PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

ROLAND FRAISSE

La classe universelle : une notion à la limite de la logique et de la théorie des relations

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1967, tome 4, fascicule 3
, p. 55-61
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1967__4_3_55_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1967 t. 4-3

LA CLASSE UNIVERSELLE : UNE NOTION A LA LIMITE DE LA LOGIQUE ET DE LA THEORIE DES RELATIONS

Roland FRAISSE

La classe universelle a été introduite par A. Tarski (Universal arithmetical classes of mathematical systems, Bull. Amer. Math. Soc. t. 59 p. 390-391) et R. Vaught (Remarks on universal arithmetical classes, ibidem p. 391).

La définition logique est : classe des relations d'arité donnée, vérifiant une formule liée ne comportant, sous sa forme prenexe, que des quanteurs universels. Notant A une classe universelle et passant à la classe complémentaire A' pour l'arité considéré - on voit qu'une relation n-aire R appartient à A' si et seulement s'il existe une suite d'éléments $a_1, a_2, \ldots, a_p$ (p étant le nombre de quanteurs universels) tels que $(R, a_1, a_2, \ldots, a_p)$ vérifie une certaine formule libre U. On transforme U en considérant tous les cas possibles concernant les égalités et les inégalités entre $a_1, a_2, \ldots, a_p$ et dans chaque cas tous les sous-cas définis par les valeurs + ou - prises par R pour chaque n-uple extrait de $a_1, a_2, \ldots, a_p$. Après transformation de U, on obtient un nombre fini de relations n-aires $U_1, U_2, \ldots, U_h$ sur 1,2,... ou p éléments, avec R appartient à A' si et seulement si $R \geqslant U_1$, $R \geqslant U_2, \ldots$ ou $R \geqslant U_h$.

Il en résulte qu'une classe A de relations n-aires (ou de multirelations d'arité donnée) est universelle lorsqu'il existe un nombre fini de relations n-aires finies $U_1, U_2, \ldots, U_h$ telles que $R \in A$ si et seulement si R non $\geqslant U_1$, non $\geqslant U_2, \ldots$, non $\geqslant U_h$ (cf. R. FRAISSE 1957, Obtention en théorie des relations de certaines classes d'origine logique. Proc. Intern. Congr. Math. Amsterdam 1954, p. 537-538).

On peut supprimer les U_i pour lesquelles il existe une $U_j<U_i$: il reste alors seulement les U_i pour lesquelles $U_i\notin A$ mais toute restriction stricte de U_i appartient à A, on les appellera les bornes de la classe A. On voit qu'un ensemble de relations U_i définit A si et seulement s'il comprend les bornes.

Exemples. La classe vide (borne = relation de base vide) ; la classe pleine (aucune borne) ; la classe des relations binaires réflexives (une borne : la relation U sur un seul élément a telle que U(a,a) = −) ; la classe des relations de cardinaux $\leq p$ (bornes : toutes les relations de cardinal p+1).

L'intersection de deux classes universelles est universelle : prendre la réunion des ensembles de bornes.

La réunion de deux classes universelles est universelle.
Noter que, pour U,V finies, la condition $R\geq U$ et $R\geq V$ équivaut à $R\geq U$ ou ... ou $R\geq U_h$, où les $U_1,\ldots,U_h$ sont toutes les relations supérieures à la fois à U et V et de cardinaux au plus égal à (cardinal de U+cardinal de V).

Une classe universelle est close pour $\leq$, autrement dit si A est universelle $R\in A$ et $S\leq A$ alors $S\in A$. Il en résulte que les seules classes qui sont universelles et dont la complémentaire est universelle, sont les classes vides et pleines.

Une classe universelle est close pour l'équivalence $R\approx R'$ lorsque R et R' ont les mêmes restrictions finies. Il en résulte que la classe des bons ordres par exemple, bien que close pour $\leq$, n'est pas universelle.

1. Pour que A soit universelle, il faut et il suffit qu'il existe un entier p tel que :

$R \in A$ si et seulement si toute restriction de R à $0,1,2,\dots,p$ éléments (avec ses isomorphes) appartient à A (voir R. Vaught 1953, loc. cit.).

Preuve. Soit A universelle : si $R \in A$, alors toute restriction de R appartient à A ; a fortiori toute restriction à $1,2,\dots,p$ éléments, pour un entier p donné. D'autre part appelons p le maximum des cardinaux de bornes $U_1,\dots,U_h$ de A. Si toute restriction de R à $1,2,\dots,p$ éléments appartient à A, alors une telle restriction est non $\geqslant U_1,\dots,$ non $\geqslant U_h$ donc aussi R est non $\geqslant U_1,\dots,$ non $\geqslant U_h$ donc $R \in A$.

Inversement soit A une classe vérifiant la condition de l'énoncé, et soit $U_1,\dots,U_h$ les relations de cardinaux $\leqslant p$ et qui n'appartiennent pas à A. Alors $R \in A$ si et seulement si toute restriction de R à $0,1,2,\dots,p$ éléments est distincte de $U_1,\dots,U_h$.

Autrement dit si et seulement si R est non $\geqslant U_1,\dots,$ non $\geqslant U_h$: donc A est universelle.

1.1. Soit U une relation finie ; alors la classe des relations inférieures à U est universelle.

Preuve. Appelons $V_1,\dots,V_h$ les bornes de U, c'est-à-dire les relations non $\leqslant U$ mais dont les restrictions strictes sont $\leqslant U$: elles sont de cardinal au plus égal à $p+1$, donc en nombre fini, et d'autre part $R \leqslant U$ équivaut à R non $\geqslant V_1$ et ... et non $\geqslant V_h$.

Par conséquent : pour tout ensemble fini de relations finies $U_1,\dots,U_h$, la classe des $\leqslant U_1$ ou ... ou $\leqslant U_h$ est universelle.

Ou encore : toute classe d'un nombre fini (à l'isomorphie près) de relations finies, close pour $\leqslant$, est universelle.

1.2. Si une classe universelle comprend des relations finies de cardinaux arbitrairement grands, alors elle comprend des relations infinies.

<u>Preuve</u> . Prendre une suite dénombrable R_1 de cardinal $1,\dots,R_i$ de cardinal $i,\dots$ appartenant à la classe, considérer chaque R_i comme défini sur les entiers $1,2,\dots,i$. Pour une infinité de valeurs i, les relations R_i ont la même restriction S_1 au seul 1. Parmi cette infinité, une autre infinité de R_i ont la même restriction S_2 à l'ensemble $\{1,2\}$ etc... On définit S_i et on prend l'extension commune des S_i sur l'ensemble des entiers.

1.3. <u>Compacité</u>. <u>Si une intersection de classes universelles est vide, alors pour un nombre fini d'entre elles l'intersection est vide.</u>

<u>Preuve</u>. Prenons pour chaque classe l'ensemble des bornes et soit $U_1,\dots,U_i,\dots$ une suite de toutes les bornes des différentes classes. Une relation R appartient à l'intersection si et seulement si R n'est supérieure à aucune U_i. Or si aucune intersection finie n'est vide, il existe R_1 non $\geqslant U_1$, puis R_2 non $\geqslant U_1$ et non $\geqslant U_2,\dots,R_i$ non $\geqslant U_1$ et ... et non $\geqslant U_i$. On définit R_i sur tout ou partie de l'ensemble $\{1,2,\dots,i\}$ puis une relation S admettant une infinité d'extensions parmi les R_i, de sorte que S non $\geqslant U_i$ pour chaque i donc S appartient à l'intersection des classes.

2. Etant donné une classe A et un entier a, appelons <u>A' la classe A diminuée de ses relations de cardinaux $<$a puis Aa la classe A' augmentée des restrictions, de cardinaux $<$a, des relations de A'</u> (autrement dit Aa est A' complétée par cloture pour $\leqslant$).

2.1. <u>Si A est universelle, alors Aa est universelle.</u>

<u>Preuve</u>. On a évidemment $A\text{a} \subseteq A$ et les relations appartenant à A-Aa sont de cardinaux $<$a donc en nombre fini (à l'isomorphie près), soit $U_1,\dots,U_h$. De plus toute relation $\geqslant$ une U_i $(i = 1,\dots,h)$ est hors de A. Donc $R \notin A$a équivaut à $R \notin A$ ou $R \geqslant U_1$ ou ... ou $R \geqslant U_h$. Enfin $R \in A$a équivaut à $R \in A$ et $R \not\geqslant U_1$ et ... et $R \not\geqslant U_h$: donc Aa est l'intersection de A et de la classe universelle définie par $U_1,\dots,U_h$, donc Aa est universelle.

2.2 Etant donné une classe universelle A et un entier a, toute classe close pour $\leqslant$ et qui se confond avec A pour les relations de cardinaux $\geqslant a$, est universelle. En effet la classe considérée est la réunion de A_a, qui est universelle, et d'un ensemble de relations finies, clos pour $\leqslant$, donc formant une classe universelle.

2.3. Etant donné un entier p, la classe des relations d'arité donnée et p-monomorphes est universelle. (Rappelons qu'une relation est dite p-nomorphe lorsque toutes ses restrictions à p éléments sont isomorphes (p entier positif)).

Preuve. Pour que R soit p-monomorphe, il suffit que toute restriction de R à p+1 éléments soit p-monomorphe : car de proche en proche, en changeant un élément chaque fois, on transforme tout p-ensemble en tout autre p-ensemble. Prenons la suite, finie à l'isomorphie près, des relations n-aires de cardinal p+1 et p-monomorphes, et la suite $U_1, \ldots, U_h$ des autres relations n-aires de cardinal p+1. Alors la condition "R est p-monomorphe" équivaut à $R \not\geqslant U_1$ et ... et $\not\geqslant U_h$.

3. Utilisant la technique des chaînes permutées, développée par C. Frasaay (1965: quelques problèmes combinatoires concernant les ordres totaux et les relations monomorphes. Annales de l'Inst. Fourier - Grenoble t. 15 n° 2 p. 415-524) on déduit de ce qui précède deux résultats importants dûs à M. JEAN (1967 : sur la classe universelle des relations monomorphes, compte rendu., sous presse):

- La classe des relations monomorphes (i.e. p-monomorphes pour tout entier p), d'arité donnée est universelle.

- La classe des relations enchaînables (i.e interprétables par une chaîne (ordre total)) au moyen d'une formule libre, est universelle.

4. Une classe est dite <u>&universelle</u> lorsqu'elle est une intersection quelconque, donc finie au dénombrable, de classes universelles.

- Pour que A soit &-universelle, il faut et il suffit :

1) qu'il existe un nombre fini ou dénombrable de relations n-aires finies $U_1,\ldots,U_i,\ldots$ telles que $R \in A$ si et seulement si R non $\geq U_i$ pour chaque U_i (prenant pour les U_i les cycles de i éléments, on voit qu'il existe des classes &universelles qui ne sont pas universelles) ;

2) que $R \in A$ si et seulement si toute restriction fini de R appartient à A (voir Tarski 1953, loc. cit.).

Du point de vue logique, une classe &universelle est définie par un ensemble fini ou dénombrable de formules prénexes ne comprenant que des quanteurs universels.

5. Le problème de l'<u>extension respectueuse</u> est étroitement lié aux classes universelles.

Etant donné la relation finie U et la relation R non $\geq$U, il existe une extension de R, de cardinal aussi grand que l'on veut, qui reste non $\geq$U. Dans le cas binaire, compléter R en R' par un élément a avec : $R'(a,x) = R''(x,a) = R'(a,a) = +$ pour tout x, puis en R" avec : $R''(a,x) = R''(x,a) = R''(a,a) = -$. Alors, si R' et $R'' \geq U$, c'est que U comprend un élément a donnant avec tout autre la valeur +, et un élément b donnant avec tout autre la valeur − : contradiction en considérant U(a,b).

Etant donné $U_1,\ldots,U_h$ finies et R non $\geq U_1$ et ... et non $\geq U_h$, il n'est pas possible en général d'avoir une extension de R respectant ces inégalités. Mais si $Card(R) \geq k$, où k est un entier fonction de $U_1,\ldots,U_h$, alors il est plausible (mais non prouvé) qu'une telle extension respectueuse existe, de cardinal fini arbitrairement grand, et par suite de cardinal infini. Cela revient à dire :

- <u>Etant donné une classe universelle A, existe-t-il un entier k tel que toute relation R ∈ A et de cardinal ⩾ k admette, dans A, une extension stricte</u> (donc une extension de cardinal arbitrairement grand, fini ou infini).

Manuscrit remis le 31 janvier 1957.

R. FRAÏSSE
Faculté des Sciences
MARSEILLE