

CLAUDE TISSERON

Quelques applications de la localisation

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1969, tome 6, fascicule 4
, p. 1-53

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1969__6_4_1_0>

© Université de Lyon, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES APPLICATIONS de la LOCALISATION

Claude TISSERON

Dans cet article on fait le lien entre les monosous-catégories au sens de MITCHELL et les catégories localisantes au sens de GABRIEL. On donne quelques exemples et applications. On obtient, en particulier, des conditions pour l'existence d'enveloppes F -injectives où F est une famille d'idéaux (à gauche) d'un anneau A . On utilise ensuite la notion d'injectifs relatifs pour obtenir des propriétés des modules quasi-injectifs. Pour cela, on associe à un module M une certaine famille topologisante I_M d'idéaux de l'anneau de base. On commence l'étude des anneaux pour lesquels $\text{Ann}(M) \in I_M$ pour tout module quasi-injectif M ; et on donne une nouvelle caractérisation des anneaux noethériens (à gauche). On donne aussi quelques propriétés des modules projectifs et quasi-projectifs. En particulier, une caractérisation des modules projectifs sur un anneau parfait.

Les principaux résultats de cet article ont été résumés dans les deux notes (35) et (36).

L'énoncé de la proposition 2.5 p.1378 de ⁽³⁶⁾ est incorrect; il faut remplacer l'assertion (I) par la phrase suivante : Pour tout module M appartenant à S le sous-module $I_S M$ est nul.

CHAPITRE 1 : MONOSOUS-CATEGORIES, CATEGORIES LOCALISANTES, APPLICATIONS.

1 - On désigne toujours par $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, pour une classe $\mathcal{D}$ d'objets de $\mathcal{A}$ désignons par $\underline{\mathcal{D}}$ la sous catégorie pleine de $\mathcal{A}$ dont les objets sont les objets de $\mathcal{D}$, dite engendrée par $\mathcal{D}$.

1.1 - Définitions : Soit $\mathcal{C}$ une sous catégorie pleine de $\mathcal{A}$, les objets M de $\mathcal{A}$ tels que pour tout objet C de $\mathcal{C}$ on ait $\mathcal{A}(M, C) = 0$ (respectivement $\mathcal{A}(C, M) = 0$) engendrent une sous catégorie pleine de $\mathcal{A}$ qui sera notée $c(\mathcal{C})$ (respectivement $m(\mathcal{C})$).

Si $\mathcal{D}$ est une sous classe de $\text{Ob } \mathcal{A}$ on pourra noter encore $c(\mathcal{D})$ (respectivement $m(\mathcal{D})$) au lieu de $c(\underline{\mathcal{D}})$ (respectivement $m(\underline{\mathcal{D}})$). On définit ainsi deux correspondances c et m entre sous catégories pleines de $\mathcal{A}$; ces correspondances sont duales l'une de l'autre, croissantes, et vérifient les égalités suivantes :

$$c(\mathcal{C}) = cmc(\mathcal{C}) \quad , \quad m(\mathcal{C}) = mcm(\mathcal{C}).$$

On dit qu'une sous catégorie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ est stable par quotients si tout quotient d'un objet C de $\mathcal{C}$ par un sous objet de C dans $\mathcal{A}$ est un objet de $\mathcal{C}$.

1.2 - Proposition : Soit $\mathcal{C}$ une sous catégorie de $\mathcal{A}$,

- a) Si la suite $N \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow 0$ est exacte, M est objet de $c(\mathcal{C})$ dès que N et P sont objets de $c(\mathcal{C})$.
- b) $c(\mathcal{C})$ est une sous catégorie complète à droite de $\mathcal{A}$ et de plus $c(\mathcal{C})$ est stable par quotients.

La preuve de a) est aisée, montrons b) ;

Soit T un schéma de diagramme et $\tau : T \rightarrow \mathcal{A}$ un diagramme de type T dans $\mathcal{A}$ ayant une limite à droite $A = \varinjlim \tau$ dans $\mathcal{A}$. Il faut montrer que $A \in \text{Ob } c(\mathcal{C})$ dès que $\tau t \in \text{Ob } c(\mathcal{C})$ pour tout objet t de T . Supposons vérifiée cette dernière condition et soit C un objet de $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{A}(\tau., C)$ est un diagramme de type T dans $\mathcal{A}/b$ tel que $\mathcal{A}(A, C) = \varprojlim \mathcal{A}(\tau., C) = 0$, d'où le résultat. La stabilité de $c(\mathcal{C})$ par quotients se montre aisément.

1.3 - Proposition :

- a) Si $\mathcal{C}$ est une sous catégorie pleine de $\mathcal{A}$ stable pour les quotients, un objet M est dans $m(\mathcal{C})$ si et seulement si M n'a pas de sous objet non nul dans $\mathcal{C}$.
- b) Si $\mathcal{M}$ est une sous catégorie pleine de $\mathcal{A}$ on a équivalence entre
 - (i) $\mathcal{M} = m(\mathcal{M})$
 - (ii) M est objet de $\mathcal{M}$ dès que M n'a pas de sous objet non nul dans $c(\mathcal{M})$.

On déduit b) de a) en prenant $\mathcal{C} = c(\mathcal{M})$.

Montrons a), la condition nécessaire étant évidente, soit $u : C \rightarrow M$ un morphisme d'un objet C de $\mathcal{C}$ dans M , l'image de u est un sous-objet de M dans $\mathcal{C}$ ie $u=0$ dès que M n'a pas de sous objet non nul dans $\mathcal{C}$, d'où le résultat.

1.4. - Proposition : Soit $\mathcal{C}$ une sous catégorie pleine stable par quotients, on a équivalence entre :

- (i) l'injection $J : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{A}$ admet un adjoint à droite R (ie $\mathcal{C}$ est réflexive).

(ii) tout objet M de $\mathcal{A}$ possède un plus grand sous objet $\mathcal{E}M$ dans $\mathcal{E}$.

Si ces conditions sont vérifiées, on peut choisir $RM = \mathcal{E}M$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). L'image I_M de la réflexion $u_M : RM \rightarrow M$ est un objet de $\mathcal{E}$, soit $RM \xrightarrow{u'} I_M \xrightarrow{u''} M$ la décomposition canonique de u_M . Il existe $t : I_M \rightarrow RM$ tel que $u_M t = u''$ ie $u_M t u' = u_M$ donc $t u' = \text{id}(RM)$ par adjonction, autrement dit u' est un isomorphisme, on conclut alors en remarquant que tout morphisme $N \rightarrow M$ où $N \in \text{Ob } \mathcal{E}$ se factorise par u_M .

(ii) $\Rightarrow$ (i). Tout morphisme $N \rightarrow M$ où $N \in \text{Ob } \mathcal{E}$ a une image dans $\mathcal{E}$ par hypothèse donc se factorise par $\mathcal{E}M \rightarrow M$ et $RM = \mathcal{E}M$ définit un adjoint à droite à J .

Disons qu'une sous catégorie pleine $\mathcal{E}$ de $\mathcal{A}$ vérifie la condition (I) si pour toute suite exacte $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow 0$ de $\mathcal{A}$, l'objet M est dans $\mathcal{E}$ dès que N et P y sont.

1.5 - Proposition : Soit $\mathcal{E}$ une sous catégorie réflexive de $\mathcal{A}$, on a équivalence entre

- (i) $\mathcal{E}$ est stable par quotients et vérifie la condition (I),
- (ii) Pour tout objet M de $\mathcal{A}$ l'objet $M/\mathcal{E}M$ est dans $m(\mathcal{E})$,
- (iii) On a $\mathcal{E} = \text{cm}(\mathcal{E})$.

Lorsque ces conditions sont vérifiées $m(\mathcal{E})$ est une sous catégorie coreflexive de $\mathcal{A}$ et $M \rightarrow M/\mathcal{E}M$ est la coreflexion.

(iii) $\Rightarrow$ (i) résulte de 1.2.

(i) $\Rightarrow$ (ii), Soit $u : C \rightarrow M/\mathcal{E}M$ un morphisme où $C \in \text{Ob } \mathcal{E}$, pour montrer que u est nul, on peut, puisque $\mathcal{E}$ est stable par quotients, supposer que u est monique.

Considérons alors le diagramme commutatif et exact où $P = M \coprod_{M/\mathcal{C}M} C$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}M & \longrightarrow & P & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow u \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}M & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/\mathcal{C}M \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Il résulte de la condition (I) que P est dans $\mathcal{C}$ puisque $\mathcal{C}M$ et C y sont, donc par définition de $\mathcal{C}M$ (1.4) $\mathcal{C}M \rightarrow P$ est un isomorphisme et $C = 0$ ie $M/\mathcal{C}M$ est dans $m(\mathcal{C})$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Si M est dans $cm(\mathcal{C})$ le morphisme canonique $M \rightarrow M/\mathcal{C}M$ est nul puisque $M/\mathcal{C}M$ est dans $m(\mathcal{C})$ et ainsi $\mathcal{C}M \rightarrow M$ est un isomorphisme donc M est dans $\mathcal{C}$.

Soit maintenant $u : M \rightarrow N$ un morphisme où $N \in \text{Ob } m(\mathcal{C})$, le composé $\mathcal{C}M \rightarrow M \xrightarrow{u} N$ est nul donc u se factorise de façon unique par l'application canonique $M \rightarrow M/\mathcal{C}M$ d'où le résultat.

1.6 - Proposition : Soit $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{M}$) la classe des sous catégories pleines de $\mathcal{A}$ qui sont réflexives, stables par quotients (resp. coreflexives, stables par sous objets) et vérifient la condition (I).

La correspondance $\mathcal{C} \rightsquigarrow m(\mathcal{C})$ établit une bijection entre $\mathcal{E}$ et $\mathcal{M}$ dont $\mathcal{M} \rightsquigarrow c(\mathcal{M})$ est la bijection réciproque.

Soit $\mathcal{C}$ une sous catégorie pleine qui est dans $\mathcal{E}$, il résulte du dual de la proposition 1.2 et de 1.5 que $m(\mathcal{C})$ est une sous catégorie pleine qui est dans $\mathcal{M}$, la proposition 1.5 montre aussi que $\mathcal{C} = c m(\mathcal{C})$. Le reste s'établit par dualité en utilisant la proposition 1.2 et le dual de 1.5.

2. - On suppose maintenant $\mathcal{A}$ complète à gauche et à enveloppes injectives, on se propose de faire le lien entre les monosous-catégories de $\mathcal{A}$, et les sous catégories localisantes de $\mathcal{A}$ (8) et (9).

2.1 - Lemme : Soit $\mathcal{M}$ une monosous-catégorie de $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{M}$ est une sous catégorie coréfective de $\mathcal{A}$ et $c(\mathcal{M})$ est une sous catégorie localisante de $\mathcal{A}$; de plus on a $\mathcal{M} = mc(\mathcal{M})$.

Si $\mathcal{M}$ est une monosous-catégorie, $\mathcal{M}$ est coréfective (prop. 6.1, p. 131 de (19)) et si T est la coréflexion de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{M}$ on a une suite exacte (prop. 6.3 p. 132 de (19))

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}'M \longrightarrow M \longrightarrow T\mathcal{M} \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{C}'M$ est le plus grand sous objet de M dans $\mathcal{C}' = c(\mathcal{M})$, donc si M n'a pas de sous objet non nul dans $c(\mathcal{M})$ le morphisme $M \rightarrow T\mathcal{M}$ est un isomorphisme et $M \in \text{Ob}(\mathcal{M})$ ie d'après 1.3 b) on a $\mathcal{M} = mc(\mathcal{M})$. Montrons que $c(\mathcal{M})$ est épaisse, d'après 1.2 il suffit de montrer que $c(\mathcal{M})$ est stable par sous objets, or si $N \xrightarrow{i} M$ est un monomorphisme où $M \in \text{Ob } c(\mathcal{M})$ et $u : N \rightarrow P$ un morphisme où $P \in \text{Ob } \mathcal{M}$ il existe un monomorphisme $j : P \rightarrow Q$ avec $Q \in \text{Ob } \mathcal{M}$ et Q injectif, d'où un morphisme $v : M \rightarrow Q$ tel que $vi = ju$, or $v = 0$ donc $u = 0$. Montrons maintenant que $c(\mathcal{M})$ est localisante. On utilise la proposition 4 p. 372 de (8) il suffit de voir que si M n'a pas de sous objet non nul dans $c(\mathcal{M})$ il existe un monomorphisme de M dans un objet $c(\mathcal{M})$ -fermé, or dans ce cas $M \in \text{Ob } \mathcal{M}$ (1.3.b)) et il existe un monomorphisme $M \rightarrow Q$ où Q est injectif et $Q \in \text{Ob } \mathcal{M}$, et Q est $c(\mathcal{M})$ -fermé d'après le lemme 1 b) p. 370 de (8).

2.2 - Lemme : Soit $\mathcal{C}$ une sous catégorie de $\mathcal{A}$ stable par sous objets et quotients, $m(\mathcal{C})$ est une monosous-catégorie et $cm(\mathcal{C})$ est la plus petite catégorie localisante contenant $\mathcal{C}$.

D'abord $m(\mathcal{C})$ est une sous catégorie complète à gauche de $\mathcal{A}$. Si $M \rightarrow Q$ est l'enveloppe injective de M dans $\mathcal{A}$ où $M \in \text{Ob } m(\mathcal{C})$ il résulte de 1.3. a) et de l'essentialité de M dans Q que $Q \in \text{Ob } m(\mathcal{C})$, et $m(\mathcal{C})$ est une monosous-catégorie puisqu'elle est stable par sous objets; $cm(\mathcal{C})$ est donc localisante.

Lorsque $\mathcal{D}$ est une sous catégorie localisante de $\mathcal{A}$ il résulte de 1.4 et 1.5 que $\mathcal{D} = cm(\mathcal{D})$ et il est alors aisé de voir que $cm(\mathcal{C})$ est la plus petite catégorie localisante contenant $\mathcal{C}$.

2.3 - Proposition :

- a) la correspondance m est une surjection de la classe des sous catégories de $\mathcal{A}$ stables par quotients et sous objets sur la classe des monosous-catégories de $\mathcal{A}$.
- b) Cette correspondance détermine par restriction une bijection de la classe des sous catégories localisantes de $\mathcal{A}$ sur la classe des monosous-catégories de $\mathcal{A}$.

Cela résulte de 2.1 et 2.2.

2.4 - Proposition : Si $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{C}$) est une monosous-catégorie (resp. une catégorie localisante), la sous catégorie $\mathcal{L}$ des objets purs pour $\mathcal{M}$ (resp. $m(\mathcal{C})$) coïncide avec la sous catégorie $\mathcal{L}$ des objets $c(\mathcal{M})$ -fermés (resp. $\mathcal{C}$ -fermés).

La terminologie est celle de (8) et (19).

Montrons par exemple le premier point, soit $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ la coréflexion.

a) Tout objet pur est $c(\mathcal{M})$ -fermé.

Soit M un objet pur pour $\mathcal{M}$, on montre que M est $c(\mathcal{M})$ -fermé avec le lemme 1.b) p.370 de (8). Soit $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte où $C \in \text{Ob } c(\mathcal{M})$, montrons que cette suite est fissible; Considérons le diagramme commutatif et exact où $S = T(P) \begin{smallmatrix} \parallel \\ \downarrow \\ P \end{smallmatrix} C$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & P & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ & & M & \longrightarrow & T(P) & \longrightarrow & S \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

le noyau K de $M \rightarrow T(P)$ est un sous objet du noyau de $P \rightarrow T(P)$ qui est dans $c(\mathcal{M})$ donc K est nul avec 1.3 car $M \in \text{Ob } \mathcal{M}$, et $M \rightarrow T(P)$ est monique. Puisque M est pur S est dans $\mathcal{M}$, or S est quotient de $C \in \text{Ob } c(\mathcal{M})$ donc S est nul et $M \rightarrow T(P)$ est un isomorphisme d'où le résultat.

b) Montrons que tout objet $c(\mathcal{M})$ -fermé est pur pour $\mathcal{M}$.

Soit M un objet $c(\mathcal{M})$ -fermé, M est objet de $\mathcal{M}$ puisque M n'a pas de sous objet non nul dans $c(\mathcal{M})$. Soit $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte de $\mathcal{A}$, montrons que si P est dans $\mathcal{M}$, C y est aussi, c'est-à-dire, M est pur. Pour cela on montre que C n'a pas de sous objet non nul dans $c(\mathcal{M})$. Soit $C' \rightarrow C$ un monomorphisme où $C' \in \text{Ob } c(\mathcal{M})$. Considérons le diagramme commutatif et exact où $R = P \begin{smallmatrix} \top \top \\ \downarrow \downarrow \\ C \end{smallmatrix} C'$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \circ & & \circ & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 (1) & \circ & \longrightarrow & M & \longrightarrow & R & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & \circ & \longrightarrow & M & \longrightarrow & P & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

la suite exacte (1) est fissible par hypothèse donc C' devient un sous objet de R donc de P et $C' = 0$ puisque P est dans $\mathcal{M}$ d'où le résultat.

3. - Exemples .

3.1 - Rationnalité .

3.1.1 - Définition : Un sous objet N de M est dit rationnel (dans M) si pour tout sous objet N' de M tel que $N \subseteq N' \subseteq M$ on a $N'/N \in \text{Ob } \mathcal{C}(M)$, ie tout morphisme $N \rightarrow M$ nul sur N est nul.

3.1.2 - Proposition :

- a) Si N est rationnel dans M , pour tout objet G de $\mathcal{A}$ et tout couple de morphismes $u, v : G \rightarrow M$ on a $u(v^{-1}(N)) = 0 \implies u = 0$,
- b) Inversement si la propriété précédente est vérifiée pour les objets d'une famille de générateurs $(G_i)_i$ de $\mathcal{A}$, alors N est rationnel dans M .

a) Soient $u, v : G \rightarrow M$ tels que $u(v^{-1}(N)) = 0$, ie $v^{-1}(N) \subseteq \text{Ker } u$.
On a un épimorphisme $G/v^{-1}(N) \rightarrow \text{Im } u$, or $G/v^{-1}(N)$ est un sous objet de M/N donc le composé $G/v^{-1}(N) \rightarrow \text{Im } u \rightarrow M$ est nul par hypothèse, ie $\text{Im } u = 0$ et $u = 0$.

b) Soit $N \leq N' \leq M$ et $f : N' \rightarrow M$ un morphisme non nul, il existe $i \in I$ et $w : G_i \rightarrow N'$ tel que $u = f.w$ soit non nul.

Soit v le composé $G_i \rightarrow N' \rightarrow M$, on a $u(v^{-1}(N)) = (fw)(w^{-1}(N)) \neq 0$ et à fortiori $f(N)$ est non nul, d'où le résultat.

On retrouve la caractérisation de ⁽⁶⁾ en appliquant ceci à la catégorie des modules (à gauche) sur un anneau A unitaire ou non.

Lorsque $\mathcal{A}$ possède des enveloppes injectives, on va voir que l'on peut obtenir des résultats plus précis.

3.1.3 - Lemme : Soit $N \rightarrow M$ une extension rationnelle, N est essentiel dans M .

En effet dans le cas contraire, il existe B non nul dans M , tel $BN = 0$ d'où un morphisme non nul $B \vee N/N = B \rightarrow M$.

3.1.4 - Lemme : Si N a une enveloppe injective $\hat{N}$, une extension $N \rightarrow M$ est rationnelle si et seulement si $M/N \in \text{Ob } c(\hat{N})$.

La condition est nécessaire car tout morphisme $u : M/N \rightarrow \hat{N}$ donne un produit fibré

$$\begin{array}{ccc} N'/N & \xrightarrow{u'} & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ M/N & \xrightarrow{u} & \hat{N} \end{array}$$

où par essentialité, u est nul dès que u' l'est.

La condition est suffisante car tout morphisme $N'/N \xrightarrow{v} M$ se prolonge par injectivité en un morphisme de M/N dans $\hat{N}$ qui est nul et $v = 0$.

3.1.5 - Proposition : Lorsque $\mathcal{A}$ est à enveloppes injectives et complète à droite, tout objet N possède une extension rationnelle maximale $\bar{N}$ obtenue comme localisé de N pour la localisation définie par $c(\hat{N})$.

$\hat{N}$ désigne toujours une enveloppe injective de N dans $\mathcal{A}$. Montrons d'abord que $c(\hat{N})$ est localisante; il résulte de l'exactitude du foncteur $\mathcal{O}(-, \hat{N})$ que $c(\hat{N})$ est épaisse, de plus pour une famille $(M_i)_I$ d'objets de $\mathcal{A}$ l'isomorphisme $\mathcal{A}(\bigoplus_I M_i, \hat{N}) \simeq \prod_I \mathcal{A}(M_i, \hat{N})$ montre que $c(\hat{N})$ est stable par sommes quelconques.

Soit maintenant M un objet de $\mathcal{A}$ et S un ensemble de représentants des sous objets $N \rightarrow M$ tels que $N \in \text{Ob } c(\hat{N})$, il est immédiat de vérifier que l'image du morphisme canonique $\bigoplus_{N \in S} N \rightarrow M$ est le plus grand sous objet de M dans $c(\hat{N})$ et $c(\hat{N})$ est localisante d'après le corollaire 1 p. 375 de (8).

Puisque $\hat{N}$ est un objet $c(\hat{N})$ -fermé, par essentialité N n'a pas de sous objet non nul dans $c(\hat{N})$, il résulte alors de la démonstration de la proposition 4 p. 372 de (8) que le localisé $\bar{N}$ de N pour $c(\hat{N})$ est tel que $\bar{N}/N$ soit le plus grand sous objet de $\hat{N}/N$ qui est dans $c(\hat{N})$. La conclusion résulte alors de 3.1.3 et 3.1.4.

3.1.6 - Nous supposons maintenant que $\mathcal{A}$ est complète et à enveloppes injectives.

Soit $\mathcal{C}$ la sous classe de $\text{Ob } \mathcal{A}$ des objets M de $\mathcal{A}$ qui sont isomorphes à un quotient N/N' où N' est un sous objet essentiel de N ;

Considérons le diagramme suivant où N' et N'' sont des sous objets de N tels que $N' \leq N''$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N'' & \longrightarrow & N''/N' \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N/N' \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & N/N'' & = & N/N'' \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Comme $N' \rightarrow N$ est essentiel si et seulement si $N' \rightarrow N''$ et $N'' \rightarrow N$ le sont.

La catégorie $\underline{\mathcal{C}}$ engendrée par $\mathcal{C}$ est une sous catégorie pleine de $\mathcal{A}$ stable par sous-objets et quotients ; Il résulte donc de 2.2 que $m(\underline{\mathcal{C}})$ est une monosous-catégorie de $\mathcal{A}$. On a alors la proposition suivante :

3.1.7 - Proposition : Supposons que $\mathcal{A}$ vérifie les conditions de 3.1.5,

Pour tout objet M de $m(\underline{\mathcal{C}})$, l'extension rationnelle maximale $\bar{M}$ de M dans une enveloppe injective $\hat{M}$ de M coïncide avec $\hat{M}$.

Comme $m(\underline{\mathcal{C}})$ est une monosous-catégorie $\hat{M}$ est dans $m(\underline{\mathcal{C}})$ dès que M y est et on a alors $\mathcal{A}(\hat{M}/M, \hat{M}) = 0$ et M est rationnel dans $\hat{M}$ d'après 3.1.4.

3.2 - Soit A un anneau à unité, F une famille d'idéaux de A .

Considérons les conditions suivantes pour F (3) ou (8)

C_0 - Pour tout α et $h \in F$ on a $\alpha \cap h \in F$,

C_1 - Pour tout $\alpha \in F$ et tout idéal h tel que $\alpha \subset h$ on a $h \in F$,

C_2 - Pour tout $\alpha \in F$ et tout $a \in A$ on a $\alpha : a \in F$,

C_3 - Un idéal $\alpha \in F$ dès qu'il existe un idéal h de F tel que pour tout $a \in h$ on a $\alpha : a \in F$,

Les conditions C_0, C_1, C_2, C_3 (resp. C_0, C_1, C_2) expriment que F est topologisant et idempotent (resp. topologisant). Suivant une terminologie plus simple ((21) et (22)) on pourra aussi appeler pré-site (resp. site) de A toute famille topologisante (resp. topologisante et idempotente) d'idéaux de A .

3.2.1 - Il y a une correspondance bijective entre les sous catégories localisantes (resp. fermées, resp. stables par quotients et sous objets) de $\text{Mod } A$ et les sites de A (resp. pré-site de A , resp. les familles d'idéaux vérifiant C_1, C_2) définie de la façon suivante (3) ou (8) :

On associe à une famille d'idéaux F la sous catégorie pleine $\mathcal{C}_F$ de $\text{Mod } A$ ayant pour objets les modules M tels que $\text{Ann}(x) \in F$ pour tout $x \in M$.

On associe à une sous catégorie pleine $\mathcal{C}$ de $\text{Mod } A$ la famille $I(\mathcal{C})$ des idéaux α tels que A/α soit dans $\mathcal{C}$.

3.2.2 - Lorsque F vérifie C_1 et C_2 il résulte de ce qui précède et de 2.3 que $\bar{F} = I(\text{cm}(\mathcal{C}_F))$ est le plus petit site de A contenant F , on dira que $\bar{F}$ est engendré par F .

D'après 1.3 a) $\mathcal{M}_F = m(\mathcal{C}_F)$ a pour objets les modules M tels que pour tout $x \in M^*$ on a $\text{Ann}(x) \notin F$.

Il résulte alors des définitions que $m(\mathcal{C}_F) = m(\mathcal{C}_{\bar{F}})$, ie pour un module M on a $\underline{FM} = 0$ équivaut à $\underline{F\bar{M}} = 0$ en notant $FM = \{x \in M \mid \text{Ann}(x) \in F\}$ qui n'est pas toujours un sous module de M . Lorsque F est un pré-site FM est le plus grand sous module de M qui est dans $\mathcal{C}_F$.

3.2.3 - Lorsque F est un site, on a un foncteur localisation $\text{Mod } A \xrightarrow{L} \text{Mod } A$ associé à la catégorie localisante $\mathcal{C}_F$, tel que pour un module M

$$LM = M_F = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \alpha \in F}} \text{Hom}_A(\alpha, M/FM) \quad (2) \text{ ou } (8).$$

Soit $\mathcal{L}_F$ la sous catégorie de $\text{Mod } A$ des objets $\mathcal{C}_F$ -fermés, soit $T : \text{Mod } A \rightarrow \mathcal{L}_F$ un adjoint à gauche à l'injection $S : \mathcal{L}_F \rightarrow \text{Mod } A$ tel que $L = S \circ T$. Alors $\mathcal{L}_F$ est une catégorie de GROTHENDIECK, T est exact et L est exact à gauche ⁽⁸⁾.

Puisque $\mathcal{L}_F$ est une sous catégorie, on peut toujours supposer que $T \circ S = \text{Id}_{\mathcal{L}_F}$, on fera souvent cette hypothèse par la suite.

4 - Encore des catégories spectrales; Caractérisations de $\bar{F}$,

4.1 - Quelques rappels et lemmes.

4.1.1 - Définitions ⁽³³⁾ : Soit F une famille d'idéaux de A , un monomorphisme essentiel $i : N \rightarrow M$ est dit F -essentiel si et seulement si $M/i(N) \in \text{Ob}(\mathcal{C}_F)$. Lorsque N est un sous module de M on pourra noter ceci $N \triangleleft_F M$, un module Q est dit F -injectif si et seulement si pour tout monomorphisme F -essentiel $N \rightarrow M$ l'application canonique

$$\text{Hom}_A(M, Q) \longrightarrow \text{Hom}_A(N, Q) \text{ est surjective.}$$

Un monomorphisme $N \rightarrow M$ qui est F -essentiel et où M est F -injectif est appelé une enveloppe F -injective de N .

Remarques :

- a) Supposons que F vérifie C_1 , soit $F' = \{\alpha \in F \mid \forall a \in A \quad \alpha : a \in F\} \subset F$, on a $\mathcal{C}_{F'} = \mathcal{C}_F$ car si M est un module de $\mathcal{C}_F$ et si $x \in M$ on a pour

tout $a \in A$ $\text{Ann}(x) : a = \text{Ann}(ax) \in F$ et $M \in \mathcal{C}_F$; ainsi lorsque F vérifie C_1 on peut toujours supposer que F vérifie C_1 et C_2 pour étudier la F -essentialité ou la F -injectivité.

b) Lorsque F est un site, tout module M possède une enveloppe F -injective définie à un isomorphisme près, si $\hat{M}$ est une enveloppe injective de M il est aisé de vérifier que $E_F(M) = \{x \in \hat{M} \mid M : x \in F\}$ est une enveloppe F -injective de M (dans $\hat{M}$).

A partir de maintenant E désignera toujours le pré-site des idéaux essentiels de A ; pour un module M , EM est le sous module singulier ⁽¹⁶⁾ de M .

4.1.2 - Proposition (cf. ⁽³³⁾) : Lorsque F vérifie C_1 et C_2 il y a équivalence pour un module Q entre

a) Q est F -injectif.

b) Pour tout monomorphisme $N \rightarrow M$ tel que $F(M/N) = M/N$ l'application canonique $\text{Hom}_A(M, Q) \rightarrow \text{Hom}_A(N, Q)$ est surjective,

c) Pour tout idéal $\mathcal{U} \in F \cap E$ l'application canonique

$\text{Hom}_A(A, Q) \rightarrow \text{Hom}_A(\mathcal{U}, Q)$ est surjective,

d) Pour tout idéal $\mathcal{U} \in F$ l'application canonique

$\text{Hom}_A(A, Q) \rightarrow \text{Hom}_A(\mathcal{U}, Q)$ est surjective.

4.1.3 - Soit F un pré-site, pour un module M et un sous module N de M l'ensemble $\text{Cl}_F^M(N) = \{x \in M \mid N : x \in F\}$ est un sous module de M , ⁽¹³⁾. Si G est un autre pré-site, $F.G$ est l'ensemble des idéaux $\mathcal{U}$ tels que $\text{Cl}_F^A(\mathcal{U}) \in G$, l'ensemble $F.G$ est un pré-site contenant F et le produit ainsi défini est associatif ⁽³⁾ car pour tout module M on a $\text{Cl}_{F.G}^M = \text{Cl}_G^M \circ \text{Cl}_F^M$

En particulier

$$(\mathcal{C}\ell_F^M)^n(0) = \mathcal{C}\ell_{F^n}^M(0) = F^n M$$

Enfin F est un site si et seulement si $F^2 = F$.

4.1.4 - Lemme : Pour un pré-site F et un entier p , on a équivalence entre :

a) F^p est un site.

b) Pour tout sous module N d'un module M on a

$$(\mathcal{C}\ell_F^M)^{p+1}(N) = (\mathcal{C}\ell_F^M)^p(N)$$

c) Pour tout module M on a $F^{p+1}M = F^p M$

On peut montrer aisément que pour tout sous module N d'un module M on a $(\mathcal{C}\ell_F^M)^n(N) / N = F^n(M/N)$ pour tout entier n et ainsi b) et c) sont équivalents.

Puisque on a toujours $F^p \mathcal{C}F^{p+1} \mathcal{C} \dots \mathcal{C}F^{2p}$, si F^p est un site on a $F^p = F^{p+1}$ et a) $\Rightarrow$ c). Enfin c) $\Rightarrow$ a) car si $\alpha \in F^{p+1}$ on a $F^p(A/\alpha) = F^{p+1}(A/\alpha)$ et $\alpha = \alpha : 1 \in F^p$ ie $F^p = F^{p+1} = \dots = F^{2p}$.

4.1.5 - Corollaire : Le site $\bar{E}$ engendré par le pré-site E des idéaux essentiels est égal à E^2 .

Car d'après ⁽¹⁵⁾ on a pour tout module M , $E^3 M = E^2 M$.

4.1.6 - Lemme : Soit F un pré-site, pour tout module M et tout entier n $F^n M$ est essentiel dans $F^{n+1} M$.

En effet, si $x \in F^{n+1} M - (0)$ on a $F^n M : x \in F$ et $F^{n-1} M : x \subset F^n M : x$; si $F^n M : x = F^{n-1} M : x$ on a $1.x = x \in F^n M - (0)$, sinon il existe $a \in A$ tel

que $ax \in F^n M$ et $ax \notin F^{n-1} M$ donc $ax \neq 0$

4.1.7 - Lemme : Soit F un site, pour tout module M le localisé LM de M est isomorphe à $E_F(M/FM)$ et la catégorie $\mathcal{L}_F$ a pour objets les F -injectifs M tels que $FM = 0$.

Soit M et posons $M' = M/FM$, d'après la démonstration de la proposition 4 p. 372 de ⁽⁸⁾ on peut obtenir LM comme le sous module de $\hat{M}'$ tel que $LM/M' = F(\hat{M}'/M')$, le premier point résulte alors de la remarque b) de 4.1.1 ; de plus tout F -injectif M tel que $FM = 0$ est alors $\mathcal{C}_F$ -fermé. Réciproquement si M est $\mathcal{C}_F$ -fermé on a d'abord $FM = 0$, et d'après le lemme 1 a) p. 370 de ⁽⁸⁾, pour tout morphisme $u : P \rightarrow Q$ tel que $\text{Ker } u$ et $\text{CoKer } u$ soient dans $\mathcal{C}_F$ l'application canonique $\text{Hom}_A(Q, M) \rightarrow \text{Hom}_A(P, M)$ est un isomorphisme, à fortiori M est F -injectif.

Ce lemme répond à une question posée par SANDERSON dans ⁽³³⁾. En particulier lorsque $F = E^2$ est le site engendré par la famille des idéaux essentiels, $\mathcal{L}_{E^2}$ est la sous catégorie pleine de $\text{Mod } A$ dont les objets sont les modules injectifs M tels que $EM = 0$ (3.2.2) cf. ⁽¹⁶⁾.

Comme l'injection $S : \mathcal{L}_{E^2} \rightarrow \text{Mod } A$ préserve les monomorphismes, tout objet de $\mathcal{L}_{E^2}$ est injectif dans $\mathcal{L}_{E^2}$, comme $\mathcal{L}_{E^2}$ est une catégorie de GROTHENDIECK c'est une catégorie spectrale, nous allons préciser le lien entre la catégorie spectrale $\mathcal{L}_{E^2}$ et la catégorie spectrale de $\text{Mod } A$ au sens de ⁽⁹⁾.

4.2 - Proposition : Soit $P : \text{Mod } A \rightarrow \text{Spec Mod } A$ le foncteur canonique, $\text{Spec Mod } A$ est canoniquement équivalente au produit des catégories $\mathcal{L}_{\frac{E}{E}}$ et $P(\mathcal{C}_E)$.

Considérons la situation où les notations sont celles de 3.2.3 :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{L}_{\overline{E}} & \xleftrightarrow{\quad} & \text{Mod } A & \xrightleftharpoons[S]{T} & \mathcal{L}_{\overline{E}} \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow P & & \nearrow T' \\
 & & & & \text{Spec Mod } A & &
 \end{array}$$

$P \circ S$

D'abord $P \circ S$ est exact car toute petite suite exacte de $\mathcal{L}_{\overline{E}}$ est fissible et $P \circ S$ est additif; de plus $P \circ S$ est pleinement fidèle, en effet pour M dans $\mathcal{L}_{\overline{E}}$ et N' sous module essentiel de N , N/N' est un objet de $\mathcal{L}_{\overline{E}}$; et on a des isomorphismes canoniques :

$$\text{Hom}_A(N, M) \longrightarrow \text{Hom}_A(N', M),$$

qui donnent en prenant la limite inductive suivant la famille des sous modules essentiels de N un isomorphisme

$$\text{Hom}_A(N, M) \longrightarrow \lim_{\substack{\longrightarrow \\ N' \triangleleft N}} \text{Hom}_A(N', M) = \text{Spec Mod } A(PN, PSM).$$

En particulier si $N = SN$ est dans $\mathcal{L}_{\overline{E}}$ cet isomorphisme n'est autre que l'application induite par $P \circ S$:

$$\mathcal{L}_{\overline{E}}(N, M) \longrightarrow \text{Spec Mod } A(PSN, PSM).$$

On peut donc identifier $\mathcal{L}_{\overline{E}}$ à une sous catégorie pleine et exacte de $\text{Spec Mod } A$.

Montrons maintenant que T préserve les monomorphismes essentiels.

Soit N un sous module essentiel de M , on a $\overline{E}N = \overline{E}M \cap N$ d'où une suite exacte

$$0 \longrightarrow N / \overline{E}N \longrightarrow M / \overline{E}M \longrightarrow M / \overline{E}M + N \longrightarrow 0$$

dans laquelle $E(M / \overline{E}M) = 0$ et $E(M / \overline{E}M + N) = M / \overline{E}M + N$ puisque $M / \overline{E}M + N$ est un quotient de M/N ; il est bien connu que ces conditions suffisent pour que $N / \overline{E}N$

soit essentiel dans $M/\bar{E}M$, ainsi $N/\bar{E}N$ et $M/\bar{E}M$ ont même enveloppe injective ie $TN = TM$ et à fortiori T préserve les monomorphismes essentiels.

D'autres parts $\mathcal{L}_{\bar{E}}$ est spectrale donc isomorphe à $\text{Spec } \mathcal{L}_{\bar{E}}$ et il résulte de (9) qu'il existe un foncteur $T' : \text{Spec } \text{Mod } A \rightarrow \mathcal{L}_{\bar{E}}$ tel que $T' \circ P = T$. Pour tout objet PM de $\text{Spec } \text{Mod } A$ et tout objet N de $\mathcal{L}_{\bar{E}}$ on a alors des isomorphismes

$$\mathcal{L}_{\bar{E}}(T'PM, N) = \mathcal{L}_{\bar{E}}(TM, N) \cong \text{Hom}_A(M, SN) \cong \text{Spec } \text{Mod } A(PM, PSM)$$

qui montrent que T' est adjoint à gauche à $P \circ S$, en particulier T' est additif comme tout foncteur adjoint à un foncteur additif et puisque $\text{Spec } \text{Mod } A$ est spectrale T' est exact.

Il est aisé de vérifier que le morphisme $\phi : T' \circ P \circ S \rightarrow \text{Id } \mathcal{L}_{\bar{E}}$ de l'adjonction définie ci-dessus est en fait un isomorphisme.

On peut alors utiliser la prop. 5 p. 374 de (8) et sa démonstration, ie $\text{Ker } T'$ est une sous catégorie localisante de $\text{Spec } \text{Mod } A$ et la restriction de T' à la sous catégorie $\mathcal{L}$ des objets $\text{Ker } T'$ -fermés est une équivalence de $\mathcal{L}$ avec $\mathcal{L}_{\bar{E}}$.

On a enfin $\text{Ker } T' = P(\mathcal{C}_{\bar{E}})$ car $T' \circ PM = 0$ si et seulement si M est dans $\text{Ker } T = \mathcal{C}_{\bar{E}}$, et $P(\mathcal{C}_{\bar{E}}) = P(\mathcal{C}_{\bar{E}})$ car si $M \in \text{Ob } \mathcal{C}_{\bar{E}}$, on a $EM \in \text{Ob } \mathcal{C}_{\bar{E}}$ et EM est essentiel dans $E^2M = \bar{E}M$ (4.1.5 et 4.1.6). La conclusion résulte alors du lemme suivant dont la démonstration est facile :

Lemme : Soit $\mathcal{A}$ une catégorie spectrale, toute sous catégorie localisante de $\mathcal{A}$ définit une équivalence $\mathcal{A} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{L}$ où $\mathcal{L}$ est la sous catégorie des objets $\mathcal{C}$ -fermés.

Pour tout objet M de $\mathcal{A}$ on a en effet une suite exacte fissible

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_M \longrightarrow M \longrightarrow LM \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{C}_M$ est le plus grand sous objet de M dans $\mathcal{C}$ et LM le localisé de M pour $\mathcal{C}$, et $M \rightsquigarrow (\mathcal{C}_M, LM)$ définit l'équivalence cherchée.

4.3 - Caractérisation de $\overline{F}$.

Soit F une famille d'idéaux vérifiant C_1, C_2 , on se propose de déterminer $\overline{F}$, pour cela on utilise une technique de ⁽¹⁰⁾ et on commence par deux lemmes (cf. ⁽¹⁰⁾).

4.3.1 - Lemme 1 : Soit $\mathcal{D}$ une classe de A -modules; les modules M tels que pour tout morphisme $u : N \rightarrow M$ et tout $Q \in \mathcal{D}$ l'application canonique

$$\text{Hom}_A(N, Q) \longrightarrow \text{Hom}_A(\text{Ker } u, Q)$$

soit bijective définissent une sous catégorie localisante de $\text{Mod } A$.

4.3.2 - Lemme 2 : Soient M et Q deux A -modules tels que pour tout $u : A \rightarrow M$ l'application canonique $\text{Hom}_A(A, Q) \longrightarrow \text{Hom}_A(\text{Ker } u, Q)$ soit bijective, alors pour tout module P et tout $u : P \rightarrow M$ l'application canonique

$$\overline{u} : \text{Hom}_A(P, Q) \longrightarrow \text{Hom}_A(\text{Ker } u, Q) \text{ est bijective.}$$

Démontrons le lemme 2. Montrons d'abord que pour tout module P et tout $u : P \rightarrow M$ l'application canonique $\overline{u}$ est injective.

Soit $v : P \rightarrow Q$ un morphisme non nul, il existe $h : A \rightarrow P$ tel que vh soit non nul, donc par hypothèse $vh|_{\text{Ker } uh} \neq 0$ et à fortiori $v|_{\text{Ker } u} \neq 0$.

Soit maintenant $g : \text{Ker } u \rightarrow Q$, on peut trouver un prolongement maximal de g soit $g' : P' \rightarrow Q$ où $\text{Ker } u \subset P' \subset P$, supposons $P' \neq P$ et soit $x \in P - P'$,

soit $h : A \rightarrow P$ tel que $h(a) = ax$, considérons le diagramme suivant où h' et h'' sont induites par h :

$$\begin{array}{ccccc} h^{-1}(\text{Ker } u) & \longrightarrow & h^{-1}(P') & \longrightarrow & A \\ \downarrow h' & & \downarrow h'' & & \downarrow h \\ \text{Ker } u & \hookrightarrow & P' & \hookrightarrow & P \end{array}$$

Puisque $h^{-1}(\text{Ker } u) = \text{Ker } uh$ avec $uh : A \rightarrow M$, gh' se prolonge en un morphisme $g_0 : A \rightarrow Q$, alors $g'h''$ et g_0 coïncident sur $h^{-1}(\text{Ker } u)$ que l'on peut considérer comme le noyau de $h^{-1}(P') \hookrightarrow A \xrightarrow{uh} M$ et la première partie de la démonstration prouve que $g'h''$ et g_0 coïncident sur $h^{-1}(P')$. Ceci permet de définir un morphisme g'' sur $P' + Ax$ par $g''(y + ax) = g'(y) + g_0(a)$ qui prolonge strictement g , ce qui est absurde et $P' = P$.

La démonstration précédente m'a été aimablement communiquée par P. GABRIEL.

La démonstration du lemme 1 est purement technique, elle s'appuie sur le lemme 2 et figure en détail dans ⁽³⁴⁾.

4.3.3 - Corollaire : Soit $\mathcal{D}$ une classe de A -modules, les A -modules M tels que pour tout morphisme $u : A \rightarrow M$ et tout $Q \in \mathcal{D}$ l'application canonique $\text{Hom}_A(A, Q) \longrightarrow \text{Hom}_A(\text{Ker } u, Q)$ soit bijective, définissent une sous-catégorie localisante $\mathcal{C}$, et tout module de $\mathcal{D}$ est $\mathcal{C}$ -fermé.

Il reste à montrer que si $Q \in \mathcal{D}$ alors Q est $\mathcal{C}$ -fermé. Soit $I(\mathcal{C}) = F$ le site associé à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{U} \in F$, en prenant pour $u : A \rightarrow A/\mathcal{U}$ l'application canonique, on voit que $\text{Hom}_A(A/\mathcal{U}, Q) = 0$ car $\text{Hom}_A(A, Q) \longrightarrow \text{Hom}_A(\mathcal{U}, Q)$ est bijective, ie $FQ = 0$ et Q est F -injectif (3.2.2, 4.1.2) et la conclusion résulte de 4.1.7.

4.3.4 - Proposition : Soit F une famille d'idéaux vérifiant C_1 et C_2 ; un idéal $\mathfrak{a}$ est dans $\overline{F}$ si et seulement si pour tout F -injectif Q tel que $FQ = 0$ l'application canonique $\text{Hom}_A(A, Q) \longrightarrow \text{Hom}_A(\mathfrak{a}, Q)$ est bijective.

Soient $\mathcal{L}$ la catégorie des $\mathcal{C}_{\overline{F}}$ -fermés et $\mathcal{D}$ la classe des F -injectifs Q tels que $FQ = 0$, on a $\text{Ob } \mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{D}$. Soit F_0 le site associé à $\mathcal{D}$ par le procédé du corollaire 4.3.3.

On a $F \subset F_0$, en effet soit $\mathfrak{a} \in F$ et $u: A \rightarrow A/\mathfrak{a}$ un morphisme, si $u(1) = \mathfrak{a} + a$, on a $\text{Ker } u = \mathfrak{a}: a \in F$ donc pour $Q \in \mathcal{D}$ l'application canonique $\text{Hom}_A(A, Q) \longrightarrow \text{Hom}_A(\text{Ker } u, Q)$ est surjective, elle est injective car $F\mathcal{C} = 0$ et $\text{Hom}_A(A/\mathfrak{a}: a, Q) = 0$. On en déduit que $\overline{F} \subset F_0$. Pour montrer que $F_0 \subset \overline{F}$ commençons par montrer qu'un idéal $\mathfrak{a} \in \overline{F}$ si et seulement si pour tout $Q \in \mathcal{D}$ on a $\text{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, Q) = 0$. La nécessité vient de ce que si $Q \in \mathcal{D}$ on a $\overline{F}Q = 0$. Soit donc $\mathfrak{a}$ tel que $\text{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, Q) = 0$ pour tout Q de $\mathcal{D}$ et soit M tel que $\overline{F}M = 0$ i.e. $FM = 0$ et $M \in \mathcal{m}(\mathcal{C}_{\overline{F}})$; soit $u: A/\mathfrak{a} \rightarrow M$ un morphisme, M s'injecte dans son localisé LM pour $\overline{F}$ qui est dans $\mathcal{D}$ et le composé $A/\mathfrak{a} \xrightarrow{u} M \hookrightarrow LM$ est donc nul i.e. $u = 0$.

Il est alors facile d'achever la démonstration car si $\mathfrak{a} \in F_0$ on a $\text{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, Q) = 0$ pour tout $Q \in \mathcal{D}$ et $\mathfrak{a} \in \overline{F}$.

4.3.5 - Corollaire : Soit F une famille d'idéaux vérifiant C_1 C_2 , tout module F -injectif Q tel que $FQ = 0$ est aussi $\overline{F}$ -injectif.

Sans l'hypothèse que $FQ = 0$, est-ce qu'un F -injectif Q est aussi $\overline{F}$ -injectif ? On a le résultat très partiel suivant :

4.3.6 - Proposition : Soit F un pré-site sur un anneau noethérien, tout F -injectif est aussi $\overline{F}$ -injectif.

Ceci résultera des deux lemmes suivants :

4.3.7 - Lemme : Soient F et G deux pré-sites sur un anneau A , tout module F -injectif et G -injectif est $F.G$ -injectif.

Soit M un module F -injectif et G -injectif, α un idéal de $F.G$ et f un morphisme de α dans M , on peut trouver un prolongement maximal de f , soit $g : \mathcal{A} \rightarrow M$ où $\alpha \subset \mathcal{A} \subset A_S$ un tel prolongement, puisque $\alpha \in F.G$ il existe $b \in G$ tel que pour tout $a \in b$ on a $\alpha : a \in F$; si $b \subset \mathcal{A}$ c'est terminé, car alors $\mathcal{A} \in G$ et g se prolonge à A_S , sinon soit $a \in b - \mathcal{A}$, on a $\alpha : a \in \mathcal{A} : a$ donc $\mathcal{A} : a \in F$ et le morphisme $x \mapsto g(xa)$ de $\mathcal{A} : a$ dans M est donc de la forme $x \mapsto xt$ puisque M est F -injectif. On vérifie alors aisément que $y + xa \mapsto g(y) + xt$ définit un morphisme de $\mathcal{A} + Aa$ dans M qui prolonge strictement g ce qui est absurde et prouve le résultat.

4.3.8 - Lemme : Pour tout pré-site F sur un anneau noethérien, on a $\overline{F} = \bigcup_{n \geq 1} F^n$.

Comme $\bigcup_{n \geq 1} F^n \subset \overline{F}$ il suffit de montrer que $G = \bigcup_{n \geq 1} F^n$ est un site, il est immédiat de vérifier que G est un pré-site et il reste à voir que $G^2 = G$. Soit donc $\alpha \in G^2$ ie $Cl_G^A(\alpha) \in G$; il existe n tel que $Cl_G^A(\alpha) \in F^n$. Comme A est noethérien on peut trouver une famille finie $a_1, \dots, a_p$ de générateurs de $Cl_G^A(\alpha)$,

et pour $i=1 \dots p$, il existe $n(i)$ tel que $\alpha : a_i \in F^{n(i)}$; posons $m = \max_{1 \leq i \leq p} n(i)$, on a alors $\text{Cl}_G^A(\alpha) = \text{Cl}_{F^m}^A(\alpha)$; en effet on a évidemment $\text{Cl}_{F^m}^A(\alpha) \subset \text{Cl}_G^A(\alpha)$ et si $x = \sum \lambda_i a_i$ est un élément de $\text{Cl}_G^A(\alpha)$ on a

$$\alpha : x \supset \bigcup_{i=1}^p (\alpha : a_i) : \lambda_i \text{ avec } \bigcup_{i=1}^p (\alpha : a_i) : \lambda_i \in F^m \text{ donc } \alpha : x \in F^m.$$

On a alors $\text{Cl}_{F^m}^A(\alpha) \in F^n$ et $\alpha \in F^{n+m} \subset G$, ce qui achève la preuve.

Le résultat du lemme ci-dessus est énoncé sans démonstration dans ⁽¹³⁾.

5 - Existence des enveloppes F-injectives.

Lorsque F est un site on sait ⁽³³⁾ que tout module possède une enveloppe F-injective définie à un isomorphisme près; de plus la relation de F-essentialité $\mathcal{A}_F$ est transitive. On se propose ici d'étudier dans quelle mesure on peut affaiblir les conditions que doit remplir F pour conserver l'existence des enveloppes F-injectives ou la transitivité de $\mathcal{A}_F$, nous verrons que ces deux propriétés sont étroitement liées, et que lorsqu'elles sont vérifiées les notions d'enveloppe F-injective et d'extension F-essentielle coïncident avec les notions analogues définies pour un site F'.

Commençons par remarquer que pour une famille F d'idéaux de A les notions d'extension F-essentielle et $F \cap E$ -essentielle coïncident comme il résulte immédiatement des définitions (4.1.1).

Pour une famille F d'idéaux de A nous pourrions considérer, en plus des conditions C_0, C_1, C_2, C_3 de 3.2, la condition suivante :

C'_3 - Si α est un idéal de A tel qu'il existe $h \in F$ avec α essentiel dans h et $\alpha : a \in F$ pour tout $a \in h$ alors $\alpha \in F$.

5.1 - Proposition : Soit F un ensemble d'idéaux vérifiant C_2 , on a équivalence entre :

- a) la relation de F -essentialité est transitive,
- b) la relation de F -essentialité est transitive dans l'ensemble des idéaux de A ,
- c) l'ensemble $F \cap E$ vérifie C_3'

l'implication $a) \Rightarrow b)$ est triviale, montrons que $b) \Rightarrow c)$, soit donc α essentiel dans $\mathfrak{h}$ avec $\mathfrak{h} \in F \cap E$ et $\alpha : a \in F \cap E$ pour tout $a \in \mathfrak{h}$. On a donc $\alpha \triangleleft_F \mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h} \triangleleft_{FA_S}$ d'où $\alpha \triangleleft_{FA_S}$ et $\alpha = \alpha : 1 \in F$ donc $F \cap E$ vérifie C_3' .

Montrons que $c) \Rightarrow a)$, soit $N \triangleleft_F M$ et $M \triangleleft_F P$, on a évidemment N essentiel dans P , pour $x \in P$ on a $M : x \in F \cap E$ et pour tout élément $a \in M : x$ on a $(N : x) : a = N : ax \in F \cap E$ donc d'après C_3' on a $N : x \in F \cap E$ puisque $N : x$ est essentiel dans A_S et à fortiori dans $M : x$.

5.2 - Proposition : Soit F un ensemble d'idéaux de A vérifiant C_1 , on a équivalence entre :

- a) la relation de F -essentialité est transitive,
- b) tout module a une enveloppe F -injective.

$a) \Rightarrow b)$ Soit $M \rightarrow \hat{M}$ une enveloppe injective de M , soit $\mathcal{F}$ la famille des sous modules M' de $\hat{M}$ tels que M soit F -essentiel dans M' , la famille $\mathcal{F}$ est non vide car $M \in \mathcal{F}$, on peut vérifier aisément que l'ensemble $\mathcal{F}$ ordonné par inclusion, est inductif. Soit M_0 un élément maximal de $\mathcal{F}$, il résulte de la transitivité de la relation $\triangleleft_F$ que M_0 est sans extension F -essentielle propre dans $\hat{M}$. Montrons que M_0 est F -injectif, ce qui prouvera que M_0 est une enveloppe F -injective de M . Soit $N \hookrightarrow P$ une extension F -essentielle et $f : N \rightarrow M_0$ un morphisme,

il existe un morphisme $g : P \rightarrow \widehat{M}$ qui prolonge f , on va montrer que $g(P) \subset M_0$, ce qui achèvera la preuve; d'après ce qui précède il suffit de montrer que M_0 est F -essentiel dans $M_0 + g(P)$, or M_0 est essentiel dans $M_0 + g(P)$ et pour tout $y \in M_0$ et tout $x \in P$ on a $N : x \in F$ avec

$$N : x \in M_0 : g(x) = M_0 : (y + g(x))$$

d'où le résultat.

b) $\Rightarrow$ a) Ceci reste vrai sans hypothèse sur F . Soient $N \hookrightarrow M$ et $M \hookrightarrow P$ deux extensions F -essentielles, soit $N \xrightarrow{i} N'$ une enveloppe F -injective de N , par F -injectivité on peut trouver $g : M \rightarrow N'$ prolongeant i , puis $f : P \rightarrow N'$ prolongeant g , par essentialité de N dans P , f est injectif et on a pour $x \in P$

$$N : x = i(N) : f(x) \in F \quad \text{d'où le résultat.}$$

A partir de là, nous supposerons jusqu'à la fin de ce numéro que F vérifie toujours C_1 et C_2 . D'après la remarque de 4.1.1, on peut toujours se ramener à ce cas pour étudier la relation de F -essentialité ou les F -injectifs pour une famille F vérifiant C_1 .

5.3 - Lemme : Soit $F \subset E$ tel que F vérifie C_1 , C_2 et C_3' alors F est un pré-site et

a) F^2 est le plus petit site contenant F , ie $F^2 = \overline{F}$,

b) Les relations de F -essentialité et F^2 -essentialité coïncident.

Si $F \subset E$ et F vérifie C_1 , C_2 et C_3' il est immédiat de vérifier que F est un pré-site, et on peut ainsi parler de F^2 .

Pour montrer a) il suffit d'après 4.1.4 de montrer que pour tout module M on a $F^3 M = F^2 M$; soit $x \in F^3 M$, on a $F^2 M : x \in F$ et FM est essentiel dans $F^2 M$ d'après 4.1.6, donc $FM : x$ est essentiel dans $F^2 M : x$ et pour tout $a \in F^2 M : x$ on a $(FM : x) : a = FM : ax \in F$, donc d'après C_3' on a $FM : x \in F$ et $x \in F^2 M$.

ie $F^3M = F^2M$.

b) Il résulte des définitions qu'il suffit de démontrer que $F^2 \cap E = F$, on a déjà $F \subset F^2 \cap E$; soit donc $\alpha \in F^2 \cap E$, il existe alors $h \in F$ tel que pour tout $x \in h$ on a $\alpha : x \in F$, comme α est essentiel dans A_g donc dans h il résulte de C'_3 que $\alpha \in F$.

5.4 - Proposition : Soit F un ensemble d'idéaux vérifiant C_1 et C_2 , on a équivalence entre

- a) la relation de F -essentialité est transitive,
- b) tout module possède une enveloppe F -injective,
- c) l'ensemble $F \cap E$ vérifie C'_3 .

De plus lorsque ces conditions sont vérifiées, $F \cap E$ est un pré-site, $F' = (F \cap E)^2$ est un site, et les notions de F -essentialité, et F -injectivité coïncident respectivement avec les notions de F' -essentialité et F' -injectivité. En particulier l'enveloppe F -injective de tout module coïncide avec son enveloppe F' -injective.

L'équivalence de a) b) et c) résulte de 5.1 et 5.2.

La relation de F -essentialité coïncide avec la relation de $F \cap E$ essentialité qui coïncide avec la relation de $(F \cap E)^2$ essentialité avec le lemme précédent. Comme tout module F' -injectif est $F \cap E$ -injectif donc F -injectif, il reste à voir qu'un module F -injectif est F' -injectif ce qui résulte de 4.1.2 et 4.3.7.

CHAPITRE II : INJECTIFS RELATIFS et SOUS CATEGORIES FERMEES, APPLICATIONS.

Dans tout ce chapitre on supposera que la catégorie abélienne $\mathcal{A}$ est complète à gauche et à droite et localement petite.

1 - Injectifs relatifs.

1.1 - Généralités .

1.1.1 - Définitions : Pour une classe S d'objet de $\mathcal{A}$ soit $\mathcal{I}(S)$ (resp. $\rho(S)$) la classe des objets M de la catégorie $\mathcal{A}$ tels que le foncteur $\mathcal{A}(-, M)$ (resp. $\mathcal{A}(M, -)$) soit exact sur les suites exactes de la forme $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$, où N est un objet de S . Un objet de $\mathcal{I}(S)$ (resp. $\rho(S)$) est appelé S -injectif (resp. S -projectif) (⁽²⁵⁾ et (⁽²⁹⁾)).

Pour une classe S d'objets de $\mathcal{A}$, soit $\mathcal{I}^{-1}(S)$ (resp. $\rho^{-1}(S)$) la classe des objets M de $\mathcal{A}$ tels que tout objet de S soit M -injectif (resp. M -projectif). On note M -injectif au lieu de $\{M\}$ -injectif.

Exemples : Un objet M de $\mathcal{A}$ est quasi-injectif si et seulement si il est M -injectif. Soit $\mathcal{F}$ la classe des objets M de $\mathcal{A}$ tels que tout sous objet de M soit facteur direct de M . Pour toute classe S d'objets de $\mathcal{A}$ on a $\mathcal{F} \subset \mathcal{I}^{-1}(S)$ et $\mathcal{F} \subset \rho^{-1}(S)$, et il est d'ailleurs immédiat de vérifier que si un objet M de $\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{I}^{-1}(S)$ (resp. $\rho^{-1}(S)$) pour toute classe S d'objets de $\mathcal{A}$ alors $M \in \mathcal{F}$.

1.1.2 - Objets fortement caractéristiques.

Définition : Un sous objet N d'un objet M de $\mathcal{A}$ est fortement caractéristique dans M si pour tout sous objet N' de N l'application canonique,

$$\mathcal{A}(N', N) \rightarrow \mathcal{A}(N', M) \text{ est bijective.}$$

Exemples : Si M est quasi-injectif, tout sous objet caractéristique est fortement caractéristique dans M .

Si $\mathcal{C}$ est une sous catégorie fermée de $\mathcal{A}$, ie stable par sous objets, objets quotients et sommes directes quelconques, pour tout objet M de $\mathcal{C}$ le plus grand sous objet $\mathcal{C}M$ de M dans $\mathcal{C}$ est fortement caractéristique dans M .

Le lemme suivant nous permettra d'avoir un autre exemple important de sous objet fortement caractéristique.

1.1.3 - Lemme : Soit $i : M' \rightarrow M$ une extension essentielle dans $\mathcal{A}$, si un objet N de $\mathcal{A}$ est tel que M' est N -injectif, tout morphisme $f : N \rightarrow M$ se factorise par $i : M' \hookrightarrow M$.

Soit $f : N \rightarrow M$, f induit un morphisme $f' : f^{-1}(M') \rightarrow M'$ qui se prolonge en $g : N \rightarrow M'$. On a donc le diagramme commutatif suivant où $q : M \rightarrow M/M'$ est le morphisme canonique et $j = \text{Ker}(q.f)$

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & f^{-1}(M') & \xrightarrow{j} & N & & \\
 & & \downarrow f' & \swarrow g & \downarrow f & & \\
 0 & \longrightarrow & M' & \xleftarrow{i} & M & \xrightarrow{q} & M/M' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Il suffit de montrer que $ig - f = 0$. Posons $u = ig - f$ et $A = u^{-1}(u(N) \wedge M')$; Alors $u(A) = u(N) \wedge M'$ est non nul dès que $u(N)$ est non nul car M' est essentiel dans M . Soit $s : A \rightarrow N$ le morphisme canonique, puisque $u(A) \leq M'$ on peut écrire $us = i \tau$ puis $fs = i(gs - \tau)$ d'où $q.f.s = 0$ et ainsi $A \leq \text{Ker}(q.f) = f^{-1}(M')$, ce qui prouve que $u(A) = 0$ donc que $u(N) = 0$ et $u = 0$.

1.1.4 - Corollaire : Un objet quasi-injectif est fortement caractéristique dans toute extension essentielle.

Soit $i : M' \rightarrow M$ une extension essentielle d'un objet quasi-injectif M' de $\mathcal{A}$. Pour tout sous objet N de M' on a M' qui est N -injectif et tout morphisme $N \rightarrow M$ se factorise par M' d'après le lemme 1.1.3.

1.1.5 - Corollaire : Soit $M' \rightarrow M$ une enveloppe injective d'un objet M' de $\mathcal{A}$, un objet N de $\mathcal{A}$ est tel que M' soit N -injectif si et seulement si pour tout morphisme $f : N \rightarrow M$ on a $f(N) \leq M'$.

La condition nécessaire n'est autre que le lemme 1.1.3, la condition suffisante résulte immédiatement de l'injectivité de M .

1.1.6 - Corollaire : Pour toute classe S d'objets de $\mathcal{A}$, toute extension essentielle d'un objet de $\mathcal{L}(S)$ est dans $\mathcal{L}(S)$.

Si $M' \rightarrow M$ est une extension essentielle d'un objet M' de $\mathcal{L}(S)$, soit N un objet de S , alors M' est M -injectif et ainsi N' -injectif pour tout sous objet N' de N ; si $u : N' \rightarrow M$ est un morphisme d'un sous objet N' de N dans M il résulte du lemme 1.1.3 que u se factorise par $M' \rightarrow M$, donc se prolonge à N . On donne maintenant quelques propriétés de $\mathcal{L}(S)$ pour une classe S d'objets de $\mathcal{A}$.

1.1.7 - Proposition : Pour une famille $(M_i)_I$ d'objets de $\mathcal{A}$, le produit $M = \prod_I M_i$ est dans $\mathcal{L}(S)$ si et seulement si pour tout $i \in I$, M_i est dans $\mathcal{L}(S)$.

Soit $N' \rightarrow N$ un monomorphisme où N est dans S , on a un diagramme canonique commutatif où les flèches verticales sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{(N,M)} & \longrightarrow & \mathcal{A}_{(N',M)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_I \mathcal{A}_{(N,M_i)} & \longrightarrow & \prod_I \mathcal{A}_{(N',M_i)} \end{array}$$

qui montre que M est dans $\mathcal{L}(S)$ si et seulement si pour tout $i \in I$ M_i est dans $\mathcal{L}(S)$.

En général $\mathcal{L}(S)$ n'est pas stable par sous objets ou objets quotients on a cependant le résultat suivant.

1.1.8 - Proposition : Soit S une classe d'objets projectifs de $\mathcal{A}$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- a) Tout quotient d'un objet de $\mathcal{L}(S)$ est dans $\mathcal{L}(S)$.
- b) Pour tout objet N de S , tout sous objet N' de N est dans $\rho \mathcal{L}(S)$.

Soit $N' \rightarrow N$ un sous objet d'un objet N de S et $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ une suite exacte de $\mathcal{A}$ où $M \in \mathcal{L}(S)$, on a le diagramme commutatif et exact suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}(N/N', M) & \longrightarrow & \mathcal{A}(N, M) & \longrightarrow & \mathcal{A}(N', M) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow g \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}(N/N', M'') & \longrightarrow & \mathcal{A}(N, M'') & \xrightarrow{f} & \mathcal{A}(N', M'') \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & &
 \end{array}$$

Si tout quotient M'' d'un objet M de $\mathcal{L}(S)$ est dans $\mathcal{L}(S)$ l'application f du diagramme ci-dessus est surjective pour tout sous objet N' d'un objet N de S , et il en est de même de g , ie tout sous objet N' d'un objet N de S est dans $\rho(\mathcal{L}(S))$ et $a) \Rightarrow b)$, on démontre de façon analogue que $b) \Rightarrow a)$.

Remarque : Prenons pour $\mathcal{A}$ la catégorie $\text{Mod } A$ des A -modules à gauche sur un anneau A et pour S la classe de tous les A -modules projectifs, alors $\mathcal{L}(S)$ est la classe de tous les A -modules injectifs et $\rho \mathcal{L}(S)$ la classe des A -modules projectifs comme il résulte de l'exercice 25 du § 2 de ⁽²⁾. On a alors le résultat classique concernant les anneaux héréditaires à savoir que tout quotient

d'un injectif est injectif si et seulement si tout sous module d'un projectif est projectif.

Nous allons maintenant nous intéresser aux propriétés de $\mathcal{L}^{-1}(S)$ pour une sous classe S d'objets de $\mathcal{A}$.

1.1.9 - Proposition :

a) $\mathcal{L}^{-1}(S)$ est stable par sous objets, objets quotients et sommes directes finies

b) Si l'une des conditions suivantes est vérifiée,

1/ tout objet de S a une enveloppe injective dans $\mathcal{A}$,

2/ les limites inductives de $\mathcal{A}$ sont exactes,

alors la sous catégorie pleine $\mathcal{L}^{-1}(S)$ définie par $\mathcal{L}^{-1}(S)$ est fermée.

a) La stabilité de $\mathcal{L}^{-1}(S)$ par sous objets résulte immédiatement des définitions. Soit M un objet de $\mathcal{L}^{-1}(S)$ et M/M' un quotient de M par un sous objet M' , montrons que M/M' est dans $\mathcal{L}^{-1}(S)$, soit N un objet de S et M''/M' un sous objet de M/M' avec $M' \leq M'' \leq M$, on a un diagramme commutatif et exact

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & M''/M' \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/M' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

d'où l'on déduit le diagramme commutatif et exact suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{L}(M/M', N) & \longrightarrow & \mathcal{L}(M, N) & \longrightarrow & \mathcal{L}(M', N) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{L}(M''/M', N) & \longrightarrow & \mathcal{L}(M'', N) & \longrightarrow & \mathcal{L}(M', N) \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & &
 \end{array}$$

qui montre que le morphisme canonique $\mathcal{A}(M/M', N) \rightarrow \mathcal{A}(M''/M', N)$ est surjectif, ceci ayant lieu pour tout objet N de S il en résulte que M/M' est dans $\mathcal{L}^{-1}(S)$ qui est donc stable par quotients.

Montrons la stabilité de $\mathcal{L}^{-1}(S)$ par sommes directes finies, pour cela il suffit de montrer que pour deux objets M_1 et M_2 de $\mathcal{L}^{-1}(S)$ la somme $M_1 \oplus M_2$ et dans $\mathcal{L}^{-1}(S)$, soit M' un sous-module de $M = M_1 \oplus M_2$ et considérons le diagramme commutatif et exact suivant où i et p sont les morphismes canoniques :

$$\begin{array}{ccccccc} & \circ & & \circ & & \circ & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \circ & \longrightarrow & M_1 \wedge M' & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M'/M_1 \wedge M' \longrightarrow \circ \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \circ & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{p} & M_2 \longrightarrow \circ \end{array}$$

On en déduit pour un objet N de S le diagramme commutatif et exact suivant en posant $M'_1 = M_1 \wedge M'$ et $M'_2 = M'/M_1 \wedge M'$,

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \longrightarrow & \mathcal{A}(M_2, N) & \longrightarrow & \mathcal{A}(M, N) & \longrightarrow & \mathcal{A}(M_1, N) \longrightarrow \circ \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \circ & \longrightarrow & \mathcal{A}(M'_2, N) & \longrightarrow & \mathcal{A}(M', N) & \longrightarrow & \mathcal{A}(M'_1, N) \longrightarrow \circ \\ & & \downarrow & & & & \downarrow \\ & & \circ & & & & \circ \end{array}$$

il résulte alors du lemme des cinq que l'application canonique $\mathcal{A}(M, N) \rightarrow \mathcal{A}(M', N)$ est surjective et ainsi M est dans $\mathcal{L}^{-1}(S)$ puisque ceci a lieu pour tout objet N de S , d'où le résultat.

Montrons b), il suffit de montrer que $\mathcal{L}^{-1}(S)$ est stable par sommes quelconques.

Soit $(N_i)_I$ une famille d'objets de $\mathcal{L}^{-1}(S)$ et $N = \bigoplus_I N_i$ leur somme, montrons que N est dans $\mathcal{L}^{-1}(S)$.

1/ Si tout objet M de S possède une enveloppe injective $\hat{M}$ dans $\mathcal{A}$ il résulte du critère 1.1.5 qu'il suffit de montrer que pour tout objet M de S et tout morphisme $f : N \rightarrow \hat{M}$ on a $\text{Im } f \leq M$. Soient $e_i : N_i \rightarrow N$ les morphismes

canoniques, pour tout $i \in I$ on a $\text{Im } f_{e_i} \leq M$ i.e. $f_{e_i} = \alpha g_i$ où $\alpha : M \rightarrow \hat{M}$ est le morphisme canonique; la famille $(g_i)_I$ donne alors un morphisme $g : N \rightarrow M$ tel que $\alpha g = f$ d'où le résultat.

2/ Supposons maintenant que $\mathcal{A}$ soit une catégorie à limites inductives exactes; soit $N' \rightarrow N$ un monomorphisme et $f : N' \rightarrow M$ un morphisme où M est un objet de S . Puisque les limites inductives sont exactes, on peut trouver un prolongement maximal $g : N'' \rightarrow M$ de f avec $N' \leq N'' \leq N$. Si N'' est distinct de N il existe une partie finie $J \subset I$ telle que $N'' \wedge N_J$ soit distinct de N_J où $N_J = \bigoplus_{i \in J} N_i$ est considéré comme sous objet de N , comme N_J est dans $\mathcal{C}^{-1}(S)$ d'après a) la restriction de g à $N'' \wedge N_J$ se prolonge à N_J par $h : N_J \rightarrow M$. D'autre part le diagramme canonique

$$\begin{array}{ccc} N'' \wedge N_J & \xrightarrow{\quad} & N_J \\ \downarrow & & \downarrow \\ N'' & \xrightarrow{\quad} & N'' \vee N_J \end{array}$$

représente une somme fibrée et il existe un morphisme $n : N'' \vee N_J \rightarrow M$ prolongeant strictement g , ce qui est absurde, donc $N'' = N$ ce qui achève la preuve.

Remarque : La démonstration du a) de la proposition 1.1.9 repose sur une adaptation des démonstrations des lemmes 4 et 5 du chapitre I, § 2 de ⁽³⁾. Le a) et le b) ont été trouvés indépendamment par E. de ROBERT ⁽²⁹⁾.

1.2 - Applications aux objets quasi-injectifs.

Les sous catégories pleines $\mathcal{C}^{-1}(S)$ considérées dans ce numéro sont toujours supposées être des sous catégories fermées de $\mathcal{A}$. C'est-à-dire par exemple, que S vérifie la condition b) de 1.1.9 ou que $\mathcal{A}$ est avec limites inductives exactes. Tout objet M de $\mathcal{A}$ possède alors un plus grand sous objet $\mathcal{C}^{-1}(S) M$ dans $\mathcal{C}^{-1}(S)$

que l'on désignera par $\mathcal{L}_S M$; si la classe S est réduite à un seul objet N on notera $\mathcal{L}_N M$ au lieu de $\mathcal{L}_{\{N\}} M$.

1.2.1 - Proposition : Pour tout M de S le sous objet $\mathcal{L}_S M$ de M est quasi-injectif et fortement caractéristique dans M .

Comme $\mathcal{L}_S^{-1}(S)$ est une sous catégorie fermée de $\mathcal{A}$, le sous objet $\mathcal{L}_S M$ est fortement caractéristique dans M (1.1.2 exemple). Montrons que $\mathcal{L}_S M$ est quasi-injectif, soit $N' \rightarrow \mathcal{L}_S M$ un sous objet de $\mathcal{L}_S M$ et $u : N' \rightarrow \mathcal{L}_S M$ un morphisme, comme M est $\mathcal{L}_S M$ -injectif le composé $N' \rightarrow \mathcal{L}_S M \hookrightarrow M$ se prolonge en un morphisme $\mathcal{L}_S M \xrightarrow{v} M$ qui se factorise par l'injection $\mathcal{L}_S M \hookrightarrow M$ puisque $\mathcal{L}_S M$ est fortement caractéristique dans M , d'où le résultat.

1.2.2 - Proposition : Pour tout objet M de $\mathcal{A}$, $\mathcal{L}_M M$ est le plus grand sous objet quasi-injectif et fortement caractéristique de M .

Il résulte de la proposition précédente que $\mathcal{L}_M M$ est quasi-injectif et fortement caractéristique dans M ; soit maintenant N un sous-module quasi-injectif et fortement caractéristique de M , tout morphisme $u : N' \rightarrow M$ d'un sous objet N' de N dans M se factorise par le morphisme canonique $N \rightarrow M$ car N est fortement caractéristique, donc se prolonge à N puisque N est quasi-injectif,

$$\begin{array}{ccc} N' & \xrightarrow{\quad} & N \\ & \searrow u & \\ N & \xrightarrow{\quad} & M \end{array}$$

ainsi M est N -injectif et par définition de $\mathcal{L}_M M$ on a bien $N \leq \mathcal{L}_M M$.

1.2.3 - Proposition : Soit M' un sous-objet quasi-injectif et essentiel d'un objet M de $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{L}_M M$ est le plus grand sous-objet quasi-injectif et essentiel de M .

En effet M' est alors fortement caractéristique dans M (1.1.4) donc $M' \leq \mathcal{L}_M M$ et $\mathcal{L}_M M$ est quasi-injectif et essentiel dans M , de plus tout autre sous-objet N quasi-injectif et essentiel dans M est fortement caractéristique donc inférieur à $\mathcal{L}_M M$ qui est donc le plus grand sous-objet quasi-injectif et essentiel de M .

Sauf pour le lemme 1.2.8 nous supposons maintenant que $\mathcal{A}$ est la catégorie $\text{Mod } A$ des A -modules à gauche sur un anneau A . Pour toute classe S de A -modules $\mathcal{L}^{-1}(S)$ est une sous-catégorie fermée de $\text{Mod } A$ et il lui correspond donc le pré-site I_S des idéaux $\mathfrak{a}$ de A tels que $A/\mathfrak{a}$ soit dans $\mathcal{L}^{-1}(S)$, et pour tout module M on a alors $\mathcal{L}_S M = I_S M = \{x \in M \mid \text{Ann}(x) \in I_S\}$, de plus M est dans $\mathcal{L}^{-1}(S)$ si et seulement si $M = I_S M$.

1.2.4 - Remarques :

a) Soit $(M_i)_J$ une famille de A -modules, il résulte immédiatement de 1.1.7

$$\text{que } I_{\prod_J M_i} = \bigcap_J I_{M_i}.$$

b) Si N est un A -module semi-simple, tout A -module M est N -injectif et ainsi pour toute classe S de A -modules I_S contient tous les idéaux maximaux, de plus il résulte de l'exemple 1.1.1 que l'intersection de tous les pré-sites I_S pour S sous classe de $\text{Ob Mod } A$ est constituée des idéaux $\mathfrak{a}$ de A tels que $A/\mathfrak{a}$ soit un A -module semi-simple, i.e. des idéaux de A qui sont intersection finie d'idéaux maximaux.

c) Soit F un pré-site et $\overline{F}$ le site engendré par F ; pour tout A -module M tel que $FM = 0$, tout module N tel que $\overline{F}N = N$ est dans $\mathcal{L}^{-1}(M)$ car pour tout sous-module N' de N on a $\text{Hom}_A(N', M) = 0$.

Nous énonçons maintenant deux résultats relatifs aux anneaux semi-artinien, (23). Un anneau semi-artinien A est tel que tout A -module possède un sous-module

simple, le socle de tout module M est alors un sous-module essentiel de M .

1.2.5 - Corollaire : Sur un anneau semi-artinien A , tout A -module possède un plus grand sous-module quasi-injectif et essentiel.

Le socle d'un A -module M est alors quasi-injectif et essentiel dans M , et on applique la proposition 1.2.3 pour avoir le résultat.

1.2.6 - Proposition : Sur un anneau semi-artinien A , toute classe de A -modules de la forme $\bar{\mathcal{C}}^{-1}(S)$ peut être définie en choisissant tous les modules de S quasi-injectifs.

Commençons par démontrer un lemme, soit S une classe de A -modules et S_1 la classe des A -modules $I_S M$ pour $M \in S$.

1.2.7 - Lemme : On a toujours $I_S \subset I_{S_1}$, de plus, si pour tout A -module M de S $I_S M$ est essentiel dans $I_{S_1} M$, alors $I_S = I_{S_1}$.

Soit $\alpha \in I_S$, et $f : \bar{A}/\alpha \rightarrow I_S M$ un morphisme où $\alpha \in \bar{A}$ et $M \in S$; le morphisme f se prolonge en un morphisme $g : A/\alpha \rightarrow M$ donc l'image est contenue dans $I_S M$ car $A/\alpha = I_S(A/\alpha)$, ce qui prouve que A/α est dans $\bar{\mathcal{C}}^{-1}(S_1)$ et $\alpha \in I_{S_1}$.

Supposons maintenant que pour tout $M \in S$ on ait $I_S M$ essentiel dans $I_{S_1} M$ et soit $\alpha \in I_{S_1}$ i.e. $I_{S_1}(A/\alpha) = A/\alpha$; soit f un morphisme $\bar{A}/\alpha \rightarrow M$ pour $M \in S$, on a $f(\bar{A}/\alpha) \subset I_{S_1}(M)$, or par hypothèse $I_S M$ est A/α -injectif donc $\bar{A}/\alpha$ -injectif et il résulte du lemme 1.1.3 que $f(\bar{A}/\alpha) \subset I_S M$ i.e. puisque $I_S M$ est A/α -injectif f se prolonge à A/α et ainsi M est A/α -injectif pour tout $M \in S$ i.e. $\alpha \in I_S$.

La proposition résulte alors du fait que pour tout module M de S , $I_S M$ contient le socle de M qui est essentiel dans M et à fortiori pour tout module M

de S on a $I_S M$ essentiel dans $I_{S_1} M$; donc $I_S = I_{S_1}$ avec le lemme i.e. $\tau^{-1}(S) = \tau^{-1}(S_1)$ et tous les modules de S_1 sont quasi-injectifs.

Lorsque l'anneau de base A est quelconque il peut arriver que pour un module M on ait $I_M M = 0$ i.e. M n'a pas de sous-module quasi-injectif et fortement caractéristique, par exemple si A est un anneau de valuation discrète, on a $I_\alpha \alpha = 0$ pour tout idéal α de A . Nous allons voir que l'on peut alors caractériser aisément I_M .

Commençons par un lemme où $\mathcal{A}$ est notre catégorie de base.

1.2.8 - Lemme : Soit S une sous classe de $\text{Ob } \mathcal{A}$ telle que tout objet M de S possède une enveloppe injective $\hat{M}$ dans $\mathcal{A}$, et soit $\hat{S}$ la classe des $\hat{M}$ pour $M \in S$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- a) Pour tout $M \in S$ on a $\tau_S M = 0$,
- b) On a $\tau^{-1}(S) = c(S)$, (notation du chapitre 1, 1.1).

a) $\Rightarrow$ b) On a toujours $\text{Ob}(c(\hat{S})) \subset \tau^{-1}(S)$, car si $N \in c(S)$ on a $\mathcal{A}(N', \hat{M}) = 0$ pour tout sous objet N' de N et tout $M \in S$ donc aussi $\mathcal{A}(N', M) = 0$. Supposons que $c(\hat{S})$ soit distinct de $\tau^{-1}(S)$, il existe donc $N \in \tau^{-1}(S)$ tel que $N \notin \text{ob } c(\hat{S})$, i.e. il existe un objet M de S tel que $\mathcal{A}(N, \hat{M})$ soit non nul, soit $u : N \rightarrow \hat{M}$ un morphisme non nul; comme M est N -injectif on a $u(N) \leq M$ d'après 1.1.3 et $u(N) \neq 0$ mais $u(N)$ est un quotient de N donc $u(N)$ est un sous-objet non nul de M dans $\tau^{-1}(S)$ i.e. $\tau_S M \neq 0$ ce qui contredit a), donc $c(S) = \tau^{-1}(S)$.

b) $\Rightarrow$ a). Soit $M \in S$ on a $\tau_S M \in \tau^{-1}(S)$ et le composé $\tau_S M \rightarrow M \rightarrow \hat{M}$ est nul dès que $\tau^{-1}(S) = c(\hat{S})$, donc $\tau_S M = 0$.

1.2.9 - Corollaire : Les conditions suivantes sont équivalentes pour un A -module

M ,

a) M n'a pas de sous-module quasi-injectif et fortement caractéristique non nul,

b) Un idéal α de A est dans L_M si et seulement si $\text{Hom}_A(A/\alpha, \widehat{M}) = 0$.

Ce corollaire résulte immédiatement des définitions et du lemme précédent.

Remarques :

- 1/ Lorsque M n'a pas de sous-module quasi-injectif et fortement caractéristique non nul, le pré-site L_M n'est autre que le site qui permet de caractériser les extensions rationnelles de M , (chapitre 1, 3.1.5).
- 2/ Si les conditions du corollaire 1.2.9. sont vérifiées, le pré-site L_M est alors un site, ce n'est pas le cas en général : Considérons en effet, un A -module M non quasi-injectif, dont le socle est essentiel et dont le sous-module singulier est nul (On peut prendre par exemple $M = A_g$ où A est le sous-anneau d'un produit infini K^I de copies d'un corps K , engendré par $K^{(I)}$ et par l'unité de K^I cf. (23)). Posons $M_1 = L_M M$, on a $M_1 \neq M$ et M_1 est essentiel dans M , de plus M est M/M_1 -injectif car tout morphisme d'un sous-module de M/M_1 dans M est nul, donc $L_M(M/M_1) = M/M_1$ ce qui prouve que L_M n'est pas idempotent.

1.3 - Produits de modules quasi-injectifs.

1.3.1 - Proposition : Pour un A-module quasi-injectif M il y a équivalence entre :

- a) Pour tout ensemble I le A-module M^I est quasi-injectif,
- b) $\text{Ann}(M)$ appartient à I_M .

Remarquons d'abord, que M^I est quasi-injectif si et seulement si $I_{M^I}(M^I) = M^I$ i.e. compte tenu de la remarque a) de 1.2.4 si et seulement si $I_M(M^I) = M^I$. Supposons que l'on ait a) alors on a en particulier $I_M(M^M) = M^M$ et l'anneau de la diagonale de M^M est dans I_M , or cet anneau est par définition l'anneau de M; donc $a) \Rightarrow b)$.

Réciproquement, si $\text{Ann}(M) \in I_M$, considérons un élément $(x_i)_I$ de M^I pour un ensemble I, on a $\text{Ann}(M) \subset \bigcap_{i \in I} \text{Ann}(x_i) = \text{Ann}((x_i)_I)$ donc $\text{Ann}((x_i)_I) \in I_M$ et $I_{M^I}(M^I) = M^I$ i.e. M^I est quasi-injectif et $b) \Rightarrow a)$.

Définition : Nous dirons que A vérifie la condition Q (resp. Q.F.) si tout A-module quasi-injectif (resp. quasi-injectif et de type fini) possède les propriétés de la proposition 1.3.1.

Si $(K_i)_I$ est une famille infinie de corps, l'anneau $A = \prod_I K_i$ ne vérifie pas la condition Q car le A-module $M = \bigoplus_I K_i$ est semi-simple donc quasi-injectif, et l'anneau de M est nul donc n'appartient pas à I_M , (sinon M serait un A-module injectif, ce qui est absurde puisque M est essentiel dans A et distinct de A).

1.3.2 - Proposition :

- a) Tout anneau artinien A vérifie la condition Q,
- b) Tout anneau commutatif vérifie la condition Q.F.

Commençons par démontrer un lemme :

Lemme : Pour tout pré-site F sur un anneau artinien A , il existe un idéal bilatère α de A tel que F soit l'ensemble des idéaux de A contenant α .

Soit F un pré-site sur A et α un élément minimal de F , il résulte de la condition C_0 que α est le plus petit élément de F et de la condition C_2 que α est un idéal bilatère.

Soit maintenant M un A -module quasi-injectif sur un anneau artinien A , soit α l'idéal bilatère de A tel que I_M soit l'ensemble des idéaux de A contenant α , comme M est quasi-injectif on a $I_M M = M$ et pour tout $x \in M$ on a $\alpha \subset \text{Ann}(x)$ i.e. $\alpha \subset \text{Ann}(M)$ et $\text{Ann}(M) \in I_M$ ce qui prouve a).

Montrons b). Soit M un A -module quasi-injectif ayant un système fini $x_1, \dots, x_n$ de générateurs, puisque M est quasi-injectif on a $\text{Ann}(x_i) \in I_M$ pour $i = 1, \dots, n$ et puisque A est commutatif on a $\text{Ann}(M) = \bigcap_{i=1}^n \text{Ann}(x_i) \in I_M$ ce qui prouve b).

1.3.3 - Proposition : Supposons que l'anneau A vérifie la condition Q (resp. QF), alors :

- a) Tout A -module (resp. tout A -module de type fini) quasi-injectif et fidèle est injectif,
- b) Si un épimorphisme d'anneaux $\varphi: A \rightarrow B$ est surjectif ou plat à gauche ⁽²⁴⁾ alors B vérifie la condition Q .

a) Si M est tel que $\text{Ann}(M) = 0 \in I_M$ le pré-site I_M est constitué de tous les idéaux de A et M est injectif car alors $\mathcal{C}^{-1}(M) = \mathcal{O}_B \text{ (Mod } A \text{)}$.

b)

- 1) Soit φ un épimorphisme d'anneaux, si $B = A/\alpha$ pour un idéal bilatère α de A , soit M un B -module, il est immédiat de vérifier que M

est quasi-injectif si et seulement si le A -module $\varphi_* M$ est un A -module quasi-injectif

Si φ est un épimorphisme plat à gauche, i.e. si B est un A -module à droite plat, un B -module M est quasi-injectif si et seulement si le A -module $\varphi_* M$ est quasi-injectif, en effet le foncteur restriction des scalaires φ_* admet pour adjoint à gauche le foncteur extension des scalaires φ^* défini par $\varphi^* N = B \otimes_A N$ muni de sa structure de B -module à gauche et dire que B est un A -module à droite plat signifie que φ^* préserve les monomorphismes,

Pour un sous A -module N de $\varphi_* M$ on a un diagramme canonique commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_A(\varphi_* M, \varphi_* M) & \xrightarrow{u'} & \text{Hom}_A(N, \varphi_* M) \\ \downarrow v & & \downarrow v' \\ \text{Hom}_B(M, M) & \xrightarrow{u} & \text{Hom}_B(\varphi^* N, M) \end{array}$$

u' provient de l'injection $N \hookrightarrow \varphi_* M$, v' est l'isomorphisme défini par l'adjonction de φ_* et φ^* , v est l'application qui à un morphisme $u : M \rightarrow M$ fait correspondre $\varphi_*(u) : \varphi_* M \rightarrow \varphi_* M$, v est un isomorphisme d'après la proposition 2.1 de ⁽²⁴⁾, enfin u provient de l'application composée $\varphi^* N \rightarrow \varphi^* \varphi_* M \Rightarrow M$ qui est un monomorphisme.

On vérifie alors aisément avec le diagramme ci-dessus que M est quasi-injectif si et seulement si $\varphi_* M$ est un A -module quasi-injectif.

- b) Nous pouvons maintenant achever la démonstration; soit M un B -module quasi-injectif on a $\varphi_*(M^I) \Rightarrow \varphi_*(M)^I$ pour tout ensemble I car φ_* admet un adjoint à gauche, par hypothèse $\varphi_*(M)^I$ est quasi-injectif pour tout ensemble I donc $\varphi_*(M^I)$ également et M^I est un B -module injectif d'après le début de la démonstration, ce qui achève la preuve.

1.3.4 - Remarque : Sur un anneau commutatif tout module de type fini quasi-injectif et fidèle est injectif, comme il résulte de 1.3.2 b) et 1.3.3 a).

1.3.5 - Proposition : Si pour tout idéal bilatère α de A , tout A/α -module quasi-injectif et fidèle est injectif alors A vérifie la condition Q.

Soit M un A -module quasi-injectif, et $\alpha = \text{Ann}(M)$, l'idéal α est bilatère, M est alors un A/α -module quasi-injectif et fidèle donc M est un A/α -module injectif, en particulier le A/α -module M est $(A/\alpha)_S$ -injectif, mais on vérifie immédiatement que ceci signifie que le A -module M est A/α -injectif où A/α est considéré comme A -module, i.e. par définition $\text{Ann}(M) = \alpha \in I_M$, d'où le résultat.

1.3.6 - Remarque : Il peut arriver que pour tout idéal bilatère α non nul tout A/α -module quasi-injectif et fidèle soit injectif sans que A vérifie la condition Q. Soit par exemple A un anneau principal, P un système représentatif d'éléments extrémaux, et supposons que P soit infini, le A -module $M = \bigoplus_{p \in P} A/(p)$ est un A -module quasi-injectif (5) fidèle non injectif. Pour tout idéal propre α l'anneau A/α est artinien donc tout A/α -module quasi-injectif et fidèle est injectif d'après 1.3.3 .

2 - Une caractérisation des anneaux noethériens.

Il est bien connu que si A est un anneau noethérien, toute somme directe de copies d'un A -module quasi-injectif est un A -module quasi-injectif ⁽⁵⁾. Nous nous proposons de démontrer ici la réciproque :

2.1 - Proposition : Pour un anneau A les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) A est un anneau noethérien,
- 2) Toute somme directe de copies d'un A -module quasi-injectif est un A -module quasi-injectif,
- 3) Toute somme directe de A -modules injectifs est un A -module quasi-injectif.

Nous démontrons $2) \Rightarrow 3)$ et $3) \Rightarrow 1)$, l'assertion $1) \Rightarrow 2)$ est dans ⁽⁵⁾.

$2) \Rightarrow 3)$. Soit $(M_i)_I$ une famille de A -modules injectifs et $M = \prod_I M_i$, le A -module M est injectif et pour chaque $i \in I$ on peut écrire M sous la forme $M = M^i = M_i \otimes P_i$ où $P_i = \prod_{j \neq i} M_j$; par hypothèse le A -module $M^{(I)} = \bigoplus_{i \in I} M^i = \bigoplus_I M_i \otimes \bigoplus_I P_i$ est quasi-injectif, donc $\bigoplus_I M_i$ est quasi-injectif comme facteur direct d'un quasi-injectif.

$3) \Rightarrow 1)$. Nous montrons que toute somme directe de A -modules injectifs est un A -module injectif, ce qui prouvera que A est noethérien.

Soit $(M_i)_I$ une famille de A -modules injectifs. Il résulte de l'hypothèse que $M = \widehat{A} \otimes \bigoplus_I M_i$ est un A -module quasi-injectif, comme A est un sous module de M on en déduit que M est A -injectif, donc injectif d'après le critère de BAER et $\bigoplus_I M_i$ est un A -module injectif comme facteur direct de M .

3 - Modules quasi-projectifs.

3.1 - Soit A un anneau, il résulte du dual de 1.1.9 a) que pour une classe S de A -modules $\rho^{-1}(S)$ est stable par sous-objets, objets quotients et sommes directes finies. La famille P_S des idéaux α de A tels que A/α soit dans $\rho^{-1}(S)$ est donc un pré-site, et $\rho^{-1}(S)$ est contenu dans $\text{Ob } \mathcal{C}_{P_S}$. On n'a pas toujours $\rho^{-1}(S) = \text{Ob } \mathcal{C}_{P_S}$. Cependant :

3.1.1 - Lemme : Les conditions suivantes sont équivalentes

- a) $\rho^{-1}(S)$ est stable par sommes directes quelconques,
- b) Un A -module N est dans $\rho^{-1}(S)$ si et seulement si $N = P_S N$.

a) $\Rightarrow$ b) Si $N = P_S N$ on peut écrire N comme quotient de $\bigoplus_{x \in N} Ax$ qui est dans $\rho^{-1}(S)$ par hypothèse, donc N est dans $\rho^{-1}(S)$. Si N est dans $\rho^{-1}(S)$ on a évidemment $N = P_S N$.

b) $\Rightarrow$ a) car alors $\rho^{-1}(S)$ est égale à $\text{Ob } \mathcal{C}_{P_S}$ qui est stable par sommes quelconques.

Lorsque S est réduite à un seul module M on écrit P_M au lieu de $P_{\{M\}}$.

Il résulte alors du dual de 1.1.7 que pour une famille $(M_i)_I$ de A -modules on a $P_{\bigoplus_I M_i} = \bigcap_I P_{M_i}$.

3.1.2 - Lemme : Soient M et N deux A -modules dont l'un au moins est de type fini, alors M est N -projectif si et seulement si $P_M(N) = N$.

Si N est de type fini, engendré par $x_1, \dots, x_n$, on peut écrire N comme quotient de $\bigoplus_{i=1}^n Ax_i$ qui est dans $\rho^{-1}(M)$ dès que $N = P_M N$, donc N est dans $\rho^{-1}(M)$ i.e. M est N -projectif ; si M est N -projectif on a évidemment $N = P_M N$.

Supposons maintenant M de type fini et $N = P_M N$, soit $N \rightarrow N/N'$ un quotient de N et f un morphisme $M \rightarrow N/N'$, on peut écrire N comme quotient de $\bigoplus_{x \in N} Ax$, et puisque M est de type fini, on peut trouver des éléments $x_1, \dots, x_n$ de N tels que $f(M)$ soit un quotient de $\bigoplus_{i=1}^n Ax_i$; par hypothèse Ax_i est dans $\rho^{-1}(M)$ pour $i=1, \dots, n$ et $\bigoplus_{i=1}^n Ax_i$ est dans $\rho^{-1}(M)$, donc f se factorise par un morphisme $f' : M \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n Ax_i$ qui composé avec l'injection $\bigoplus_{i=1}^n Ax_i \hookrightarrow \bigoplus_{x \in N} Ax$ et l'application canonique $\bigoplus_{x \in N} Ax \rightarrow N$ donne le relèvement cherché de f .

3.1.3 - Proposition : Si tout module de S est de type fini ou possède une couverture projective, un module N est dans $\rho^{-1}(S)$ si et seulement si $N = P_S N$.

Soit $N = P_S N$, il faut montrer que tout A -module M de S est N -projectif. Si M est de type fini, on remarque que l'on a $P_S \subset P_M$, et ainsi $N = P_M N$ i.e. d'après 3.1.2 M est N -projectif. Si M a une couverture projective, on écrit une suite exacte $\bigoplus_{x \in N} Ax \rightarrow N \rightarrow 0$, par hypothèse M est Ax -projectif pour tout $x \in N$, et d'après le dual de 1.1.9 (b.1), M est $\prod_{x \in N} Ax$ -projectif donc $\bigoplus_{x \in N} Ax$ -projectif, puis N -projectif, puisque $\rho^{-1}(M)$ est stable par sous-objets et objets-quotients.

3.1.4 - Corollaire : Toute somme directe de copies d'un A -module quasi-projectif de type fini est un A -module quasi-projectif.

Soit M un module quasi-projectif de type fini et I un ensemble. Alors $M^{(I)}$ est quasi-projectif si et seulement si $M^{(I)} \in \rho(M^{(I)})$ ce qui équivaut d'après le dual de 1.1.7 à $M \in \rho(M^{(I)})$ et d'après 3.1.2 ceci équivaut à $P_M(M^{(I)}) = M^{(I)}$, or puisque M est quasi-projectif on a $P_M M = M$ et par suite $P_M(M^{(I)}) = M^{(I)}$, ce qui prouve le résultat annoncé.

3.1.5 - Corollaire : Si un module M est de type fini ou possède une couverture projective alors M est projectif si et seulement si $A \in \rho^{-1}(M)$.

La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement supposons que $A \in \rho^{-1}(M)$ et soit N un A -module présenté comme quotient de $A^{(I)}$, il résulte de 3.1.3 et 3.1.1 que $A^{(I)}$ est dans $\rho^{-1}(M)$ donc N est aussi dans $\rho^{-1}(M)$ et M est un A -module projectif.

3.1.6 - Corollaire : Sur un anneau commutatif tout module de type fini quasi-projectif et fidèle est projectif.

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de générateurs du module quasi-projectif M , on a $0 = \text{Ann}(M) = \bigcap_{i=1}^n \text{Ann}(x_i) \in P_M$ car $M = P_M M$; donc $A \in \rho^{-1}(M)$ et on conclut avec 3.1.5 .

3.1. - Corollaire : Soit A un anneau parfait, un A -module M est projectif dès que pour tout idéal $\alpha \subset \mathcal{R}(A)$ l'application canonique :

$$\text{Hom}_A(M, A) \longrightarrow \text{Hom}_A(M, A/\alpha)$$

est surjective.

$\mathcal{R}(A)$ est le radical de JACOBSON de A et un idéal α de A est superflu dans A si et seulement si $\alpha \subset \mathcal{R}(A)$ (lemme 2.4 p. 372 de (1)).

On va montrer que A est dans $\rho^{-1}(M)$, la conclusion résultera alors de 3.1 . Soit $\mathfrak{h}$ un idéal de A et $u : M \rightarrow A/\mathfrak{h}$ un morphisme, on doit montrer que u se relève en $v : M \rightarrow A$. D'après l'hypothèse on peut supposer que $\mathfrak{h}$ n'est pas superflu dans A , i.e. il existe un idéal C tel que $\mathfrak{h} + C = A$ et puisque A est parfait donc supplémenté on peut supposer que C est minimal pour cette propriété, il résulte alors du dual de I. 2.2.2 que $\mathfrak{h} \cap C$ est superflu dans C et par suite

dans A . D'autre part, comme $B + C = A$, on vérifie aisément que l'application canonique $A/B \cap C \rightarrow A/B$ possède une section S et il résulte de l'hypothèse que $S \circ u$ se relève en un morphisme $v : M \rightarrow A$ qui donne le relèvement cherché de u ; d'où le résultat.

Remarques :

- a) Le corollaire 3.1. donne une meilleure caractérisation des projectifs que le résultat obtenu dans la remarque 2.3 du chapitre I.
- b) La première partie du corollaire 3.1. figure dans ⁽²⁹⁾.

3.2 - Si tout module M d'une classe S de A -modules possède une couverture projective, il résulte du dual de 1.1.9 que $\rho^{-1}(S)$ est une sous-catégorie fermée et co-fermée de $\text{Mod } A$, i.e. une sous-catégorie fermée stable par produits quelconques, il existe donc un idéal bilatère α_S de A tel que P_S soit formés des idéaux α de A qui contiennent α_S . (cf. ⁽³¹⁾). On a alors pour tout A -module M équivalence entre $M \in \rho^{-1}(S)$ et $\alpha_S M = 0$; avec ceci on a

3.2.1 - Lemme : On a équivalence entre $\alpha_S = 0$ et tout module de S est projectif.

Si $\alpha_S = 0$ on a $\rho^{-1}(S) = \text{Ob } \text{Mod } A$ et tout module de S est projectif; inversement si tout module de S est projectif on a $A \in \rho^{-1}(S)$ et $\alpha_S A = 0$ donc $\alpha_S = 0$.

3.2.2 - Corollaire : Sur un anneau parfait A , tout A -module quasi projectif et fidèle est projectif.

Soit M un A -module quasi-projectif, on a $M \in \rho^{-1}(M)$ donc $\alpha_M M = 0$ en notant α_M au lieu de $\alpha_{\{M\}}$, et ainsi $\alpha_M \subset \text{Ann}(M)$, si M est fidèle on a $\alpha_M = 0$ et M est projectif avec 3.2.1.

Remarque : Si A est un anneau semi-parfait, la conclusion du corollaire est vraie pour les modules de type fini.

3.3 - Modules bien couverts.

3.3.1 - Définition : Un A -module M est dit bien couvert si M possède une couverture projective $P \rightarrow M \rightarrow 0$ où P est un module parfait de $\text{Mod } A$ au sens de ⁽¹⁸⁾.

3.3.2 - Exemples :

- a) Sur un anneau parfait, tout module est bien couvert puisqu'alors tout module est parfait et admet une couverture projective.
- b) Sur un anneau semi-parfait tout module de type fini M admet une couverture projective $P \rightarrow M \rightarrow 0$ et on peut choisir P de type fini donc parfait ⁽¹⁸⁾ i.e. tout module de type fini est bien couvert.
- c) Tout quotient d'un module projectif parfait P est un module bien couvert car d'après le théorème 3.3 de ⁽¹⁸⁾ tout quotient M de P admet une couverture projective $P' \rightarrow M \rightarrow 0$ et P' est facteur direct de P donc parfait.

En particulier tout quotient d'un A -module bien couvert est un A -module bien couvert; toute somme directe finie de modules bien couverts est un module bien couvert car une telle somme est un quotient d'une somme directe finie de modules projectifs et parfaits qui est un module projectif et parfait d'après le corollaire de la proposition 3.7. p. 98 de ⁽¹⁸⁾.

3.3.3 - Proposition : Si M est un A -module bien couvert il existe un plus petit sous-module superflu N de M tel que M/N soit quasi-projectif.

Soit $P \xrightarrow{q} M \rightarrow 0$ une couverture projective de M où P est un A -module projectif et parfait. Supposons que M soit de la forme P/K où K est un sous-module superflu de P , i.e. $K \subset \mathcal{R}(P)$; et $\mathcal{R}(P) \nsubseteq P$ d'après la proposition 2.7 p. 474 de ⁽¹⁾; de plus $P/\mathcal{R}(P)$ est un module semi-simple (prop. 1.1.3 de ⁽¹⁸⁾) et $\mathcal{R}(P)$ est un sous-module superflu de P d'après la proposition 3.7 p. 97 de ⁽¹⁸⁾, donc

$\mathcal{R}(M) = q(\mathcal{R}(P))$ est un sous-module superflu de M et distinct de M tel que $M/\mathcal{R}(M) \Rightarrow P/\mathcal{R}(P)$ soit semi-simple donc quasi-projectif.

D'autre part comme M admet une couverture projective, $\rho^{-1}(M)$ est une sous-catégorie fermée de $(\text{Mod } A)^\circ$ et nous pouvons donc appliquer à M le dual de 1.2.3 i.e. M possède un plus grand quotient M/N où N est superflu dans M et M/N quasi-projectif d'où le résultat.

3.3.4 - Corollaire : *Sur un anneau parfait A (resp. semi-parfait), tout A -module M (resp. tout A -module de type fini) admet un plus petit sous-module superflu N tel que M/N soit quasi-projectif.*

Ceci résulte de la proposition ci-dessus en tenant compte des exemples a) et b) de 3.3.2 .

BIBLIOGRAPHIE

- (¹) H. BASS : Finitistic dimension and a homological generalisation of semi primary rings. Trans. Amer. Math. Soc. 95 1960.
- (²) N. BOURBAKI : Algèbre Chapitre II 3^{ème} édition Hermann 1962.
- (³) N. BOURBAKI : Algèbre commutative chapitres I et II Hermann 1961.
- (⁴) J. BICHOT : Essentialité et importance dans les modules. Thèse de troisième cycle - LYON - 1968.
- (⁵) N. CHAPTAL : C.R. Ac. Sc. t.264 (23 janvier 1967) Série A p.173.
- (⁶) C. FAITH : Lecture on injective modules and quotient rings. Springer Verlag n° 49 - 1967.
- (⁷) C. FAITH,
et E.A. WALKER : Direct sum representations of injective modules Journal d'algèbre, t.5, 1967.
- (⁸) P. GABRIEL : Des catégories abéliennes. Bull. Soc. Math. Fr. t.90 1962.
- (⁹) P. GABRIEL
et V. OBERST : Spektralkategorien und reguläre Ringe im Von-Neumannschen sinn. Math. Zeitschr. t.92 - 1966.
- (¹⁰) P. GABRIEL
et N. POPESCU : C.R. Ac. Sc. t.258 (28 avril 1964) Série A p.4188.
- (¹¹) P. GABRIEL
et M. ZISMANN : Calculus of fractions and homotopy theory. Ergebnisse der Math. Band 35.
- (¹²) R. GOBLOT : C.R. Ac. Sc. t.267 (9 septembre 1968) Série A - p.380.
- (¹³) A.W. GOLDIE : Localisation non commutative. Journal d'algèbre t.5 1967.
- (¹⁴) M. HACQUE : Monosous catégories de catégories de modules Pub. dép^t. Math. de LYON t.6 1969.
- (¹⁵) M. HARADA : Note on quasi-injective modules Osaka J. of Math. p. 351 - 1965.

- (16) C. LECLERC : Catégorie des modules non singuliers, thèse de troisième cycle - LYON - 1969.
- (17) Y. MIYASHITA : On quasi-injective modules. J. Fac. Sc. Hokkaido univ. 18 1965 p.158 . 187.
- (18) Y. MIYASHITA : Quasi-projective modules, perfect modules, and a theorem for modular lattices. J. Fac. Sc. Hokkaido Univ. 18 1966 p. 86 . 110.
- (19) B. MITCHELL : Theory of categories Ac. Press, New-York. 1965.
- (20) R. OUZILOU : Théorie des faisceaux Dép. Math. LYON Documentation. 1965 - 1966.
- (21) R. OUZILOU : Faisceaux additifs et applications Pub. Dép. Math. LYON t.3 . 1966
- (22) N. POPESCU : La localisation pour des sites.
Rev. Roumaine de Math.pures et appliquées. X - 1965
p.1031 - 1044.
- (23) N. POPESCU : Bull. Soc. Math. Fr. 96, 1968, p.357 - 368.
et C. NASTAJESCU
- (24) N. POPESCU : C.R. Ac. Sc. t.268 (17 février 1969) Série A p. 376.
et T. SPIRCU
- (25) J. RAVEL : Sur les modules M-injectifs Pub. dép. Math. LYON t.5. 1965.
- (26) G. RENAULT : Sous-modules compléments dans un module thèse PARIS 1966.
- (27) G. RENAULT : Anneau associé à un module injectif.
- (28) E. de ROBERT : C.R. Ac. Sc. t.266 (11 Mars 1968) Série A p. 547.
- (29) E. de ROBERT : C.R. Ac. Sc. t.268 (17 février 1969) Série A p.361.
- (30) J.E. ROOS : Locally distributive spectral categories and strongly regular rings. Report of the Midwest cat.reminar Sp. Verlag 1967.

- (³¹) J.E. ROOS : C.R. Ac. Sc. t.261 (8 décembre 1965) groupe 1
p. 4954.
- (³²) J.E. ROOS : C.R. Ac. Sc. t.266 (15 janvier 1968) Série A p.120.
- (³³) D.E. SANDERSON : A generalisation of divisibility and injectivity
in modules. Can Math. Bull. Col 8 1965. p.505-513.
- (³⁴) C. TISSERON : Rapport de recherches de D.E.A. LYON 1967.
- (³⁵) C. TISSERON : C.R. Ac. Sc. t.268 (12 Mai 1969) Série A p.1074.
- (³⁶) C. TISSERON : C.R. Ac. Sc. t.268 (9 juin 1969) Série A p.1377.

Manuscrit remis le 15 juillet 1969.

Claude Tisseron
 Assistant
 département de mathématiques
 Faculté des Sciences
 43, boulevard du 11 novembre 1918
 69 - VILLEURBANNE