JEAN DAZORD
MICHEL JOURLIN

Fonctions mesurables et convergence en mesure

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1972, tome 9, fascicule 1
, p. 87-98
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1972__9_1_87_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1972 t. 9-1

FONCTIONS MESURABLES ET CONVERGENCE EN MESURE

Jean DAZORD et Michel JOURLIN

L'étude qui suit porte sur l'algèbre des fonctions μ-mesurables à valeurs réelles, définies sur un espace compactologique régulier (X,K) ; cette algèbre sera notée $S\mu(X)$ ou parfois $S\mu$. La mesure μ, toujours supposée strictement positive, est en fait une prémesure (au sens de [B3]) sur (X,K). Après quelques rappels concernant la topologie, sur $S\mu(X)$, de la convergence en mesure, nous donnons des indications sur les liens entre la topologie de $S\mu(X)$ et la mesure μ.

Les notions de compactologie utilisées ici proviennent de [B4]. Tous les espaces compactologiques considérés sont supposés réguliers. Un certain nombre de résultats donnés dans [B3] utilisent en fait uniquement le caractère de prémesure de la mesure considérée, donc seulement la compactologie canonique de l'espace topologique T. Aussi nous aurons fréquemment recours aux notations et aux résultats valables pour les mesures sur les espaces topologiques lorsque leur transposition au cas compactologique est possible ; on pourra d'ailleurs se référer à [G] sur ce point.

Il va de soi qu'ayant en vue une étude de caractère systématique de la topologie de la convergence en mesure, nous sommes parfois conduits à mentionner des résultats connus.

1. - LA TOPOLOGIE DE LA CONVERGENCE EN MESURE.

Pour simplifier, nous appellerons mesure sur un espace compactologique (X,K) un élément $\mu = (\mu_K)$ de la limite projective $\varprojlim_{K \in K} M(K)$, $M(K)$ étant l'espace des mesures de Radon sur le compact K. Nous dirons qu'une compactologie K_0 sur X est une sous-compactologie de K si K_0 est plus fine que K, c'est-à-dire si l'application identique $1_X : (X,K_0) \to (X,K)$ est un morphisme compactologique ;

notons que $\mathcal{K}_0$, comme toute compactologie sur X, est un recouvrement de X ; de plus la topologie d'un compact quelconque K_0 de $\mathcal{K}_0$ coïncide avec celle qui est induite par tout compact de $\mathcal{K}$ le contenant, autrement dit K_0 est un élément de $\mathcal{K}$. Une sous-compactologie $\mathcal{K}_0$ de $\mathcal{K}$ est dite μ-dense dans $\mathcal{K}$ si pour tout $K \in \mathcal{K}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $K_0 \in \mathcal{K}_0$, $K_0 \subset K$, tel que $\mu(K \setminus K_0) \leqslant \varepsilon$ ([B1], déf. 6, p. 189). Appelons enfin réunion des sous-compactologies $\mathcal{K}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, de $\mathcal{K}$ la sous-compactologie de $\mathcal{K}$ dont une base est constituée des ensembles $\bigcup_{i=1}^{n} K_i$ où K_i décrit une base de $\mathcal{K}_i$. L'intersection d'une famille quelconque $(\mathcal{K}_i)_{i \in I}$ de sous-compactologies de $\mathcal{K}$ étant la compactologie constituée des ensembles $\bigcap_{i \in I} K_i$, on constate que la classe des sous-compactologies μ-denses de $\mathcal{K}$ est stable par réunion finie et par intersection dénombrable ; pour établir ce dernier point, on remarque que si $(\mathcal{K}_n)$ est une suite de sous-compactologies μ-denses de $\mathcal{K}$, si K est un compact donné de $\mathcal{K}$ et si $\varepsilon > 0$ est fixé, alors pour tout $n \geqslant 1$, il existe $K_n \in \mathcal{K}_n$ vérifiant $\mu(K \setminus K_n) \leqslant \varepsilon 2^{-n}$, ce qui donne : $\mu(K \setminus \bigcap K_n) \leqslant \sum_{n \geqslant 1} \mu(K \setminus K_n) \leqslant \varepsilon$. Etant donnée une application $f : X \to \mathbb{R}$ nous noterons K_f tout compact sur lequel f est continue et $\mathcal{K}_f$ la famille des compacts K_f ; $\mathcal{K}_f$ est une sous-compactologie de $\mathcal{K}$ et nous dirons que f est μ-mesurable si $\mathcal{K}_f$ est μ-dense dans $\mathcal{K}$. Il est immédiat que si $f : (X, \mathcal{K}) \to \mathbb{R}$ est une application μ-mesurable, alors pour tout fermé F de $\mathbb{R}$ et tout compact K de $\mathcal{K}$, $\overset{-1}{f}(F) \cap K$ est μ_K-mesurable ([B1], prop. 7, p. 179), autrement dit $\overset{-1}{f}(F)$ est μ-mesurable au sens que nous venons de donner à ce terme. En particulier nous utiliserons à plusieurs reprises l'intégrabilité pour μ_K des ensembles $\{t \; ; \; t \in K \text{ et } |f(t)| \leqslant \alpha\}$ où α est un réel donné.

Sur l'algèbre $S\mu(X)$ des fonctions μ-mesurables nous placerons la topologie de la convergence en mesure ; $S\mu(X)$ est ainsi un espace vectoriel topologique (evt) et même une algèbre topologique, dont un système fondamental de voisinages de l'origine est constitué des ensembles :

$$W(K, \varepsilon) = \{f \in S\mu(X) \; ; \; \mu^\bullet\{x \in K \; ; \; |f(x)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \varepsilon\} \text{ avec } K \in \mathcal{K} \text{ et } \varepsilon > 0 \text{ ([B1], p. 194).}$$

Dans la pratique c'est un autre système fondamental de voisinages de l'origine pour la topologie de la convergence en mesure que nous utiliserons ; la μ-densité dans $\mathcal{K}$ des compactologies $\mathcal{K}_f$ y intervient en effet de façon plus apparente :

(1.1) PROPOSITION. - *Les ensembles*

$V(K,\varepsilon) = \{f \in S\mu(X)\ ;\ \exists K_f \in K_f,\ K_f \subset K,\ \mu(K\setminus K_f) \leqslant \varepsilon \text{ et } \|f\|_{K_f} \leqslant \varepsilon\}$ *avec* $K \in K$, $\varepsilon > 0$ *et* $\|f\|_{K_f} = \sup_{x\in K_f} |f(x)|$, *constituent un système fondamental de voisinages de l'origine dans* $S\mu(X)$ *pour la topologie de la convergence en mesure.*

Preuve. - Elle consiste à montrer les inclusions $W(K,\frac{\varepsilon}{2}) \subset V(K,\varepsilon) \subset W(K,2\varepsilon)$. Soit donc $f \in W(K,\frac{\varepsilon}{2})$ et $M = \{x \in K\ ;\ |f(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\}$. M est μ_K-intégrable (car $|f|$ est mesurable) et il existe $K_f \subset K\setminus M$ vérifiant $\mu((K\setminus M)\setminus K_f) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$; d'où $\mu(K\setminus K_f) \leqslant \mu(M) + \mu\big((K\setminus M)\setminus K_f\big) \leqslant \varepsilon$ et $\|f\|_{K_f} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$; ainsi $f \in V(K,\varepsilon)$. D'autre part, si $f \in V(K,\varepsilon)$ et si K_f vérifie $\mu(K\setminus K_f) \leqslant \varepsilon$ et $\|f\|_{K_f} \leqslant \varepsilon$, alors nécessairement l'ensemble $M' = \{x \in K\ ;\ |f(x)| \geqslant 2\varepsilon\}$ est inclus dans $K\setminus K_f$, donc $\mu(M') \leqslant \varepsilon$ et $f \in W(K,2\varepsilon)$.

Nous aurons à utiliser une notion analogue à celle de base d'une compactologie :

(1.2) DEFINITION. - *On dit que* $B_0 \subset K$ *est une* μ*-base de* K *si pour tout* $K \in K$ *et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $K_0 \in B_0$ *tel que* $\mu(K\setminus K_0) \leqslant \varepsilon$.

Ainsi une sous-compactologie μ-dense dans K est une μ-base de K ; par contre la réciproque est fausse : pour la mesure de Dirac δ_x au point x, $\{x\}$ est une δ_x-base.

Nous pouvons alors réduire le système fondamental $\{V(K,\varepsilon)\}$ de voisinages de l'origine :

(1.3) PROPOSITION. - *On obtient encore un système fondamental de voisinages de l'origine dans* $S\mu(X)$ *pour la topologie de la convergence en mesure en restreignant la famille* $\{V(K,\varepsilon)\}$ *aux seuls voisinages tels que* $\varepsilon < \mu(K)$, $\varepsilon \in \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $K \in B_0$ *où* B_0 *est une* μ*-base de* K.

Notons que sur le sous-espace vectoriel de $S\mu$ des fonctions mesurables bornées sur tout compact, la topologie de la convergence compacte est plus fine que celle de la convergence en mesure.

Soit $C^{\infty}(X)$ l'algèbre des fonctions réelles bornées sur X dont la restriction à tout compact K de $\mathcal{K}$ est continue, autrement dit l'algèbre des morphismes compactologiques bornés de X dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ étant muni de sa compactologie canonique.

(1.4) PROPOSITION. - *$C^{\infty}(X)$ est dense dans $\mathcal{S}\mu(X)$.*

Preuve. - Soient $f \in \mathcal{S}\mu$, $V(K,\varepsilon)$ un voisinage de l'origine dans $\mathcal{S}\mu$ et $K_f \subset K$ vérifiant $\mu(K \setminus K_f) \leqslant \varepsilon$. L'espace compactologique $(X,\mathcal{K})$ étant régulier, la restriction de f à K_f se prolonge à X en une application $\tilde{f} \in C^{\infty}(X)$ ([B4], (1.1.3)) et $\|\tilde{f}-f\|_{K_f} = 0$.

2. - PROPRIETES TOPOLOGIQUES DE $\mathcal{S}\mu(X)$.

Toute mesure μ sur un espace compactologique s'écrit, de manière unique, comme somme d'une mesure atomique μ_a et d'une mesure diffuse μ_d ([B2], prop. 15, p. 68). On dit qu'une mesure ν est portée par une partie A de X si le complémentaire de A est localement ν-négligeable, autrement dit si $\nu^{\bullet}(X \setminus A) = 0$. Ainsi la mesure μ_a est portée par l'ensemble des points de X de mesure strictement positive, *ensemble que nous noterons toujours* S. Alors, puisque $K \cap S$ est dénombrable pour tout compact K de $\mathcal{K}$, μ_d est portée par $X \setminus S$; de manière plus précise, notons que S est même le plus petit ensemble portant la mesure atomique μ_a.

L'écriture ainsi obtenue pour la mesure μ va donner lieu en (2.3) à une décomposition de $\mathcal{S}\mu(X)$ en un produit, ce qui justifie l'étude plus particulière des mesures atomiques et des mesures diffuses. La compactologie discrète sur X étant la compactologie des parties finies, nous pouvons énoncer :

(2.1) PROPOSITION. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) la mesure μ *est atomique ;*

(b) tout compact K *de X s'écrit* $K = D \cup N$ *où* D *est une partie dénombrable et* N *une partie négligeable ;*

(c) la compactologie discrète est μ-dense dans $\mathcal{K}$.

Preuve :

(a) $\Rightarrow$(b) : Car $K \cap S$ est dénombrable et $K \cap (X \setminus S)$ est négligeable.

(b)$\Leftrightarrow$(c) : Puisque l'assertion (c) signifie que tout compact de $\mathcal{K}$ s'écrit comme réunion d'une suite de parties finies et d'un ensemble négligeable ([B1], prop. 12, p. 188).

(b) $\Rightarrow$(a) : Dans l'écriture $K = D \cup N$ on peut supposer qu'aucun point de D n'est négligeable. Alors $(X \setminus S) \cap K = N$ et μ est portée par S, donc μ est atomique.

Il est maintenant aisé de décrire $S\mu(X)$ pour une mesure atomique μ ; dans ce cas toute fonction réelle sur X est mesurable, donc $S\mu(X) = \mathbb{R}^X$ algébriquement. Plus précisément :

(2.2) <u>PROPOSITION</u>. - *Si μ est une mesure atomique, l'application identique $S\mu(X) \to \mathbb{R}^X$ est un isomorphisme de l'evt $S\mu(X)$ sur $\mathbb{R}^S \times \overline{\{0\}}$ où $\mathbb{R}^S$ est muni de sa topologie produit et où $\overline{\{0\}}$ est l'adhérence de $\{0\}$ dans $S\mu(X)$ ($\overline{\{0\}}$ est donc l'espace $\mathbb{R}^{X \setminus S}$ muni de la topologie grossière).*

Preuve. - Les parties finies F de S constituent une μ-base de K et les ensembles $V(F,\varepsilon)$, avec $\varepsilon < \inf_{x \in F} \mu(\{x\})$, forment un système fondamental de voisinages de l'origine dans $S\mu$; or pour tout compact (fini) K contenu dans F, la relation $\mu(F \setminus K) \leqslant \varepsilon$ implique $K=F$; il est donc clair que les voisinages $V(F,\varepsilon)$ considérés sont ceux de la convergence simple sur S.

Notons que lorsque la mesure μ est atomique, $S\mu(X)$ est localement convexe ; nous reviendrons sur ce point.

Pour toute partie A de X, désignons par $f_{|A}$ la restriction à A d'une fonction f définie sur X. La proposition qui suit utilise l'écriture canonique de la mesure μ comme somme d'une mesure atomique et d'une mesure diffuse, ce qui simplifie l'étude de la topologie de $S\mu(X)$.

(2.3) <u>PROPOSITION</u>. - *L'application $f \to (f_{|S}, f_{|X \setminus S})$ est un isomorphisme de l'evt $S\mu(X)$ sur le produit $\mathbb{R}^S \times S\mu_d(X \setminus S)$.*

Preuve. - Confondant les mesures μ_a et μ_d avec les mesures qu'elles induisent respectivement sur S et $X \setminus S$, on établit immédiatement que l'application $f \to (f_{|S}, f_{|X \setminus S})$ est une injection de $S\mu(X)$ dans $S\mu_a(S) \times S\mu_d(X \setminus S)$, c'est-à-dire dans $\mathbb{R}^S \times S\mu_d(X \setminus S)$. Réciproquement, soit $(\phi,\psi) \in \mathbb{R}^S \times S\mu_d(X \setminus S)$; notons ϕ° et ψ° les prolongements respectifs par zéro des fonctions ϕ et ψ sur les ensembles où elles ne sont pas définies. L'application $f = \phi^\circ + \psi^\circ$ est μ-mesurable et $(\phi,\psi) \to f$ est l'application inverse de $f \to (f_{|S}, f_{|X \setminus S})$, ce qui établit l'isomorphie des espaces vectoriels considérés.

Il nous reste maintenant à comparer les topologies de ces espaces. Pour cela, remarquons que l'ensemble $\mathcal{K}_0$ des compacts de la forme $F\cup K$, où F est une partie finie de S et K un compact de X contenu dans $X\setminus S$, constitue une sous-compactologie μ-dense de $\mathcal{K}$; en particulier, les ensembles $V(F\cup K,\varepsilon)$, avec $F\cup K\in\mathcal{K}_0$ et $0<\varepsilon<\operatorname{Inf}_{x\in F}\mu(\{x\})$ forment un système fondamental de voisinages de l'origine dans $S\mu(X)$. Prouvons alors l'égalité $V(F\cup K,\varepsilon) = V_a(F,\varepsilon)\times V_d(K,\varepsilon)$, où $V_a(F,\varepsilon)$ (resp. $V_d(K,\varepsilon)$) désigne un voisinage fondamental de l'origine dans $\mathbb{R}^S$ (resp. dans $S\mu_d(X\setminus S)$). Soit $f\in V(F\cup K,\varepsilon)$ et $K_f\in F\cup K$ vérifiant $\mu\big((F\cup K)\setminus K_f\big)\leqslant\varepsilon$ et $\|f\|_{K_f}\leqslant\varepsilon$; nécessairement on a $F\subset K_f$, donc $f_{|S}\in V_a(F,\varepsilon)$; d'autre part $\mu\big(K\setminus(K\cap K_f)\big)\leqslant\varepsilon$, d'où $f_{|X\setminus S}\in V_d(K,\varepsilon)$. Réciproquement, si $f_{|S}\in V_a(F,\varepsilon)$ et $f_{|X\setminus S}\in V_d(K,\varepsilon)$, il existe $K_f\subset K$ tel que $\mu(K\setminus K_f)\leqslant\varepsilon$ et $\|f\|_{K_f}\leqslant\varepsilon$; donc $\mu\big((F\cup K)\setminus(F\cup K_f)\big)\leqslant\varepsilon$ et $f\in V(F\cup K,\varepsilon)$.

Une caractérisation classique des mesures diffuses nous sera utile ([B2], exercice 7, p. 109) :

(2.4) LEMME. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) la mesure μ est diffuse ;

(b) pour tout compact K tel que $\mu(K)>0$ et tout $\varepsilon>0$, il existe un compact $K_0\subset K$ vérifiant $0<\mu(K_0)\leqslant\varepsilon$.

On sait que, si p est un réel vérifiant $0<p<1$ et si μ est une mesure diffuse, tout voisinage de zéro disqué dans $L^p(\mu)$ est identique à $L^p(\mu)$ ([E], p. 240). Un énoncé tout à fait semblable peut s'obtenir pour $S\mu(X)$ en utilisant comme dans [E] un résultat dû à Saks ([DS], (IV.9.7), p. 308) :

(2.5) PROPOSITION (SAKS). - *Soit μ une mesure diffuse et soit K un compact de X. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe une partition finie de K composée de compacts et d'un ouvert relatif, tous de mesure au plus égale à ε.*

Le caractère non localement convexe de l'evt $S\mu(X)$, pour une mesure μ diffuse, est alors précisé par la proposition qui suit :

(2.6) PROPOSITION. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) la mesure μ est diffuse ;

(b) tout voisinage de l'origine $V(K,\varepsilon)$ dans $S\mu(X)$ a pour enveloppe disquée $\Gamma(V(K,\varepsilon))$ l'espace $S\mu(X)$ tout entier.

Preuve :

(a) $\Rightarrow$(b) : Conformément à (2.5), soit $\{K_1, K_2, \ldots, K_{n-1}, U\}$ une partition de K formée d'ensembles dont la mesure est au plus égale à $\frac{\varepsilon}{2}$, les K_i étant compacts et U étant ouvert dans K. Posons $H = \bigcup K_i$ pour simplifier et notons 1_A la fonction caractéristique d'une partie A de X. Soit maintenant $f \in S\mu(X)$; posons $f_i = nf1_{K_i}$ pour tout $i \leq n-1$ et $f_n = nf1_{X \setminus H}$. Ces fonctions sont mesurables et $f = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} f_i)$; il est alors facile de vérifier que f_i appartient à $V(K, \varepsilon)$ pour tout $i \leq n$; donc $f \in \Gamma(V(K, \varepsilon))$.

(b) $\Rightarrow$(a) : Si μ n'est pas diffuse, il existe $a \in X$ tel que $\mu(\{a\}) > 0$; pour tout ε vérifiant $0 < \varepsilon < \mu(\{a\})$ on a **nécessairement** $V(\{a\}, \varepsilon) = \{f \in S\mu(X) \; ; \; |f(a)| \leq \varepsilon\}$ et l'on obtient ainsi dans $S\mu$ un voisinage de zéro disqué qui n'est pas égal à $S\mu$.

Il est à noter que si μ est diffuse, il n'y a pas de forme linéaire sur $S\mu$, continue et non nulle. Mentionnons également que, si μ est diffuse, l'espace $S\mu(X)$ ne peut être localement convexe que s'il est grossier ; or c'est impossible puisque, la mesure μ n'étant pas nulle, la fonction 1_X n'est pas adhérente à $\{0\}$.

Nous pouvons maintenant élucider la situation opposée, c'est-à-dire celle d'une mesure atomique.

(2.7) PROPOSITION. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) la mesure μ est atomique ;

(b) l'evt $S\mu(X)$ est localement convexe ;

(c) la topologie de $S\mu(X)$ coïncide avec celle de la convergence simple sur S ;

(d) sur $S\mu(X)$ la topologie de la convergence simple sur S (resp. sur X) est plus fine que celle de la convergence en mesure.

Preuve. - Elle se fait suivant le schéma

$$\begin{tikzcd} & (b) \arrow[dr, Rightarrow] & \\ (a) \Rightarrow (c) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & (a). \\ & (d) \arrow[ur, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

L'implication (a) $\Rightarrow$(c) a déjà été vue en (2.2) et les implications (c) $\Rightarrow$(b) et

(c) $\Rightarrow$(d) sont évidentes.
(b) $\Rightarrow$(a) : Ecrivons $S\mu(X) = \mathbb{R}^S \times S\mu_d(X \setminus S)$; ainsi $S\mu_d(X \setminus S)$ est localement convexe et $\mu_d=0$.
(d) $\Rightarrow$(a) : Supposons que sur $S\mu(X)$ la topologie de la convergence simple sur X est plus fine que celle de la convergence en mesure. Soit F une partie finie de X et η un nombre positif. Posons $V_s(F,\eta) = \{f \in S\mu(X) \; ; \; \|f\|_F \leqslant \eta\}$; étant donné un voisinage de l'origine $V(K,\varepsilon)$ pour la topologie de la convergence en mesure, il existe un voisinage $V_s(F,\eta)$ vérifiant $V_s(F,\eta) \subset V(K,\varepsilon)$. Considérons la fonction $f = 2\varepsilon . 1_{X \setminus F}$; f est mesurable et de plus $f \in V_s(F,\eta) \subset V(K,\varepsilon)$; ainsi il existe $K_f \subset K$ tel que $\mu(K \setminus K_f) \leqslant \varepsilon$ et $\|f\|_{K_f} \leqslant \varepsilon$; nécessairement $K_f \subset F$ et $\mu(K \setminus F) \leqslant \varepsilon$, ce qui prouve la μ-densité dans $\mathcal{K}$ de la compactologie discrète.

(2.8) COROLLAIRE. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) μ *est une mesure atomique et* $S=X$ *;*

(b) $S\mu(X)$ *est séparé ;*

(c) $S\mu(X)$ *est homéomorphe à* $\mathbb{R}^X$.

Preuve. - Compte tenu de (2.2), il suffit de prouver l'implication (b) $\Rightarrow$(a). Mais alors, pour tout $x \in X$, la fonction $1_{\{x\}}$ n'est pas adhérente à $\{0\}$, donc $\mu(\{x\})$ n'est pas nul.

Il est à noter que sous l'une des hypothèses de (2.8), tout compact de X est dénombrable.

Donnons une nouvelle formulation des résultats qui précèdent :

(2.9) PROPOSITION. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) la mesure μ *est atomique ;*

(b) sur $S\mu(X)$ *la topologie de la convergence en mesure et celle de la convergence simple sur* X *sont comparables.*

Abordons maintenant l'étude des mesures μ telles que $S\mu(X)$ soit un evt localement borné ; c'est alors un espace localement pseudo-convexe au sens de Rolewicz. En fait nous verrons que $S\mu(X)$ est alors localement convexe. Nous aurons tout d'abord besoin du lemme :

(2.10) <u>LEMME</u>. - *$S\mu_d(X \setminus S)$ est un sous-espace fermé de $S\mu(X)$.*

Preuve. - $S\mu_d(X \setminus S)$ s'identifie à l'ensemble des fonctions de $S\mu(X)$ nulles sur S. Soit alors $f \in S\mu$, f n'étant pas nulle sur S. Il existe $x \in S$ tel que $f(x) = a > 0$. Fixons $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \mathrm{Min}(a, \mu(\{x\}))$ et un compact K de $\mathcal{K}$ contenant x. Pour toute fonction $h \in V(K, \varepsilon)$ il existe un compact $K_h \subset K$ tel que $\mu(K \setminus K_h) \leqslant \varepsilon$ et $\|h\|_{K_h} \leqslant \varepsilon$. Alors nécessairement $x \in K_h$, donc $|h(x)| \leqslant \varepsilon$ et $f(x) + h(x) > 0$. Ainsi aucune fonction de l'ensemble $f + V(K, \varepsilon)$ ne s'annule en x, ce qui prouve bien que $S\mu_d(X \setminus S)$ est fermé.

Notons $\mathcal{L}^1_\mu$ ou $\mathcal{L}^1_\mu(X)$ l'espace des applications mesurables de X dans $\mathbb{R}$ telles que $\mu^\bullet(|f|) < +\infty$; pour une telle fonction, dite essentiellement intégrable, nous poserons $\mu(f) = \mu^\bullet(f)$. Naturellement, l'application $f \to \mu(|f|)$ est une semi-norme sur l'espace $\mathcal{L}^1_\mu$ et son séparé L^1_μ est un espace de Banach.

(2.11) <u>PROPOSITION</u>. - *Etant donné un espace compactologique $(X, \mathcal{K})$ et une mesure μ sur cet espace, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) μ est une mesure atomique portée par un ensemble fini ;

(b) $S\mu(X)$ est un evt localement borné ;

(c) les evt $S\mu(X)$ et $\mathcal{L}^1_\mu(X)$ sont isomorphes ;

(d) μ est une forme linéaire continue sur $S\mu(X)$;

(e) le séparé de $S\mu(X)$ est isomorphe à un espace $\mathbb{R}^n$.

Preuve. - Le principe en est indiqué par le schéma :

$$\begin{tikzcd}
 & (c) \arrow[dl, Rightarrow] & \\
(b) \arrow[r, Rightarrow] & (a) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & (d) \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & (e) \arrow[u, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

(b) $\Rightarrow$ (a) : Montrons tout d'abord que si μ est diffuse et non nulle, $S\mu(X)$ n'est pas localement borné. Soit $V(K, \varepsilon)$ un voisinage de l'origine dans $S\mu(X)$, avec $\varepsilon < \mu(K)$. La mesure μ étant diffuse, il existe d'après (2.4) un compact $K_0 \subset K$ vérifiant $0 < \mu(K_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$; soit η tel que $0 < \eta < \mu(K_0)$ et soit $f = \varepsilon 1_{K_0}$. Considérons un compact $K_1 \subset K \setminus K_0$ vérifiant $\mu\big((K \setminus K_0) \setminus K_1\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$; alors $\mu(K \setminus K_1) \leqslant \varepsilon$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \frac{1}{n} V(K, \varepsilon)$. Or pour tout compact $L \subset K$ tel que $\mu(K \setminus L) \leqslant \eta$, on a nécessairement $L \cap K_0 \neq \emptyset$ (sinon $K_0 \subset K \setminus L$ et $\mu(K_0) \leqslant \mu(K \setminus L) \leqslant \eta$) ; ainsi $\|f\|_L = \varepsilon > \eta$ et $f \notin V(K,\eta)$. Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} V(K,\varepsilon) \not\subset V(K,\eta)$ et $V(K,\varepsilon)$ n'est pas borné, ce qui établit que lorsque μ est diffuse, $\mathcal{S}\mu(X)$ n'est pas localement borné.

Supposons maintenant $\mathcal{S}\mu(X)$ localement borné ; le sous-espace fermé $\mathcal{S}\mu_d(X \setminus S)$ de $\mathcal{S}\mu(X)$ est lui-même localement borné ([K], (7), p. 162). Il résulte alors de ce qui précède que $\mu_d = 0$. L'espace séparé associé à $\mathcal{S}\mu(X)$ est donc $S\mu(X) = \mathbb{R}^S$ et c'est encore un evt localement borné ; S est donc fini.

(a) $\Rightarrow$(c) et (c) $\Rightarrow$(b) : Evident.

(a) $\Rightarrow$(d) : Etant donné $\varepsilon>0$, si $\eta>0$ vérifie $\eta\mu(S) < \varepsilon$, la condition $\|f\|_S \leqslant \eta$ implique $|\mu(f)| \leqslant \varepsilon$.

(e) $\Rightarrow$(a) : Résulte immédiatement de (2.2).

(d) $\Rightarrow$(e) : Pour cela notons que, sous l'hypothèse (d), μ_d est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}\mu_d(X \setminus S)$, donc $\mu_d = 0$ en raison de (2.6) ; ainsi μ est atomique.

Par ailleurs, puisque μ intègre toutes les fonctions de $\mathcal{S}\mu(X)$, μ est une mesure bornée. L'ensemble S est alors intégrable, donc dénombrable. Si S est infini, pour toute partie finie F de S, on a $\mu(X \setminus F) > 0$. L'ensemble des parties finies F de S constitue une μ-base de $\mathcal{K}$ et les ensembles $V(F,\varepsilon)$, avec $\varepsilon>0$, forment un système fondamental de voisinages de l'origine dans $\mathcal{S}\mu$. Soit $\eta>0$ et soit $V(F,\varepsilon)$ un tel voisinage. Considérons la fonction $f = \frac{2\eta}{\mu(X \setminus F)} 1_{X \setminus F}$; évidemment $f \in V(F,\varepsilon)$ et $\mu(f) = 2\eta$, ce qui contredit la continuité de μ.

Ainsi, lorsque $\mathcal{S}\mu(X)$ est localement borné, son séparé $S\mu(X)$ est un espace normé. Plus généralement, l'étude de la métrisabilité de $S\mu(X)$ conduit naturellement à des conditions de dénombrabilité sur la compactologie $\mathcal{K}$ de X :

(2.12) __PROPOSITION.__ - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $S\mu(X)$ *est métrisable ;*

(b) $(X,\mathcal{K})$ *admet une μ-base dénombrable.*

__*Preuve :*__

(b) $\Rightarrow$(a) est immédiat puisque les ensembles $V(K,\frac{1}{n})$, où K décrit une μ-base de $\mathcal{K}$, forment d'après (1.3) un système fondamental de voisinages de l'origine dans $\mathcal{S}\mu$.

(a) $\Rightarrow$(b) : $\mathcal{S}\mu(X)$ admet un système fondamental dénombrable de voisinages de l'origine $V(K_n,\frac{1}{n})$, $n\geq 1$, où K_n est une suite croissante de compacts de $\mathcal{K}$. Montrons que la suite (K_n) est une μ-base. Pour tout compact $K\in\mathcal{K}$ et tout $\varepsilon>0$, avec $\varepsilon<1$, il existe un entier n tel que $V(K_n,\frac{1}{n})\subset V(K,\varepsilon)$. Puisque la fonction $1_{K\setminus K_n}$ est élément de $V(K_n,\frac{1}{n})$, elle appartient à $V(K,\varepsilon)$, ce qui implique facilement la condition $\mu(K\setminus K_n)\leq\varepsilon$.

(2.13) COROLLAIRE. - *Si la mesure μ est bornée, $S\mu(X)$ est métrisable.*

Preuve. - En effet, on construit alors aisément une suite (K_n) de compacts de $\mathcal{K}$ telle que $X\setminus\bigcup_{n\geq 1} K_n$ soit localement μ-négligeable ; une telle suite est évidemment une μ-base de $\mathcal{K}$.

Notons enfin que S est nécessairement dénombrable quand $S\mu(X)$ est métrisable, cette condition étant évidemment suffisante quand la mesure μ est atomique.

BIBLIOGRAPHIE

[B1] N. BOURBAKI, *Intégration*, chap. 1-4, 2ème édition, 1965, Hermann, Paris.

[B2] N. BOURBAKI, *Intégration*, chap. 5, 2ème édition, 1967, Hermann, Paris.

[B3] N. BOURBAKI, *Intégration*, chap. 9, 1969, Hermann, Paris.

[B4] H. BUCHWALTER, *Topologies et compactologies*, Publ. Dép. Math. Lyon, 6-2, 1969, p. 1-74.

[DS] N. DUNFORD - J.T. SCHWARTZ, *Linear operators*, Part. I, 1958, Interscience, New-York.

[E] R.E. EDWARDS, *Functional Analysis*, 1965, Holt, Rinehart and Winston, New-York.

[G] A. GOLDMAN, *Prémesures et mesures sur les espaces compactologiques*, Publ. Dép. Math. Lyon, 9-1, 1972, p. 61-86.

[K] G. KÖTHE, *Topological vector spaces I*, 1969, Springer, Berlin.

Manuscrit remis le 12 novembre 1972.

Jean DAZORD
Michel JOURLIN
Département de Mathématiques
Université de Lyon I
43, bd du 11 novembre 1918
69621 - VILLEURBANNE