Maurice Pouzet

Sur des conjectures de R. Fraisse

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1970, tome 7, fascicule 3
, p. 55-104
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1970__7_3_55_0>

SUR DES CONJECTURES DE R. FRAISSE

Maurice POUZET

INTRODUCTION.

Pour la comparaison des chaînes (une chaîne ou ensemble totalement ordonné est dite inférieure à une autre chaîne si elle est isomorphe à une partie de cette dernière), R.FRAISSE conjecturait dès 1948 que dans la classe des chaînes dispersées (chaînes ne contenant aucune partie isomorphe à la chaîne des rationnels) :

(i) Toute suite strictement décroissante est finie ;

(ii) Tout ensemble de chaînes deux à deux incomparables est fini ;

(iii) Toute chaîne à une partition en un nombre fini d'intervalles, chacun étant une chaîne indécomposable (une chaîne est indécomposable si pour toute partition en deux intervalles, elle est inférieure à l'un d'eux).

Ces hypothèses ont été récemment prouvées par Messieurs E. COROMINAS et R. LAVER ; leurs méthodes sont très différentes, mais aucune n'est banale.

Ayant montré que ces trois hypothèses sont équivalentes (Journées de Logique, Marseille 1968), ceci par des techniques élémentaires ne faisant évidemment intervenir en rien les résultats de E. COROMINAS et R. LAVER, nous avons voulu mettre en évidence l'indépendance d'une telle équivalence avec l'exactitude de ces hypothèses.

Pour cela nous considérons une classe préordonnée arbitraire et toutes les chaînes dont les éléments sont étiquetés par des éléments de cette classe. Une chaîne ainsi étiquetée est alors inférieure à une autre chaîne étiquetée lorsqu'elle est isomorphe à une restriction de l'autre, l'étiquette de n'importe lequel de ses éléments étant inférieure à celle de l'élément correspondant. Nous montrons que l'équivalence entre les trois propriétés citées subsiste pour les chaînes dispersées ou bien ordonnées ainsi étiquetées. Bien entendu, une de ces propriétés peut être fausse, mais alors toutes les autres le sont.

Ce résultat nous a permis de montrer d'une part que la notion de prémeilleur ordre introduite par NASH-WILLIAMS (1965) et utilisée depuis par R. LAVER dans sa preuve des conjectures de R. FRAISSE, est identique à celle de P.JULLIEN (1969), d'autre part qu'un prémeilleur ordre n'est autre qu'un ensemble préordonné pour lequel la classe des ordinaux étiquetés par cet ensemble vérifie l'une quelconque de ces trois propriétés.

Dans cet article nous exposons essentiellement l'équivalence entre les trois propriétés ; un article concernant les prémeilleur-ordres paraîtra prochainement.

Ces résultats ont été annoncés dans une note aux Comptes Rendus et exposés dans le premier chapitre de notre thèse de 3° cycle ; ils ont été repris dans une forme différente par R. FRAISSE (Abritement entre "relations et spécialement entre chaînes" 1970).

I - DEFINITIONS - NOTATIONS -

I-1- Ensembles ordonnés.

I-1.1 Dans ce qui suit, un *graphe* est une classe dont les éléments sont des couples.

Pour un graphe f, on note Domf ou Df, resp. Imf, la classe ayant pour éléments les x pour lesquels il existe un y tel que $(x,y) \in f$, resp. $(y,x) \in f$; et pour toute classe X, $f \mid X$ désigne la classe des couples (x,y) tels que $x \in X$ et $(x,y) \in f$. On utilisera, sans préciser davantage, les notions de graphe opposé, de graphe symétrique, de composition des graphes, etc., avec les notations de BOURBAKI{1}.

I-1.2 Une *fonction* est un graphe f tel que $(x,y) \in f$ et $(x,z) \in f$ implique $y = z$; on note alors $y = f(x)$ au lieu $(x,y) \in f$. f est une *fonction de* A *vers* B, resp. une *application de* A *dans* B. Si Domf $\subseteq$ A, resp. Domf = A, et Imf $\subseteq$ B. Ceci précisé, nous utiliserons, avec la même signification, les notions usuelles sur les applications.

I-1.3 Une *classe préordonnée*, resp. *ordonnée*, est la donnée d'une classe E et d'un *graphe de préordre*, resp. *d'ordre*, $\mathcal{E}$ sur E, i.e. $\mathcal{E}$ est une partie de ExE telle que la relation $(x,y) \in \mathcal{E}$ soit réflexive (i.e. $\Delta_E \subseteq \mathcal{E}$) et transitive (i.e. $\mathcal{E}.\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}$) resp... et de plus anti-

symétrique (i.e. $\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^{-1} \subseteq \Delta_E$). $\mathcal{E}$ est appelé (pré) *ordre* et $\langle E,\mathcal{E}\rangle$ désigne la classe (pré)*ordonnée*. Si E est un ensemble, l'ensemble préordonné est alors le *couple* $(E,\mathcal{E})$. Si $\mathcal{E} \cup \mathcal{E}^{-1} = E \times E$, $\mathcal{E}$ est un (pré)*ordre total* et $\langle E,\mathcal{E}\rangle$ une classe *totalement* (pré)*ordonnée* ou (pré)*chaîne*.
Si $\mathcal{E} = \Delta_E$, c'est *l'ordre discret* et $\langle E,\Delta_E\rangle$ est une *classe libre* ou *antichaîne*. Enfin si $A \subseteq E$, on note $\mathcal{E}_A$ au lieu de $\mathcal{E} \cap A \times A$; c'est le (pré)*ordre induit* sur A par $\mathcal{E}$. Si $\langle E,\mathcal{E}\rangle$ et $\langle E',\mathcal{E}'\rangle$ sont deux classes (pré)ordonnées et f une application de E dans E', on dit que f est une application croissante de $\langle E,\mathcal{E}\rangle$ dans $\langle E',\mathcal{E}'\rangle$ si :

$$\forall x\ \forall y\ ((x,y) \in \mathcal{E} \rightarrow (f(x),\ f(y)) \in \mathcal{E}')$$

Autant que possible, on désigne une classe (pré) ordonnée par une seule lettre :
Si, par exemple, E' désigne $\langle E,\mathcal{E}\rangle$, alors E'^{-1} désigne $\langle E,\mathcal{E}^{-1}\rangle$ et $x \in E'$ signifie $x \in E$. Si aucune confusion n'est à craindre, on note E au lieu de $\langle E,\mathcal{E}\rangle$; $x \leqslant y$, lu x *inférieur* à y, pour $(x,y) \in \mathcal{E}$; $x \nleqslant y$ sa négation ; $x < y$, lu x *strictement inférieur* à y, pour $x \leqslant y$ et $y \nleqslant x$ et enfin $x \mathbin{//} y$, lu x *incomparable* à y, pour $x \nleqslant y$ et $y \nleqslant x$.

I-1.4 La classe des ensembles ordonnés est notée $\mathcal{O}$; elle est érigée en catégorie en prenant pour morphismes les applications croissantes.

Un *monomorphisme fort* dans cette catégorie {4} est alors une application f de X dans Y, éléments de $\mathcal{O}$ telle que :
$\forall x \forall y \ (x \in X \wedge y \in X \wedge x \leq y \leftrightarrow f(x) \leq f(y))$ i.e f est un isomorphisme de X sur son image ; aussi, au lieu de monomorphisme fort, on dit que f est un *isomorphisme* de X *dans* Y.
En accord avec R. FRAISSE {6}, $\mathcal{O}$ est préordonnée par la relation : "*il existe un isomorphisme de X dans Y, éléments de* $\mathcal{O}$." qu'on note $X \leq Y$. La relation d'équivalence associée à ce préordre s'appelle *équimorphie*.

Si deux ensembles ordonnés sont *équimorphes*, resp. *isomorphes* ont dit qu'ils ont même *genre*, resp. même *type d'ordre*. De la même façon que KURATOWSKI-MOSTOWSKI {11} page 86, on appelle *genre*, resp. *type d'ordre* de l'ensemble ordonné X, un objet noté $\gamma(X)$, resp. $\tau(X)$ tel que X équimorphe à Y, resp. X, isomorphe à Y, équivaut à $\gamma(X) = \gamma(Y)$, resp. $\tau(X) = \tau(Y)$. La classe des genres, resp. des types, d'ordres est notée Γ, resp. τ ; elle est ordonnée, resp. préordonnée, par : $\gamma(X) \leq \gamma(Y)$, resp. $\tau(X) \leq \tau(Y)$, si $X \leq Y$. Les genres, comme les types d'ordres seront désignés par des lettres, α, β...
Si α est le genre ou le type, d'ordre de X, alors α^* est le genre ou le type d'ordre de X^{-1}.

I-1.5 Dans la classe des *ensembles libres*, comme dans celle des *ensembles* bien ordonnés, l'équimorphie coïncide avec l'isomorphie ; on peut donc considérer les *cardinaux*, ou les *ordinaux*, aussi bien comme genre que comme types d'ordres des ensembles libres ou des ensembles bien ordonnés. La classe des cardinaux Card, et la classe des ordinaux B sont alors bien ordonnées.

L'ensemble des ordinaux strictement inférieurs à l'ordinal μ, noté par exemple O_μ est bien ordonné et de type μ, il sera souvent commode de l'identifier à μ (cela revient à la définition des ordinaux par VON NEUMANN). Si μ est le plus petit ordinal strictement supérieur à un certain ordinal, il est dit *isolé, non isolé* ou *limite* sinon ; si c'est le plus petit des types de bon ordres ayant même cardinal, il est alors *initial*. Rappelons qu'une partie C d'un ensemble ordonné X est *cofinale dans* X si tout élément de X est majoré par un élément de C ; *le type cofinal* d'une chaîne X, noté cf(X) est le plus petit ordinal pour lequel il existe une partie de ce type, cofinale dans X. (On définit dualement les parties *coinitiales* et le *type coinitial* d'une chaîne X, noté ci(X). Un ordinal est *régulier* s'il est égal à son type cofinal et *singulier* sinon. Enfin, on dit que μ est un *antiordinal* si μ^* est un ordinal.

Dans la suite les notations concernant les cardinaux et ordinaux, sont celles de KURATOWSKI-MOSTOWSKI {11}. Rappelons que pour tout ensemble E on note $\overline{\overline{E}}$ son cardinal (au lieu de $\gamma((E,\Delta_E))$) ; $\aleph_0$ et ω sont respectivement le cardinal et le type de bon ordre de l'ensemble des entiers, lesquels sont identifiés aux ordinaux, ainsi 0 et 1 sont respectivement le genre de la chaîne vide et le genre des chaînes à un élément.

I-1.6 Si $(X_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ est une famille d'ensembles ordonnés *deux à deux disjoints*, indexée par l'ensemble ordonné $\mathfrak{I}$, on appelle $\mathfrak{I}$-somme lexicographique des X_i notée $\sum_{i\in\mathfrak{I}} X_i$, la réunion des X_i, dont les éléments, *désignés* par les couples (i,x) pour $i \in \mathfrak{I}$ et $x \in X_i$, seront ordonnés par la règle de la première différence : i.e. $(i,x) \leq (j,y)$ si "$i < j$ dans $\mathfrak{I}$ ou $i = j$ et $x \leq y$ dans X_i".

Si $\mathfrak{I}$ est l'ordinal μ, resp. l'antiordinal μ^*, la μ-somme, resp. la μ^*-somme du X_i est notée $\sum_{i<\mu} X_i$, resp. $\sum^*_{i<\mu} X_i$, et on dit somme ordinale, resp. somme antiordinale. si c'est l'ordinal fini n on dit somme finie notée $X_0 + X_1 + \dots X_{n-1}$.

Avec notre définition, cette "opération" n'est pas toujours définie (elle engendre néanmoins *toutes* les chaînes dispersées voir II-1.2). En général, on considère la réunion *disjointe* de la famille X_i, les éléments étant alors exactement les couples (i,x) ordonnés d'après la règle précédente ; ceci permettant, lorsque tous les X_i sont égaux à un même X de retrouver le produit ordinal, noté dans ce cas par $X.\mathcal{I}$.

Ce distinguo est sans intérêt dès qu'il s'agit de types ou de genres d'ordres, la somme lexicographique étant "compatible" avec le préordre de R. FRAISSE on peut la définir sur *toute* la classe des types comme des genres d'ordre. Par exemple, si $(\alpha_i)_{i\in\mathcal{I}}$ est une famille de genres d'ordres indexée par l'ensemble ordonné $\mathcal{I}$, telle que $\gamma(A_i)=\alpha_i$, alors $\sum_{i\in\mathcal{I}}\alpha_i$ est par définition égale à $\gamma(\sum_{i\in\mathcal{I}}A_i)$, (les A_i pouvant être pris tous disjoints de manière évidente).

Les propriétés de la classe des ensembles ordonnés, relativement au préordre de FRAISSE et à la somme lexicographique, se généralisent à celle des *A-ordres*.

I - 2 A-ORDRES -

A est une classe préordonnée fixée dans ce qui suit.

I-2.1 On appelle *A-ordre*, tout couple (X,f) dans lequel f est une application de l'ensemble ordonné X dans A. Si k désigne le A-ordre (X,f), X est son *domaine*, noté Dk, pour $x\in X$ $k(x)$ désigne $f(x)$ et par suite Imk désigne Imf ; enfin k^{-1} est le A-ordre (X^{-1}, f).

Autant que possible on identifie (X,f) avec f ; en particulier si X est un certain O_μ, car il est alors déterminé par f. Dans ce cas on dit μ-*séquence* ou *séquence* au lieu de A-ordre, que l'on note $(f(i))_{i<\mu}$.

I-2.2 Si C est une classe d'ensemble ordonnés, C. A est la classe des A-ordres dont le domaine appartient à C. Si les éléments sont des chaînes resp. des chaînes bien ordonnés, etc... ceux de C . A sont des *A-chaînes*, resp. des *A-chaînes bien ordonnées*, etc ... Par contre, si les éléments de C sont des ordinaux (ou plutôt des O_μ, pour μ ordinal) ceux de C. A sont appelés *séquences*. Si C est érigée en catégorie, il en est de même de C . A, un morphisme de k dans k', éléments de C . A étant un morphisme h de Dk dans Dk' tel que $i \in Dk$ implique $k(i) \leqslant k'.h(i)$. C . A est préordonnée et on note $k \leqslant k'$ pour "Il existe un isomorphisme h de Dk sur une partie de k' appartenant à C tel que $i \in Dk$ implique $k(i) \leqslant k'.h(i)$.

De la même façon que dans $\mathcal{O}$, on définit dans C . A les notions de genres et types d'ordres.

I-2.3 $\mathcal{O}$. A est préordonnée au moyen des isomorphismes définis dans I-1.4. Les sous-classes considérées dans la suite sont munies du préordre induit ; il en est ainsi de la classe des A-chaînes dispersées $\mathcal{D}$. A (voir II), des A-chaînes bien ordonnées B . A, des A-chaînes bien ordonnées dénombrables ω_1 A ou des A-chaînes finies ω . A, comme de celles des séquences B . A, des séquences dénombrables ω_1. A ou des séquences finies, encore appelées complexes, ω . A Par exemple ω . A est préordonné par :

$$(x_i)_{i \leq n} \leqslant (y_j)_{j < m}$$

"si il existe un isomorphisme h de $[0, n[$ dans $[0, m[$ tel que $x_i \leqslant y_{h(j)}$ pour $i < n$".

Comme dans I-1.4 $\gamma(k)$ est le genre du A-ordre k, les lettres α, β, ... désignent des genres de A-ordres. Si α est le genre de k alors α^*est le genre de k^{-1}; 0 est le A-ordre ou son genre de domaine vide.

Tout A-ordre dont le domaine a un seul élément est une *unité* ; 1_x est le genre des unités dont l'image dans A est x (Remarquer que $1x = 1y$ équivaut à $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$).

I-2.4 $\mathcal{O}$ .A admet des produits directs si et seulement si tout sous-ensemble de A admet une borne inférieure (pour l'ordre quotient); en particulier A est complet dès que c'est un ensemble ordonné. Par contre, il admet toujours des sommes directes, ce qui permet de définir *la somme lexicographique* :

A toute famille $(k_i)_{i \in J}$ de A-ordres indexée par l'ensemble ordonné J, on associe la J-somme lexicographique des k_i, notée $\sum_{i \in J} k_i$, ayant pour domaine la J-somme lexicographique dans $\mathcal{O}$ des Dk_i, $\sum_{i \in J} Dki$ et comme application $\coprod_{i \in J} k_i$, qui à $x \in Dk_i$ associe $k_i(x)$. Les définitions concernant la somme ordinale ou antiordinale la somme lexicographique de genres etc... seront analogues à celles du I-1.6.

Il est clair que $\mathcal{O}$ est un cas particulier de $\mathcal{O} . A$; les propriétés de la somme lexicographique dans $\mathcal{O} . A$ sont semblables à celles définie dans $\mathcal{O}$, les unités jouant le même rôle que les chaînes à un élément. En fait nous n'aurons besoin que des propriétés de la somme ordinale et antiordinale on les trouvera en {15} sous forme d'une "axiomatique" définissant ces opérations.

I - 3 - INDECOMPOSABILITE -

I-3.1 On dit qu'une A-chaîne k est :

a) - *Indécomposable*, si $k = k_1 + k_2$ implique $k \leq k_1$ ou $k \leq k_2$.

b) - *Strictement indécomposable à droite* si $k = k_1 + k_2$ et $k_2 \neq 0$ implique $k_1 < k$ et $k \leq k_2$.

c) - *Strictement indécomposable à gauche* si k^{-1} l'est à droite.

Ces notions sont compatibles avec celle de genre d'ordre, i.e. si k et k' ont même genre et k indécomposable, resp. strictement indécomposable à droite - ou à gauche, alors k' aussi ; on les définit donc pour les genres. On vérifie facilement qu'un genre α est indécomposable si $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ implique $\alpha = \alpha_1$ ou $\alpha = \alpha_2$ et strictement indécomposable à droite, par exemple, si $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ implique $\alpha = \alpha_2$, ou $\alpha_2 = 0$ la condition $\alpha_1 < \alpha$ étant alors satisfaite, aussi on dit plus simplement que α est indécomposable à droite.

Remarquons que si k vérifie b et diffère de 0 et des unités pour lesquelles a, b, c sont satisfaits, alors il ne vérifie pas c ; par suite, dès qu'un A-ordre k est isomorphe à k^{-1}, il ne vérifie ni b ni c, par exemple l'ensemble des rationnels $\mathcal{Q}$.

I-3.2 Soit $(k_i)_{i<\mu}$ une famille de A-chaînes indexées par l'ordinal *régulier* μ.

On dit qu'une telle famille est *quasi monotone*, (en abrégé : q.m.) si elle vérifie :

$\forall i \ \forall j \ \exists \ell \ (i < j < \mu \rightarrow j \leq \ell < \mu$ et $k_i \leq k_\ell)$

ce qui revient à dire que pour $i < \mu$, l'ensemble des j tels que $k_i \leq k_j$ est de type μ.

$\sum_{i<\mu} k_i$ et $\sum^*_{i<\mu} k_i$ sont alors des *sommes ordinales* et *antiordinales quasi-monotones régulières*. On montre aisément qu'elles sont *indécomposables*. Notons que si $(k_i)_{i<\mu}$ est artinien d'incomparabilité finie (voir I-4.3), alors il existe un ordinal δ tel que $\delta < \mu$ et la famille $(k_i)_{\delta < i < \mu}$ est q.m.

Remarque : Soit $(k_i)_{i \in K}$ une famille de A-chaînes indexées par le cardinal *régulier* K, telle que pour $i \in K$, l'ensemble des $j \in K$ pour lesquels $k_i < k_j$ est le cardinal K ; alors pour tout bon ordre $\mathcal{K}$ de type régulier μ sur K, la μ $(K,\mathcal{K})$ somme ordinale des k_i est quasi-monotone et *ne dépend que de* μ (i.e. pour tout autre bon ordre $\mathcal{K}'$ de type μ sur K, les $(K, \mathcal{K}')$ et $(K, \mathcal{K})$ sommes ordinales des k_i sont équimorphes).

I-3.3. Une classe de A-ordres C, est *stable par sommes* :

a) - *finies* ;

b) - *ordinales et antiordinales* ;

c) - *ordinales et antiordinales quasi-monotones régulières* ;

si elle contient toutes les sommes

- finies
- ordinales et antiordinales
- ordinales et antiordinales quasi-monotones régulières d'éléments de C.

Pour toute classe X, on peut construire effectivement (par induction dans les deux derniers cas) la plus petite classe contenant X, stable pour l'une de ces propriétés.

I - 4 - CLASSES ARTINIENNES D'INCOMPARABILITE FINIE -

On dit qu'une classe préordonnée X est :

I-4.1 *Artinienne* :

si toute suite strictement décroissante d'éléments de X est finie (i.e. Il n'existe pas d'application f de ω dans X telle que $i < j < \omega$ implique $f(j) < f(i)$.

I-4.2 *D'incomparabilité finie* (ou abrégé i.f.)

Si elle ne contient pas d'ensemble infini dont les éléments sont deux à deux incomparables.

I-4.3 *Artinienne d'incomparabilité finie* (en abrégé a.i.f.)

Si elle vérifie les deux conditions ci-dessus.

Il revient alors au même de dire que pour toute application f de ω dans X, il existe i et j avec $i < j < \omega$ et $f(i) < f(j)$, ou encore, il existe une partie infinie de ω telle que la restriction de f à cette partie est croissante.

II - CHAINES et A-CHAINES DISPERSEES -

II - 1

1 - *Définitions* : - Une chaîne X est *dense* si elle vérifie :

$\forall x \ \forall y \ \exists z \ (x \in X, y \in X \text{ et } x < y \rightarrow z \in X \wedge x < z \wedge z < y)$

i.e. Tout intervalle ouvert déterminé par deux points distincts de X n'est pas vide.

Ainsi la chaîne des rationnels $\mathbb{Q}$ est dense.

- Une chaîne est *dispersée*, si elle ne contient aucune sous-chaîne dense pour l'ordre induit.

Par suite, une chaîne dispersée X ne contient pas de partie isomorphe à $\mathbb{Q}$ (i.e. $\mathbb{Q} < X$) ; la réciproque est vraie moyennant l'axiome du choix.

Les principales propriétés des chaînes dispersées sont exposées dans {2}, notons que si X est dispersé et $Y \leq X$ alors Y et X^{-1} sont dispersés, par suite si X et X' sont isomorphes et X dispersés, X' est aussi dispersé.

Un *genre*, ou un *type d'ordre dispersé* est alors le genre, ou le type, d'ordre d'une chaîne dispersée. En outre, si $(X_i)_{i \in Y}$ est une famille de chaînes dispersées indexée par la chaîne dispersée Y, $\sum_{i \in Y} X_i$ est encore une chaîne dispersée ;

donc une somme lexicographique de genres d'ordres dispersés indexée par une chaîne dispersée est un genre d'ordre dispersé.

En accord avec I-2 une *A-chaîne dispersée* est un A-ordre dont le domaine est une chaîne dispersée. Si $\mathcal{D}$ est la classe des chaînes dispersées, $\mathcal{D}$. A est donc la classe des A-chaînes dispersées ; elle est caractérisée par :

II- 1.2 *Proposition* : {Moyennant l'axiome du choix} La plus petite classe de A-ordre, stable par sommes ordinales et antiordinales, contenant 0 et les unités, est la classe des A-chaînes dispersées.

Ou encore :

- 1 - 0 et les unités sont des A-chaînes dispersées.
- 2 - Si $(k_i)_{i<\mu}$ est une famille de A-chaînes dispersées indexée par l'ordinal μ, alors $\sum_{i<\mu} k_i$ et $\sum_{i<\mu} k_i$ sont des A-chaînes dispersées.
- 3 - Toute A-chaîne dispersée est obtenue à partir de - 1 - et - 2 -.

Preuve : Elle est analogue à celle du théorème 4-a- de A. GLEYZAL {8}.

La plus petite classe S de A-ordres stable par sommes ordinales et antiordinales, contenant 0 et les unités, est évidemment contenue dans $\mathcal{D}$. A. Pour une A-chaîne (X,f), disons que les éléments x et y de X sont équivalents si pour toute section moyenne(*) I contenue dans l'intervalle défini par x et y, $(I, f|_I)$ S ; cela définit une relation d'équivalence sur X, et toute classe d'équivalence C est une section moyenne de X telle que $(C, f|_C)$ S. (X,f) est alors la somme lexicographique de ces $(C, f|_C)$ indexée par un ensemble dense. Par suite, dès que X est dispersé, il existe une seule classe Q.E.D. .

Remarque : Nous ne savons pas obtenir ce résultat sans l'axiome du choix.

Ce résultat est encore valable pour les genres ou les types d'ordres des A-chaînes dispersées. Si A est réduit à un élément, on retrouve la caractérisation classique des chaînes dispersées.

(*) : Toute partie I de l'ensemble ordonné X pour laquelle, dès que les éléments y et $x \leq y$ appartiennent, il en est de même de tout élément z tel que $x \leq z \leq y$, est appelée *section moyenne*.

II-1.3 *Proposition* : {Moyennant l'axiome du choix}Toute A-chaîne dispersée indécomposable est strictement indécomposable, à droite, ou à gauche.

Preuve : Il suffit de remarquer que cette propriété est vraie pour les chaînes dispersées P. JULLIEN {10} p. 58 Théorème 3.3.

II-1.4 *Corollaire* : Toute somme ordinale, -resp. anti-ordinale, quasi monotone régulière de A-chaînes dispersées est strictement indécomposable à droite, (resp. à gauche).

Comme aucune confusion n'est à craindre, au lieu de dire qu'une A-chaîne est strictement indécomposable, à droite, -resp. à gauche-, on dit qu'elle est *droite* -resp. *gauche*-.

Ainsi, dans la classe des types d'ordres, 0 et 1 sont à la fois drois et gauches ; ω et $(\omega+\overset{*}{\omega})\omega$ sont droits ;

ω^* et $(\omega+\omega)^{*}\omega$ sont gauches.

II-2 Nous allons maintenant énoncer quelques propriétés des A-chaînes dispersées ou bien ordonnées, en relation avec des conjonctures de R. FRAISSE {6} sur les chaînes dispersées.

Le résultat essentiel est le suivant :

II-2.1 *Théorème* :

Dans la classe des A-chaînes et des genres des A-chaînes :

- bien ordonnées ;
- bien ordonnées dénombrables ;
- dispersées ;
- dispersées dénombrables ;

Il y a équivalence entre :

(i) - Toute suite strictement décroissante est finie ;

(ii) - Toute famille d'éléments deux à deux incomparables est finie ;

(iii) - Tout élément est une somme finie d'indécomposables ;

(iv) - Tout élément différent de 0 est de la forme $k_1 + \ell$ avec ℓ indécomposable et k_1 strictement inférieur à $k_1 + \ell$;

(v) - Tout indécomposable, on son opposé, différent de 0 et des unités est une somme ordinale quasi monotone régulière d'indécomposables strictement inférieurs.

II-2.2 *Remarques* :

a - Si A est réduit à un élément, il s'agit pratiquement, soit des chaînes bien ordonnées pour lesquelles toutes ces propositions sont vraies, soit des chaînes dispersées ; (i), (ii), (iii) constituent alors *les conjectures de FRAISSE* {6}, elles sont donc équivalentes.

b - Primitivement, nous avons prouvé, l'équivalence entre les trois premières propositions dans la classe des chaînes dispersées, cela nous paraissant préalable à toute autre étude de ces conjectures ; nous avons été amené à ajouter les deux suivantes quand s'est posée la question de savoir si la caractérisation des *extensibles* (ou SZPILRAJNIENS) par R. BONNET {5} nécessitait ou non de telles conjectures. Son extension aux A-chaînes dispersées nous a permis de dégager le caractère de ces équivalences, des travaux de R. LAVER et E. COROMINAS.

c - P. JULLIEN ayant introduit dans sa thèse {10} la notion de *prémeilleur ordre* à partir des A-chaînes bien ordonnées vérifie (iv), nous avons étendu les équivalences à cette dernière classe. Finalement par un moyen détourné, exposé dans la dernière partie de cet article, ayant constaté que la notion de prémeilleur-ordre ne faisait appel qu'aux propriétés des A-chaînes bien ordonnées dénombrables, nous avons prouvé que les équivalences subsistaient encore dans ce cas, (et montré que si une de ces propositions est vraie pour les A-chaînes bien ordonnées dénombrables, elle l'est encore pour les A-chaînes bien ordonnée, mais la raison d'une telle propriété n'est pas élucidée à ce jour).

d - La traduction de ces équivalences dans la classe des genres est d'autant plus naturelle que la notion de genre est la mieux adaptée à cette sorte de problème, elle se révèle en outre d'un maniement plus commode, par exemple pour l'étude des prémeilleurs-ordres.

II-3.1 Nous avons été conduit à concevoir une démonstration englobant le plus grand nombre de cas possible et obligé de distinguer nettement le cas des A-chaînes bien ordonnées de celui des A-chaînes dispersées. Heureusement cette démonstration rend compte aussi bien des A-chaînes dénombrables que des A-chaînes quelconques, en outre, les quatre premières propositions ne font intervenir en fait que la notion de genre, seule la dernière nécessite une distinction entre genre et chaîne.

2- Le principe de cette démonstration consiste à se ramener aux propriétés des indécomposables et à raisonner par l'absurde en construisant des contre exemples. Pour cela il est commode de noter par C l'une des classes B . A, $\mathcal{D}$. A, etc. du théorème ; $\mathcal{I}$ l'ensemble des indécomposables de C;

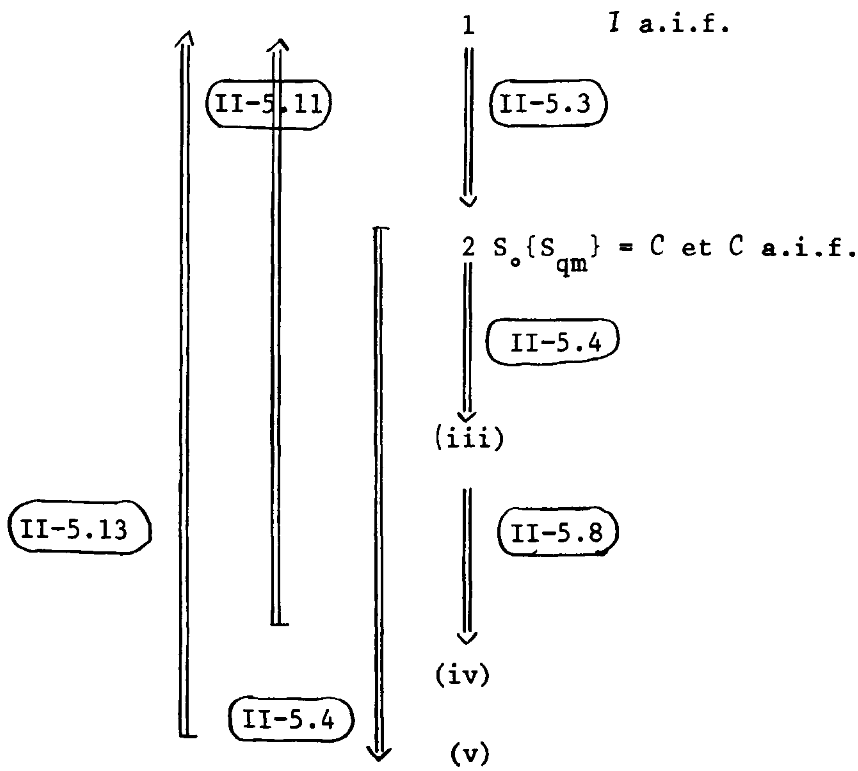
Sqm la plus petite classe contenant 0 et les unités et stable par somme bien ordonnées, par sommes bien ordonnées et antibien-ordonnées, etc.. ; et pour toute classe X contenue dans C, S_o {X} la classe des sommes finies d'éléments de X.

On suit alors le plan schématisé ainsi :

(Les chiffres entourés indiquent la référence des démonstrations correspondant aux flèches).

Pour tous les cas :

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :



Pour la classe des A-chaînes bien ordonnées ; bien ordonnées dénombrables et genres de ces A-chaînes :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{i} \arrow[dr, Rightarrow, "\text{II-4.2}"] & \\ & \text{1- } (I \text{ a.i.f.}) \\ \mathrm{ii} \arrow[ur, Rightarrow, "\text{II-4.3}"'] & \end{tikzcd}$$

Pour la classe des A-chaînes dispersées ; dispersées dénombrables et genres de ces A-chaînes :

$$\begin{tikzcd} \text{a - } I \text{ i.f.} \arrow[d, Leftrightarrow, "\text{II-4.4}"] \\ \text{b - } I \text{ artinien} \end{tikzcd}$$

Ces résultats admis, on vérifie sans peine l'équivalence entre les cinq propositions du théorème II-2.1.

Faisons maintenant ces démonstrations :

II - 4 - PROPRIETES PARTICULIERES -

II - 4.1 *Lemme* : Soit $\mathcal{E}$ une classe de A-chaînes contenant toutes les sommes finies et les ω-sommes de ses éléments. Si L est un ensemble dénombrable de A-chaînes indécomposables de $\mathcal{E}$, deux à deux incomparables ; $\mathcal{E}$ contient une partie isomorphe à l'ensemble des parties infinies de L.

Preuve : L étant dénombrable, soit $\mathcal{L}$ un bon ordre sur L tel que $(L,\mathcal{L})$ est de type ω ; à toute partie X de L associons $\sum\limits_{k \in (X,\mathcal{L}_X)} k$

qui appartient naturellement à $\mathcal{E}$ car celui-ci contient les sommes finies et ω-sommes de ses éléments.

L'application ainsi définie, que nous noterons σ, est évidemment croissante de $\mathcal{P}(L)$ dans $\mathcal{E}$. Si $\sigma(X) \leqslant \sigma(Y)$ et X infinie, il est clair que $X \subseteq Y$ car tout élément $k \in X$ sera suivi dans $\sigma(X)$ d'un autre élément de X et par suite k sera inférieur à une somme finie d'éléments de Y et donc à un seul élément qui ne peut être que lui-même.

L étant dénombrable, $\mathcal{P}(L)$ contient des parties libres non dénombrables et des chaînes dont le type est celui des nombres réels formés des parties infinies de L.

Par suite :

II - 4.2 *Proposition* :

Dans les conditions du lemme, $\mathcal{E}$ contient des parties libres non dénombrables et des δ suites strictement décroissantes pour tout ordinal δ dénombrable.

Si $\mathcal{E}$ est artinien alors l'ensemble des indécomposables de $\mathcal{E}$ est a.i.f.

En particulier i) $\rightarrow$ 1

Nous n'avons pu obtenir un résultat similaire en supposant l'existence d'une suite infinie strictement décroissante d'indécomposables.

II - 4.3 *Proposition* : Si la classe des A-chaînes bien ordonnées (bien ordonnées dénombrables , des genres de ces A-chaînes) est d'incomparabilité finie, alors la classe de ses indécomposables est a.i.f. (i.e. (ii) $\rightarrow$ 1).

Preuve : Soit $(k_i)_{i<\omega}$ une suite strictement décroissante de A-chaînes bien ordonnées indécomposables. La classe des ordinaux étant bien ordonnées, on peut supposer que les domaines sont tous équimorphes (au moins à partir d'un certain rang, auquel cas on élimine les termes de rang précédent et on renumérote la suite) alors la famille des $k_i . i$ pour $i<\omega$ est libre.

en effet si $k_i . i < k_j . j$ on en déduit $k_i < k_j$ d'où $j < i$ et par suite Dk_i étant équimorphe à Dk_j : $Dk_i . i < Dk_j . j$ ce qui entraîne $i < j$ d'où $i = j$ - i.e. la famille est libre.

Cette démonstration est encore valable pour les A-chaînes bien ordonnées dénombrables et les genres de ces A-chaînes d'où le résultat.

Remarque : S'il existe une suite $(k_i)_{i<\omega}$ strictement décroissante de A-chaînes indécomposables dont les domaines ne sont pas bien ordonnés, alors la famille des $k_i+\omega_{\xi+i}$ pour $i < \omega$, dans laquelle ω_ξ est le premier ordinal régulier non inférieur à k_o, est libre. On peut donc montrer (ii) $\rightarrow$ 1 pour les A-chaînes dispersées, mais en fait on a mieux :

II - 4.4. *Proposition* :

Dans la classe des :

- A chaînes dispersées ;
- A chaînes dénombrables ;
- genre de ces A-chaînes.

Il y a équivalence entre :

- a : I i.f.
- b : I artinien.

Preuve : Il est clair que si une telle propriété est vraie pour les deux premières classes, elle l'est encore pour leurs classes de genres respectives, aussi nous considérons seulement celle des A-chaînes.

$\neg b \to \neg a$: soit $(k_i)_{i<\omega}$ une suite strictement décroissante d'éléments de I que nous supposerons tous gauches (Ils le sont, au moins à partir d'un certain rang, sinon on considère $(k_i^{-1})_{i<\omega}$, et on renumérote la suite).

Définissons par récurrence la suite $(k_i \cdot \mu_i)_{i<\omega}$:

1) - $k_o \cdot \mu_o = k_o$

2) - pour tout p, $\{k_i \cdot \mu_i\}_{i<p}$ est libre et

μ_p est le plus petit des ordinaux *indécomposables* tel que $k_p \cdot \mu_p \nless k_i \cdot \mu_i$.

Notons tout d'abord que si k est gauche, ℓ est une A-chaîne quelconque et μ un ordinal ; $k<\ell \cdot \mu$ implique $k<\ell$.

Par conséquent, si nous supposons la suite définie pour $i<p+1$, $k_i \cdot \mu_i \leqslant k_p \cdot \mu_p$ implique $k_i \leqslant k_p$ d'où $p<i$ ce qui est absurde. L'ensemble $\{k_i \cdot \mu_i\}_{i<p+1}$ est donc libre. Il est clair que pour tout $i<p+1$, il existe toujours un ordinal indécomposable μ tel que $k_{p+i} \cdot \mu < k_i \cdot \mu_i$, on en déduit l'existence d'ordinaux indécomposables μ' tels que $k_{p+i}\ \mu' \nless k_i \cdot \mu_i$ *pour tout* $i<p+1$; μ_{p+1} sera donc le

plus petit de ces ordinaux.

Il est facile de voir que les $k_i \cdot \mu_i$ sont indécomposables, ils forment donc un ensemble libre.

Si les domaines des k_i sont dénombrables, en remarquant qu'une chaîne dénombrable contenant tous les ordinaux dénombrables n'est pas dispersée, on prouve que les μ_i définis précédemment sont ainsi dénombrables ; ce qui achève la preuve de $\neg b \to \neg a$.

$\neg a \to \neg b$: Soit $(k_i)_{i<\omega}$ une famille infinie d'éléments deux à deux incomposables de I, que nous supposerons tous gauches pour la même raison que précédemment : alors la suite $(\ell_i)_{i<\omega}$ définie par $\ell_i = (\sum_{i\leqslant j<\omega} k_j) \cdot \omega$ est strictement décroissante dans I.

En effet, les ℓ_i sont indécomposables en tant que sommes quasi-monotones, et i<j implique $\ell_j \leqslant \ell_i$; si $\ell_i < \ell_{i+1}$ alors k_i étant gauche, il existe m avec $i+1 \leqslant m < \omega$ tel que $k_i < k_m$ ce qui absurde et la suite est bien strictement décroissante.

Remarquons que si les domaines des k_i sont dénombrables il en est de même des ℓ_i ; d'où le résultat.

Nous ne savons pas si ce résultat est vrai pour les A-chaînes bien ordonnées.

II - 5 -PROPRIETES GENERALES -

II - 5.1 *Lemme* : Si une classe de A-chaînes X est a.i.f., alors S_o {X} l'est aussi.

Preuve: D'après G. HIGMAN {9} si X est a.i.f., il en est de même de l'ensemble des suites finies d'éléments de X, ω . X . L'application Σ de ω . X dans S_o {X} qui à la suite $(x_i)_{i \in [o,n]}$ associe $\sum_{i<n} x_i$ étant évidemment surjective et croissante, elle conserve le caractère a.i.f. et donc S_o{X} est a.i.f. .

II - 5.2 *Lemme* : Si une classe de A-chaînes X est a.i.f. et stable par sommes ordinales, -resp. par sommes ordinales et antiordinales, quasi-monotones régulières ; alors S_o{X} est stable par sommes ordinales, -resp. par sommes ordinales et antiordinales.

Preuve: Par induction sur la propriété P(μ) : "Pour tout ordinal δ inférieur à μ,S_o{X} contient toutes les δ sommes, -resp. toutes les δ-sommes, de ses éléments".

$P(n)$ est vraie pour tout entier n car $S_o\{X\}$ est stable par sommes finies. Supposons la vraie pour $\delta<\mu$, et soit $(k_i)_{i<\mu}$ une famille d'éléments de $S_o\{X\}$.

1er cas : μ isolé, alors $k = \sum_{i<\mu-1} k_i + k_{\mu-1}$, comme $\sum_{i<\mu-1} k_i \in S_o\{X\}$ par hypothèse inductive, k y appartient aussi.

2ème cas : μ non isolé, soit alors $\omega_\xi = cf(\mu)$.

- Si $\omega_\xi<\mu$ considérons un isomorphisme Θ de ω_ξ dans μ tel que Im Θ soit cofinal dans μ, alors $k = \sum_{i<\Theta(o)} k_i + \sum_{o<\delta\omega_\xi} \sum_{\substack{\mathrm{Sup}\Theta(\mu)\leqslant i\leqslant\Theta(\delta)\\ \mu<\delta}}$

  par hypothèse inductive chaque terme appartient à $S_o\{X\}$ et donc k aussi.

- Si $\omega_\xi = \mu$, comme $S_o\{X\}$ est a.i.f., il existe i_o tel que $(k_j)_{i_o\leqslant j<\omega_\xi}$ soit quasi-monotone ; par hypothèse inductive $\sum_{i<i_o} k_i \in S_o\{X\}$.

Comme $S_o\{X\}$ est évidemment stable par sommes ordinales quasi-monotones, il contient $\sum_{i_o \leqslant j < \omega_\xi} k_j$ et par suite k.

Le même raisonnement s'applique pour prouver que si X est stable par sommes antiordinales quasi-monotones régulières, alors :

$k' = \sum^*_{1<\mu} k_1$ appartient à $S_o\{X\}$. et donc $P(\mu)$ *est vraie.*

d'où le résultat annoncé :

(Bien entendu si X est seulement stable par ω-sommes quasi-montones, $S_o\{X\}$ est encore stable par sommes ordinales dénombrables.

II - 5.3 *Proposition* : Si I est a.i.f., alors $S_o\{S_{qm}\}=C$ et C a.i.f. .

Preuve : Par exemple dans le cas $C = \mathcal{D} . A$: I étant stable par sommes quasi-monotones, il contient S_{qm} qui, de ce fait est a.i.f. ; par suite des lemmes II-5.1 et II-5.2, $S_o\{S_{qm}\}$ est a.i.f. et stable par sommes ordinales et antiordinales, comme il contient O et les unités, il contient la plus petite classe stable qui n'est autre que $\mathcal{D}$. A d'après II-1.3, étant évidemment contenu dans celle-ci, il lui est donc égal ; on a donc $S_o\{S_{qm}\} = \mathcal{D}$. A et $\mathcal{D}$. A a.i.f. . Les autres cas se traitent de la même façon en remarquant que la caractérisation, II-1.3 est valable dans tous les cas.

Cela prouve 1) $\to$ 2).

II - 5.4 *Proposition* : Si $S_o\{S_{qm}\} = \mathcal{C}$, alors $S_{qm} = \mathcal{I}$ et par suite $S_o\{\mathcal{I}\} = \mathcal{C}$.

Preuve : Si $k \in \mathcal{I}$, alors $k \in S_o\{S_{qm}\}$; il existe donc une famille finie d'éléments de S_{qm}, soit $(k_i)_{i \in [0,n]}$ telle que $k = k_o + k_1 + \dots k_n$, comme k est indécomposable, il est égal à un certain k_i s'il s'agit de genre, ce qui achève la démonstration ; et équimorphe à ce k_i s'il s'agit de A-chaînes, ce qui ne suffit plus à assurer que $k \in S_{qm}$ car on ne sait pas si S_{qm} contient toutes les

A-chaînes équimorphes à un de ses éléments.

Pour prouver que $k \in S_{qm}$, on suppose qu'il est droit et différent de zéro et des unités, (pour lesquelles le résultat est évident) d'après II-1.3 k se met alors sous la forme $k = \sum_{i<\omega_\xi} k_i$ avec $\omega_\xi = cf(k)$ et les k_i strictement inférieurs à k.

On construit par induction une suite croissante d'ordinaux cofinale dans ω_ξ, soit $(i_\delta)_{\delta<\omega_\xi}$ par :

- $i_0 = 0$
- $(i_\delta)_{\delta<\mu<\omega_\xi}$ étant définie, i_μ est le plus petit ordinal tel que :

$$\sum_{i<i_{\mu-1}} k_i \leqslant \sum_{i_{\mu-1}\leqslant j<i_\mu} k_j \text{ si } \mu \text{ est isolé et :}$$

$$\sum_{i<\operatorname{Sup}\limits_{\delta<\mu} i_\delta} k_i \leqslant \sum_{\operatorname{Sup}\limits_{\delta<\mu} i_\delta\leqslant j<i_\mu} k_j \quad \text{sinon.}$$

i_μ existe toujours car k est indécomposable à droite.

La suite $(i_\delta)_{\delta<\omega_\xi}$ est évidemment strictement croissante et donc cofinale dans ω_ξ ;

$$k = \sum_{0<\delta<\omega_\xi} \ell_\delta \text{ avec } \ell_\delta = \sum_{\substack{\text{Sup } i_\mu \leqslant i < i_\delta \\ \mu<\delta}} k_i \ .$$

comme $\ell_\delta \in C = S_\circ\{S_{qm}\}$, il existe une famille finie d'éléments de S_{qm} : $(\ell_{p_\delta})_{0\leqslant p_\delta<n_\delta}$, dont la somme est ℓ_δ .

$k = \Sigma \{\ell_{p_\delta} \ / \ p_\delta \in \sum_{\mu<\omega_\xi} n_\mu\}$ est une somme quasi-monotone régulière d'éléments de S_{qm}.

car étant donné p_δ et μ avec $\delta<\mu$, on a :

$$\ell_{p_\delta} \leqslant \ell_\delta \leqslant \sum_{i\leqslant i_\mu} k_i \leqslant \sum_{i_\mu\leqslant j<i_{\mu+1}} k_j = \ell_\mu$$

et comme $\ell_\mu = \ell_\circ + \ldots \ell_{n-1_\mu}$ il existe t_μ tel que $\ell_{p_\delta} \leqslant \ell_{t_\mu}$.

ce qui prouve que $k \in S_{qm}$. S_{qm} étant contenu dans I, on a donc $S_{qm} = I$ d'où $S_\circ\{I\} = C$ - Q.E.D. .

Remarque : $S_{qm} = I$ signifie que toute A-chaîne indécomposable de C est une somme quasi-monotone régulière de A-chaînes indécomposables de C strictement inférieures (sauf pour 0 et les unités) et $S_\circ\{I\} = C$, que toute A-chaîne de C est une somme finie de A-chaînes indécomposables ;

On vient donc de prouver 2) $\rightarrow$ (v) et 2) $\rightarrow$ (iii).

Il faut se garder de croire que (iii) $\rightarrow$ (iv) est évident ; on aura besoin des notions et résultats suivants :

II - 5.5 *Définition* : soit une A-chaîne k somme finie d'indécomposables, alors toute famille $(k_i)_{i \in [0,n]}$ d'indécomposables telle que

$k = k_o + k_1 + \ldots k_n$ est appelée *décomposition* de k ; si elle vérifie en outre $k_i + k_{i+1}$ non indécomposable pour $i \in [0,n-1]$ elle est dite *minimale*.

II - 5.6 *Lemme* : Toute A-chaîne k, somme finie d'indécomposables, admet une décomposition minimale.

Preuve : par récurrence sur le nombre d'éléments d'une décomposition.

II - 5.7 *Proposition*: Si une A-chaîne k est une somme finie d'indécomposable

a - il en est de même de toute A-chaîne k' équimorphe à k.

b - et si $(k_i)_{i \in [0,n]}$ et $(k'_j)_{j \in [0,m]}$ sont des décompositions minimales de k et k' alors $n = m$ et pour $i \in [0,n]$ k_i est équimorphe à k'_i.

Preuve : a - Soit $(k_i)_{i \in 0,n}$ une décomposition minimale de k, k' étant équimorphe à k, il existe f isomorphisme de Dk' dans Dk tel que $x \in Dk'$ implique $k'(x) \leqslant k_\circ f(x)$.

Notons k'_i la restriction de k' à $f^{-1} < Dk_i >$, il est clair que $k' = k'_\circ + k'_1 + \dots k'_n$;

prouvons que $(k'_i)_{i \in [0,n]}$ est une décomposition de k' : Comme k' est équimorphe à k, il existe aussi f' isomorphisme de Dk dans Dk' tel que $x \in Dk$ implique $k(x) \leqslant k'_\circ f'(x)$. Définissons une application croissante ψ de $[0,n]$ dans $[0,n]$ ainsi : $\psi(i)$ est le plus petit entier pour lequel k_i est équimorphe à la res-

triction de k_i à f'^{-1} $(Dk'_{\psi(i)})$;
si ψ n'est pas bijective en vertu d'un résultat connu (P. JULLIEN {10} page 93 Lemme 3.4.1), il existe i tel que $i = \psi(i) = \psi(i+1)$, alors $k_i + k_{i+1} \leqslant k'_i \leqslant k_i$ et donc $k_i + k_{i+1}$ est indécomposable ce qui contredit la minimalité. donc ψ est surjective et par suite k_i équimorphe à k'_i lequel est donc indécomposable Q.E.D.

b - se traite de la même manière.

Ce résultat est tout à fait semblable à celui de P. JULLIEN, transcrit en termes de genres il généralise la décomposition cantorienne des ordinaux.

II - 5.8 *Corollaire* : Si $(k_i)_{i \in [0,n]}$ est une décomposition minimale de k alors $k_0 + k_1 + \dots k_{n-1}$ est strictement inférieur à k.
Par suite iii) $\to$ iv)

Nous venons de voir que la propriété d'être une somme finie d'indécomposables est compatible avec le genre ; dans cet ordre d'idée, on obtient la :

II - 5.9 *Proposition* : Si une A-chaîne k se met sous la forme $k_1 + \ell$ avec ℓ indécomposable et $k_1 < k$, il en est de même de toute A-chaîne k' équimorphe à k.

Preuve : k' étant équimorphe à k, soient f et f' isomorphismes de Dk' dans Dk et de Dk' dans Dk tels que $x \in Dk'$ implique $k'(x) \leq k \circ f(x)$ et $x \in Dk$ implique $k(x) \leq k' \circ f'(x)$. Notons k'_1 la restriction de k' à $f^{-1}\langle Dk_1\rangle$ et ℓ'_1 la restriction de k' à $f^{-1}\langle D_\ell\rangle$, alors $k' = k'_1 + \ell'$ et $\ell' \leq \ell$ et $k'_1 \leq k_1$ comme $k'_1 \leq k_1 < k \leq k'$ on a $k'_1 < k'$ la restriction de ℓ à $f'^{-1}\langle Dk'_1\rangle$ ne peut être équimorphe à ℓ, donc $\ell \leq \ell'$ par suite il est indécomposable. Q.E.D.

Compte tenu de ce résultat, on se contente de prouver (iv) $\rightarrow$ 1 pour les A-chaînes. On remplace (v) par (v') : Tout indécomposable est *équimorphe* à une somme quasi-monotone régulière d'indécomposables strictement inférieurs et on prouve (v') $\rightarrow$ 1 pour les A-chaînes seulement.

II - 5.10 *Lemme* : Soit $(k_i)_{i<\omega}$ une suite de A-chaînes indécomposables deux à deux incomparables. -resp. une suite strictement décroissante de A-chaînes bien ordonnées indécomposables dont les domaines sont tous équimorphes.

Pour toutes les A-chaînes k et ℓ différents de 0, dès que $\sum_{i<\omega} k_i = k + \ell$, $\ell \nleq k$ et ℓ n'est pas indécomposable.

Preuve: Il est commode de noter $\sum_{j\leqslant i<p} k_i$ par $\ell_{j,p}$

a - Pour tout entier p tel que $j<p<\omega$ on a $\ell_{p,\omega} \nleq \ell_{j,p}$ et $\ell_{p,\omega} < \ell_{j,\omega}$.

En effet : Si $\ell_{p,\omega} \leqslant \ell_{j,p}$, il existe q avec $j<q<p$ tel que $k_p \leqslant k_q$ ce qui ne peut se produire si $\{k_i\}_{i<\omega}$ est libre ;

$D\ell p,\omega < D\ell j,p$, qui entraîne, dans le cas où tous les Dki sont équimorphes, que $Dkp \, . \, \omega \leqslant Dkp \, . \, (p-j)$ ceci étant absurde car Dkp est bien ordonné et non vide.

Si $\ell_{j,\omega} \leqslant \ell_{p,\omega}$, alors il existe q, avec $j<p\leqslant q$, tel que $k_j \leqslant k_q$ ce qui est absurde dans les deux cas.

Par suite $\sum_{i<\omega} k_i = \ell_{\circ,\omega} = k + \ell$, k et ℓ s'écrivent respectivement sous la forme $\ell_{\circ,j} + t_1$ et $t_2 + \ell_{j+1,\omega}$ avec $t_1 + t_2 = k_j$.

Si $\ell\leqslant k$, alors $\ell_{j+1,\omega} \leqslant \ell_{\circ,j+1}$ ce qui absurde d'après a - et donc $\ell<k$.

Si ℓ est indécomposable, alors :

soit $\ell\leqslant t_2 + k_{j+1}$, d'où $\ell_{j+1,\omega}\leqslant\ell_{j,j+1}$ absurde d'après a. soit $\ell\leqslant\ell_{j+2,\omega}$ et donc $\ell_{j+1,\omega} \leqslant \ell_{j+2,\omega}$ absurde aussi d'après a : donc ℓ n'est pas indécomposable.

On en déduit le :

II - 5.11 *Corollaire* :

a - Si toute A-chaîne dispersée k est égale à $k_1 + \ell$ avec $k_1<k$ et ℓ indécomposable, alors la classe des A-chaînes dispersées indécomposables est d'incompara-

bilité finie {i.e.(iv) $\rightarrow$ 1, en tenant compte de II - 4.4.}

b -Si toute A-chaîne bien ordonnée k est égale à $k_1 + \ell$ avec $k_1 < k$ et ℓ indécomposable, alors la classe des A-chaînes bien ordonnées indécomposables est artinienne d'incomparabilité finie
{i.e.(iv) $\rightarrow$ 1}

II - 5.12 *Lemme* : Soit k une A-chaîne telle que pour toutes A-chaînes k_1 et ℓ différentes de 0, dès que $k = k_1 + \ell$, $\ell \nleq k_1$ et ℓ n'est pas indécomposable.
$k \cdot \omega$ n'est équimorphe à aucune somme quasi monotone régulière d'indécomposables strictement inférieurs.

Preuve: Si $k \cdot \omega$ est équimorphe à une somme quasi monotone régulière d'indécomposables strictement inférieurs, celle-ci est nécessairement de la forme $\sum\limits_{i<\omega} t_i$.
{En effet : Si $k \cdot \omega$ équimorphe à $\sum\limits_{i<\mu}^{*} t_i$, comme il est indécomposable il existe i

tel que $k \,.\, \omega \leqslant t_i$ ce qui est absurde, si $k \,.\, \omega$ équimorphe à $\sum_{i<\mu} t_i$, avec $\omega<cf(\mu)$, $\sum_{i<\mu} t_i \leqslant k$ donc ce dernier est indécomposable, absurde}.

On a évidemment, pour tout $i<\omega$, $t_i \leqslant k$; et il existe un entier n tel que $k \leqslant \sum_{i\leqslant n} t_i$ et par suite $k = \sum_{i\leqslant n} v_i$ avec $v_i \leqslant t_i$. Soit t_x maximal parmi les t_i pour lesquels $i \leqslant n$ et $t_n \leqslant t_i$, il existe alors j_x tel que $t_x \leqslant v_{j_x}$; il est clair que v_{j_x} est équimorphe à t_x et donc indécomposable.

Si $j_x = n$, alors k s'écrit comme une somme de termes dont le dernier est indécomposable ce qui est exclu par l'hypothèse ; donc $j_x \neq n$, mais alors $v_n < v_j$ ce qui est aussi exclu. Par suite $k \,.\, w$ n'est équimorphe à aucune somme quasi monotone régulière ...

On ne peut en déduire directement v) $\rightarrow$ iv) ; par contre, en tenant compte de II-5.10 on obtient le

II - 5.13 *Corollaire* :

a - Si toute A-chaîne dispersée indécomposable est *équimorphe* à une somme quasi monotone régulière d'indécomposables strictement inférieurs, alors la classe des A-chaînes dispersées est *d'incomparabilité finie*.
{i.e.(v) $\rightarrow$ 1 en tenant compte de II - 4.4}.

b - Si toute A-chaîne bien ordonnée indécomposable est *équimorphe* à une somme quasi monotone régulière d'indécomposables strictement inférieurs, alors la classe des A-chaînes bien ordonnées est *artinienne d'incomparabilité finie*.
{i.e.(v) $\rightarrow$ 1}

ce qui achève la démonstration du théorème II - 2.1.

Nous tenons à remercier Monsieur le Professeur COROMINAS, qui nous ayant proposé ce thème de réflexion, nous a non seulement aidé par ses conseils, mais aussi par une série d'exposés développés durant l'année 68-69, dans lesquels nous avons puisé très largement.

:-:-:-:-:-:-:-:

BIBLIOGRAPHIE

1 N. BOURBAKI : *Eléments de Mathématiques. Théorie des ensembles* L1. CH2 - HERMANN PARIS-

2 E. COROMINAS : *Théorie ordinale* (cours de D.E.A.) Fac. Sc. *Université* de LYON.

3 E. COROMINAS : *Arithmétique des genres dispersés* (*à paraître*).

4 R. BONNET : *Catégories et α - catégories des ensembles ordonnés. Thèse de 3ème cycle* 1968 - Fac. Sc. *Université* de LYON.

5 R. BONNET : *Stratification et extensions des genres de chaînes dénombrables.* C R A S- *Série* A- *t.* 269 p. 880-882.

6 R. FRAISSE : *Sur la comparaison des types d'ordres.* C R A S - 226 (1948) p. 987-988 *et* p. 1330-1331.

7 R. FRAISSE : *Abritement entre relations et spécialement entre chaînes* (1970) (*à paraître*).

8 A. GLEYZAL : *Order types, Structures of orders.* Trans. *Amer.* Math. Soc. 48 (1940) p. 451-446.

9 G. HIGMAN : *Ordering by divisibility in abstract algebra. Proc. London Math. Soc. 1952 p. 326-336.*

10 P. JULLIEN : *Sur les types d'ordres dispersés (polycopié).*

Contribution à l'étude des types d'ordres dispersés (Thèse) Fac. Sc. Marseille.

11 KURATOWSKI-MOSTOWSKI :

Set theory North Holland 1968.

12 R. LAVER : *On Fraisse's Order type conjecture (Thèse) Université de Californie (BERKELEY) U.S.A.*

13 C. ST J.A. NASH-WILLIAMS :

On well quasi ordering infinite trees. Proc. Camb. Philos. Soc. 61 (1965) p. 697-720.

14 M. POUZET : *Sur des conjectures de FRAISSE et les prémeilleurs-ordres C R A S Série A t. 270 p. 1-3.*

15 M. POUZET : *Sur une axiomatique de la somme ordinale (à paraître) ou thèse de 3ème cycle - Université de Lyon.*

16 M. POUZET : *Sur les prémeilleurs-ordres (à paraître).*

Manuscrit remis en Décembre 1970

M. POUZET
Assistant
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Lyon
43, boulevard du 11 Novembre 1918
Villeurbanne