G. PETOLLA

Approximation d'un problème variationnel non linéaire

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1967, tome 4, fascicule 3
, p. 69-90
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1967__4_3_69_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1967 t.4-3

APPROXIMATION D'UN PROBLEME VARIATIONNEL NON LINEAIRE

G. PETOLLA

Introduction.

Ce travail a fait l'objet d'un rapport de recherches de D.E.A., effectué sous la direction de J.P. AUBIN, et soutenu en juin 1967 à Lyon.

HARTMAN ET STAMPACCHIA ont donné les conditions d'existence et d'unicité du problème variationnel non linéaire qui est défini au § 1. AUBIN, dans [2] a construit une théorie générale de l'approximation des espaces de distributions et des opérateurs différentiels. Il s'est agit d'appliquer les résultats de cette théorie au problème de HARTMAN-STAMPACCHIA, afin de dégager une méthode d'approximation théorique : le § 3 traite le cas général, et donne deux théorèmes de convergence. Le § 2 rappelle certaines définitions, et les § 4 et 5 sont consacrés à des cas particuliers importants.

Les notations et la terminologie sont celles de [1].

Table des matières.

§ 1 - Définition des problèmes (P) et (P_h).

1-1 Données générales.

Dans toute la suite, h sera un paramètre réel, destiné à tendre vers zéro.

Nous désignerons par :

- V, V_h des espaces de Banach réflexifs, dont les normes seront respectivement $||.||$ et $||.||_h$;
- K, K_h des convexes fermés de V, V_h ;
- $a(u,v)$ $\left[\text{resp. } a_h(u_h,v_h)\right]$ une forme définie sur $V\times V$ $\left[\text{resp. } V_h\times V_h\right]$, linéaire et continue en v $\left[\text{resp. } v_h\right]$
- V', V'_h, les duals respectifs de V, V_h ;

Les produits scalaires qui les mettent en dualité seront respectivement $(.,.)$ et $(.,.)_h$; et les normes duales $||.||_*$ et $||.||_{*h}$.

Soient aussi :

- f, f_h un élément donné de V', V'_h ;
- $\sigma(u,v) = a(u,u-v)-a(v,u-v)$
- $\sigma_h(u_h,v_h) = a_h(u_h,u_h-v_h) - a_h(v_h,u_h-v_h)$

Nous désignerons également par :

- A l'opérateur de V dans V' défini par :

$$(Au,v) = a(u,v) \ ; \quad \forall v \in V \ ;$$

- A_h l'opérateur de V_h dans V'_h défini par :

$$(A_h u_h, v_h)_h = a_h(u_h,v_h) \ ; \ \forall v_h \in V_h \ ;$$

1-2 Problèmes (P) et (P_h)

Nous appellerons (P) le problème :

" Trouver u dans K vérifiant : $a(u,u-v) \leqslant (f,u-v)$; $\forall v \in K$ ". Et (P_h) le problème :

" Trouver u_h dans K_h vérifiant : $a_h(u_h,u_h-v_h) \leqslant (f_h,u_h-v_h)_h$; $\forall v_h \in K_h$".

Le théorème suivant, démontré par HARTMAN et STAMPACCHIA [2], donne des conditions suffisantes pour que (P) admette des solutions.

T-1. Théorème d'existence. Sous les hypothèses suivantes :

$$(1\text{-}2)\ \left\{ A \text{ est borné et } \lim_{\lambda=o} a(u-\lambda w,v) = a(u,v)\ ;\ \forall u,v,w \in V. \right.$$

$$(1\text{-}3)\left\{\begin{array}{l} \text{i) } \sigma(u,v) \geqslant o\ ;\ \forall u,v \in K - [\text{ monotonie }]. \\ \text{ii) } \exists \phi_o \in K \text{ tel que } \|u-\phi\| \to +\infty \Rightarrow \dfrac{\sigma(u,\phi_o)}{\|u-\phi_o\|} \to +\infty\ ; \\ \qquad \forall u \in K\ - [\text{coercivité }]. \end{array}\right.$$

Le problème (P) admet au moins une solution.

Remarques :

1) Ce théorème, énoncé pour le problème (P) est valable aussi pour le problème (P_h), avec les hypothèses correspondantes.

2) Si on suppose $\sigma(u,v)>o$, la solution est unique.

3) Si K est borné, l'hypothèse (1-2) ii est inutile.

4) Si K est un cône, on vérifie immédiatement que le problème (P) est équivalent à trouver u dans K tel que :

$$\left\{\begin{array}{l} a(u,v) \leqslant (f,v)\quad ;\ \forall v \in K \\ a(u,u) = (f,u) \end{array}\right.$$

Jusqu'à maintenant, les problèmes (P) et (P_h) sont identiques, à la notation près. Nous allons les différencier, en disant que (P_h) est une "approximation", au sens ci-dessous, de (P).

§ 2 - Notion d'approximations.

Pour des compléments concernant ce paragraphe, on peut voir AUBIN [1] .

2-1 Approximation d'un espace de Banach.

Définitions: : * D.1. On appelle approximation d'un espace de Banach V la donnée :

- d'espaces de Banach V_h
- des applications : $P_h \in \mathcal{L}(V_h,V)$; $r_h \in \mathcal{L}(V,V_h)$; appelées respectivement prolongements et restrictions. On note $A_h(V) = \{V,V_h,P_h,r_h\}$ une approximation.

D.2. Stabilité.

D'après D.1., nous avons :

$$\| p_h u_h \| \leq M(h) \| u_h \|_h$$

$$\| r_h u \|_h \leq m(h) \| u \|$$

Nous dirons que les prolongements (resp. restrictions) sont stables si $\sup_{h>o} M(h)$ (resp. $\sup_{h>o} m(h)$) existe.

L'approximation sera stable si les prolongements et les restrictions le sont.

(* . Il n'est pas nécessaire que r_h soit linéaire. Dans ce cas $A_h(V)$ est dite semi-linéaire.)

D.3. L'approximation sera convergente si $\| u - p_h r_h u \|$ tend vers 0 avec h, pour tout u de V.

D.4. Une suite $(u_h)_h$ sera discrètement convergente vers u si $\| u_h - r_h u \|_h$ tend vers 0 avec h.

La même suite convergera vers u (ou sera fortement convergente) si $\| u - p_h u_h \|$ tend vers 0 avec h.

Elle sera stable si $\| u_h \|_h \leq c$;

Elle sera bornée si $\| p_h u_h \| \leq c$;

où c est une constante indépendante de h.

P.1 Proposition : Si p_h est stable et si $A_h(V)$ est convergente, alors la convergence discrète implique la convergente forte.

En effet :

$$\begin{aligned} \| u - p_h u_h \| &\leq \| u - p_h r_h u \| + \| p_h r_h u - p_h u_h \| \\ &\leq \| u - p_h r_h u \| + M \| u_h - r_h u \|_h \end{aligned}$$

d'où le résultat.

2-2 Approximation duale.

Soit $\mathcal{A}_h(V) = \{V, V_h, p_h, r_h\}$ une approximation.

Désignons par r_h^* le transposé de p_h, p_h^* le transposé de r_h. Alors $\mathcal{A}_h^*(V') = \{V', V'_h, p_h^*, r_h^*\}$ est une approximation du dual V' de V, que l'on appelle approximation duale de $\mathcal{A}_h(V)$.

Dans la suite, nous utiliserons la :

P.2 Proposition : L'approximation duale d'approximation stable (resp : convergente) est stable (resp : faiblement convergente).

En effet, nous avons :

$$||p_h||_{\mathcal{L}(V'_h, V')} = ||r_h||_{\mathcal{L}(V, V_h)}$$

$$||r_h^*||_{\mathcal{L}(V', V'_h)} = ||p_h||_{\mathcal{L}(V_h, V)}$$

D'où la première partie de la proposition.

De plus, si B est borné dans V' et si $f \in B$.

$$\lim_{h=o} \sup_{f \in B} |(p_h^* r_h^* f - f, u)| \leq \lim_{h=o} \sup_{f \in B} ||f||_* \, ||p_h r_h u - u||$$

D'où la convergence faible de $p_h^* r_h^* f$ vers f, uniformément sur tout borné.

§ 3 - Cas général : Théorèmes de convergence .

Nous nous plaçons dans le cas général défini au § 1. Nous allons démontrer deux théorèmes qui diffèrent par la seule nature des hypothèses de monotonie.

T-2. Théorème de convergence forte.

Sous les hypothèses suivantes :

$$(3\text{-}1) \quad \begin{cases} \text{i) } A \text{ est borné et } \lim\limits_{\lambda=o} a(u-\lambda w, v) = a(u,v) \;;\; \forall u,v,w \in V. \\ \text{ii) } \sigma(u,v) > o \;;\; \forall u \neq v \in K. \\ \text{iii) } \exists \phi_o \in K \text{ tel que } ||u|| \to +\infty \quad \dfrac{\sigma(u;\phi_o)}{||u-\phi_o||} \to +\infty ;\; \forall u \in K. \end{cases}$$

$$(3\text{-}2)\begin{cases} \text{i) } A_h \text{ est globalement borné en } h : \|u_h\|_h \leq cte \Rightarrow \|A_h u_h\|_h \leq cte \\ \quad \text{et } \lim_{\lambda=0} a_h(u_h-\lambda w_h, v_h) = a_h(u_h,v_h) \; ; \forall\, u_h, v_h, w_h \; V_h. \\ \text{ii) } \forall \varepsilon>0, \; \exists\, \eta>0 \text{ (ind. de h) tel que } \forall u_h, v_h \in K_h \text{ vérifiant} \\ \qquad \|u_h-v_h\|_h \geq \varepsilon \; , \text{ alors } \quad \sigma_h(u_h,v_h) \geq \eta \\ \text{iii) } \exists\, \phi_{o_h} \in K_h \text{ tel que } \|\phi_{o_h}\|_h < cte \text{ et si } \|u_h-\phi_{o_h}\|_h \to +\infty \\ \quad \text{alors } \dfrac{\sigma(u_h,\phi_{o_h})}{\|u_h-\phi_{o_h}\|_h} \to +\infty \end{cases}$$

$$(3\text{-}3)\left\{ \quad r_h K \subset K_h \quad \text{et} \quad p_h K_h \subset K \right.$$

$$(3\text{-}4)\left\{ \begin{array}{l} \quad A_h(V) = \{V, V_h, p_h, r_h\} \text{ est une approximation stable et} \\ \text{convergente.} \end{array}\right.$$

$$(3\text{-}5)\begin{cases} \text{i) } \lim_{h=0} \psi_u(h) = 0 \quad \text{où} \quad \psi_u(h) = \sup_{v_h} \dfrac{|a(u,p_h v_h) - a_h(r_h u, v_h)|}{\|v_h\|_h} \\ \text{ii) } \lim_{h=0} \varepsilon(f,f_h) = 0 \text{ où } \varepsilon_h(f,f_h) = \sup_{v_h} \dfrac{|(f,p_h v_h)-(f_h,v_h)_h|}{\|v_h\|_h} \end{cases}$$

La solution u_h du problème (P_h) converge vers la solution u du problème (P), lorsque h tend vers 0.

L'existence et l'unicité des solutions résultent des hypothèses (3-1) et (3-2) d'après le théorème de Hartman-Stampacchia.

Puisque ici p_h est stable, et $A_h(V)$ est convergente, il suffit, d'après P1 de démontrer la convergence discrète. Nous utiliserons pour cela deux lemmes.

L1 - <u>Majoration de l'erreur discrète.</u>

Si nous désignons par u_h (resp. u) la solution du problème (P_h) (resp. (P)), les hypothèses (3-3) et (3-5) entraient que :

$$(3\text{-}6)\quad \begin{cases} \sigma_h(u_h,r_h u) \leq \left[\psi_u(h) + \varepsilon(f,f_h)\right] . \|u_h-r_h u\|_h \\ \qquad\qquad + \|f - Au\|_* \|u-p_h r_h u\|. \end{cases}$$

En effet, par définition de σ_h :

$$\sigma_h(u_h,r_hu) = a_h(u_h,u_h-r_hu) - a_h(r_hu,u_h-r_hu)$$

Par définition de u_h, et en ajoutant un terme nul :

$$\sigma_h(u_h,r_hu) \leqslant (f_h,u_h-r_hu)_h - a_h(r_hu,u_h-r_hu)$$
$$+ a(u,p_h(u_h-r_hu)) - a(u,p_h(u_h-r_hu))$$

Par définition de $\psi_u(h)$, et en ajoutant zéro :

$$\sigma_h(u_h,r_hu) \leqslant (f_h,u_h-r_hu)_h + \psi_u(h)||u_h-r_hu||_h - a(u,p_h(u_h-r_hu))$$
$$+ a(u,u-p_hu_h) - a(u,u-p_hu_h)$$

$$\sigma_h(u_h,r_hu) \leqslant \psi_u(h)||u_h-r_hu||_h - a(u,u-p_hr_hu)$$
$$+ (f_h,u_h-r_hu)_h + a(u,u-p_hu_h)$$

Par définition de u, et en ajoutant zéro :

$$\sigma_h(u_h,r_hu) \leqslant \psi_u(h)||u_h-r_hu)||_h - a(u,u-p_hr_hu)$$
$$+ (f_h,u_h-r_hu)_h + (f,u-p_hu_h)$$
$$+ (f,p_h(u_h-r_hu) - (f,p_h(u_h-r_hu))$$

Par définition de $\varepsilon(f,f_h)$:

$$\sigma_h(u_h,r_hu) \leqslant \left[\psi_u(h) + \varepsilon(f,f_h)\right] ||u_h-r_hu||_h$$
$$+ (f-Au,u-p_hr_hu)$$

Enfin, par définition du produit scalaire mettant en dualité V et V' :

$$(f-Au,u-p_hr_hu) \leqslant ||f-Au||_* ||u-p_hr_hu||$$

D'où l'on déduit la majoration (3-6).

Pour pouvoir terminer la démonstation du théorème, il suffit de montrer que $(u_h-r_hu)_h$ est stable, donc que $(u_h)_h$ est stable car

$$||u_h-r_hu||_h \leqslant ||u_h||_h + m||u||.$$

Nous utiliserons pour cela le lemme :

L2 - Stablilité de u_h.

L'hypothèse de coercivité globale (3-2) iii entraine que si $(f_h)_h$ est stable, alors $(u_h)_h$ l'est aussi.

En effet nous avons :

$$\sigma_h(u_h,\phi_{o_h}) = a_h(u_h,u_h-\phi_{o_h}) - a_h(\phi_{o_h},u_h-\phi_{o_h})$$

donc, par définition de u_h et de A_h :

$$\sigma_h(u_h,\phi_{o_h}) \leqslant (f_h-A_h\phi_{o_h},u_h-\phi_{o_h})_h \leqslant ||f_h-A_h\phi_{o_h}||_{*h}||u_h-\phi_{o_h}||_h$$

D'où :

$$\frac{\sigma_h(u_h,\phi_{o_h})}{||u_h-\phi_{o_h}||_h} \leqslant ||f_h||_{*h} + ||A_h\phi_{o_h}||_h \leqslant \text{cte.}$$

car $||\phi_{o_h}||_h \leqslant \text{cte} \Rightarrow ||A_h\phi_{o_h}||_h \leqslant \text{cte}$

et $||f_h||_{*h} \leqslant$ cte par hypothèse.

La coercivité globale entraine alors que $||u_h-\phi_{o_h}||_h \leqslant$ cte donc que $(u_h)_h$ est stable car ϕ_{o_h} l'est.

Démonstration du théorème.

La stablilié de $(f_h)_h$ découle de l'inégalité :

$$||f_h||_{*h} = ||f_h-r_h^* f + r_h^* f||_{*h} \leqslant ||f_h-r_h^* f||_{*h} + ||r_f^* f||_{*h}$$

car $||f_h-r_h^* f||_{*h}$ tend vers o d'après (3-5) ii

et r_h^* est stable [cf. P2].

Alors le lemme L2 implique que u_h est stable, donc aussi

$||u_h-r_h u||_h \leqslant ||u_h||_h + m||u|| \leqslant$ cte . La majoration de L1 entraine alors que $\sigma_h(u_h,r_h u)$ tend vers o avec h d'après (3-6), donc que $||u_h-r_h u||_h$ tend vers o d'après (3-2)ii. La convergence forte est alors une conséquence de P1.

Il est clair que la convergence est obtenue grâce à l'hypothèse (3-2)ii. Si on se contente d'une hypothèse de monotonie, suffisante pour l'existence des solutions , alors on peut démontrer la convergence faible, au sens ci-dessous.

T-3. Théorème de convergence faible.

Si dans T2, on remplace les hypothèses :

$\sigma(u,v)>o$ par $\sigma(u,v)\geq o$; $\forall u,v \in K$

(3-2) ii. par $\sigma_h(u_h,v_h)\geq o$; $\forall u_h,v_h \in K_h$

Alors il existe une sous-suite extraite de $(p_h u_h)_h$ qui converge faiblement vers une solution u du problème (P).

L'existence de solutions u_h (resp. u) au problème (P) [(resp. (P_h)] est assurée par le théorème de Hartman-Stampacchia.

D'après L2, u_h est stable, donc aussi bornée car p_h est stable ; c'est-à-dire qu'il existe une constante c indépendante de h telle que $||p_h u_h||\leq c$. Il existe donc une sous-suite $(P_k u_k)_k$ qui converge faiblement vers un élément u^* de K, car K est convexe et fermé, donc aussi faiblement fermé. Montrons que u^* est une solution du problème (P).

L3 - Lemme.

Si il existe une sous-suite $(P_k u_k)_k$ de $(p_k u_k)$ qui converge faiblement vers u^* dans K et si de plus:

i) $\lim\limits_{\lambda\to o} a(u-\lambda w,v) = a(u,v)$; $\forall u,v,w \in V$.

ii) $\lim\limits_{h=o} \psi_u(h) = o$ et $\lim\limits_{h=o} \varepsilon(f,f_h) = 0$

Alors u^* est une solution du problème (P).

Soit v un élément quelconque de K. Alors :

$$\begin{aligned} 0 \leq \sigma_h(u_h,r_h v) &= a_h(u_h,u_h-r_h v) - a_h(r_h v,u_h-r_h v) \\ &\leq (f_h,u_h-r_h v)_h - (f,p_h(u_h-r_h v)) \\ &+ a(v,p_h(u_h-r_h v)) - a_h(r_h v,u_h-r_h v) \\ &+ (f,p_h u_h-p_h r_h v) - a(v,p_h u_h-p_h r_h v) \end{aligned}$$

En se limitant à la sous-suite $(p_k u_k)_k$, et en passant à la limite faible :

(3-7) $0 \leq (f,u^*-v) - a(v,u^*-v)$; $\forall v \in K$.

On utilise alors le procédé de MINTY : quel que soit l'élément W de K, $v = u^*+\lambda(w-u^*) = \lambda w+(1-\lambda)u^*$ appartient au convexe K, si $0\leq\lambda<1$. En portant v dans (3-7), il vient :

$$\lambda a(u^*-\lambda(w-u^*),u^*-w) \leq \lambda(f,u^*-w) \;;\; \forall\, w \in K.$$

En divisant par λ, puis en faisant tendre λ vers 0 :

$$a(u^*,u^*-w) \leq (f,u^*-w) \;;\; \forall w \in K.$$

Ce qui montre que u^* est une solution de (P).

Si on avait supposé $\sigma(u,v)$ et $\sigma_h(u_h,v_h)$ strictement positifs, alors (P) admettrait une solution unique qui serait u^*, et toutes les sous-suites convergentes extraites $(P_h u_h)_h$ convergeraient vers u^*, donc toute la suite $(p_h u_h)_h$ convergerait faiblement vers la solution du problème.

§ 4 - Cas particulier du schéma aux restrictions.

4-1 Définition du schéma aux restrictions.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift left, "r_h"] & V' \arrow[d, shift left, "r_h^*"] \\ V_h \arrow[r, "A_h"] \arrow[u, shift left, "p_h"] & V_h' \arrow[u, shift left, "p_h^*"] \end{tikzcd}$$

On appelle schéma aux restrictions le cas où l'opérateur A étant donné, on définit A_h par $A_h = r_h^* \circ A \circ p_h$

Dans ce cas, suivant la nature des hypothèses faites sur A et sur $A_h(V)$ on pourra obtenir la convergence forte ou faible des solutions du problème approché.

Dans tout ce paragraphe, nous nous placerons dans les conditions suivantes :

(4-1)
- i) V_h est de dimension finie, pour tout h fixé.
- ii) p_h est injectif.
- iii) $||u_h||_h = ||p_h u_h||$ définit la norme dans V_h

$$(4\text{-}2)\begin{cases} \text{i) } a_h(u_h,v_h) = a(p_h u_h, p_h v_h) \\ \text{ii) } f_h = r_h^* f \text{ (i.e. } \varepsilon(f,f_h) = 0) \end{cases}$$

$$(4\text{-}3)\begin{cases} \text{i) } A_h(V) \text{ est une approximation stable et convergente} \\ \text{ii) } p_h K_h \subset K \text{ et } r_h K \subset K_h \end{cases}$$

Comme précédemment, nous appellerons u_h une solution du problème (p_h) lorsqu'elle existe, et u une solution du problème (p).

4-2 Le théorème d'approximation.

Nous obtiendrons la convergence, en divers sens suivant que l'on utilisera l'une des hypothèses suivantes :

(4-5) $\sigma(u,v) \geq 0$; $\forall u,v \in K$.

(4-6) $\sigma(u,v) > 0$; $\forall u, v \in K$; $(u \neq v)$.

(4-7) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \eta > 0$ tel que $||u-v|| \geq \varepsilon \Longrightarrow \sigma(u,v) \geq \eta$

T-4. Théorème d'approximation.

Dans les conditions définies par (4-1), (4-2), (4-3), si on suppose de plus que :

(4-4)
i) A est borné et $\lim a(u-\lambda w, v) = a(u,v)$; $\forall u,v,w \in V$.
ii) $\exists\, \phi_0 \in K$ tel que, si $u \in K$, $||u-p_h r_h \phi_0|| \to +\infty$

$$\text{implique } \frac{\sigma(u, p_h r_h \phi_0)}{||u-p_h r_h \phi_0||} \to +\infty$$

Alors :

(4-5) implique : il existe une solution u^* au problème (P), qui est limite faible d'une sous-suite de $(p_h u_h)_h$

(4-6) implique : il existe une solution unique u^* au problème (p), qui est limite faible de toute la suite $(p_h u_h)_h$.

(4-7) implique : il existe une solution unique au problème (p), qui est limite forte de $(p_h u_h)_h$, et qui vérifie :

$$\sigma(u, p_h u_h) \leq ||f-A(p_h u_h)||_* ||u-p_h r_h u||$$

Remarquons d'abord que le problème (p) admet des solutions, car si ϕ_o est dans K, il en est de même de $p_h r_h \phi_o$.

L4 - Lemme.

L'hypothèse (4-4) implique :

i) A_h est globaèement borné en h ;

(4-8) $\lim\limits_{=o} a_h(u_h-\lambda w_h, v_h) = a_h(u_h, v_h)$; $\forall u_h, v_h, w_h \in V_h$.

ii) $\exists\, \phi_{o_h} \in K_h$ tel que $||\phi_{o_h}||_h \leqslant$ cte et $||u_h-\phi_{o_h}||_h$ tend vers l'infini entraine $\dfrac{\sigma_h(u_h,\phi_{o_h})}{||u_h-\phi_{o_h}||_h} \to +\infty$

De plus :

(4-5) implique : $\sigma_h(u_h, v_h) \geqslant o$; $\forall\, u_h, v_h \in K_h$.

(4-6) implique : $\sigma_h(u_h, v_h) > o$; $\forall\, u_h \neq v_h \in K_h$.

(4-7) implique : $\forall\, \varepsilon > o$, $\exists\, \eta > o$, indépendant de h, tel que

$$||u_h-v_h||_h \geqslant \varepsilon \Rightarrow \sigma_h(u_h, v_h) \geqslant \eta .$$

- La deuxième partie du lemme est évidente.

- On vérifie également :

$$\lim_{=o} a_h(u_h-\lambda w_h, v_h) = \lim_{\lambda=o} a(p_h u_h - \lambda p_h w_h, p_h v_h) = a(p_h u_h, p_h v_h) = a_h(u_h, v_h)$$

. Montrons que A_h est globalement borné en h :

Supposons que $||u_h||_h \leqslant L$; L indépendant de h.

Autrement dit $||p_h u_h|| \leqslant L$, donc il existe une constante indépendante de h, R telle que $||A(p_h u_h)||_* < R$ ceci d'après (4-4) i.

Par définition de la norme duale :

$$\sup_{v \in V} \frac{a(P_h u_h, v)}{||v||} \leqslant R$$

En particulier, pour $v = p_h v_h$:

$$\sup_{v_h \in V_h} \frac{a(p_h u_h, p_h v_h)}{||p_h v_h||} \leqslant R$$

Or :

$$\sup_{v_h \in V_h} \frac{a(p_h u_h, p_h v_h)}{||p_h v_h||} = \sup_{v_h \in V_h} \frac{a_h(u_h, v_h)}{||v_h||_h} = ||A_h u_h||_{* h} \leqslant R$$

Ce qui prouve notre assertion.

Montrons (4-8) ii.

Il suffit pour cela de prendre $\phi_{\circ h} = r_h \phi_\circ$. Nous obtenons alors la stabilité : $||\phi_{\circ h}||_h = ||p_h r_h \phi_\circ|| \leqslant M.m.||\phi_\circ||$

ainsi que la coercivité globale :

si $||u_h - \phi_{\circ h}||_h$ tend vers l'infini, c'est-à-dire si $||p_h u_h - p_h r_h \phi_\circ||$ tend vers l'infini, alors

$$\frac{\sigma(p_h u_h, p_h r_h \phi_\circ)}{||p_h u_h - p_h r_h \phi_\circ||} = \frac{\sigma_h(u_h, \phi_{\circ h})}{||u_h - \phi_{\circ h}||_h}$$

tend aussi vers l'infini.

Ce lemme prouve que nous sommes dans les conditions du théorème de Hartmann-Stampacchia pour le problème (p_h) . L'unicité est assurée si l'une des hypothèses (4-6) ou (4-7) est vérifiée.

Démonstration de T-4.

Par définition : $f_h = r_h^* f$, d'où la stabilité de $(f_h)_h$ et par conséquent celle de $(u_h)_h$ [cf. L2]. Donc $||p_h u_h|| \leqslant cte$. Or K étant convexe et fermé, il est aussi faiblement fermé ; on peut donc extraire une sous-suite $(p_k u_k)_k$ faiblement convergente vers un élément u^* de K.

Montrons que u^* est solution de (p).

Soit v un élément quelconque de K ; nous avons :

$$\begin{aligned} o \leqslant \sigma(p_k u_k, v) &= a(p_k u_k, p_k u_k - v) - a(v, p_k u_k - v) \\ &= a(p_k u_k, p_k u_k - p_k r_k v) + a(p_k u_k, p_k r_k v - v) - a(v, p_k u_k - v) \\ &\leqslant (f ; p_k u_k - p_k r_k v) - a(v, p_k u_k - v) + a(p_k u_k, p_k r_k v - v) \end{aligned}$$

Le dernier terme tend vers o car $||p_k r_k v-v||$ tend vers o et $||A(p_k u_k)||$ est borné. En passant à la limite :

$$(4\text{-}9) \qquad 0 \leq (f,u^*-v) - a(v,u^*-v) \ ; \ \forall v \in K$$

D'après L3 [procédé de MINTY], u^* est donc solution du problème (p).

Si l'on fait l'hypothèse (4-6) [à fortiori (4-7)], la solution de (p) est unique, donc [cf. L3] toute la suite $(p_h u_h)_h$ converge faiblement vers u .

Nous avons dans ce cas la majoration de l'erreur :

$$\begin{aligned}\sigma(u,p_h u_h) &= a(u,u-p_h u_h) - a(p_h u_h,u-p_h u_h)\\ &\quad + a(p_h u_h,p_h u_h-p_h r_h u) - a(p_h u_h,p_h u_h-p_h r_h u)\\ &\leq (f,u-p_h u_h) + (f,p_h u_h-p_h r_h u) - a(p_h u_h,u-p_h r_h u)\\ &\leq (f-A(p_h u_h), u-p_h r_h u)\end{aligned}$$

D'où la majoration annoncée :

$$\underline{\sigma(u,p_h u_h) \leq ||f-A(p_h u_h)||_* ||u-p_h r_h u||}$$

On en déduit que $\sigma(u,p_h u_h)$ tend vers o avec h. Si nous sommes dans les conditions de (4-7), alors $||u-p_h u_h||$ tend vers o, ce qui achève la démonstration du théorème.

§ 5 - Cas des approximations partielles.

5-1 Le problème (p).

Considérons un nombre fini d'espaces de Banach réflexifs $V_i (i=1,\ldots,n)$, tous contenus dans un même espace V_o. La norme de V_i est notée $||.||_i$.

Nous prenons pour V un sous-espace vectoriel fermé de l'intersection des V_i, muni de la norme :

$$||u|| = \left(\sum_{i=1}^{n} ||u||_i^\alpha\right)^{1/\alpha} \ , \text{ où } 1<\alpha<+\infty \ .$$

V est alors un espace de Banach réflexif.

Considérons également les formes $a_j(\vec{u},v_j)$, définies sur $\left(\prod_{i=1}^{n} V_i\right)\times V_j$ linéaires et continues en v_j ($j=1$ à n), où $\vec{u} = (u_1,\dots,u_n)\in \prod_{i=1}^{n} V_i$

Nous définissons alors une forme $a(u,v)$ sur $V\times V$, linéaire et continue en v par :

$$a(u,v) = \sum_{j=1}^{n} a_j(\vec{u},v) \quad \text{où} \quad \vec{u} = (u,u,\dots u)\in V^n\subset \prod_i V_I$$
$$\text{et } v\in V\subset V_j$$

Soit f un élément de V'. Alors il existe au moins une décomposition $f = \sum_{i=1}^{n} f_i$, où $f_i\in V_i'$. Dans tout ce qui suit, nous supposerons la décomposition choisie une fois pour toutes.

Etant donné un convexe fermé K de V, le problème (p) est de trouver un élément u de K vérifiant :

$$a(u,u-v) \leq (f,u-v),\ \forall v\in K.$$

5-2 Notion d'approximations partielles. (cf. AUBIN [1])

Soit V_h un espace de Banach réflexif, supposé de dimension finie. Nous considérons les approximations $A_h(V_i) = (V_i,V_h,p_h^i,r_h)$, où $r_h\in \mathcal{L}(V_\circ,V_h)$ et $p_h^i \in \mathcal{L}(V_h,V_i)$.

Définitions.

D5 - Nous dirons que $A_h(V_i)$ sont des approximations partielles de V si : i) $||u_h||_h = \left(\sum_{i=1}^{n} ||p_h^i u_h||_i^\alpha\right)^{1/\alpha}$ est une norme de V

ii) si $p_h^i u_h$ converge faiblement vers u_i dans V_i, pour tout i, alors il existe $u^* = u_i, \forall_i$, $u^*\in V$.

D6 - Des approximations partielles sont stables, si r_h l'est.

D7 - Des approximations partielles sont convergentes si :
$\left(\sum_{i=1}^{n} ||u-p_h^i r_h u||_i^\alpha\right)^{1/\alpha}$ tend vers o avec h, pour tout u dans V.

P3 - Proposition : Si $||u_h||_h \leq$ cte, il existe un élément u^* de V, et il existe une sous-suite de $(p_h^i u_h)_h$ qui converge faiblement vers u_i dans V_i, pour tout i.

Démonstration :

$||u_h||_h = \left(\sum_{i=1}^{n} ||p_h^i u_h||_i^\alpha \right)^{1/\alpha} \leq$ cte $\Longrightarrow$ $||p_h^i u_h||_i \leq$ cte dans V_i. Donc il existe une sous-suite convergeant faiblement vers u_i dans V_i, pour tout i ; donc aussi $u_i = u^* \in V$, d'après D5.

Notation : $\vec{p}_h u_h = (p_h^1 u_h, p_h^2 u_h, \ldots, p_h^n u_h) \in \prod_{i=1}^{n} V_i$

5-3 Définition du schéma aux approximations partielles.

Nous définissons $a_h(u_h,v_h)$ et f_h par :

$$
(5\text{-}1) \quad \begin{cases} \text{i)} \ a_h(u_h,v_h) = \sum_j a_j(\vec{p}_h u_h, p_n^j v_h) \ ; \ u_h, v_h \in V_h. \\ \text{ii)} \ (f_h,v_h)_h = \sum_j (f_j, p_h^j v_h)_j \ ; \ v_h \in V_h \ ; \ f = \sum_j f_j. \end{cases}
$$

Et nous supposons que :

$$
(5\text{-}2) \quad \begin{cases} \text{i)} \ r_h K \subset K_h \text{ , où } K_h \text{ est un convexe fermé de } V_h. \\ \text{ii)} \ \text{Si } u_h \in K_h \text{ et si } p_h^j u_h \text{ converge faiblement vers } u_i \text{ dans } V_i, \text{ pour} \\ \quad \text{tout i, alors il existe } u^* \in K \text{ tel que } u^* = u_i, \text{ pour tout i.} \end{cases}
$$

Le problème (p_h) est alors :

Trouver u_h dans K_h vérifiant :

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(\vec{p}_h u_h, p_h^j u_h - p_h^j v_h) \leq \sum_{j=1}^{n} (f_j, p_h^j u_h - p_h^j v_h)_j$$

pour tout v_h de K_h.

5-4 Le théorème d'approximation.

Nous allons démontrer :

1) un lemme d'existence de solutions au problème (p_h).

2) un théorème qui assure la convergence, en différents sens, des solutions de (p_h) vers une solution de (p).

Nous aurons besoin des hypothèses suivantes :

(5-3)
$$\left\{\begin{array}{l} \text{i)}\ \left(\sum_i \|u_i\|_i^\alpha\right)^{1/\alpha} \leqslant cte \Rightarrow \sup_{\vec{v}\in\Pi V_i} \dfrac{\sum_{j=1}^n |a_j(\vec{u},v_j)|}{\left(\sum_{j=1}^n \|v_j\|_j^\alpha\right)^{1/\alpha}} \leqslant cte \\ \quad \text{pour tout } \vec{u},\vec{v}\in \Pi V_i. \\ \text{ii)}\ \lim_{\lambda=0} \sum_{j=1}^n a_j(\vec{u}-\lambda\vec{w},v_j) = \sum_{j=1}^n a_j(\vec{u},v_j)\ ;\ \vec{u},\vec{v},\vec{w}\in \Pi V_i. \end{array}\right.$$

(5-4)
$$\left\{\begin{array}{l} \exists \phi_o \in K \text{ tel que si } \left(\sum_j \|u-p_h^j r_h\phi_o\|_j^\alpha\right)^{1/\alpha} \to +\infty \text{ , alors} \\ \dfrac{\sum_j \sigma_j(\vec{u},\vec{p}_h r_h\phi_o)}{\left(\sum_j \|u-p_h^j r_h\phi_o\|_j^\alpha\right)^{1/\alpha}} \quad \text{tend vers l'infini.} \end{array}\right.$$

Ainsi que de l'une des hypothèses suivantes :

(5-5) $\left\{ \sum_j \sigma_j(\vec{u},\vec{v}) \geqslant 0\ ;\ \text{pour } u,v\in V\ ;\ \vec{u},\vec{v}\in \Pi V_i. \right.$

(5-6) $\left\{ \sum_j \sigma_j(\vec{u},\vec{v}) > 0\ ;\ \text{pour } u\neq v \in V. \right.$

(5-7)
$$\left\{\begin{array}{l} \forall \varepsilon>0, \exists \eta>0 \text{ tel que si } \left(\sum_j \|u-v\|_j^\alpha\right)^{1/\alpha} \geqslant \varepsilon, \text{ alors} \\ \sum g_j(\vec{u},\vec{v}) \geqslant \eta \quad ;\ \text{pour } u,v\in K. \end{array}\right.$$

<u>On a noté</u> : $\vec{u} = (u,u\ldots u)$ et $\vec{v}$ de même.

$$\sigma_j(\vec{u},\vec{v}) = a_j(\vec{u},u_j-v_j) - a_j(\vec{v},u_j-v_j)$$

L5 - <u>Lemme.</u>

Dans les conditions définies par D5,D6,D7 et (5-1),(5-2) :

(5-3) i) <u>implique</u> : A_h est globalement borné en h.

(5-3) ii) <u>implique</u> : $\lim_{\lambda=0} a_h(u_h-\lambda w_h,v_h) = a_h(u_h,v_h)\ ;\ u_h,v_h,w_h\in V_h.$

(5-4) <u>implique</u> :
$$\left\{\begin{array}{l} \exists\ \phi_{oh}\in K_h \text{ tel que } \|\phi_{oh}\|_h \leqslant cte \text{ et si} \\ \|u_h-\phi_{oh}\|_h \to +\infty, \text{ alors } \dfrac{\sigma_h(u_h,v_h)}{\|u_h-\phi_{oh}\|_h} \to +\infty . \end{array}\right.$$

(5-5) implique : $\sigma_h(u_h,v_h) \geqslant 0$ pour $u_h, v_h \in V_h$.

(5-6) implique : $\sigma_h(u_h,v_h) > 0$ pour $u_h \neq v_h \in V_h$.

(5-7) implique : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \eta$ indépendant de h et >0 tel que si

$||u_h - v_h||_h \geq \varepsilon$, alors $\sigma_h(u_h,v_h) \geq \eta$.

Dans ces conditions, nous sommes assurés de l'existence de solutions au problème (p_h), et de l'unicité si (5-6) ou (5-7) est vraie, d'après le théorème de Hartman-Stampacchia.

Nous ne donnerons que la démonstration de la première et la troisième implication, le reste du lemme étant évident d'après les définitions de $||u_h||_h$ et de $\sigma_h(u_h,v_h)$.

1) A_h est globalement borné en h.

Rappelons que, par définition :

$$(A_h u_h, v_h)_h = a_h(u_h,v_h) = \sum_j a_j(\vec{p_h} u_h, p_h^j v_h) \;;\quad v_h \in V_h.$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$(A_h u_h, v_h)_h = \sum_j (A_j(\vec{p_h} u_h)\ ,\ p_h^j v_h)_j \;;\ \text{où } A_j(\vec{p_h} u_h) \in V_j'.$$

Supposons que $||u_h||_h = \left(\sum ||p_h^j u_h||_j^\alpha \right)^{1/\alpha} \leqslant$ cte. Alors :

$$||A_h u_h||_{V_h'} = \sup_{v_h} \frac{|a_h(u_h,v_h)|}{||v_h||_h} = \sup_{v_h} \frac{|\sum a_j(\vec{p_h} u_h, p_h^j v_h)|}{||v_h||_h}$$

$$||A_h v_h||_{V_h'} \leqslant \sup_{v_h} \frac{|a_j(\vec{p_h} u_h, p_h^j v_h)|}{||v_h||_h} \leqslant \sup_{v \in \Pi V_j} \frac{\sum |a_j(\vec{p_h} u_h, v_j)|}{\left(\sum_j ||v_j||_j^\alpha\right)^{1/\alpha}} \leqslant \text{cte}$$

car l'ensemble $\{p_h^j v_h | v_h \in V_h\}$ est inclus dans V_j, [et en tenant compte de (5-3) i)]

2) Supposons (5-4) vraie et prenons $\phi_{o_h} = r_h \phi_o \in K_h$.

Alors $||\phi_{o_h}||_h$ est bornée, d'après D7. $[\ u = \phi_o]$.

D'autre part si $||u_h - \phi_{o_h}||_h$ tend vers l'infini, alors, d'après (5-4) :

$$\frac{\sigma_h(u_h,\phi_{oh})}{||u_h-\phi_{oh}||_h} = \frac{\sum\limits_j \sigma_j(\vec{p}_h u_h, \vec{p}_h r_h \phi_o)}{\left(\sum\limits_j ||p_h^j u_h - p_h^j r_h \phi_o||_j^\alpha\right)^{1/\alpha}}$$ tend vers l'infini.

La troisième implication du lemme est donc démontrée.

T-5 . Théorème :

Si nous appelons u_h une solution du problème (p_h), et si les hypothèses (5-1) à (5-4) sont vérifiées :

(5-5) implique : il existe une solution u^* au problème (p), limite faible dans V_i d'une sous-suite de $(p_h^i u_h)_h$, pour tout i.

(5-6) implique : Cette solution est unique, et toute la suite $(p_h^i u_h)$ converge faiblement vers elle, pour tout i.

(5-7) implique : la convergence a lieu au sens fort :

$$\left(\sum_j ||p_h^j u_h - u\,||_j^\alpha\right)^{1/\alpha}$$ tend vers o avec h.

La démonstration est analogue dans son principe à celle de T-4 : on démontre d'abord la stabilité de $(u_h)_h$ d'où l'existence d'une sous-suite c convergente, le point limite étant solution de (p).

Démonstration.

1) u_h est stable.

Par définition :

$$\sum_j \sigma_j(\vec{p}_h u_h, \vec{p}_h r_h \phi_o) \leq \sum_j (f_j, p_h^j u_h - p_h^j r_h \phi_o)_j - \sum_j a_j(\vec{p}_h r_h \phi_o, p_h^j u_h - p_h^j r_h \phi_o)$$

$$\sum_j \sigma_j(\vec{p}_h u_h, \vec{p}_h r_h \phi_o) \leq \sum_j ||f_j - A_j(\vec{p}_h r_h \phi_o)||_{V_j'} ||p_h^j u_h - p_h^j r_h \phi_o||_j$$

Si l'on tient compte de :

$$||p_h^j u_h - p_h^j r_h \phi_o||_j \leq \left(\sum ||p_h^j u_h - p_h^j r_h \phi_o||_j^\alpha\right)^{1/\alpha}$$

Il vient :

$$\frac{\sum_j \sigma_j(\vec{p}_h u_h, \vec{p}_h r_h \phi_o)}{\left(\sum_j ||p_h^j u_h - p_h^j r_h \phi_o||_j^\alpha\right)^{1/\alpha}} \leqslant \sum_j ||f_j - A(\vec{p}_h r_h \phi_o)||_{V_j'} \leqslant \text{cte}$$

Et donc, d'après (5-4) :

$$\left(\sum_j ||p_h^i u_h - p_h^j r_h \phi_o||_j^\alpha\right)^{1/\alpha} \leqslant \text{cte}$$

$$\text{Or :} \quad \left(\sum_j ||p_h^j r_h \phi_o||_j^\alpha\right)^{1/\alpha} \leqslant \text{cte d'où} \quad \left(\sum_j ||p_h^j u_h||_j^\alpha\right)^{1/\alpha} \leqslant \text{cte}$$

Ce qui entraine $||p_h^j u_h||_j \leqslant$ cte pour tout j. En particulier (u_h) est stable, sinon $\left(\sum_j ||p_h^j u_h||_j^\alpha\right)^{1/\alpha}$ tendrait vers l'infini.

Il existe donc [d'après P3] un élément u^* de V qui est limite faible dans V_i d'une sous-suite $(P_k^i u_k)_k$ de $(p_h^i u_h)_h$ pour tout i. On peut même affirmer que $u^* \in K$, d'après (5-2) ii).

2) Montrons que u est solution du problème (p).

Soit $v \in K$ quelconque. Nous pouvons écrire :

$$o \leqslant \sum_j \sigma_j(\vec{p}_h u_h, \vec{v}) = \sum_j a_j(\vec{p}_h u_h, p_h^j u_h - p_h^j r_h v) + \sum_j a_j(\vec{p}_h u_h, \vec{p}_h r_h v - v)$$
$$- \sum a_j(\vec{v}, p_h^j u_h - v).$$

$$o \leqslant \sum_j \sigma_j(\vec{p}_h u_h, \vec{v}) \leqslant \sum_j (f_j, p_h^j u_h - p_h^j r_h v)_j - \sum_j a_j(\vec{v}, p_h^j u_h - v)$$
$$+ \sum_j a_j(\vec{p}_h u_h, \vec{p}_h r_h v - v)$$

Si nous passons à la limite, pour la sous-suite $(\vec{p}_k u_k)_k$:

$$o \leqslant \sum_j (f_j, u^* - v)_j - \sum_j a_j(\vec{v}, u^* - v)$$

c'est-à-dire :

$$a(v, u^* - v) \leqslant (f, u^* - v)$$

Le procédé de MINTY [cf. L3] permet de conclure que u est une solution de (p).

Si (5-6) est vraie, la solution u^* est unique, donc toute sous-suite convergente extraite de $(p_h^j u_h)_h$ converge vers u^*, c'est-à-dire, que toute la suite $(p_h^j u_h)_h$ converge faiblement vers u^*, pour tout j.

Si (5-7) est vraie, il y a toujours unicité et convergence faible. De plus :

$$\begin{aligned}\sum_j \sigma_j(\vec{p}_h u_h, \vec{u}^*) \leq & \sum_j (f_j, p_h^j u_h - p_h^j r_h u^*)_j \\ & - \sum a_j(\vec{u}^*, p_h^j u_h - u^*) \\ & + \sum a_j(\vec{p}_h u_h, p_h^j r_h u^* - u^*)\end{aligned}$$

Donc $\sum_j \sigma_j(\vec{p}_h u_h, u^*)$ tend vers o avec h, et donc $\left(\sum_j \|p_h^j u_h - u^*\|_j^\alpha\right)^{1/\alpha}$ tend vers o avec h. Ce qui signifie la convergente "forte" des solutions $(u_h)_h$ vers la solution u^* de (p).

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUBIN J.P. : Approximation des espaces de distributions et des opérateurs différentiels. (Mémoire n° 12 de la S.M.F. - 1967)

[2] HARTMAN-STAMPACCHIA : On non-linear elliptic differential-functional equations. (à paraitre).

Manuscrit remis le 1er septembre 1967.

G. PETOLLA
Assistant
I.N.S.A. - LYON