ρ est *réelle*.

Or, on sait que les représentations irréductibles réelles de Q appartiennent à l'une des classes suivantes :

- $c(\pi) = \sigma + \bar{\sigma}$ où σ est une représentation irréductible complexe non équivalente à $\bar{\sigma}$;
- $c(\pi) = 2\leftarrow\sigma$ où σ est une représentation irréductible complexe auto-conjuguée ;
- $c(\pi) = \sigma$ où σ est une représentation irréductible complexe équivalente à une représentation réelle.

Nous connaissons ainsi toutes les représentations irréductibles réelles de Q . Pour éviter les confusions, nous les noterons de la manière suivante :

- représentations de degré 1 : $1 = \eta_0, \eta_1(s \mapsto 1, t \mapsto 1)$,

$$\eta_2(s \mapsto -1, t \mapsto 1) \quad \text{et} \quad \eta_3(s \mapsto -1, t \mapsto -1)$$

- représentation de degré 4 : $\theta : \mathbb{Q} \longrightarrow \text{SO}(4)$, définie par :

$$s \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et l'on a les relations suivantes entre $\text{RU}(\mathbb{Q})$ et $\text{RO}(\mathbb{Q})$:

$$c(\eta_i) = \xi_i \text{ pour } i = 0, 1, 2, 3 \quad \text{et} \quad r(\rho) = 0.$$

En d'autres termes, *comme sous-anneau de* $\text{RU}(\mathbb{Q})$, $\text{RO}(\mathbb{Q})$ *est engendré par* $1, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ *et* 2ρ .

D'autre part, pour des raisons évidentes de dimensions, $1, \xi_1, \xi_2$ et ξ_3 ne sont pas sous-jacentes à des représentations quaternioniques, par contre, il en est bien ainsi des représentations, $2, 2\xi_1, 2\xi_2, 2\xi_3$ et ρ , comme on le voit sans peine puisque tout quaternion q se met de manière unique sous la forme

$$q = \begin{pmatrix} Z & Z' \\ -\bar{Z}' & \bar{Z} \end{pmatrix} \quad \text{où } Z \text{ et } Z' \text{ sont deux}$$

nombres complexes. Il en résulte que :

4.1.2. *Comme sous-groupe libre de* $\text{RU}(\mathbb{Q})$, $\text{RSp}(\mathbb{Q})$ *est engendré par* $2, 2\xi_1, 2\xi_2, 2\xi_3$ *et* ρ .

Enfin, on vérifie que, dans $\text{RU}(\mathbb{Q})$

4.1.3. *Le produit d'une représentation réelle par une représentation quaternionique est quaternionique.*

4.1.4. *Le produit de deux représentations quaternioniques est une représentation réelle.*

4.2. Soit G un groupe fini, et soit $p : E \rightarrow X$ un G -fibré vectoriel réel de rang $4n$, que nous supposerons quaternionique (pourqu'il soit orientable en KO_G -Théorie), on note $B(E)$ et $S(E)$ les fibré en boules et en sphères de E et $X^E = B(E)/S(E)$ l'espace de Thom de E . En KO_G -théorie, on a la suite exacte

$$KO_G^{4,+i}(B(E), S(E)) = \widetilde{KO}_G^{4n+i}(X^E) \longrightarrow KO_G^{4n+i}(B(E)) \longrightarrow KO_G^{4n+i}(S(E)) .$$

Notons $i : X \rightarrow E$ la section nulle du fibré E . On sait alors construire un homomorphisme de Gysin :

$$i_* : KO_G^i(X) \longrightarrow KO_G^{\Phi, 4n+i}(E) ,$$

où $KO_G^{\Phi}(E)$ est la KO_G -théorie à support de E et qui dans ce cas est un *isomorphisme*. D'autre part

$$KO_G^{\Phi}(E) \approx \widetilde{KO}_G(X^E) .$$

Si bien qu'on obtient un *isomorphisme de Thom* que nous noterons encore

$$i_* : KO_G^i(X) \xrightarrow{\sim} \widetilde{KO}_G^{4n+i}(X^E) .$$

Comme d'autre part, si $i^* : KO_G^{4n+i}(B(E)) \xrightarrow{\sim} KO_G^{4n+i}(X)$ est induit par i , on a

$$i^*(i_*(y), x) = y \cdot i^*(i_*(x))$$

quels que soient x et y dans $KO_G^*(X)$; en particulier

$$i^*(i_*(y)) = y \cdot i^*(i_*(1))$$

quelque soit $y \in KO_G^i(X)$. Posons

$$\Delta_E = i^*(i_*(1))$$

les isomorphismes i_* et i^* permettent donc d'écrire une suite exacte

$$(4.2.1) \quad KO_G^i(X) \xrightarrow{\phi} KO_G^{G4n+i}(X) \longrightarrow KO_G^{4n+i}(S(E)) ,$$

où ϕ est la multiplication par Δ_E . (Voir [8] et [11]) .

En particulier, si l'on prend pour X un point, et $i = -4n$ $KO_G^0(\text{pt}) = RO(G)$
est plus généralement

$$KO_G^{-4n}(\text{pt}) = \begin{cases} RSp(G) & \text{si } n \text{ est impair} \\ RO(G) & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} ;$$

d'autre part si G opère librement sur S(E)

$$KO_G^*(S(E)) = KO(S(E)/G) .$$

Enfin (voir [9]) s'il existe dans G un élément central r, tel que $r^2 = 1$ et qui opère par antipodie sur S(E), l'application

$$KO_G(\text{pt}) = RO(G) \longrightarrow KO_G(S(E))$$

est surjective. Par conséquent,

- si E est une représentation réelle de degré 4n de G, supposée quaternionique,

a) si n est impair, on a une suite exacte :

$$(4.2.2) \quad RSp(G) \xrightarrow{\Delta_E} RO(G) \longrightarrow KO(S(E)/G) \longrightarrow 0 .$$

b) Si n est pair, on a une suite exacte :

$$(4.2.3) \quad RO(G) \xrightarrow{\Delta_E} RO(G) \longrightarrow KO(S(E)/G) \longrightarrow 0 .$$

Tout le problème est de déterminer Δ_E .

4.3. Posons $\theta_n = n \theta$; θ_n est donc une représentation réelle de degré 4n opérant sur S^{4n-1} , comme θ . Le centre de Q est réduit à $\{1, s^2\}$ et il est clair que

$$\theta(s^2) = -id$$

Soit $E_n = S^{4n-1} \times_Q \mathbb{R}^4 \longrightarrow X_n$ le fibré vectoriel sur X_n associée à la représentation θ . Nous noterons ζ_n ce fibré réel de rang 4 et nous l'appellerons le *fibré canonique* sur X_n . Le fibré associé à la représentation θ_n est le fibré $n\zeta_n$.

Comme nous l'avons vu en 4.1., ρ , donc θ est quaternionique ainsi que $\lambda_{-1}\rho = 2-\rho$; il résulte alors de 4.1.3 et 4.1.4 que $\lambda_{-1}(n\rho) = (2-\rho)^n$ est réelle si n est pair et quaternionique si n est impair. D'autre part, le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{(n pair)} & \text{RO}(Q) & \xrightarrow{\Delta_E} & \text{RO}(Q) & \longrightarrow & \text{KO}(X_n) & \longrightarrow & 0 \\
 & \uparrow \downarrow c & & \uparrow \downarrow c & & \uparrow \downarrow c & & \\
 (4.3.1) & \text{RO}(Q) & \xrightarrow{\lambda_{-1}(n\rho)} & \text{RU}(Q) & \longrightarrow & \text{KU}(X_n) & \longrightarrow & 0 \\
 & \downarrow \uparrow n & & \downarrow \uparrow c & & \downarrow \uparrow c & & \\
 \text{(n impair)} & \text{RSp}(Q) & \xrightarrow{\Delta_E} & \text{RO}(Q) & \longrightarrow & \text{KO}(X_n) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

est commutatif, si bien que :

- lorsque n est impair $h(\Delta_E) = \lambda_{-1}(n\rho)$,
- lorsque n est pair $c(\Delta_E) = \lambda_{-1}(n\rho)$,

puisque c et h sont injectives.

1) n est impair.

$$\Delta_E = (2-\rho)^n = (-1)^{n-1} 2^{n-2} [(2^{n-1}-1)\alpha' - 2^n \rho'] \in \text{RSp}(Q).$$

Si $x = 2(a_0 + a_1 \xi'_1 + a_2 \xi'_2 + a_3 \alpha') + a_4 \rho'$ est un élément quelconque de $\text{RSp}(Q)$, alors :

$$x \cdot \Delta_E = (-1)^{n-1} 2^{n-1} [4a_1 \xi'_1 + 4a_2 \xi'_2 + [(2^{n-1}-1)a_0 + 4a_3 - (2^n-1)a_4] \alpha' - 2^n(a_0 - 2a_4) \rho'] .$$

$$\begin{aligned}
 \text{Soit } x \cdot \Delta_E = (-1)^{n-1} 2^{n-1} [& 4a_1 \eta'_1 + 4a_2 \eta'_2 + ((2^{n-1}-1)a_0 + 4a_3 - (2^n-1)a_4) \beta' \\
 & - 2^{n-1}(a_0 - 2a_4) \theta'] \in \text{RO}(Q) .
 \end{aligned}$$

Un calcul de facteurs invariants analogue à celui de 3.3. montre que l'image de la multiplication par Δ_E est engendrée dans $\text{RO}(Q)$ par $2^{n-1} \beta'$, $2^{n+1} \eta'_1$, $2^{n+1} \eta'_2$ et $2^{2n-1} \theta'$, donc :

$$(4.3.2) \quad \widetilde{\text{KO}}^0(X_n) = \mathbb{Z}_{2^{n-1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{n+1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{n+1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{2n-1}}$$

Sauf dans le cas où $n = 1$, $\Delta_E = 2-\rho$,

$$x. \Delta_E = 4a_1 \xi'_1 + 4a_2 \xi'_2 = (4a_3 - a_4) \alpha' - 2(a_0 - 2a_4) \rho' \quad ;$$

l'image de la multiplication par Δ_E est alors engendrée par $\beta', \theta', 4\xi'_1$;
et $4\xi'_2$ et

$$(4.3.2)' \quad \boxed{\widetilde{KO}^0(S^3/Q) = \widetilde{KO}^0(X_1) = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4} \quad .$$

2) n est pair

$$\Delta_E = (2 - \rho)^n = (-1)^{n-1} 2^{n-2} [(2^{n-1} - 1) \alpha' - 2^n \rho'] \in \text{RP}(Q^0) \quad .$$

Si $x = a_0 + a_1 \xi'_1 + a_2 \xi'_2 + a_3 \alpha' + 2a_4 \rho'$ est un élément quelconque de $RO(Q)$,
alors :

$$x. \Delta_E = (-1)^{n-1} 2^{n-2} [4a_1 \eta'_1 + 4a_2 \eta'_2 + ((2^{n-1} - 1)a_0 + 4a_3 - 4(2^n - 1)a_4) \beta' - 2^{n-1}(a_0 - 8a_4) \rho'] \quad .$$

On voit alors que l'image de la multiplication par Δ_E est engendrée par
 $2^{n-2}(\beta' + 2^{n-1}\theta)$, $2^n \eta'_1$, $2^n \eta'_2$ et $2^{2n-1} \theta'$,

Si bien que :

$$(4.3.3.) \quad \boxed{\widetilde{KO}^0(X_n) = \mathbb{Z}_{2^{n-2}} \oplus \mathbb{Z}_{2^n} \oplus \mathbb{Z}_{2^n} \oplus \mathbb{Z}_{2^{2n-1}}} \quad .$$

Remarque. Pour les mêmes raisons que dans le cas complexe on est en mesure de
donner aussi la structure multiplicative de $\widetilde{KO}^0(X_n)$.

5. PROBLEMES D'IMMERSION ET DE PLONGEMENT.

On se propose maintenant d'appliquer les critères de non-immersion et de
non plongement d'Atiyah (voir [7]).

5.1. Soit donc $X_n = S^{4n-1}/Q$ où Q opère sur S^{4n-1} au moyen de la représentation
réelle θ . Si $\tau(X_n)$ est le fibré tangent à la variété X_n , on a un isomorphisme

$$n \zeta_n \xrightarrow{\sim} \tau(X_n) \oplus 1 \quad ;$$

où ζ_n est le fibré canonique sur X_n associé à la représentation θ , si bien
que si τ est la classe stable de $\tau(X_n)$, dans $\widetilde{KO}(X_n)$, on a

$$\tau + 1 = n \zeta \quad ,$$

où ζ est la classe stable du fibré ζ_n (que nous avons encore noté γ_3 plus haut).

Suivant Atiyah, posons $\psi = (4n-1) - \tau \in \widetilde{KO}(X_n)$

et $\zeta' = \zeta - 4$;

alors $\psi = (4n-1) - [n(\zeta'+4)+1]$,

$$\boxed{\psi_0 = -n \zeta'}$$

Atiyah montre que si X_n est immergeable dans \mathbb{R}^{4n-1+k} alors $\gamma^i(\psi_0) = 0$ pour $i > k$;

: plongeable dans \mathbb{R}^{4n-1+k} alors $\gamma^i(\psi_0) = 0$

pour $i \geq k$.

5.2. γ -structure :

$$\gamma_t(\psi_0) = \gamma_t(-n \zeta') = [\gamma_t(\zeta')]^{-n} ,$$

$$\gamma_t(\zeta') = \gamma_t(\zeta - 4) = \gamma_t(\zeta) \cdot \gamma_t(-4) = \gamma_t(\zeta) \cdot (\gamma_t(1))^{-4} ,$$

Soit $\gamma_t(\zeta') = (1-t)^4 \gamma_t(\zeta)$.

Or :
$$\gamma_t(\zeta) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i / (1-t)^i \lambda^i(\zeta) ;$$

ζ est la classe du fibré associé à la représentation θ , et il est facile de voir que, dans $RO(Q)$, $\lambda^0 \theta = 1$, $\lambda^1 \theta = 0$, $\lambda^2 \theta = 2 + \beta$,

$$\lambda^3 \theta = \theta , \lambda^4 \theta = 1 \text{ et } \lambda^i \theta = 0 \text{ pour } i > 4 .$$

Pour plus de simplicité, continuons le calcul dans $RO(Q)$:

$$(1-t)^4 \gamma_t(0) = (1-t)^4 + t(1-t)^3 \theta + t^2(1-t)^2(2+\beta) + t^3(1-t)\theta + t^4$$

Soit
$$\gamma_t(\theta') = 1 + (\theta - 4)t + (8 + \beta - 3\theta)t^2 + (-8 - 2\beta + 4\theta)t^3 + (4 + \beta - 2\theta)t^4 ,$$

$$\gamma_t(\theta') = 1 + \theta' t + (\beta' - 3\theta')t^2 - 2(\beta' - 2\theta')t^3 + (\beta' - 2\theta')t^4 .$$

Cette expression de $\gamma_t(\theta')$ peut se modifier de la manière suivante :

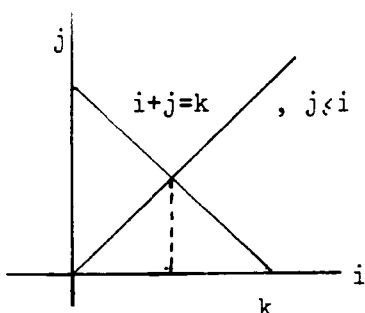
$$\begin{aligned} \gamma_t(\theta') &= 1 + \theta' t - \theta' t^2 + (\beta' - 2\theta')(t^2 - 2t^4 + t^4) , \\ &= 1 + \theta' t(1-t) + (\beta' - 2\theta') [t(1-t)]^2 , \end{aligned}$$

si bien qu'en posant $2z = t(1-t)$,

$$\gamma_t(\theta') = 1 + 2z\theta' + z^2\theta'^2 = (1+\theta'z)^2.$$

Alors ,

$$\gamma_t(v_0) = [\gamma_t(\theta')]^{-n} = (1 + \theta'z)^{-2n}$$



$$\begin{aligned} &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \binom{-2n}{i} \theta'^i t^i (1-t)^i \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \binom{-2n}{i} \theta'^i t^i \left[\sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} t^j \right] \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^i (-1)^j 2^{-i} \binom{-2n}{i} \binom{i}{j} \theta'^i t^{i+j} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}^k (-1)^{k-i} 2^{-i} \binom{-2n}{i} \binom{i}{k-i} \theta'^i \right) t^k, \end{aligned}$$

où $\lceil \frac{k+1}{2} \rceil$ désigne la partie entière de $\frac{k+1}{2}$. Donc :

$$(5.2.1) \quad \gamma^k(v_0) = \sum_{i=\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}^k (-1)^{k-i} 2^{-i} \binom{-2n}{i} \binom{i}{k-i} \theta'^i.$$

Or on sait (voir 4.2) que $\theta'^i = (-1)^i 4^{i-1} [(2^{i-1}-1)\beta' - 2^{i-1}\theta']$,

d'où il résulte que :

$$\begin{aligned} \gamma^k(v_0) &= (-1)^k \sum_{i=\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}^k 2^{i-2} \binom{-2n}{i} \binom{i}{k-i} [(2^{i-1}-1)\beta' - 2^{i-1}\theta'] \\ (5.2.2.) \quad \gamma^k(v_0) &= (-1)^k \left[\sum_{i=\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}^k 2^{i-2} (2^{i-1}-1) \binom{-2n}{i} \binom{i}{k-i} \beta' - \sum_{i=\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}^k 2^{2i-3} \binom{-2n}{i} \binom{i}{k-i} \theta' \right] \end{aligned}$$

par conséquent :

1) lorsque n est impair :

$$(5.2.3) \quad \gamma^k(v_0) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^k 2^{i-2} (2^{i-1}-1) \binom{-2n}{i} \binom{i}{k-i} \equiv 0 \pmod{2^{n-1}} \\ \text{et} \\ \sum_{i=\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^k 2^{2i-3} \binom{-2n}{i} \binom{i}{k-i} \equiv 0 \pmod{2^{2n-1}} \end{array} \right. .$$

2) Lorsque n est pair

Alors $\widetilde{KO}^0(X_n)$ est engendré par $\alpha' + 2^{n-1} \theta'$, η'_1 , η'_2 et θ' qui sont respectivement d'ordre 2^{n-2} , 2^n , 2^n et 2^{2n-1} , et :

$$\gamma^k(v_0) = (-1)^k \left[\left(\sum_{i=\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^k 2^{i-2} (2^{i-1}-1) \binom{-2n}{i} \binom{i}{k-i} \right) (\beta' + 2^{n-1} \theta') \right. \\ \left. - \left(\sum_{i=\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^k \left[2^{n+i-3} (2^{i-1}-1) + 2^{2i-3} \right] \binom{-2n}{i} \binom{i}{k-i} \right) \theta' \right]$$

donc

$$(5.2.4.) \quad \gamma^k(v_0) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^k 2^{i-2} (2^{i-1}-1) \binom{-2n}{i} \binom{i}{k-i} \equiv 0 \pmod{2^{n-2}} \\ \text{et} \\ \sum_{i=\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^k \left[2^{n+i-3} (2^{i-1}-1) + 2^{2i-3} \right] \binom{-2n}{i} \binom{i}{k-i} \equiv 0 \pmod{2^{2n-1}} \end{array} \right. .$$

Application à quelques cas particuliers :

1) $n=1$; $X_1 = S^3/Q$. β' et θ' ont des images nulles dans $\widetilde{KO}(X_1)$, par conséquent,

dans ce cas, la dimension géométrique de X_1 est nulle, et X_1 est immergeable dans \mathbb{R}^4 et plongeable dans \mathbb{R}^5 .

2) $n=2$; $X_2 = S^7/Q$ est de dimension 7, on sait alors que X_2 est plongeable dans \mathbb{R}^4 et immergeable dans \mathbb{R}^{13} ; il en résulte que $\gamma^k(v_0) = 0$ si $k \geq 7$. Dans ce cas $\beta' + 2^{n-1}\theta'$ est nul dans $\widetilde{KO}^0(X_2)$, donc

$$\gamma^k(v_0) = \pm \sum_{i=\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^k (2^{n+i-3}(2^{i-1}-1)+2^{2i-3}) \binom{-2n}{i} \binom{i}{k-i} \theta' ;$$

donc $\gamma^k(v_0) = 0 \iff \sum_{i=\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^k 2^{i-1}(3 \cdot 2^{i-2}-1) \binom{-4}{i} \binom{i}{k-i} \equiv 0 \pmod{8} ;$

évidemment $2^{i-1}(3 \cdot 2^{i-2}-1) \binom{-4}{i} \binom{i}{k-i} \equiv 0 \pmod{8}$ si $i \geq 4$.

Alors $\gamma^6(v_0) = \gamma^5(v_0) = \gamma^4(v_0) = \gamma^3(v_0) = 0$

et $\gamma^2(v_0) = 2\theta' \neq 0$.

Il en résulte que $X_2 = S^7/Q$ n'est pas immergeable dans \mathbb{R}^9 et n'est pas plongeable dans \mathbb{R}^{10} .

3) Si $n=3$, les images de β' et θ' dans $\widetilde{KO}(X_3)$ sont respectivement d'ordre 4 et 32. $X_3 = S^{11}/Q$ étant de dimension 11 est immergeable dans \mathbb{R}^{21} et plongeable dans \mathbb{R}^{22} , donc $\gamma^k(v_0) = 0$ si $k \geq 11$. D'autre part

$$\gamma^k(v_0) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^k 2^{i-2}(2^{i-1}-1) \binom{-6}{i} \binom{i}{k-i} \equiv 0 \pmod{4} \\ \text{et} \\ \sum_{i=\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^k 2^{2i-3} \binom{-6}{i} \binom{i}{k-i} \equiv 0 \pmod{32} \end{array} \right. ;$$

ces deux convergences sont réalisées dès que $k \geq 7$, ce qui assure dès que

$$\gamma^k(\nu_0) = 0 \quad \text{si } k \geq 7 \quad ,$$

$$\gamma^6(\nu_0) = \gamma^5(\nu_0) = 0 \quad ;$$

par contre $\gamma^4(\nu_0) \neq 0$.

$X_3 = S^{11}/Q$ - n'est donc pas immergeable dans \mathbb{R}^{14}

- n'est pas plongeable dans \mathbb{R}^{15} .

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] G. VINCENT : Les groupes linéaires finis sans points fixes
Comm. Math. Helv. Vol. 20 (1947) pp. 117-171.
- [2] J.A. WOLF : Spaces of Constant curvature.
McGraw - Hill Ed.
- [3] CARTAN-EILENBERG : Homological Algebra.
Princeton Un. Press.
- [4] P. SAMUEL : Theorie des nombres.
Hermann Ed.
- [5] M. F. ATIYAH : K-theory
Benjamin Ed.
- [6] M. F. ATIYAH : Characters and cohomology of finite groups.
IHES n° 9 (1961).
- [7] M. F. ATIYAH : Immersions and embedding of manifolds.
Topology Vol. 1 pp. 125-132.
- [8] M. KAROUBI : Algèbres de Clifford et K-théorie.
Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4-ème série
t. 1 1968- pp. 161-270.

- [9] M. KAROUBI : K-théorie équivariante des fibrés en sphères.
Strasbourg 1971/72.
- [10] .A. ROUX : Cours de topologie algébrique.
Lyon 1972/73.
- [11] D. PITT : Free actions of generalised quaternion groups on spheres.
Proc. London Math. Soc. (3) 26 (1973) 1-18.

Note : Les résultats de ce travail étaient pratiquement tous établis lorsque nous est parvenu cette dernière publication.

- [12] T. KAMBE : The Structure of K_{Λ} -rings of lens space, and their applications.
- [13] N. MAHAMMED : Sur la K-théorie des espaces lenticulaires,
Th. 3-ème cycle - Lille 1971.
- [14] A. CHABOUR : Thèse 3-ème cycle, Alger 1971.

Manuscrit remis le 31 mai 1973.

J.M. BRAEMER
Maître -Assistant
Département de mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69621-VILLEURBANNE