MICHEL ROME

L'espace $M^{\infty}(T)$

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1972, tome 9, fascicule 1
, p. 37-60
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1972__9_1_37_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1972 t. 9-1

L'ESPACE $M^{\infty}(T)$

Michel ROME

INTRODUCTION. - Désignons par $C^{\infty}(T)$ l'espace de Banach des fonctions réelles continues et bornées sur un espace complètement régulier (séparé) T. Jusqu'à des temps récents on a surtout cherché à placer sur $C^{\infty}(T)$ des topologies différentes de celle de la norme : les topologies β_o, β et β_1 de [S], nommées respectivement T_t, T_τ, T_σ dans [FGH], en donnent immédiatement un exemple. Elles fournissent d'ailleurs comme espaces duals les espaces $M_t(T)$, $M_\tau(T)$ et $M_\sigma(T)$ des mesures de Radon, τ-régulières et σ-régulières étudiés dans [V].

Ainsi les espaces de mesures se trouvent alors par dualité, naturellement munis d'une structure compactologique vectorielle au sens de [B2].

Dans cet article nous utilisons une démarche duale, très analogue à celle de BERRUYER-IVOL [BI] concernant l'espace M(T) et l'algèbre C(T) de toutes les fonctions continues sur T.

Nous structurons en effet $C^{\infty}(T)$ en algèbre compactologique convexe (notée alors $\mathcal{C}^{\infty}(T)$ pour la différencier de l'algèbre de Banach $C^{\infty}(T)$) en prenant la famille $\mathcal{H}^{\infty} = \mathcal{H}^{\infty}(T)$ des parties équicontinues et uniformément bornées, chacune étant munie de la topologie de la convergence simple sur T. Nous introduisons ensuite l'espace $\theta^{\infty}T$ des caractères compactologiques de $\mathcal{C}^{\infty}(T)$ et l'espace localement convexe (elc) complet $M^{\infty}(T)$, dual de $\mathcal{C}^{\infty}(T)$. On reconnaît en $M^{\infty}(T)$ l'espace introduit par LEGER-SOURY [LS] (sous le vocable MX) ; et nous montrons en suivant [BP] que $\theta^{\infty}T$ s'identifie au c-replété θT de T.

L'espace $M^{\infty}(T)$, qui est un espace de mesures intermédiaire entre $M_\tau(T)$ et $M_\sigma(T)$, est ainsi naturellement muni d'une structure d'elc complet. Mais de ce point de vue, on rencontre là un espace assez curieux, qui comme nous le verrons, se laisse difficilement classer, tout au moins dans la classification actuelle des elc. Certaines de ses propriétés sont négatives : il n'est infratonnelé par exemple que si T est un espace discret I, et c'est alors l'espace $\ell^1(I)$. D'autres sont assez positives ; en particulier $M^\infty(T)$ possède certaines propriétés de compacité des espaces $\ell^1(I)$. D'ailleurs pour les établir nous nous ramenons précisément aux espaces $\ell^1(I)$ en faisant un usage assez intensif des partitions continues de l'unité sur T. Cette méthode permet aussi d'obtenir quelques propriétés importantes relatives à l'ordre dans l'espace $M^\infty(T)$.

Pour terminer cette introduction signalons que les résultats essentiels de cet article ont été annoncés, sous une forme déjà assez détaillée, dans deux Notes aux Comptes rendus [R1] et [R2]. Ils ont, pour certains, été obtenus de façon différente et indépendante, par WHEELER [W], qui utilise une autre terminologie. Notons aussi les travaux de DUDLEY [D] et HAYDON [H1], ainsi que la synthèse, présentée par BUCHWALTER, à l'Ecole d'été de Bruxelles de septembre 1972, [B4].

1. - LA STRUCTURE COMPACTOLOGIQUE DE $C^\infty(T)$.

Fixons dès le départ les notations. Le compactifié de Stone-Čech de T est noté βT comme d'habitude ; notons f^β la prolongée canonique à βT de chaque fonction continue $f \in C^\infty(T)$. On sait que l'application $f \to f^\beta$ réalise une isométrie de $C^\infty(T)$ sur l'algèbre de Banach $C(\beta T)$. L'espace des mesures de Radon sur βT est désigné par $M_\beta(T)$; c'est le dual de $C^\infty(T)$.

Dans ce paragraphe nous définissons la structure compactologique sur $C^\infty(T)$; elle est analogue à celle de l'algèbre $C(T)$, introduite et étudiée dans [B2]. Nous démontrons ensuite quelques lemmes utiles, suivant en cela les exposés de [B2] et [BP].

(1.1) <u>DEFINITION</u>. - *On désigne par* $\mathcal{H}^\infty(T)$, *ou simplement* $\mathcal{H}^\infty$, *l'ensemble des parties équicontinues et uniformément bornées de* $C^\infty(T)$. *Il est pratique de noter* $\mathcal{H}_1^\infty$ *l'ensemble des parties* H *de* $\mathcal{H}^\infty$ *qui sont contenues dans le disque unité* $\Delta(T)$ *de* $C^\infty(T)$.

(1.2) <u>PROPOSITION</u>. - *Pour toute* $H \in \mathcal{H}^\infty$ *l'enveloppe disquée simplement fermée* $\overline{\Gamma}(H)$ *de* H *dans l'espace* $\mathbb{R}^T$ *est équicontinue, (donc contenue dans* $C^\infty(T)$*), uniformément bornée et simplement compacte.*

(1.3) DEFINITION. - *En munissant chaque* $H \in \mathcal{H}^\infty$ *de la topologie de la convergence simple sur* T, *on structure* $C^\infty(T)$ *en une algèbre compactologique convexe régulière (accr),* [B2], *notée* $C^\infty(T)$.

(1.4) DEFINITION. - *Désignons par* $\theta^\infty T$ *l'espace des caractères de l'accr* $C^\infty(T)$. *C'est l'ensemble des caractères de* $C^\infty(T)$ *qui sont continus sur chaque* $H \in \mathcal{H}^\infty$, *muni de la structure uniforme de la* $\mathcal{H}^\infty$*-convergence.*

Notons encore la proposition évidente :

(1.5) PROPOSITION. - *Pour chaque partie bornée* A *non vide de* $C^\infty(T)$ *on pose :*

$$d_A(x,y) = \operatorname*{Sup}_{f \in A} |f(x)-f(y)|$$

pour $x,y \in T$. *Alors* d_A *est un écart borné sur* T, *qui est continu si et seulement si la partie* A *est équicontinue.*

(1.6) COROLLAIRE. - *Lorsque* H *décrit l'ensemble* $\mathcal{H}^\infty$, *alors* d_H *décrit l'ensemble de tous les écarts continus et bornés sur* T.

Preuve. - Il suffit de prouver que tout écart d, continu et borné sur T, est un écart d_H pour une partie $H \in \mathcal{H}^\infty$ convenable. Or on voit avec le lemme (4.5.2) de [B2], qu'il suffit de prendre pour H l'ensemble des fonctions $t \to d(t,x)$ quand x décrit T.

(1.7) LEMME. - *Pour toute* $H \in \mathcal{H}_1^\infty$ *il existe une partie* $K \in \mathcal{H}_1^\infty$ *contenant* H, *qui est disquée, simplement compacte et complètement réticulée. De plus* $d_H = d_K$.

Preuve. - Il suffit de définir K par :

$$K = \{f \ ; \ f \in \Delta(T) \text{ et } |f(x)-f(y)| \leq d_H(x,y) \quad \text{pour tous } x,y \in T\}.$$

On constate alors aisément que K est disquée et simplement compacte et qu'elle est réticulée. Elle est donc complètement réticulée.

(1.8) LEMME. - *Soient* $H \in \mathcal{H}^\infty$ *et* $u \in \theta^\infty T$ *tels que* $u(f) = 0$ *pour toute* $f \in H$. *Alors la fonction* $h = \operatorname*{Sup}_{f \in H} |f|$ *est continue et telle que* $u(h) = 0$.

Preuve. - On suppose $H \in \mathcal{H}_1^\infty$, ce qui permet d'introduire la partie K de (1.7). Alors, pour toute $f \in H$, on a $|f| \in K$ et $u(|f|) = 0$. Ecrivant h comme limite filtrante croissante des fonctions $h_F = \operatorname{Sup}_{f\in F} |f|$, où F décrit la famille des parties finies de H, on voit déjà que $u(h_F) = 0$, puisque tout caractère est réticulant. L'égalité $u(h) = 0$ s'obtient ensuite en utilisant la continuité de u sur la partie $K \in \mathcal{H}^{\infty}$.

(1.9) <u>LEMME</u>. - *Pour tout* $u \in \theta^{\infty}T$ *et toute* $f \in C^{\infty}(T)$ *il existe un point* $t \in T$ *tel que* $u(f) = f(t)$ *; autrement dit* $u(f) \in f(T)$.

Preuve. - En remplaçant f par la fonction $g = |f-u(f)|$ on se ramène à supposer $f \geq o$ et $u(f) = 0$. Il faut prouver que, dans ces conditions, f s'annule sur T. Supposons $f(t) > o$ pour tout $t \in T$. Alors la suite $h_n = nf \wedge 1$ est une suite croissante de fonctions continues qui converge simplement vers la fonction 1. Il suit de là, par la proposition (0.2.1) de [BI], que la suite (h_n) est équicontinue, de sorte que $u(h_n)$ converge vers $u(1) = 1$. Or $u(h_n) = nu(f) \wedge 1 = 0$, ce qui donne la contradiction.

On tire de là :

(1.10) <u>THEOREME</u>. - *Pour tout* $u \in \theta^{\infty}T$ *et toute* $H \in \mathcal{H}^{\infty}$ *il existe un point* $t \in T$ *tel que* $u(f) = f(t)$ *pour toute* $f \in H$.

Preuve. - Il suffit de remplacer la partie H par la partie G formée des fonctions $g = |f-u(f)|$ lorsque f décrit H. On applique ensuite les deux lemmes (1.8) et (1.9).

Plaçons alors sur $\theta^{\infty}T$, comme on a dit en (1.4), la structure uniforme de la $\mathcal{H}^{\infty}$-convergence. On obtient ainsi un espace uniforme complet. La transformation de Dirac $t \to \varepsilon_t$ réalise une injection de T dans $\theta^{\infty}T$ et la régularité complète de T implique que c'est même un homéomorphisme de T sur son image $\varepsilon(T)$. Donc T est ainsi identifié à un sous-espace topologique de $\theta^{\infty}T$. On peut voir cela autrement puisque le corollaire (1.6) signifie que la structure uniforme de $\theta^{\infty}T$ induit exactement sur T sa structure uniforme universelle. Mais de plus le théorème (1.10) signifie que T est partout dense dans l'espace uniforme (complet) $\theta^{\infty}T$ et ainsi $\theta^{\infty}T$ apparaît comme le complété universel de T. Or on sait [B2] que le complété universel de T s'identifie aussi au c-replété θT de T, muni de la structure uniforme de la $\mathcal{H}(T)$-convergence, où $\mathcal{H}(T)$ est l'ensemble des parties équicontinues et simplement bornées de l'algèbre C(T). Mais l'explication est claire : on a en fait exactement l'égalité d'*espaces uniformes*

$\theta^\infty T = \theta T$. On a déjà $\theta T \subset \theta^\infty T$ car tout caractère compactologique v sur C(T) définit par restriction un caractère compactologique $\bar{v}$ sur $C^\infty(T)$. Réciproquement tout caractère $u \in \theta^\infty T$, vérifiant d'après (1.9) la condition $u(f) \in f(T)$ pour toute $f \in C^\infty(T)$, se prolonge de façon unique, d'après un résultat classique, en un caractère $\bar{u}$ sur l'algèbre C(T). Or ce caractère $\bar{u}$ est même compactologique car si $H \in \mathcal{H}(T)$ et si $f_i \to 0$ dans H alors les fonctions $\frac{f_i}{1+|f_i|}$ tendent vers zéro dans la partie $\frac{H}{1+|H|}$, qui est élément de $\mathcal{H}_1^\infty$, et ainsi $u(f_i) \to 0$.

En résumé $\theta^\infty T$ et θT s'identifient à un même sous-espace de βT ; ils sont tous deux complets, contiennent T comme sous-espace partout dense, et induisent sur T la même structure uniforme, qui est sa structure uniforme universelle. D'où :

(1.11) THEOREME. - *L'espace $\theta^\infty T$ s'identifie exactement, en tant qu'espace uniforme, au c-replété θT de T.*

(1.12) COROLLAIRE. - *Les algèbres $C^\infty(T)$ et $C^\infty(\theta T)$ sont compactologiquement isomorphes.*

2. - L'ESPACE $M^\infty(T)$.

L'algèbre $C^\infty(T)$ étant aussi bien entendu un espace compactologique convexe régulier (eccr) on peut introduire son dual $M^\infty(T) = C^\infty(T)^*$. C'est l'elc *complet*, espace des formes linéaires sur $C^\infty(T)$, qui sont continues sur chaque $H \in \mathcal{H}^\infty$, muni de la topologie de la $\mathcal{H}^\infty$-convergence. Alors le théorème (3.2.2) de [B2] donne aussitôt l'égalité compactologique $M^\infty(T)' = C^\infty(T)$, qui signifie que le dual de $M^\infty(T)$ n'est autre que $C^\infty(T)$ et que les parties équicontinues de ce dual, munies de la topologie faible, sont exactement les parties $H \in \mathcal{H}^\infty$, munies de la topologie de la convergence simple sur T.

Evidemment l'espace θT, égal à $\theta^\infty T$, est ainsi un sous-espace uniforme de l'elc $M^\infty(T)$, de sorte que T s'identifie, par la transformation de Dirac, à un sous-espace topologique de $M^\infty(T)$. Et puisque θT est fermé dans $M^\infty(T)$ on voit encore que c'est exactement l'adhérence de T dans $M^\infty(T)$. De plus on a :

(2.1) PROPOSITION. - *L'espace T est total dans $M^\infty(T)$.*

Preuve. - C'est une conséquence triviale du théorème de Hahn-Banach et de l'égalité $M^\infty(T)' = C^\infty(T)$.

Enfin rappelons pour mémoire :

(2.2) THEOREME (LEGER-SOURY, [LS]). - *L'espace* $M^{\infty}(T)$ *est solution du problème universel de linéarisation continue de toute application continue* $f : T \to E$ *d'image* $f(T)$ *bornée, de* T *dans un elc complet* E *quelconque. Autrement dit, toute telle fonction* f *possède un prolongement linéaire continu unique* $F : M^{\infty}(T) \to E$.

Passons maintenant à une étude systématique de l'elc $M^{\infty}(T)$, étude qui n'est pas faite dans [LS].

(2.3) PROPOSITION. - $M^{\infty}(T)$ *est un sous-espace vectoriel fermé dans l'espace de Banach* $M_{\beta}(T)$ *des mesures de Radon sur* βT.

Preuve. - Il suffit de voir que toute $\mu \in M^{\infty}(T)$ est bornée sur le disque $\Delta(T)$. Supposons le contraire : il existe alors une suite $f_n \in \Delta(T)$ telle que $|\mu(f_n)| \geq n^2$. Mais la suite $g_n = \frac{f_n}{n}$ est alors équicontinue et telle que $\| g_n \| \to 0$. L'inégalité $|\mu(g_n)| \geq n$ donne la contradiction.

On prendra garde toutefois que $M^{\infty}(T)$ n'est pas un sous-espace *topologique* de $M_{\beta}(T)$.

Remarque 1. - Le résultat de (2.3) peut beaucoup s'améliorer. On peut montrer en effet, avec BERRUYER-IVOL ([BI], 1.2) que $M^{\infty}(T)$ est un espace intermédiaire entre $M_{\tau}(T)$ et $M_{\sigma}(T)$.

(2.4) PROPOSITION. - *Une partie de* $M^{\infty}(T)$ *est bornée si et seulement si elle est bornée en norme.*

Preuve. - Si $A \subset M^{\infty}(T)$ n'est pas bornée en norme, il existe une suite $f_n \in \Delta(T)$ et une suite $\mu_n \in A$ telles que $|\mu_n(f_n)| \geq n^2$. Alors la suite $g_n = \frac{f_n}{n}$ est un élément de $\mathcal{H}^{\infty}$ sur lequel la partie A n'est pas bornée, et tout est dit.

(2.5) COROLLAIRE. - $M^{\infty}(T)$ *admet une base dénombrable de bornés et son dual fort est l'espace de Banach* $C^{\infty}(T)$. *De plus la boule unité* $\Delta°$ *de* $M^{\infty}(T)$, *polaire du disque* $\Delta(T)$, *est un tonneau borné et bornivore de* $M^{\infty}(T)$.

Ainsi l'espace $M^{\infty}(T)$ possède certaines propriétés des espaces (DF). Outre l'existence d'une base dénombrable de bornés on a :

(2.6) PROPOSITION. - *Pour toute suite* (V_n) *de voisinages de zéro dans* $M^{\infty}(T)$*, il existe une suite* (λ_n) *de scalaires telle que* $V = \bigcap \lambda_n V_n$ *soit un voisinage de zéro dans* $M^{\infty}(T)$.

Preuve. - Pour tout n il existe $H_n \in \mathcal{H}_1^{\infty}$ et $\alpha_n > o$ tels que $\alpha_n H_n^\circ \subset V_n$. Soit $H = \bigcup_n \frac{H_n}{n}$; alors $H \in \mathcal{H}_1^{\infty}$ et le voisinage de zéro H° est contenu dans chaque $\frac{n}{\alpha_n} V_n$.

(2.7) PROPOSITION. - *Soit* E *un elc quelconque. Pour qu'une application linéaire* $U : M^{\infty}(T) \to E$ *soit continue il suffit qu'elle soit continue sur la boule unité* Δ° *de* $M^{\infty}(T)$.

Preuve. - On peut supposer que E est complet (et séparé). Soit $u : T \to E$ la restriction de U à T. Alors u est continue et son image u(T) est bornée dans E : car sinon il existerait un voisinage de zéro disquée W dans E et une suite $t_n \in T$ tels que $u(t_n) \notin nW$ et dans ce cas la suite $\frac{\varepsilon_{t_n}}{n}$ tendrait vers zéro dans Δ° sans que $U(\frac{\varepsilon_{t_n}}{n})$ tende vers zéro dans E. Alors, d'après (2.2), u admet un prolongement linéaire continu [illegible] $^{\infty}(T) \to E$. On a V=U sur T, ce qui implique V=U sur Δ° puisque d'une part U est continue sur Δ° et d'autre part Δ° est l'enveloppe disquée fermée de T. Alors finalement U=V sur $M^{\infty}(T)$ tout entier, et ainsi U est continue sur $M^{\infty}(T)$.

On va voir toutefois que $M^{\infty}(T)$ n'est pas un espace (DF) en général. En effet :

(2.8) THEOREME. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $M^{\infty}(T)$ *est un espace* (DF) *;*

(b) $M^{\infty}(T)$ *est* σ*-infratonnelé, c'est-à-dire que toute suite fortement bornée de son dual est équicontinue ;*

(c) toute suite $f_n \in \Delta(T)$ *est équicontinue ;*

(d) T *est un* P*-espace, c'est-à-dire que tout noyau (ou tout* G_δ*) de* T *est ouvert.*

Preuve :

(a) $\Rightarrow$(b) $\Rightarrow$(c) : Evident.

(c) $\Rightarrow$(d) : Avec la proposition (0.2.7) de [BI].

(d) $\Rightarrow$(a) : Soit $H = \bigcup H_n$ une partie fortement bornée du dual de $M^{\infty}(T)$, réunion d'une suite $H_n \in \mathcal{H}^{\infty}$. Pour voir que H est équicontinue dans le dual de $M^{\infty}(T)$, il suffit déjà de voir que H est équicontinue dans $C^{\infty}(T)$. Or cela est évident, toujours avec la proposition (0.2.7) de [BI]. Alors $M^{\infty}(T)$, qui possède déjà une base dénombrable de bornés, est bien un espace (DF).

De façon analogue on peut étudier d'autres cas spéciaux.

(2.9) THEOREME. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) T *est discret ;*

(b) $M^{\infty}(T)$ *est infratonnelé ;*

(c) $M^{\infty}(T)$ *est un espace de Banach ;*

(d) $M^{\infty}(T) = \ell^1(T)$.

Preuve :

(b) $\Rightarrow$(a) : Car alors le disque $\Delta(T)$ est fortement borné dans le dual $M^{\infty}(T)'$ d'après (2.5) ; il est donc équicontinu et T est discret.

(a) $\Rightarrow$(d) : Si T est discret alors l'algèbre compactologique $C^{\infty}(T)$ n'est autre que l'espace $\ell^{\infty}(T)$ muni de sa compactologie canonique de dual de l'espace de Banach $\ell^1(T)$, et $M^{\infty}(T) = \ell^{\infty}(T)^*$ coïncide bien avec $\ell^1(T)$.

(2.10) COROLLAIRE. - *Si* T *est un* P*-espace non discret alors* $M^{\infty}(T)$ *est un espace* (DF) *complet non infratonnelé, dont le dual fort est un espace de Banach.*

(2.11) THEOREME. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) T *est pseudocompact ;*

(b) $M^{\infty}(T)$ *est semi-réflexif ;*

(c) $M^{\infty}(T)$ *est un elc de type* (μ)*, c'est-à-dire que ses bornés sont relativement compacts ;*

(d) $M^{\infty}(T)$ *est un espace de Schwartz ;*

(e) $M^{\infty}(T) = C^{\infty}(T)'_c$.

Preuve :

(d) $\Rightarrow$(c) $\Rightarrow$(b) : Evident, compte tenu de la complétude de $M^{\infty}(T)$.

(b) $\Rightarrow$(a) : Puisque $C^{\infty}(T)$ est le dual fort de $M^{\infty}(T)$, on voit que si $M^{\infty}(T)$ est semi-réflexif, alors il coïncide avec $M_{\beta}(T)$ algébriquement, ce qui implique $\beta T = \theta T$ et la pseudocompacité de T.

(a) $\Rightarrow$(e) : Si T est pseudocompact le théorème d'Ascoli est valable et garantit que la compactologie de $C^{\infty}(T)$ est exactement celle, $\overline{\gamma}\, C^{\infty}(T)$, formée des compacts de l'algèbre de Banach $C^{\infty}(T)$; mais alors $M^{\infty}(T) = C^{\infty}(T)'_c$.

(e) $\Rightarrow$(d) : Car pour tout espace de Fréchet E, E'_c est un espace de Schwartz.

(2.12) THEOREME. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) T *est fini ;*

(b) $M^{\infty}(T)$ *est réflexif ;*

(c) $M^{\infty}(T)$ *est espace de Montel ;*

(d) $M^{\infty}(T)$ *est espace de Schwartz-Montel ;*

(e) $M^{\infty}(T)$ *est nucléaire ;*

(f) $M^{\infty}(T)$ *est de dimension finie.*

Preuve :

(a)$\Leftrightarrow$(f) ; (f) $\Rightarrow$(e) ; (f) $\Rightarrow$(d) $\Rightarrow$(c) $\Rightarrow$(b) : Evident.

(b) $\Rightarrow$(a) : Car alors $M^{\infty}(T)$ est tonnelé et semi-réflexif, donc T est discret et pseudocompact, c'est-à-dire qu'il est fini.

(e) $\Rightarrow$(f) : Car $M^{\infty}(T)$ est espace de Schwartz, donc $M^{\infty}(T) = E'_c$ avec $E = C^{\infty}(T)$. Mais si E'_c est nucléaire alors E, étant espace de Banach, est aussi nucléaire, donc de dimension finie.

Remarque 2. - On voit ainsi, à la lecture de (2.9), que les propriétés de tonnelage de $M^{\infty}(T)$ sont plus que médiocres. On rencontre là une difficulté, puisqu'alors l'espace $M^{\infty}(T)$ échappe à toute classification habituelle des elc. Un essai pour sortir du cadre des espaces infratonnelés est fait avec l'introduction des espaces (DF), mais, là encore, cette classe d'espaces laisse échapper $M^{\infty}(T)$ dans le cas général. Dans un sens plus positif on peut remarquer, en posant ici $E = M^{\infty}(T)$, que tout disque équivore de $E' = C^{\infty}(T)$ absorbe le disque unité $\Delta(T)$, donc est voisinage de zéro dans le dual fort $E'_{\beta} = C^{\infty}(T)$. Ainsi, avec les notations de [B1], E est un espace tel que $TE' = E'_{\beta}$, autrement dit il est *très distingué* en acceptant la terminologie proposée dans [H2]. On peut dire aussi que E est *hypo-infratonnelé* (tout disque équivore de E' est fortement bornivore) avec les notations de [B3], et même qu'il est *hypotonnelé* puisqu'il est complet. Ainsi :

(2.13) PROPOSITION. - *Dans le cas général* $M^{\infty}(T)$ *est toujours un espace complet, hypotonnelé et très distingué.*

Remarque 3. - Signalons, comme problème non résolu ici, que nous ne connaissons aucune caractérisation de T pour que $M^{\infty}(T)$ soit espace de Mackey.

3. - COMPACITE DANS $M^{\infty}(T)$.

Nous avons vu que, pour T discret, l'espace $M^{\infty}(T)$ est l'espace de Banach $\ell^1(T)$. Or cet espace $\ell^1(T)$ jouit de propriétés tout à fait particulières que l'on peut rapidement résumer, en constatant qu'elles se regroupent autour de deux thèmes : propriétés relatives à l'ordre et propriétés relatives à la compacité.

(A). - $\ell^1(T)$ est une bande dans l'espace de Riesz $M_\beta(T)$.

(B). - Sur le cône positif de $\ell^1(T)$ les topologies initiale et affaiblie coïncident et la norme est additive.

(C). - Relativement à une partie A de $\ell^1(T)$ les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) A est relativement compacte ;

(b) A est relativement faiblement compacte ;

(c) A est bornée et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $J \subset T$ telle que $\sum_{i \notin J} |\xi_i| \leqslant \varepsilon$ pour toute famille $(\xi_i) \in A$.

(D). - $\ell^1(T)$ possède la propriété de Schur : toute suite faiblement de Cauchy est convergente pour la norme ; en particulier $\ell^1(T)$ est faiblement semi-complet.

L'objet des paragraphes 3 et 4 est de montrer que ces propriétés sont conservées quand T n'est plus discret, à condition de remplacer $\ell^1(T)$ par $M^{\infty}(T)$. On obtiendra ainsi des propriétés positives remarquables de l'espace $M^{\infty}(T)$.

La méthode utilisée est basée sur un emploi intensif des partitions continues de l'unité (notées pcu pour simplifier), emploi qui va permettre de ramener précisément les problèmes à ceux des espaces $\ell^1(I)$, pour des ensembles discrets I. La rédaction qui suit reprend bien entendu les grandes lignes de la Note [R2], en explicitant complètement les démonstrations.

<u>La Φ-topologie sur</u> $M^{\infty}(T)$. - Désignons par Φ l'ensemble de toutes les pcu $\phi = (\phi_i)_{i \in I}$ sur T. L'ensemble I des indices de ϕ est considéré comme un espace

discret, de sorte que nous pouvons introduire l'espace compactologique $\ell^\infty(I)$, dual de l'espace de Banach $\ell^1(I)$.

(3.1) PROPOSITION. - *Pour toute* $\phi = (\phi_i)_{i\in I}$, $\phi \in \Phi$, *l'application* $V_\phi : \ell^\infty(I) \to C^\infty(T)$ *définie par*

$$V_\phi(\eta) = \sum_{i\in I} \eta_i \, \phi_i \qquad \text{si } \eta = (\eta_i)$$

est un morphisme compactologique.

Preuve. - Il suffit de voir que lorsque η décrit la boule unité (compacte) de $\ell^\infty(I)$, et lorsque J décrit l'ensemble des parties finies de I, l'ensemble de toutes les fonctions $\sum_{i\in J} \eta_i \, \phi_i$ est équicontinu et contenu dans le disque unité $\Delta(T)$, autrement dit un élément de H_1^∞. Et cela est, bien entendu, conséquence de la finitude locale de la famille $(\text{supp } \phi_i)_{i\in I}$ des supports des fonctions ϕ_i.

(3.2) COROLLAIRE. - *L'ensemble* H_ϕ *des fonctions* $\sum \eta_i \, \phi_i$, $\|\eta\|_\infty \leq 1$, *est un disque équicontinu simplement compact de* $C^\infty(T)$, *élément de* H_1^∞.

Rappelons que la topologie sur $M^\infty(T)$, qui est celle de la H^∞-convergence, peut se décrire avec la famille fondamentale des semi-normes

$$\mu \to \|\mu\|_H = \sup_{f\in H} |\mu(f)| \quad ; \; H \in H_1^\infty$$

On a alors :

(3.3) PROPOSITION :

(a) La transposée $U_\phi : M^\infty(T) \to \ell^1(I)$ *de l'application* V_ϕ *est définie par* $U_\phi(\mu) = (\mu(\phi_i))_{i\in I}$.

(b) L'application $\mu \to \sum |\mu(\phi_i)| = \|U_\phi(\mu)\|_1$ *est une semi-norme continue, notée encore* $\|\mu\|_\phi$ *pour simplifier, et* $\|\mu\|_\phi = \|\mu\|_{H_\phi}$.

On est donc en droit d'étudier, sur l'espace $M^\infty(T)$, la topologie localement convexe définie par les semi-normes $\|.\|_\phi$, $\phi \in \Phi$. On peut déjà remarquer qu'on obtient là une famille filtrante croissante de semi-normes continues sur $M^\infty(T)$. En effet pour deux pcu $\phi = (\phi_i)_{i\in I}$ et $\psi = (\psi_j)_{j\in J}$, la famille double $\phi\psi = (\phi_i\psi_j)_{(i,j)}$ est un élément de Φ ; or l'égalité $\phi_i = \sum_{j\in J} \phi_i \, \psi_j$ donne aussitôt l'inégalité $\|\mu\|_\phi \leq \|\mu\|_{\phi\psi}$; et de même $\|\mu\|_\psi \leq \|\mu\|_{\phi\psi}$.

Appelons donc Φ-topologie sur $M^\infty(T)$ la topologie définie par les semi-normes $\|\cdot\|_\phi$, $\phi\in\Phi$; autrement dit la topologie de la convergence uniforme sur la famille H_Φ^∞ des parties H_ϕ, et désignons par $M_\Phi^\infty(T)$ l'espace $M^\infty(T)$ ainsi topologisé. La proposition (3.3) signifie encore que la Φ-topologie est aussi la topologie initiale associée au système de toutes les applications continues $U_\phi : M^\infty(T) \to \ell^1(I)$.

La Φ-topologie sur $M^\infty(T)$ est évidemment moins fine que la topologie propre de $M^\infty(T)$. Mais elle est aussi plus fine que la topologie faible de $M^\infty(T)$: en effet toute $f\in C^\infty(T)$, supposée telle que $0\leqslant f\leqslant 1$, peut être considérée comme élément de la pcu $\phi = (f,1-f)$, et alors $|\mu(f)| \leqslant \|\mu\|_\phi$. Ainsi :

(3.4) <u>PROPOSITION</u>. - *La Φ-topologie sur $M^\infty(T)$ est compatible avec la dualité. En particulier $M^\infty(T)$ et $M_\Phi^\infty(T)$ ont les mêmes bornés, qui sont les bornés en norme.*

La comparaison plus précise des topologies de $M^\infty(T)$ et $M_\Phi^\infty(T)$ est maintenant basée sur les deux théorèmes suivants, dont le premier a pour objet de montrer qu'il existe sur T suffisamment de pcu, et qu'en conséquence la Φ-topologie est en réalité assez voisine de la topologie de $M^\infty(T)$ (voir toutefois la remarque 4 ci-dessous).

(3.5) <u>THEOREME</u>. - *Pour toute $H\in H_1^\infty$ et tout $\varepsilon>0$, il existe une pcu $\phi = (\phi_i)_{i\in I}$ et une famille $(t_i)_{i\in I}$ de points de T telles que*

$$\|f-\sum_{i\in I} f(t_i)\phi_i\| \leqslant \varepsilon$$

pour toute $f\in H$.

Preuve. - Soit d_H l'écart sur T, continu et borné, associé à la partie H. Désignons par T_H l'espace métrique associé à d_H, par d sa distance et par $q : T \to T_H$ la surjection canonique. La paracompacité de T_H assure l'existence d'une pcu $\psi = (\psi_i)_{i\in I}$ sur T_H, subordonnée à un recouvrement de T_H formé des boules ouvertes $B_d(i,\varepsilon)$ centrées aux points i d'une partie convenable I de T_H. On pose alors $\phi_i = \psi_i\circ q$ et, pour voir que $\phi = (\phi_i)$ est une pcu, il suffit de vérifier que la famille ($\operatorname{supp}\phi_i$) est localement finie sur T. Or pour chaque $t\in T$, il existe un voisinage ouvert W du point q(t) dans T_H et une partie finie J de I tels que $i\notin J$ implique $\psi_i=0$ sur W ; le voisinage $V = q^{-1}(W)$ de t dans T est ouvert et tel que $\phi_i=o$ sur V pour tout $i\notin J$, et tout est dit. Fixons maintenant des points $t_i\in T$ par les conditions $t_i\in q^{-1}(i)$ et remarquons que toute $f\in H$ se factorise en $f = g\circ q$, où g est continue sur T_H. De plus la condition $\operatorname{supp}\psi_i\subset B_d(i,\varepsilon)$ garantit, pour chaque $i\in I$, l'inégalité $|g(i)\psi_i-g\psi_i| \leqslant \varepsilon\psi_i$, ce qui fournit aussitôt l'inégalité $|f(t_i)\phi_i-f\phi_i| \leqslant \varepsilon\phi_i$, d'où l'on déduit $\|f-\sum f(t_i)\phi_i\| \leqslant \varepsilon$.

(3.6) THEOREME. - *Pour toute* $H\in H_1^\infty$ *et tout* $\varepsilon>o$, *il existe une pcu* $\phi = (\phi_i)$ *telle que*

$$\|\mu\|_H \leqslant \|\mu\|_\phi + \varepsilon\|\mu\|$$

pour toute $\mu\in M^\infty(T)$.

Preuve. - Il suffit de constater que, pour toute $f\in H$, et avec les notations de (3.5), on a $|f(t_i)| \leqslant 1$ pour tout i, de sorte que $|\mu(f)| \leqslant \|\mu\|_\phi + \varepsilon\|\mu\|$.

(3.7) COROLLAIRE. - *Les espaces* $M_\Phi^\infty(T)$ *et* $M^\infty(T)$ *induisent une même structure uniforme sur leurs bornés communs et une même topologie sur le cône positif. En particulier ils ont les mêmes parties relativement compactes.*

Preuve. - Les bornés communs étant les bornés en norme, il suffit de voir la coïncidence des structures uniformes sur le disque unité $\Delta° = \{\mu \; ; \|\mu\|\leqslant 1\}$ de $M^\infty(T)$. Or pour chaque $H\in H_1^\infty$ et pour tout $\varepsilon>o$, il existe $\phi\in\Phi$ telle que

$$\|\mu-\nu\|_H \leqslant 2\varepsilon + \|\mu-\nu\|_\phi$$

pour toutes $\mu,\nu\in\Delta°$, ce qui suffit.

Dans le cas où les mesures μ_α sont positives, la condition $\mu_\alpha\to\mu$ dans $M_\Phi^\infty(T)$ implique évidemment $\|\mu_\alpha\| = \mu_\alpha(1) \to \mu(1)$, ce qui ramène, pour $\alpha\geqslant\alpha_o$, à la coïncidence des topologies sur les bornés communs.

Tirons maintenant les conséquences de la définition de la Φ-topologie comme topologie initiale associée au système de toutes les applications $U_\phi : M^\infty(T) \to \ell^1(I)$.

(3.8) THEOREME. - *Sur le cône positif de* $M^\infty(T)$ *la topologie de* $M^\infty(T)$ *coïncide avec sa topologie affaiblie* $\sigma(M^\infty(T), C^\infty(T))$.

Preuve. - Grâce à (3.7) il suffit de voir que si $\mu_\alpha\to\mu$ faiblement, avec $\mu_\alpha\geqslant o$, alors $\mu_\alpha \to \mu$ dans $M^{\infty}_{\Phi}(T)$. Or pour chaque $\phi \in \Phi$, on voit que $U_\phi(\mu_\alpha) \to U_\phi(\mu)$ faiblement dans le cône positif de $\ell^1(I)$, donc d'après la condition (B) rappelée au début de ce paragraphe, on a $U_\phi(\mu_\alpha - \mu) \to 0$ en norme dans $\ell^1(I)$, d'où $\|\mu_\alpha - \mu\|_\phi \to 0$ et $\mu_\alpha \to \mu$ dans $M^{\infty}_{\Phi}(T)$.

(3.9) <u>THEOREME</u>. - *Relativement à une partie* A *de* $M^{\infty}(T)$ *les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) A *est relativement compacte dans* $M^{\infty}(T)$ *;*

(b) A *est relativement faiblement compacte ;*

(c) A *est bornée et pour toute* $\phi \in \Phi$*, les familles* $U_\phi(\mu) = (\mu(\phi_i))_{i\in I}$ *forment une partie équisommable de* $\ell^1(I)$ *quand* μ *décrit* A *; autrement dit, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe une partie finie* J *de* I *telle que :*

$$\sup_{\mu \in A} \sum_{i \notin J} |\mu(\phi_i)| \leqslant \varepsilon$$

Preuve :

(a) $\Rightarrow$(b) : Evident.

(b) $\Rightarrow$(c) : Car la partie $U_\phi(A)$ est relativement faiblement compacte dans $\ell^1(I)$, ce qui nous ramène à la condition (C) rappelée plus haut.

(c) $\Rightarrow$(a) : D'après (c) la partie $U_\phi(A)$ est relativement compacte dans $\ell^1(I)$, donc A est précompacte dans l'espace $M^{\infty}_{\Phi}(T)$, et par suite aussi dans $M^{\infty}(T)$, d'après (3.7). On termine en remarquant que $M^{\infty}(T)$ est complet.

(3.10) <u>COROLLAIRE</u>. - *Les intervalles* $[\lambda,\mu]$ *de* $M^{\infty}(T)$ *sont compacts.*

Preuve. - Ces intervalles sont déjà fermés ; il suffit donc de vérifier les conditions (3.9.c) et pour cela de se ramener par translation au cas d'un intervalle $[0,\mu]$, ce qui est alors immédiat.

Enfin un dernier résultat s'obtient par recours aux espaces $\ell^1(I)$:

(3.11) <u>THEOREME</u>. - *Dans* $M^{\infty}(T)$ *toute suite de Cauchy faible est convergente pour la topologie de* $M^{\infty}(T)$. *En particulier* $M^{\infty}(T)$ *est faiblement semi-complet.*

Preuve. - Si (μ_n) est suite de Cauchy faible alors pour chaque $\phi \in \Phi$, la suite $U_\phi(\mu_n)$ est faiblement de Cauchy dans $\ell^1(I)$, donc est de Cauchy pour la norme d'après la propriété de Schur (D). Alors (μ_n) est suite de Cauchy dans $M^{\infty}_{\Phi}(T)$, donc est aussi de Cauchy dans $M^\infty(T)$; c'est dire qu'elle y est convergente.

Remarque 4. – Il est clair que $M^\infty_\Phi(T)$ est un elc quasi-complet d'après (3.7). Et l'on peut se demander si $M^\infty_\Phi(T)$ possède une position privilégiée entre la topologie de $M^\infty(T)$ et sa topologie affaiblie. Il n'en est rien, comme on va voir par les théorèmes suivants qui règlent les cas limites. Donnons tout d'abord un lemme :

(3.12) LEMME. – *Pour que* T *soit un* P-*espace il faut et il suffit que pour tout écart continu* d *sur* T *les* d-*boules de rayon nul soient des ouverts de* T.

Preuve. – Il suffit de constater que toute d-boule de rayon nul est un noyau de T et que, réciproquement, tout noyau $Z = Z(f)$ est, s'il n'est pas vide, la d-boule de rayon nul centrée en n'importe quel point de Z, à condition de prendre pour d l'écart d_f associé à f selon $(x,y) \to |f(x)-f(y)|$.

(3.13) THEOREME. – *Pour que l'on ait l'égalité topologique* $M^\infty_\Phi(T) = M^\infty(T)$, *il faut et il suffit que* T *soit un* P-*espace.*

Preuve. – Soit d un écart continu sur T tel que $0 \leq d \leq 1$. Considérons la partie équicontinue

$$H = \{f \ ; \ |f| \leq 1 \text{ et } |f(x)-f(y)| \leq d(x,y) \text{ pour tous } x,y\}$$

On peut déjà remarquer que f, $g \in H$ implique $\frac{1}{2}(fg) \in H$, de sorte que les conditions $f_1, f_2, \ldots, f_n \in H$ impliquent $\frac{1}{2^{n-1}}(f_1 f_2 \ldots f_{n-1}) \in H$.

Supposons $M^\infty_\Phi(T) = M^\infty(T)$. Alors il existe une pcu $\phi = (\phi_i)$ et une constante $k > o$ telles que toute fonction $f \in H$ puisse s'écrire sous la forme $f = \Sigma \eta_i \phi_i$ où $\eta = (\eta_i)$ est un élément de $\ell^\infty(I)$ tel que $\|\eta\| \leq k$.

Fixons un point $t \in T$. Il existe un voisinage U de t et une partie finie J de I tels que ϕ_i soit nulle sur U pour tout $i \notin J$. Soient alors $n = \text{card } J$, T_d l'espace métrique associé à l'écart d et $q : T \to T_d$ la surjection canonique. On va d'abord prouver que l'image q(U) est finie et contient au plus n points. Supposons le contraire : il existe alors (n+1) points $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$ dans U tels que $d(t_r, t_s) > 0$ pour $r \neq s$. Pour chaque r soit $f_r : x \to d(t_r, x)$; on a $f_r \in H$ et $f_r(t_r) = 0$. Posons donc

$$g_r = \frac{1}{2^{n-1}} \prod_{s \neq r} f_s$$

On obtient ainsi des fonctions g_r vérifiant $g_r \in H$, $g_r(t_r) > 0$ et $g_r(t_s) = 0$ si $s \neq r$. Alors le système $(g_r|_U)$ des restrictions à U de ces (n+1) fonctions est libre dans C(U), contrairement au fait que chaque $g_r|_U$ est combinaison linéaire des n fonctions $\phi_i|_U$, $i \in J$, puisque $g_r \in H$.

Ainsi q(U) est fini. Cela permet de voir que l'ensemble des valeurs d(s,t) est fini quand s décrit U. Désignons donc par α la plus petite de ces valeurs qui soit strictement positive. Alors la boule ouverte $\overset{\circ}{B}_d(t,\alpha)$ ne contient dans U que les points s tels que d(s,t) = 0, donc $B_d(t,o) \supset (\overset{\circ}{B}_d(t,\alpha) \cap U)$ et ainsi la boule $B_d(t,o)$ est voisinage de t dans T. Mais comme toute d-boule de rayon nul admet pour centre chacun de ses points, on a prouvé en fait que T est un P-espace d'après le lemme (3.12).

Réciproquement supposons que T est un P-espace et soit $H \in \mathcal{H}^{\infty}(T)$. L'écart d_H associé est continu et borné ; il détermine donc sur T une partition d'of (ω_i) formée des d_H-boules de rayon nul. Chaque $f \in H$ est constante sur chaque ω_i ; soit η_i sa valeur. De plus le système des fonctions caractéristiques 1_{ω_i} définit une pcu ϕ sur T telle que $f = \Sigma \eta_i 1_{\omega_i}$ pour toute $f \in H$. Ainsi H est contenue dans un élément de $\mathcal{H}^{\infty}_{\Phi}$ et par suite $M^{\infty}_{\Phi}(T) = M^{\infty}(T)$, où l'égalité est topologique.

Dans un autre sens on a, du côté des topologies faibles :

(3.14) <u>THEOREME</u>. - *Pour que* $M^{\infty}_{\Phi}(T)$ *soit un espace faible il faut et il suffit que* T *soit pseudocompact.*

Preuve. - On sait que T est une partie bornée de $M^{\infty}(T)$, de sorte que, d'après (3.7), les structures uniformes canoniques de $M^{\infty}(T)$ et $M^{\infty}_{\Phi}(T)$ induisent toutes deux sur T la structure universelle de T. Il suit de là que si $M^{\infty}_{\Phi}(T)$ est un espace faible, alors sur T la structure uniforme universelle est précompacte puisqu'elle coïncide avec celle définie par $\sigma(M^{\infty}(T), C^{\infty}(T))$. Ainsi T est pseudocompact. Réciproquement si T est pseudocompact alors toute pcu $\phi = (\phi_i)_{i \in I}$ sur T est nécessairement finie ; ainsi tous les ensembles I qui interviennent sont finis et la topologie de $M^{\infty}_{\Phi}(T)$ coïncide avec la topologie affaiblie de $M^{\infty}(T)$; alors on voit, avec (2.11), que $M^{\infty}(T) = C^{\infty}(T)'_c$, tandis que $M^{\infty}_{\Phi}(T) = C^{\infty}(T)'_{\sigma}$, ce qui montre en plus que $M^{\infty}_{\Phi}(T)$ peut ne pas être complet.

4. - PROPRIETES RELATIVES A L'ORDRE.

L'espace $M_\beta(T)$ des mesures de Radon sur le compactifié de Stone-Čech βT de T est évidemment, pour sa structure d'ordre naturelle, un espace de Riesz complètement réticulé. Il importe donc, dans ce contexte, d'étudier la situation de son sous-espace $M^\infty(T)$. On voit déjà que pour toute $\mu \in M_\beta(T)$ et toute pcu $\phi = (\phi_i)_{i\in I}$ on a la condition :

$$(*) \qquad \sum_{i\in I} |\mu|(\phi_i) \leqslant |\mu|(1) = \|\mu\|.$$

Alors :

(4.1) <u>THEOREME</u>. - *Pour qu'une mesure $\mu \in M_\beta(T)$ soit élément de $M^\infty(T)$ il faut et il suffit que l'on ait $\Sigma|\mu|(\phi_i) = \|\mu\|$ pour toute pcu $\phi = (\phi_i)$ sur* T.

Preuve. - Supposons $\mu \in M^\infty(T)$ et fixons $g \in \Delta(T)$. On a $g = \Sigma g\phi_i$ et $\mu(g) = \Sigma\mu(g\phi_i)$, puisque la famille des sommes partielles finies $\sum_{i\in J} g\phi_i$ est équicontinue et contenue dans $\Delta(T)$. Or $|g\phi_i| \leqslant \phi_i$ donc $|\mu(g\phi_i)| \leqslant |\mu|(\phi_i)$, d'où $|\mu(g)| \leqslant \Sigma|\mu|(\phi_i)$ et par conséquent $\|\mu\| \leqslant \Sigma|\mu|(\phi_i)$.

Réciproquement supposons la condition vérifiée. A toute $H \in H_1^\infty$ et à tout $\varepsilon > 0$, associons la pcu $\phi = (\phi_i)$ et les points $t_i \in T$ comme en (3.5). Il existe, d'après la condition (*) ci-dessus, une partie finie $J \subset I$ telle que $\sum_{i\notin J} |\mu|(\phi_i) \leqslant \varepsilon$. Alors pour toute $f \in H$ on a

$$\Big|\sum_{i\notin J} f(t_i)\phi_i\Big| \leqslant \sum_{i\notin J} \phi_i \qquad \text{et} \qquad \|f - \Sigma f(t_i)\phi_i\| \leqslant \varepsilon,$$

de sorte que $|\mu(f) - \sum_{i\in J} f(t_i)\mu(\phi_i)|$ est majoré par $\varepsilon + |\mu|(\sum_{i\notin J} \phi_i)$. La condition du théorème implique

$$|\mu|(\sum_{i\notin J} \phi_i) = |\mu|(1 - \sum_{i\in J} \phi_i) = \sum_{i\notin J} |\mu|(\phi_i) \leqslant \varepsilon.$$

En résumé il reste $|\mu(f) - \sum_{i\in J} f(t_i)\mu(\phi_i)| \leqslant 2\varepsilon$, soit encore $\Big\|\mu - \sum_{i\in J} \mu(\phi_i)\,\varepsilon_{t_i}\Big\|_H \leqslant 2\varepsilon$, ce qui montre que μ est limite uniforme sur H de mesures discrètes, donc est continue sur H, et ainsi $\mu \in M^\infty(T)$.

La condition de (4.1) ne portant que sur la mesure $|\mu|$ on obtient donc immédiatement le résultat suivant, démontré au théorème (1.2.1) de [BI] par des voies totalement différentes :

(4.2) COROLLAIRE. - *Pour toute mesure* $\mu \in M_\beta(T)$ *les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $\mu \in M^\infty(T)$ *;*

(b) $\mu^+ \in M^\infty(T)$ *et* $\mu^- \in M^\infty(T)$ *;*

(c) $|\mu| \in M^\infty(T)$.

En particulier $M^\infty(T)$ *est un sous-espace de Riesz de* $M_\beta(T)$.

Comme seconde application de (4.1) on détermine la situation de $M^\infty(T)$ dans $M_\beta(T)$ selon :

(4.3) THEOREME. - $M^\infty(T)$ *est une bande de* $M_\beta(T)$.

Preuve. - On vérifie d'abord que $M^\infty(T)$ est une partie pleine de $M_\beta(T)$, ce qui est conséquence de (4.2), car si $\mu \in M^\infty(T)$ et si $\lambda \in M_\beta(T)$ est telle que $|\lambda| \leqslant |\mu|$, alors pour toute $H \in H_1^\infty$ et toute famille $f_i \to 0$ dans H on a $|\lambda(f_i)| \leqslant |\lambda|(|f_i|) \leqslant |\mu|(|f_i|)$, donc $\lambda(f_i) \to 0$ puisque $|\mu|(|f_i|) \to 0$. Pour le reste il suffit de voir que toute mesure positive $\mu \in M_\beta(T)$, borne supérieure d'une famille filtrante croissante de mesures positives $\mu_\alpha \in M^\infty(T)$, est élément de $M^\infty(T)$. Or pour chaque $\phi \in \Phi$ on a

$$\|\mu\| = \mu(1) = \operatorname*{Sup}_\alpha \mu_\alpha(1) = \operatorname*{Sup}_\alpha \operatorname*{Sup}_{J \text{ finie}} \left(\sum_{i\in J} \mu_\alpha(\phi_i)\right) \qquad \text{soit}$$

$$\|\mu\| = \operatorname*{Sup}_J \operatorname*{Sup}_\alpha \mu_\alpha\Big(\sum_{i\in J} \phi_i\Big) = \operatorname*{Sup}_J \left(\sum_{i\in J} \mu(\phi_i)\right) = \Sigma\mu(\phi_i),$$

ce qui ramène au critère (4.1) et montre que $\mu \in M^\infty(T)$.

Nous terminerons en décrivant un procédé permettant d'associer à toute mesure $\mu \in M_\beta(T)$ sa projection sur la bande $M^\infty(T)$. On peut d'ailleurs se limiter au cas des mesures positives. Du même coup nous obtiendrons une caractérisation de la bande étrangère à $M^\infty(T)$.

Pour chaque mesure $\mu \in M_\beta(T)$ et pour chaque $\phi = (\phi_i) \in \Phi$, on a $|\mu(\phi_i f)| \leqslant \|f\|\, |\mu|(\phi_i)$ pour toute $f \in C^\infty(T)$. Il suit de là que la famille $(\mu(\phi_i f))$ est sommable, ce qui montre aussi que la famille des mesures $\phi_i\mu$ est étroitement sommable dans $M_\beta(T)$. On pose alors :

$$\mu_\phi = \sum_{i\in I} \phi_i\mu \qquad ; \qquad \mu_\phi(f) = \sum_{i\in I} \mu(\phi_i f)$$

(4.4) PROPOSITION. - *Soit* $\mu \in M_\beta(T)$ *une mesure positive.*

(a) On a $\mu \in M^\infty(T)$ *si et seulement si* $\mu_\phi = \mu$ *pour toute* $\phi \in \Phi$.

(b) Dans le cas général on a $0 \leqslant \mu_\phi \leqslant \mu$ *et la famille des mesures* μ_ϕ, $\phi \in \Phi$, *est filtrante inférieurement.*

Preuve :

(a) Si $\mu \in M^\infty(T)$ on a évidemment $\mu_\phi = \mu$ car la famille des sommes partielles finies $\sum_{i \in J} \phi_i f$ est équicontinue et uniformément bornée ; et la réciproque s'obtient en choisissant f=1 et en revenant au critère (4.1).

(b) Dans le cas général, on a pour toute $f \geqslant 0$:

$$0 \leqslant \mu_\phi(f) = \underset{J \text{ finie}}{\mathrm{Sup}} \sum_{i \in J} \mu(\phi_i f) = \underset{J}{\mathrm{Sup}}\, \mu\left[\left(\sum_{i \in J} \phi_i\right) f\right] \leqslant \mu(f)$$

d'où $0 \leqslant \mu_\phi \leqslant \mu$.

Enfin si $\psi \in \Phi$ est une autre pcu, on peut introduire, comme dans la preuve de (3.3), la famille double $\phi\psi \in \Phi$. On a alors $\mu_{\phi\psi} = (\mu_\phi)_\psi = (\mu_\psi)_\phi$ de sorte que, par ce qui précède, $\mu_{\phi\psi} \leqslant \mu_\phi \wedge \mu_\psi$.

Ainsi, en utilisant la propriété de réticulation complète de $M_\beta(T)$ on peut introduire :

(4.5) DEFINITION. - *Pour toute mesure positive* $\mu \in M_\beta(T)$ *posons :*

$$\lambda_\mu = \underset{\phi \in \Phi}{\mathrm{Inf}}\, \mu_\phi .$$

(4.6) THEOREME. - *Pour toute mesure positive* $\mu \in M_\beta(T)$, *la mesure* λ_μ *est la composante de* μ *sur la bande* $M^\infty(T)$ *de* $M_\beta(T)$.

Preuve. - Posons $\lambda = \lambda_\mu$ pour simplifier. Il suffit de vérifier que $\lambda \in M^\infty(T)$ et que si $\nu \in M^\infty(T)$ est telle que $0 \leqslant \nu \leqslant \mu$ alors aussi $0 \leqslant \nu \leqslant \lambda$. Or ce dernier point est immédiat avec (4.4.a) puisqu'alors $\nu = \nu_\phi \leqslant \mu_\phi$ pour toute $\phi \in \Phi$. Pour le premier point, utilisons le critère (4.1), ce qui nous ramène à prouver que l'expression $L = \underset{J}{\mathrm{Inf}}\, \lambda(1-\phi_J)$ est nulle, où J décrit l'ensemble des parties finies de I et où l'on a posé, toujours pour simplifier, $\phi_J = \sum_{i \in J} \phi_i$ (la pcu $\phi = (\phi_i)$ étant bien entendu fixée). Mais :

$$L = \underset{J}{\mathrm{Inf}}\ \underset{\psi}{\mathrm{Inf}}\ \mu_\psi(1-\phi_J) = \underset{\psi}{\mathrm{Inf}}\ \underset{J}{\mathrm{Inf}}(\mu_\psi(1)-\mu_\psi(\phi_J)) \qquad \text{soit}$$

$$L = \operatorname*{Inf}_{\psi}(\mu_\psi(1) - \operatorname*{Sup}_{J} \mu_\psi(\phi_J)), \qquad \text{mais}$$

$$\operatorname*{Sup}_{J} \mu_\psi(\phi_J) = \Sigma\mu_\psi(\phi_i) = \mu_{\psi\phi}(1) \geqslant \lambda(1),$$

d'où $L \leqslant \operatorname*{Inf}_{\psi}(\mu_\psi(1)-\lambda(1)) = 0$, et par suite $L=0$.

(4.7) <u>COROLLAIRE</u>. - *Une mesure* $\mu \in M_\beta(T)$ *est étrangère à la bande* $M^{\infty}(T)$ *si et seulement s'il existe, pour tout* $\varepsilon>0$, *une pcu* $\phi = (\phi_i)$ *sur* T *telle que* $\Sigma|\mu|(\phi_i) < \varepsilon$.

On remarquera qu'on obtient là une généralisation au cas de $M^{\infty}(T)$ d'un critère classique de Tamano [T] selon lequel un caractère $u \in \beta T$ n'appartient pas à θT (ou est étranger à la bande $M^{\infty}(T)$) si et seulement s'il existe une pcu $\phi = (\phi_i)$ sur T telle que $u(\phi_i) = 0$ pour tout $i \in I$.

5. - PROPRIETE D'APPROXIMATION.

La caractérisation des parties relativement compactes de $M^{\infty}(T)$, donnée en (3.9), va permettre d'obtenir une propriété supplémentaire de $M^{\infty}(T)$.

(5.1) <u>THEOREME</u>. - *L'espace* $M^{\infty}(T)$ *vérifie la propriété d'approximation.*

Preuve. - Il faut montrer, et cela suffit, que l'opérateur identité de $M^{\infty}(T)$ est adhérent à l'ensemble des opérateurs continus de rang fini pour la topologie de la convergence compacte sur $M^{\infty}(T)$. Fixons donc un compact A de $M^{\infty}(T)$ et une partie équicontinue $H \in \mathcal{H}^{\infty}(T)$; il faut alors trouver un opérateur continu de rang fini u tel que $(1-u)(A) \subset H^{\circ}$. Introduisons les constantes $k = \operatorname{Sup}\{\|\mu\| \; ; \; \mu \in A\}$ et $M = \operatorname{Sup}\{\|f\| \; ; \; f \in H\}$. D'après le théorème (3.5), appliqué à la partie $\frac{H}{M} \in \mathcal{H}_1^{\infty}$ et à la constante $\varepsilon = \frac{1}{2kM}$, il existe une pcu $\phi = (\phi_i)_{i\in I}$ et une famille $(t_i)_{i\in I}$ de points de T telles que

$$\Big\| f - \sum_{i\in I} f(t_i)\phi_i \Big\| \leqslant \frac{1}{2k}$$

pour toute $f \in H$.

On tire de là que, pour toute $\mu \in A$ et toute $f \in H$, on a

$$|\mu(f) - \sum_{i\in I} f(t_i)\mu(\phi_i)| \leqslant \frac{1}{2}\,.$$

Mais la partie A étant compacte dans $M^{\infty}(T)$, les familles $(\mu(\phi_i))_{i\in I}$ sont équisommables d'après le théorème (3.9) lorsque μ décrit A. Il existe donc une partie finie J de I telle que

$$\operatorname*{Sup}_{\mu\in A}\sum_{i\notin J}|\mu(\phi_i)| \leqslant \frac{1}{2M}\,.$$

Alors, pour toute $\mu\in A$ et toute $f\in H$, on a

$$|\mu(f)-\sum_{i\in J} f(t_i)\mu(\phi_i)| \leqslant 1$$

Introduisons l'opérateur continu de rang fini $u : M^{\infty}(T) \to M^{\infty}(T)$ défini par

$$u(\mu) = \sum_{i\in J} \mu(\phi_i)\ \varepsilon_{t_i}$$

L'inégalité précédente signifie précisément $\mu - u(\mu)\in H^{\circ}$ pour toute $\mu\in A$. Ainsi $(1-u)(A)\subset H^{\circ}$, ce qui achève la démonstration.

(5.2) <u>COROLLAIRE</u>. - *L'espace $M^{\infty}_{\Phi}(T)$ vérifie aussi la propriété d'approximation.*

Preuve. - Elle est évidente puisque $M^{\infty}_{\Phi}(T)$ a une topologie moins fine que celle de $M^{\infty}(T)$, mais qui donne les mêmes compacts.

<u>Application à l'espace</u> $M_{\sigma}(T)$. - La même méthode permet aussi de montrer que l'espace $M_{\sigma}(T)$ de [BI] vérifie la propriété d'approximation. Nous devons faire toutefois quelques adaptations. Bien entendu nous renvoyons à [BI] pour les définitions de l'elc $M_{\sigma}(T)$ et de la compactologie $\mathcal{H}^{\infty}_{\circ}(T)$ sur $C^{\infty}(T)$.

a) Pour chaque $H\in\mathcal{H}^{\infty}(T)$, l'application de Dirac $\varepsilon : t \to \varepsilon_t$ peut être considérée comme une application de T dans l'algèbre de Banach $C^{\infty}(H)$. A ce titre, elle se factorise en une application $\varepsilon_H : T_H \to C^{\infty}(H)$, où T_H est l'espace métrique associé à l'écart d_H. Mais la définition même de l'écart d_H montre évidemment que ε_H est une isométrie entre deux espaces métriques, isométrie qui permet d'identifier l'espace métrique T_H à un sous-espace de l'algèbre de Banach $C^{\infty}(H)$.

b) Il suit de là que si H est un élément de $\mathcal{H}^{\infty}_{\circ}(T)$, choisi de la forme $H = \overline{\Gamma}(f_n)$, où (f_n) est une suite de $C^{\infty}(T)$ équicontinue, uniformément bornée et convergeant simplement vers zéro, alors H est un compact métrisable d'après la proposition (2.1.1) de [BI], donc $C^{\infty}(H)$ est un espace de Banach séparable, et ainsi l'espace métrique T_H est lui aussi séparable. Alors, dans l'énoncé du théorème (3.5), on peut supposer l'ensemble I dénombrable et mettre en évidence, pour tout $\varepsilon>o$, une pcu dénombrable $\phi = (\phi_n)$ et une suite (t_n) de points de T telles que $\|f-\Sigma f(t_n)\phi_n\| \leqslant \varepsilon$ pour toute $f\in H$. Ceci implique que le théorème (3.6) reste valable pour une telle partie H et pour toute $\mu\in M_\sigma(T)$. Il suffit en effet de constater que l'égalité $\mu(\Sigma\eta_n\phi_n) = \Sigma\eta_n\mu(\phi_n)$ est valable pour toute suite bornée (η_n) ; mais ceci provient du fait que les sommes partielles $\psi_N = \sum_{n\leqslant N} \eta_n\phi_n$ forment une suite équicontinue et uniformément bornée qui converge simplement vers la fonction $\psi = \Sigma\eta_n\phi_n$ et ainsi $\mu(\psi-\psi_N) \to 0$.

c) Enfin si L est une partie compacte de $M_\sigma(T)$, on sait, avec le théorème (2.2.6) de [BI] que $\operatorname{Sup}_{\mu\in L} |\mu|(f_n)$ tend vers zéro pour toute suite (f_n) de $C^\infty(T)$, équicontinue, uniformément bornée et convergeant simplement vers zéro. Pour chaque pcu dénombrable $\phi = (\phi_n)$ on a donc

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{Sup}_{\mu\in L} |\mu|(1-\sum_{n\leqslant N} \phi_n) = 0$$

ce qui, d'après b) et le fait que chaque $|\mu|$ est élément de $M_\sigma(T)$, montre que la famille des suites $(|\mu|(\phi_n))_n$ de ℓ^1 est équisommable quand μ décrit L. A fortiori en est-il de même de la famille des suites $(\mu(\phi_n))_n$ quand μ décrit L.

En résumé les trois remarques ci-dessus permettent d'adapter au cas de $M_\sigma(T)$ la démonstration du théorème (5.1) relatif à l'espace $M^\infty(T)$. Ainsi :

(5.3) <u>THEOREME</u>. - *L'espace $M_\sigma(T)$ vérifie la propriété d'approximation.*

BIBLIOGRAPHIE

(BI) J. BERRUYER - B. IVOL, *Espaces de mesures et compactologies*, Publ. Dép. Math. Lyon, 9-1, 1972, p. 1-36.

(B1) H. BUCHWALTER, *Espaces vectoriels bornologiques*, Publ. Dép. Math. Lyon, 2-1, 1965, p. 2-53.

(B2) H. BUCHWALTER, *Topologies et compactologies*, Publ. Dép. Math. Lyon, 6-2, 1969, p. 1-74.

(B3) H. BUCHWALTER, *Espaces ultrabornologiques et b-réflexivité*, Publ. Dép. Math. Lyon, 8-1, 1971, p. 91-106.

(B4) H. BUCHWALTER, *Fonctions continues et mesures sur un espace complètement régulier*, Lecture Notes, Ecole d'été de Bruxelles 1972, 20 pages, à paraître en 1973.

(BP) H. BUCHWALTER - R. PUPIER, *Complétion d'un espace uniforme et formes linéaires*, Comptes rendus, 273, série A, 1971, p. 96.

(D) R.M. DUDLEY, *Convergence of Baire measures*, Studia Math., 27, 1966, p. 251-268.

(FGH) D.H. FREMLIN - D.J.H. GARLING - R.G. HAYDON, *Bounded measures on topological spaces*, Proc. Lond. Math. Soc., 3, 25, 1972, p. 115-136.

(H1) R.G. HAYDON, *Sur les espaces* M(T) *et* $M^\infty(T)$, Comptes rendus, 275, série A, 1972, p. 989.

(H2) H. HOGBE-NLEND, *Théorie des bornologies et applications*, Lecture Notes in Math., 213, 1971.

(LS) C. LEGER - P. SOURY, *Le convexe topologique des probabilités sur un espace topologique*, J. Math. pures et appl., 50, 1971, p. 363-425.

(R1) M. ROME, *Le dual de l'espace compactologique* $C^\infty(T)$, Comptes rendus, 274, série A, 1972, p. 1631.

(R2) M. ROME, *Ordre et compacité dans l'espace* $M^\infty(T)$, Comptes rendus, 274, série A, 1972, p. 1817.

BIBLIOGRAPHIE

(suite et fin)

(S) F.D. SENTILLES, *Bounded continuous functions on a completely regular space*, Trans. Amer. Math. Soc., 168, 1972, p. 311-336.

(T) H. TAMANO, *Some properties of the Stone-Čech compactification*, J. Math. Soc. Japan, 12, 1960, p. 104-117.

(V) V.S. VARADARAJAN, *Measures on topological spaces*, Amer. Math. Soc. Translations (2), 48, 1965, p. 161-228.

(W) R.F. WHEELER, *The strict topology, separable measures and paracompactness*, Pacific J., à paraître.

Manuscrit remis le 10 décembre 1972

Michel ROME
Département de Mathématiques
Université de Lyon I
43, bd du 11 novembre 1918
69621 - VILLEURBANNE