PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

H. BUCHWALTER

Espaces ultrabornologiques et b-réflexivité

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1971, tome 8, fascicule 1
, p. 91-106
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1971__8_1_91_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1971 t.8-1

ESPACES ULTRABORNOLOGIQUES ET b-REFLEXIVITE

H. BUCHWALTER

On reprend ici la théorie de la b-réflexivité, introduite dans [1], et l'on montre qu'elle est en rapport étroit par dualité avec la théorie des espaces ultrabornologiques. Pour rendre l'exposé plus attrayant on a crû bon de rappeler complètement des résultats classiques. L'originalité figure principalement dans l'introduction des conditions de tonnelage affaibli du paragraphe 2, qui généralisent les conditions de dénombrabilité exploitées par HUSAIN [6] et DE WILDE-HOUET [4] et dont la source est évidemment la théorie des espaces (DF) de GROTHENDIECK [5]. En particulier les espaces dits hypo-Mackey, quoique très généraux, semblent intéressants. Ils interviennent dans l'énoncé des théorèmes 3 et 4 : si E est espace de Mackey [resp : hypo-Mackey] alors E est ultrabornologique [resp : b-réflexif] si et seulement si E'_τ est b-réflexif [resp : ultrabornologique]. Enfin dans le cas plus spécial des espaces métrisables ou des espaces (DF) la b-réflexivité équivaut à la semi-réflexivité et l'énoncé précédent donne, rassemblées dans le théorème 5, des conditions nouvelles de semi-réflexivité en termes d'espaces ultrabornologiques.

1 - ESPACES ULTRABORNOLOGIQUES

On utilisera sans référence la notion d'espace ultrabornologique (c'est-à-dire limite inductive d'espaces de Banach). On notera suivant [3] par $\tilde{E}$ et $\tilde{\tilde{E}}$ l'espace bornologique et l'espace ultrabornologique associés à un espace localement convexe (elc) séparé E. On rappelle qu'une base de voisinages de 0 dans $\tilde{E}$ [resp. : dans $\tilde{\tilde{E}}$] est formée des disques de E qui sont bornivores [resp. complètement bornivores, c'est-à-dire qui absorbent tout disque borné complétant]. Avec les notations bornologiques classiques de [1] on a donc $\tilde{E} = TBE$ et $\tilde{\tilde{E}} = TB_cE$, où B_cE désigne la bornologie complétante canonique de E. Il convient de rappeler immédiatement les propriétés suivantes, qui sont bien connues, et qui vont être la base de ce qui va suivre :

Proposition 1 : *Soit* D *un disque de* E. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) D *est bornivore, c'est-à-dire un voisinage de* 0 *dans* $\tilde{E}$;

b) D *absorbe les précompacts de* E ;

c) D *absorbe les compacts de* E ;

d) D *absorbe les suites de* E *qui convergent vers* 0.

Proposition 2 : *Soit* D *un disque de* E. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) D *est complètement bornivore, c'est-à-dire un voisinage de* 0 *dans* $\tilde{\tilde{E}}$;

b) D *absorbe les disques faiblement compacts de* E ;

c) D *absorbe les disques compacts de* E.

Applications à l'espace E' .

On munit le dual E' de l'elc séparé E des topologies $\sigma(E',E)$, $\tau(E',E)$ et $\beta(E',E)$ donnant les espaces E'_σ , E'_τ et E'_β . Mais en suivant le point de vue bornologique, on peut aussi munir E' de sa bornologie canonique équicontinue introduite dans [1] ; ce qui amène à lui associer la topologie localement convexe TE' dont une base de voisinages de 0 est formée des disques équivores de E'. Comme toute partie équicontinue de E' est fortement bornée, la topologie de TE' est plus fine que celle de E'_β . Et comme toute partie équicontinue de E' est contenue dans un disque équicontinu et faiblement compact H on voit que TE' est exactement la limite inductive des espaces de Banach correspondants E'_H . Donc TE' est un espace ultrabornologique, et sa topologie est plus fine que celle de l'espace ultrabornologique $(E'_\beta)^{\approx}$ associé au dual fort E'_β.
Enfin, en rappelant que tout disque faiblement compact de E' est fortement borné (et complétant) et en associant cette remarque à la proposition 2, on obtient :

Proposition 3 : $(E'_\sigma)^{\approx} = (E'_\tau)^{\approx} = (E'_\beta)^{\approx}$

2. QUESTIONS DE TONNELAGE .

Il apparaît à l'expérience que les notions d'espace tonnelé et d'espace infratonnelé sont bien souvent insuffisantes pour décrire la complexité des situations rencontrées en analyse fonctionnelle. La notion d'espace (DF) par exemple introduite par GROTHENDIECK [5] est un premier pas conduisant à l'étude d'une classe d'espaces non nécessairement infratonnelés. On a cherché depuis, avec [4] et [6], à systématiser en introduisant différentes sortes de condition de dénombrabilité. Par ailleurs la notion d'espace de Mackey se rattache assez bien à celles d'espace tonnelé ou d'espace infratonnelé : en effet tout espace infratonnelé est espace de Mackey et E est espace de Mackey si et seulement si tout disque faiblement compact de E' est équicontinu.

Il paraît alors tout à fait intéressant d'introduire des classes encore plus larges d'espaces définis par des conditions d'absorption qui se traduisent parfaitement bien à partir des notions d'espace bornologique et ultrabornologique associés.

Résumons tout cela sous la forme d'un tableau-définitions qui rappelle les définitions des espaces tonnelés, infratonnelés et Mackey et qui donne celles des espaces *hypo-tonnelés*, *hypo-infratonnelés* et *hypo-Mackey* :

E tonnelé		**E hypo-tonnelé**
Dans E' tout disque faiblement borné est équicontinu ou $E' = BE'_\tau$	$\Rightarrow$	Dans E' tout disque équivore absorbe les parties faiblement bornées ou $TE' = (E'_\tau)^{\sim} = TBE'_\tau$
$\Downarrow$		$\Downarrow$
E infratonnelé		**E hypo-infratonnelé**
Dans E' tout disque fortement borné est équicontinu ou $E' = BE'_\beta$	$\Rightarrow$	Dans E' tout disque équivore absorbe les parties fortement bornées ou $TE' = (E'_\beta)^{\sim} = TBE'_\beta$
$\Downarrow$		$\Downarrow$
E Mackey		**E hypo-Mackey**
Dans E' tout disque faiblement compact est équicontinu	$\Rightarrow$	Dans E' tout disque équivore absorbe les disques faiblement compacts ou $TE' = (E'_\beta)^{\approx} = (E'_\tau)^{\approx}$

Remarque 1 : Il est clair que les propositions 1 et 2 pourraient justifier des écritures différentes mais équivalentes des conditions d'absorption de ce tableau. Mais il est inutile de les expliciter.

Remarque 2 : Les espaces hypo-infratonnelés figurent déjà dans [2] , sous le nom d'espaces hypotonnelés. Les notations proposées ici paraissent meilleures.

La liaison avec les conditions de dénombrabilité de [4] et [6] est immédiate :

Proposition 4 :

a) Si toute suite faiblement bornée de E' *est équicontinue alors* E *est hypotonnelé.*

b) Si toute suite fortement bornée de E' *est équicontinue alors* E *est hypo-infratonnelé. C'est en particulier le cas pour tout espace* (DF).

Preuve. Car il suffit pour qu'un disque absorbe les bornés faibles (ou les bornés forts) qu'il absorbe toute suite faiblement (ou fortement) **bornée** .

3 - LE b-BIDUAL D'UN ESPACE LOCALEMENT CONVEXE.

Un lemme bornologique. On rappelle [1] que chaque espace bornologique convexe (ebc) F possède un dual F^+, espace des formes linéaires bornées sur F, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de F. Evidemment F^+ est un elc complet. On dit que F est régulier lorsqu'il est séparé par son dual F^+. Par exemple le dual E' d'un elc séparé E, muni de sa bornologie équicontinue, est un ebc régulier dont le dual $(E')^+$ est l'espace des formes linéaires sur E' qui sont bornées sur les parties équicontinues H de E'. Il est clair que E devient alors un sous-espace topologique de $(E')^+$, et par conséquent le complété $\hat{E}$ de E (qui est d'ailleurs l'espace des formes linéaires sur E' faiblement continues sur les H) est aussi un sous-espace de $(E')^+$. On dit alors que $(E')^+$ est le *b-bidual* de E et que E est *b-réflexif* lorsque $E = (E')^+$.

Mais revenons à l'ebc régulier F. La topologie TF sur F, engendrée par les disques bornivores de F , est évidemment bornologique. Par ailleurs une forme linéaire sur F est continue pour TF si et seulement si elle est bornée sur F. Autrement dit on a l'égalité algébrique $(TF)' = F^+$. Mais on peut apporter (en se permettant l'abus de notation qui consiste à identifier un elc avec sa topologie) les précisions suivantes :

Lemme 1 : *Soit* $\mathbf{F}$ *un ebc régulier. On a alors :*

a) $TF = \tau(F,F^{+})$.

b) $(TF)' = B(F^{+})$, *où l'égalité est bornologique.*

Preuve .

a) est évident puisque TF est un elc bornologique, donc infratonnelé, donc espace de Mackey, et que $(TF)' = F^{+}$. Prouvons b) ; si H est une partie équicontinue de $(TF)'$ alors elle est contenue dans le polaire V^{o} d'un disque bornivore V de F, de sorte que V^{o} est absorbée par le polaire B^{o} de tout disque borné B de F, ce qui prouve que V^{o} est bornée dans F^{+}, et a fortiori aussi H; réciproquement si A est borné dans F^{+}, il est absorbé par le polaire B^{o} de tout borné B de F, donc A^{o} absorbe B^{oo} et aussi B ; ainsi A^{o} est un disque bornivore de F, donc un voisinage de o dans TF et A , contenu dans A^{oo}, est équicontinu dans $(TF)'$.

Applications aux elc.

Comme première application on peut donner une caractérisation simple de l'espace bornologique $\tilde{E}$ et de l'espace ultrabornologique $\tilde{\tilde{E}}$ associés à un elc séparé E.

Désignons en effet par $E^{\bullet}$ (resp : $E^{:}$) l'espace des formes linéaires sur E qui sont bornées sur les bornés de E (resp : qui sont bornés sur les disques compacts de E, ou encore sur les disques faiblement compacts, ou encore sur les disques bornés complétants). On a $E^{\bullet} = (BE)^{+}$ et $E^{:} = (B_c E)^{+}$ et l'on reconnaît, par exemple en $E^{\bullet}$, la *clôture* de E', définie dans Bourbaki, EVT IV , ex. 10 - p. 81. Mais surtout il s'agit aussi du dual $(\tilde{E})'$ et du dual $(\tilde{\tilde{E}})'$. D'où :

Proposition 5 : *Soit* E *un elc séparé. Alors* $\tilde{E} = \tau(E,E^{\bullet})$ *et* $\tilde{\tilde{E}} = \tau(E,E^{:})$.

Comme seconde application, revenons au b-bidual $(E')^{+}$ d'un elc séparé E. Le lemme 1 donne :

Théorème 1 : $TE' = \tau(E',(E')^{+})$. *En particulier la topologie de Mackey* $\tau(E',(E')^{+})$ *est ultrabornologique.*

Mais alors en rassemblant le théorème 1 et la proposition 5 , on voit que E est hypo-tonnelé si et seulement si $(E')^{+} = (E'_{T})^{\bullet}$, qu'il est hypo-infratonnelé si et seulement $(E')^{+} = (E'_{\beta})^{\bullet}$ et qu'il est hypo-Mackey si et seulement si $(E')^{+} = (E'_{\tau})^{\bullet}$. D'où :

Proposition 6 : *Pour que* E *soit hypo-tonnelé* [*resp : hypo-infratonnelé ; resp : hypo-Mackey*] *il faut et il suffit que toute forme linéaire sur* E' , *bornée sur les équicontinus, soit bornée sur les parties faiblement bornées* [*resp : sur les parties fortement bornées ; resp : sur les disques faiblement compacts*].

Relations entre b-bidual et bidual.

Toute partie H équicontinue de E' étant fortement bornée on voit que le b-bidual $(E')^{+}$ de E contient le bidual E'' . On a donc :

$$E \subset \hat{E} \subset (E')^{+} \qquad \text{et} \qquad E \subset E'' \subset (E')^{+}$$

Dans le cas général on ne peut donner de relations simples entre $\hat{E}$ et E''. Toutefois E'' se caractérise bien. C'est évidemment la réunion $\bigcup B^{oo}$ des bipolaires dans $(E')^{+}$ des disques bornés B de E. Il suit de là que $\hat{E} \cap E''$ est égal à la réunion des bipolaires dans $\hat{E}$ des disques bornés B de E, autrement dit à la réunion des adhérences dans $\hat{E}$ de ces disques bornées de E (ceci parce que le dual de $\hat{E}$ est encore E'). D'où un premier résultat, dû à ROBERT [7] :

Proposition 7 : *Pour que* E *soit quasi-complet il faut et il suffit que* $E = \hat{E} \cap E''$.

Mais maintenant il s'agit d'examiner dans quelle mesure la théorie de la b-réflexivité coïncide avec celle de la semi-réflexivité. En particulier il importe de savoir dans quelles conditions on a l'égalité (algébrique) $E'' = (E')^{+}$.

Et c'est là, que pour la première fois, les conditions «hypo» du tableau-définitions du paragraphe 2 vont intervenir. En effet l'égalité $E'' = (E')^+$ implique l'égalité topologique $TE' = \tau(E',E'')$, d'où l'on déduit que tout disque équivore de E' absorbe les parties bornées pour $\tau(E',E'')$; or ces parties bornées ne sont autres que les parties fortement bornées de E', donc E est hypo-infratonnelé ; et bien entendu $\tau(E',E'')$ est ultrabornologique. Réciproquement supposons E seulement hypo-Mackey et $\tau(E',E'')$ ultrabornologique ; alors $TE' = (E'_\beta)^{\approx}$. Mais E'_β et $\tau(E',E'')$, ayant les mêmes bornées définissent le même espace ultrabornologique associé, d'où $TE' = (E'_\beta)^{\approx} = \tau(E',E'')$, ce qui donne $E'' = (E')^+$ par dualité. En résumé on a prouvé :

Proposition 8 :

a) Si $E'' = (E')^+$ *alors* $TE' = \tau(E',E'')$, *la topologie* $\tau(E',E'')$ *est ultrabornologique et* E *est hypo-infratonnelé.*

b) Réciproquement si E *est hypo-Mackey et si* $\tau(E',E'')$ *est ultrabornologique alors* $E'' = (E')^+$.

Remarque 3. Il convient peut-être d'ajouter que l'assertion b) est satisfaite chaque fois que E est hypo-infratonnelé et que $\tau(E',E'')$ est bornologique, car alors $TE' = (E'_\beta)^{\sim} = \tau(E',E'')$, pour les mêmes raisons que précédemment.

En confrontant les propositions 7 et 8 on obtient un résultat qui généralise un théorème classique de GROTHENDIECK [5] : à savoir qu'un espace (DF) (dont le dual fort est toujours un espace de Fréchet, donc ultrabornologique) est complet dès qu'il est quasi-complet.

Proposition 9 : *Soit* E *un espace hypo-Mackey dont le dual fort* E'_β *est ultrabornologique. Alors* E *est complet dès qu'il est quasi-complet.*

Preuve. Car $E'' = (E')^+$, donc $\widehat{E} \cap E'' = \widehat{E}$, et il suffit d'appliquer la proposition 7.

Applications aux espaces (DF). Lorsque E est un espace (DF) on sait qu'il est déjà hypo-infratonnelé par la proposition 4. Mais de plus E'_β est un espace de Fréchet donc ultrabornologique. Ainsi $TE' = (E'_\beta)^{\mathfrak{v}} = E'_\beta$ et bien entendu aussi $E'' = (E')^+$.

Application aux espaces métrisables. Lorsque E est métrisable on sait d'après un théorème fin de GROTHENDIECK ([5], th. 6) que tout disque équivore de E' contient un disque équivore *fortement fermé.* Ce qui revient à dire que les tonneaux bornivores de E'_β forment une base de voisinages de 0 dans TE'. On en tire le résultat classique de GROTHENDIECK : E'_β est infratonnelé si et seulement s'il est ultrabornologique, ou encore si et seulement s'il est tonnelé, ce qui équivaut à la condition que E est distingué, c'est-à-dire que tout borné de E'', pour $\sigma(E'',E')$, est contenu dans l'adhérence faible d'un borné de E. Rassemblons tout cela dans l'énoncé suivant :

Proposition 10. *Soit* E *un elc métrisable. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $TE' = E'_\beta$ *;*

b) E'_β *est infratonnelé ;*

c) E'_β *est ultrabornologique ;*

d) E *est distingué.*

Mais la topologie de E'_β n'est peut-être pas la plus intéressante pour nous, tant que la question (qui nous paraît encore ouverte) de savoir si le dual fort d'un espace métrisable est toujours espace de Mackey n'est pas tranchée. Il vaut mieux en effet travailler avec la topologie $\tau(E',E'')$. D'après la proposition 8, et le fait que E est infratonnelé, la condition $E'' = (E')^+$ est équivalente à la condition que $\tau(E',E'')$ soit ultrabornologique. Et ces conditions sont encore équivalentes à la condition que $\tau(E',E'')$ soit infratonnelée car les tonneaux bornivores pour $\tau(E',E'')$ sont exactement les mêmes que ceux de E'_β . Finalement on a :

Proposition 11. *Soit* E *un elc métrisable. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $E'' = (E')^+$;

b) la topologie $\tau(E',E'')$ *est infratonnelée ;*

c) elle est ultrabornologique ;

d) pour la topologie $\sigma(E'',E')$, *tout borné est relativement compact.*

Preuve. Il ne suffit plus que de voir que la condition d) signifie exactement que la topologie $\tau(E',E'')$ est tonnelée.

Remarque 4. L'exemple classique de KÖTHE, repris et amélioré par GROTHENDIECK ([5] p. 88) donne le cas d'un espace de Fréchet tel que $E'' \neq (E')^+$; a fortiori E n'est pas distingué.

Application aux espaces de Schwartz. Parmi les définitions possibles d'un espace de Schwartz retenons celle-ci : un elc séparé E est dit espace de Schwartz lorsque, pour toute partie équicontinue H de E', il existe un disque équicontinu L contenant H, que l'on peut supposer faiblement compact, tel que sur H la topologie faible $\sigma(E',E)$ coïncide avec la topologie de l'espace de Banach E'_L .

Il s'ensuit bien évidemment que les parties équicontinues de E' sont faiblement métrisables. Par ailleurs tout disque équivore de E' induit sur E'_L un voisinage de 0, donc a fortiori, pour chaque disque équicontinu H, le disque $D \cap H$ est un voisinage de O faible dans H. On tire de là que toute forme linéaire sur E', bornée sur les parties équicontinues, y est même faiblement continue, de sorte que $(E')^+ = \hat{E}$. Ainsi :

Proposition 12. *Pour tout espace de Schwartz* E *on a* $(E')^+ = \hat{E}$ *et* $TE' = \tau(E',\hat{E})$.

D'où les conséquences suivantes :

Corollaire 1. *Soit* E *un espace de Schwartz. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
a) E *est quasi-complet ;*
b) E *est semi-réflexif ;*
c) E'_τ *est tonnelé.*

Preuve. a) et b) sont équivalentes car tout borné d'un espace de Schwartz est précompact. Enfin b) équivaut à c) car les polaires des disques bornés de E sont les tonneaux de E'_τ, tandis que les polaires des disques faiblement compacts forment une base de voisinages de E'_τ.

Corollaire 2. *Soit* E *un espace de Schwartz. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
a) E *est complet ;*
b) E *est b-réflexif ;*
c) E *est hypo-Mackey et* E'_τ *est ultrabornologique.*

Preuve. L'équivalence $a \Leftrightarrow b$ provient de la proposition 12. Si E est complet alors $TE' = \tau(E',E) = E'_\tau$ de sorte que E'_τ est ultrabornologique et E est même hypo-tonnelé. Réciproquement, avec c) on a $TE' = (E'_\tau)^{\hat{\tau}} = E'_\tau$, d'où $(E')^+ = E$ par dualité, ce qui donne b). On retrouve en particulier le résultat bien classique de SCHWARTZ ([8] p. 43).

Corollaire 3. *Le dual fort d'un espace de Schwartz complet est ultrabornologique.*

Preuve. Car $TE' = E'_\tau$ implique $TE' = E'_\beta$ puisque la topologie de E'_β est intermédiaire entre celles de E'_τ et TE'.

Il est maintenant utile de rassembler quelques-unes des conclusions obtenues après l'étude de ces trois classes d'espaces :

Théorème 2. *On a* $TE' = E'_\beta$ *dans chacun des trois cas suivants :*

a) E *est un espace* (DF) ;

b) E *est métrisable et distingué ;*

c) E *est espace de Schwartz complet.*

4 - ESPACES b-REFLEXIFS.

Le corollaire 1 de la proposition 12 a montré qu'un elc séparé E est semi-réflexif si et seulement si l'espace E'_τ est tonnelé. La suite a pour but d'établir un résultat analogue en remplaçant semi-réflexif par b-réflexif et tonnelé par ultrabornologique.

Mais auparavant donnons quelques propriétés des espaces b-réflexifs .

Proposition 13. *Soit* E *un espace* b-*réflexif. Alors* E *est complet, hypo-tonnelé, semi-réflexif et* $TE' = E'_\tau = E'_\beta$. *En particulier le dual fort* E'_β de E *est ultrabornologique.*

Preuve. E est évidemment complet et semi-réflexif. Le reste provient de l'égalité $TE' = \tau(E',(E')^+) = \tau(E',E)$, d'où $TE' = E'_\tau = E'_\beta$.

Pour les espaces E tels que $E'' = (E')^+$, il revient au même que E soit b-réflexif ou semi-réflexif. D'où :

Proposition 14. *Dans chacun des cas suivants* E *est* b-*réflexif dès qu'il est semi-réflexif :*

a) E *est espace* (DF) ;

b) E *est métrisable.*

Preuve. Il faut prouver b) ; mais si E est métrisable et semi-réflexif, il est évidemment distingué d'où $TE' = E'_\beta$ et $(E')^+ = E'' = E$.

Mais revenons maintenant au problème posé plus haut. Tout est basé sur les résultats des paragraphes précédents et sur le lemme :

Lemme 2. *On pose* $F = \tau(E,E') = E_\tau$. *On a alors :*

a) $(F')^+$ *est l'espace des formes linéaires sur* E' *qui sont bornées sur les disques faiblement compacts.*

b) Pour que E *soit hypo-Mackey, il faut et il suffit que l'on ait l'égalité algébrique* $(F')^+ = (E')^+$

Preuve. Déjà $F' = E'$ et les équicontinus de F' sont les parties de E' contenues dans un disque faiblement compact, d'où a). Quant à b) c'est une conséquence immédiate de a) et de la proposition 6.

Proposition 15. *Pour que* E *soit ultrabornologique il faut et il suffit qu'il soit espace de Mackey et que* $E' = E^{\cdot}$.

Preuve. On sait, avec la proposition 5, que $\tilde{E} = \tau(E,E^{\cdot})$. Donc si $E = \tilde{E}$ alors $E^{\cdot} = E'$ et $E = \tau(E,E')$. Réciproquement $\tilde{\tilde{E}} = \tau(E,E') = E$.

En remarquant que E_τ est espace de Mackey, qu'il a même dual que E et que $(E_\tau)^{\cdot} = E^{\cdot}$, on obtient encore :

Corollaire. *Pour que* E_τ *soit ultrabornologique il faut et il suffit que* $E' = E^{\cdot}$.

Finalement la proposition qui suit résume l'essentiel :

Proposition 16. *Pour que* E'_τ *soit* b-*réflexif il faut et il suffit que* E_τ *soit ultrabornologique et il suffit que* E *soit ultrabornologique.*

Preuve. Si E est ultrabornologique alors E'_τ est b-réflexif car en posant $G = E'_\tau$, on voit, avec le lemme 2, que $(G')^+ = E^{\cdot}$, d'où $(G')^+ = E' = G$. Il en résulte même que E'_τ est b-réflexif sous la condition plus faible que E_τ soit ultrabornologique, car on a encore l'égalité $E^{\bullet} = E'$ d'après le corollaire précédent. Réciproquement si E'_τ est b-réflexif alors $E_\tau = (E'_\tau)'_\tau$ est ultrabornologique d'après la proposition 13.

Une conséquence immédiate en est le théorème important suivant, énoncé dans l'introduction :

Théorème 3. *Soit* E *un espace de Mackey. Alors* E *est ultrabornologique si et seulement si* E'_τ *est b-réflexif.*

Et dans l'autre sens on a plus facilement :

Théorème 4. *Soit* E *un espace hypo-Mackey. Alors* E *est b-réflexif si et seulement si* E'_τ *est ultrabornologique.*

Preuve. Si E'_τ est ultrabornologique et si E est hypo-Mackey alors $TE' = (E'_\tau)^{\approx} = E'_\tau$, d'où $(E')^{+} = E$ par dualité.

Enfin, en rassemblant le théorème 4 et la proposition 14, et sachant qu'un espace (DF) est toujours hypo-infratonnelé, on obtient des conditions nouvelles de semi-réflexivité.

Théorème 5.

a) Pour qu'un espace (DF) E *soit semi-réflexif, il faut et il suffit que* E'_τ *soit ultrabornologique.*

b) Pour qu'un espace métrisable E *soit réflexif, il faut et il suffit que* E'_τ *soit ultrabornologique.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. BUCHWALTER *Espaces vectoriels bornologiques.* Pub. Dép. Math. Lyon 2-1, 1965, p. 1-53.

[2] H. BUCHWALTER *Topologies ,bornologies et compactologies.* Thèse Université Lyon 1968, p. 1-144.

[3] H. BUCHWALTER *Sur le théorème de Nachbin-Shirota.* Comptes-rendus, Série A, 273, 1971, p. 145-147.

[4] M. DE WILDE-C. HOUET *On increasing sequences of absolutely convex sets in locally convex spaces.* Math. Ann. (à paraître).

[5] A. GROTHENDIECK *Sur les espaces* (F) *et* (DF) . Summa bras. Math. 3-6, 1954, p. 57-122.

[6] T. HUSAIN *Two new classes of locally convex spaces.* Math. ann. 166, 1966, p. 289-299.

[7] A. ROBERT *Quelques questions d'espaces vectoriels topologiques.* Comment. Math. Helvet. 42-4, 1967, p. 314-342.

[8] L. SCHWARTZ *Théorie des distributions à valeurs vectorielles.* Ann. Inst. Fourier, VII, 1959, p. 1-141.

Manuscrit remis le 12 novembre 1971

H. BUCHWALTER
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard - 69 - VILLEURBANNE