DORIN POPESCU

Quelques applications de la décomposition triangulaire

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1967, tome 4, fascicule 3
, p. 63-68

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1967__4_3_63_0>

© Université de Lyon, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUELQUES APPLICATIONS DE LA DECOMPOSITION TRIANGULAIRE

DORIN POPESCU

On donne des applications de la décomposition triangulaire de [2] ; par exemple : on donne des conditions dans lesquelles une catégorie avec limites inductives a des limites projectives et des conditions suffisantes dans lesquelles un foncteur a un adjoint.

1. Limites inductives et projectives dans catégories.

Soit C une catégorie ; si $X, Y \in \text{ob}C$ nous notons $C(X, Y)$ l'ensemble des morphismes de X dans Y . Si $F : C \rightarrow C'$ est un foncteur covariant, et $X' \in \text{ob}C'$, nous notons $(F, C)/X'$ (resp. $X'/(F, C)$) la catégorie dont les objets sont les paires (X, f) (resp. (f, X)) où $X \in \text{ob}C$ et $f \in C(FX, X')$ (resp. $f \in C'(X', FX)$) ; $\alpha : (X, f) \rightarrow (Y, g)$ (resp. $\alpha : (f, X) \rightarrow (g, Y)$) est un morphisme $\alpha \in C(X, Y)$, tel que $g \circ F(\alpha) = f$ (resp. $(F\alpha) \circ f = g$) si $C \equiv C'$ et F est le foncteur identique I , alors $(I, C)/X$ (resp. $X/(I, C)$) se note C/X (resp. X/C).

Soient C une catégorie et J une petite catégorie ; on note par $\langle J, C \rangle$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs covariants de J dans C et les morphismes, les morphismes fonctoriels ; il y a un foncteur canonique $k_J : C \rightarrow \langle J, C \rangle$ tel que pour tout objet X de C , $k_J(X)$ est le foncteur "constant" de J dans C . On dit que C a des J -limites projectives (inductives) si k_J a un adjoint à droite (à gauche) noté $\varprojlim$ ($\varinjlim$). C a des J -limites projectives (inductives) si et seulement si pour tout objet H de $\langle J, C \rangle$ la catégorie $(k_J, C)/H$ (des cônes projectifs de base H) (resp. $H/(k_J, C)$ (des cônes inductifs de base H)) a un objet final (resp. initial).

On dit que C a des limites projectives (inductives) si C a des J -limites projectives (inductives) pour toute petite catégorie J . On sait que la catégorie C a des limites projectives (inductives) si C a des produits directs et des noyaux de paires (condition duale pour les limites inductives).

Notre but est de montrer que dans certaines conditions une catégorie a des limites inductives (projectives).

Soit C une catégorie quelconque ; nous considérons les conditions suivantes :

(*) Pour tout $X \in \text{ob } C$, les sous-objets de X forment un ensemble ;

(**) La duale C° de C satisfait la condition (*).

Lemme 1 : Soit C une catégorie avec des J -limites projectives et un objet final E . Alors pour tout petit foncteur $F: A \rightarrow C$ la catégorie $F(k_A, C)$ des cônes inductifs de base F possède des J -limites projectives.

La démonstration est calculatoire.

Soit C une catégorie et M un ensemble ; on dit que C a des M -noyaux (resp. M -conoyaux) si C a des J_M -limites projectives (resp. inductives) où J_M est la catégorie avec deux objets i, j tels que $J_M(i, i) = \{1_i\}, J_M(j, j) = \{1_j\}$ (les morphismes identiques) et $J_M(i, j)$ est un ensemble de morphismes équipotent à M ; enfin $J_M(j, i) = \emptyset$. Si M a deux éléments on dit que C a des noyaux de paires.

Lemme 2. Soit C une catégorie avec M -produits fibrés ([2], chap.1) et vérifiant la condition (*). Alors pour tout ensemble M et tout objet $F: J_M \rightarrow C$ si $(f, X) \in \text{ob } F/(k_{J_M}, C)$ il y a une décomposition $f = i.p$, où $i: X' \rightarrow X$ est un monomorphisme, p un épimorphisme et $(p, X') \in \text{ob } F/(k_{J_M}, C)$.

Preuve. Se donner $F : J_M \rightarrow C$ équivaut à se donner deux objets A et B de C, et un ensemble $\{f_i\}_{i \in M}$ de morphismes de A dans B ; alors pour $(f, X) \in \text{ob } F/(k_{J_M}, C)$, $f : B \rightarrow X$ et $f \circ f_i = f \circ f_j$ pour tous $i, j \in M$. D'après [2] (proposition (1,5,1) et (1,5,2)), dans les conditions ci-dessus, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{f} & X \\
 \searrow p & & \nearrow i \\
 & X' &
 \end{array}$$

où $p = \overline{\text{Coim}} f$ et $i = \text{Im} f$, etc...

Proposition 1 : Soit C une catégorie avec limites projectives et vérifiant les conditions (*) et (**); alors C a des M-conoyaux pour tout ensemble M.

Preuve. Soit $F : J_M \rightarrow C$ un objet de $\langle J_M, C \rangle$, c'est-à-dire deux objets A, B de C et une famille $\{f_i\}_{i \in M}$ de morphismes de A dans B, alors tout objet de $\mathcal{D} = F/(k_{J_M}, C)$ est un couple (f, X) tel que $f \in C(B, X)$ et $f \circ f_i = f \circ f_j$ pour tout $i, j \in M$ (la catégorie n'est pas vide, C ayant un objet final). D'après le lemme 2 et la condition (**) il y a une sous-catégorie petite $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$ tel que pour tout $(f, X) \in \text{ob } \mathcal{D}$, il y a un objet $(f', X') \in \text{ob } \mathcal{D}'$ et un morphisme unique $\alpha : (f', X') \rightarrow (f, X)$ de $\mathcal{D}$. Si (g, Y) est la limite projective du foncteur inclusion $i : \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}$ c'est un objet initial de $\mathcal{D}$ (la limite projective existe conformément au lemme 1).

Corollaire 1 : Soit C une catégorie avec limites projectives, vérifiant les conditions (*) et (**). Si C a des sommes directes quelconques, alors elle a des limites inductives.

Corollaire 2. Toute petite catégorie avec limites projectives a des limites inductives (et inversement).

Preuve. Toute petite catégorie vérifie les conditions (*) et (**) de façon évidente. D'après le lemme 1, elle possède des sommes directes, tout résulte alors du corollaire 1.

2. Foncteurs adjoints.

Définition : Soient $F : C' \rightarrow C$ un foncteur covariant, $X' \in \text{ob}C'$, $X \in \text{ob}C$. On dit que le morphisme $f \in C(X, FX')$ est un épimorphisme relatif à C' et F (ou simplement "relatif") si pour tout $Y' \in \text{ob}C'$ et toute paire $\{u, v\}$ de morphismes de X' dans Y' , telle que $F(u) \circ f = F(v) \circ f$ on a $u = v$.

De façon évidente on obtient les notions de monomorphisme, d'objet quotient et de sous-objet relatifs.

Nous introduisons les conditions :

(*)' les sous-objets relatifs de tout objet de C forment un ensemble :

(**)' La duale de (*).'

Evidemment il s'agit des sous-objets relatifs à F et C' . Dans ce qui suit nous admettons que C' et C sont des catégories avec des limites projectives et $F : C' \rightarrow C$ un foncteur covariant qui commute avec les limites projectives, de même on suppose que C' satisfait à la condition (*).

Soit $f : X \rightarrow FX'$ un morphisme de C , notons par F l'ensemble des sous-objets (Y', i) de X' qui vérifient le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & F(X') \\
 p \searrow & & \nearrow F(i) \\
 & & FY'
 \end{array}$$

Soit (P', j) l'intersection des sous-objets appartenant à F ; il est clair que $(P', j) \in F$ et pour tout $(Y', i) \in F$ il y a un morphisme unique $t : P' \rightarrow Y'$ tel que $j = i \circ t$. Soit $p : X \rightarrow P'$ un morphisme tel que $F(j) \circ p = f$.

Lemme 3 : Avec les notations ci-dessus, f est un épimorphisme relatif si et seulement si j est un bimorphisme.

Preuve. Soit f un épimorphisme relatif et $u, v \in \mathcal{C}(X', Z')$ tels que $u \circ j = v \circ j$ alors $F(u) \circ F(j) \circ p = F(v) \circ F(j) \circ p$, donc $u = v$.

D'autre part, soient j un bimorphisme, u et v des morphismes de X' dans Z' tels que $F(u) \circ f = F(v) \circ f$; dans $\mathcal{C}'$ on a le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc}
 Q & \xrightarrow{\ell} & X' \\
 \downarrow t & & \downarrow [u, v] \\
 Z' & \xrightarrow{\Delta_{Z'}} & Z' \times Z'
 \end{array}$$

ℓ étant un monomorphisme et $\Delta_{Z'}$, le morphisme diagonal. Pour montrer que $u = v$ il suffit de montrer que ℓ est un bimorphisme ([2], prop. 1.1.4). En appliquant le foncteur au diagramme ci-dessus, on obtient dans $\mathcal{C}$ un carré cartésien.

$$\begin{array}{ccc}
 F(Q) & \xrightarrow{F(\ell)} & F(X') \\
 \downarrow F(t) & \swarrow r & \searrow f \\
 & X & \\
 & \swarrow & \searrow \\
 F(Z') & \xrightarrow{F(u) \circ f} & F(Z') \times F(Z') \\
 & & \downarrow F(u), F(v)
 \end{array}$$

où r est construit de façon canonique : $f = F(\ell) \circ r$. C'est-à-dire $(Q, \ell) \in F$; il y a alors un monomorphisme $s : P' \rightarrow Q$ tel que $j = \ell \circ s$; j étant un bimorphisme, il en résulte que ℓ est un bimorphisme ; ceci achève la démonstration.

Notons $j = \text{Im}_{\mathcal{C}'} f$.

Proposition 2 : Soient C', C deux catégories avec limites projectives : $F : C' \rightarrow C$ un foncteur qui commute avec les limites projectives et C' vérifie la condition $(*)$. Alors tout morphisme $f : X \rightarrow FX'$ de C a une décomposition triangulaire relative : $f : F(j) \circ p$ où j est un monomorphisme de C' et p un épimorphisme relatif de C .

Preuve. Avec les notations ci-dessus on voit que $\text{Im}_{C'} p = 1_p$, c'est-à-dire p est un épimorphisme relatif.

Proposition 3. Conservons les hypothèses de la proposition précédente ; en plus nous admettons que C vérifie la condition $(**)$ '. Alors le foncteur F a un adjoint à gauche.

Preuve. En utilisant la proposition 2 et l'hypothèse $(**)$ ' on déduit que pour tout $X \in \text{Ob } C$, le foncteur $\text{Hom}_C(X, F?)$ est borné ; évidemment il commute avec les limites projectives, et utilisant le théorème de Benabou [3], on obtient le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

- [1]. N. POPESCU : Elemente de teoria fascicolelor, Studii si cercetari Mat. Tom. 18, nr. 2, 1966.
- [2]. René PUIER : Sur les catégories complètes, Publ. du Départ. math. Lyon 1965.
- [3]. J. BENABOU : Critères de représentabilité des foncteurs, Compte-Rendus, 1965, n° 3.