Publications du Département de mathématiques de Lyon

J. F. Pabion

Une approche de la construction d'un modèle dénombrable pour la théorie de Zermelo-Fraenkel

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1967, tome 4, fascicule 3 , p. 15-31

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1967__4_3_15_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1967 t.4-3

UNE APPROCHE DE LA CONSTRUCTION D'UN MODELE DENOMBRABLE POUR POUR LA THEORIE DE ZERMELO-FRAENKEL

J.F. PABION

Introduction.

Que l'on envisage la théorie de Zermelo-Fraenkel (ZF), ou la théorie des classes de Bernays- Godel, il s'agit de théories formalisables dans un calcul du premier ordre, de base quelconque, comportant suivant les présentations un ou deux prédicats (appartenance, ou appartenance et égalité) et engendrées par un ensemble d'énoncés clos. D'après le théorème de Lowenheim-Skolem [2], ces théories sont réalisables sur un domaine dénombrable. En d'autres termes, si elles sont compatibles, il en existe des modèles dénombrables.

Choquant au premier abord - on l'a appelé paradoxe de Skolem -, salué par les intuitionnistes comme un nouvel argument contre les formalistes, le résultat signifie simplement qu'on ne pouvait s'attendre à trouver un contenu absolu dans les formalismes. Même la notion de cardinalité devient relative, et le "paradoxe" révèle seulement une hétérogénéité totale avec la notion de cardinalité intérieure à un modèle, et celle qu'on peut voir inscrite dans le matériel ayant servi à sa construction. Depuis, les "modèles dénombrables" sont intervenus, du moins par leur existence, dans plusieurs démonstrations - citons, parmi les plus récentes, le travail de Cohen sur l'indépendance de l'hypothèse du continu-. Nous ne sommes pas sûrs qu'un modèle ait jamais été totalement explicité, au sein d'une théorie éprouvée.

Dans ce qui suit, nous construirons, par un procédé non effectif au sens rigoureux de récursif, mais clairement explicité à l'aide d'un matériel modeste, un modèle pour une théorie plus faible que ZF, quoi de structure assez voisine :

N.B.: Nous adoptons la description du calcul des prédicats faite dans [1] . On pourra trouver les axiomes de ZF dans [5] . Les théories de Bernays-Godel sont décrits dans [3] et [5].

I - Présentation de la théorie Z' :

1°) - Symboles: nous nous plaçons dans le calcul de prédicats restreint du 1er ordre, sans égalité. Outre les signes logiques (connecteurs du calcul propositionnel et quantificateurs) et les signes impropres (signes de ponctuation), notre alphabet contient :

- un ensemble dénombrable de variables x, y, z...
- un ensemble infini d'individus I. Dans I, un individu distingué noté α_0.
- deux prédicats de poids 2, r_0^2 et r_1^2.

Nous introduisons les conventions d'écriture suivants :

$x \in y$ sera mis pour $r_0^2 xy$, $x = y$ pour $r_1^2\ xy$. $x \notin y$ et $x \neq y$ représentent $\neg(x \in y)$ et $\neg(x=y)$.

$x \subset y$ est une abréviation pour :

$$\forall z\,[\,z \in x \rightarrow z \in y\,]$$

Reg(x) représente la formule :

$$\exists y\,[\,y \in x\,] \vee x = \alpha_0$$

"Reg" est le début de régulier : la formule précédente est appelée à caractériser les "bons ensembles", qui seront, soit non vides, soit égaux à α_0.

2°) - Axiomes propres :

groupe 1 : * $\forall x[x = x]$

** $\forall xy[x = y] \rightarrow (F(x) \longleftrightarrow F(y))$, $F_{(t)}$ étant une formule à une variable libre t, ne contenant ni x ni y.

groupe 2 :

a - $\forall xy \left[\exists t[t \in x] \rightarrow (x = y \longleftrightarrow x \subset y \wedge y \subset x) \right]$

b - $\forall xy[Reg(x) \wedge Reg(y) \rightarrow \exists z \forall t[t \in z \longleftrightarrow t = x \vee t = y]]$

c - $\forall x \exists y \forall z[Reg(z) \longrightarrow (\exists U[U \in x \wedge z \in U] \leftrightarrow z \in y)]$

d - $\forall x \exists y \forall z[Reg(z) \longrightarrow (z \subset x \longleftrightarrow z \in y)]$

f - $\forall x[x \notin \alpha_o]$.

groupe 3 : il contient les axiomes dits "du choix" et "de l'infini". Nous les écrirons en temps utile.

groupe 4 : Il se réduira ici à un éma correspondant au schéma de séparation :

Pour toute formule F(x) à une variable libre, ne contenant que des quantificateurs bornés (ou typiques, dans la terminologie de Bourbaki), l'énoncé suivant est un axiome :

$$(\ )\qquad \forall y \exists z \forall x[Reg(x) \rightarrow (F(x) \wedge x \in y \longleftrightarrow x \in z)]$$

Le couple de parenthèses initiales signifie qu'on prend la clôture universelle de l'énoncé qui les suit.

3°) - Lien avec Z-F.

Le groupe 1 contient les axiomes de l'égalité. L'égalité n'est donc pas ici une abréviation mais une notion primitive.

Le groupe 2 contient des formes altérées des axiomes d'extensionnalité, de la paire, de réunion, de l'ensemble des parties. Les altérations proviennent d'injections d'hypothèses de régularité dans b, c, d, tandis que a est compatible avec l'existence d'"atomes", ou ensembles sans éléments qui ne sont pas nécessairement l'ensemble vide.

Le groupe 3, qui n'a pas été explicité encore, contient sans modification les axiomes du choix et de l'infini sous l'une des formes classiques.

Le groupe 4 contient le schéma de séparation doublement altéré : par l'introduction du Reg(x) et par restriction de l'ensemble des formules admissibles.

Il manque le schéma de remplacement, mais ce dernier n'intervient que dans des questions assez "avancées", comme l'utilisation des définitions par induction transfinie.

Remarquons que les altérations introduites peuvent être exorcisées par l'adjonction de l'axiome suivant :

$$\forall x \left[\forall y [y \notin x] \rightarrow x = \alpha_o \right]$$

Cependant, le modèle que nous construisons exploite au contraire la permission d'introduire des "atomes", soit des éléments irréguliers :

II - Construction d'un modèle pour Z' :

1°) - Notion de modèle :

Nous utilisons ici une adaptation algèbrique de la notion traditionnelle de modèle. Etant donnée une application quelconque h de l'ensemble A des énoncés élémentaires (de la forme $a \in b$ ou $a=b$) dans l'ensemble $U = \{o,1\}$, on démontre qu'elle se prolonge de façon unique en une application h de l'ensemble des énoncés dans $\mathbb{U}$, de telle sorte que les liens logiques prennent leur valeur usuelle. De façon précise, $\mathbb{U}$ est une algèbre de boole isomorphe à $\mathcal{P}(\emptyset)$. Quels que soient les énoncés A,B on a :

$$\tilde{h}(A \wedge B) = \tilde{h}(A).\tilde{h}(B) \quad , \quad \tilde{h}(\neg A) = 1 - \tilde{h}(A) \text{ etc...}$$

$$\text{et} \quad \tilde{h}(\exists x[(x/a)A]) = \sup_{b \in I} \tilde{h}((b/a)A), \quad \tilde{h}(\forall x[(x/a)A]) = \inf_{b \in I} \tilde{h}((b/a)A)$$

Si $\tilde{h}(A) = 1$, on dit que A est valide (plus précisément h-valide). L'ensemble V_h des énoncés valides est évidemment compatible, et constitu d'ailleurs un système déductif complet, appelé validation.

Nous allons opérer en deux étapes :

1)- nous construisons d'abord une théorie T .

2)- Par restriction de l'ensemble des symboles, nous dégagerons une validation V dans laquelle les axiomes de Z' sont valides.

2°) - Construction de T:

a a)- Définitions :

Nous prenons comme ensemble d'individus l'ensemble N des entiers naturels.

Outre les prédicats $\in$, =, déjà considérés, nous introduisons :

un prédicat de poids 2 r_o^2

un prédicat de poids 3 r_o^3

une suite de prédicats de poids 1 $\{r_i\}_{i>o}$

L'ensemble de tous ces symboles et des symboles logiques est dénombrable (et par ailleurs "effectif"), donc peut être mis en correspondance biunivoque avec un ensemle d'entiers strictement positifs. Chaque assemblage $s_o s_1 \ldots s_n$ est alors caractérisé par son numéro de Godel :

$$P_o^{\bar{s}_o} \; P_1^{\bar{s}_1} \ldots P_n^{\bar{s}_n}$$

où $\bar{s}_i$ est le nombre associé à s_i , et P_o le ième nombre premier dans l'ordre naturel à partir de $P_o=2$.

Posons $\alpha_n = 3^n$ pour $n \geqslant o$ et $\beta_{nm} = 3^n 5^m$ $(n \geqslant o \, , \, m \geqslant 1)$

Notons que tous les α_n et les β_{kl} sont distincts deux à deux, et qu'aucun n'est un nombre de Godel . Ce sont les deux propriétés dont nous nous servirons.

Définition : Soit x une variable fixée une fois pour toute

Appelons formule de rang k toute formule du type suivant :

$(r_o x \vee r_1 x \vee \ldots \vee r_k x) \wedge F(x)$, $F(x)$ étant une formule quantifiable

par x arbitraire.

B_k désigne l'ensemble des numéros des formules de rang k.

Les B_i sont tous infinis et deux à deux disjoints.

b)- La théorie A:

Introduisons les énoncés définis comme suit :

Pour tout entier n : $n=n$, $\neg(r_o^2 nn)$

quels que soient n,m avec $n<m$: $\neg(n = m)$, $r_o^2 nm$, $\neg(r_o^2 mn)$

quels que soient n, m, P :

si p égale n^m : $r_o^3 nmp$

sinon : $\neg(r_o^3 nmp)$

Ainsi, le signe $\forall$ représente l'égalité usuelle, le signe r_o^2 l'inégalité stricte et r_o^3 la fonction exponentielle (dans $\mathbb{N}$).

Le système déductif engendré par les énoncés sera désigné par A .

Soit V une validation quelconque contenant A (il suffit de prolonger arbitrairement le système de valeurs de vérités amorcé ci-dessus).

V contient les axiomes de l'égalité (groupe I) et aussi les énoncés suivants :

$$\forall x \left[\neg (r_o^2 o x) \right]$$

et pour tout $n>o$: $\forall x \left[r_o^2\ x_n \longleftrightarrow x=o \vee x=1 \vee \ldots \vee x=n-1 \right]$

Nous appelons ω-théorie un tel système déductif. La fonction x^y étant représentable au sens strict dans V (par la formule $r_o^3\ xyz$), on démontre que toute fonction récursive est strictement représentable dans V (et même représentable par une formule fonctionnelle).

A^* sera le système obtenu par adjonction aux hypothèses de A des énoncés suivants :

Pour tout n , $n \notin \alpha_k$ et $n \notin \beta_{k\ell}$ (quels que soient k et ℓ)

Pour tout n :

si n est dans B_k ou si n est α_k : $r_k\, n$

Dans tout autre cas : $\neg(r_k n)$

un individu n sera dit de rang k si $A^* \vdash r_k n$: c'est donc, soit le numéro d'une formule de rang k, soit α_k.

Définition : Soit S un système déductif quelconque.

$\hat{S}$ désigne la validation définie par le système suivant de valeurs de vérités :

Pour tout énoncé élémentaire U, on pose h(U) = 1 si $S \vdash u$, h(u) = o sinon.

Si S est engendré pour un ensemble d'énoncés élémentaires ou de négations d'énoncés élémentaires (comme A ou A^*), alors $S \subset \hat{S}$.

c)- La théorie T:

Définissons par induction une suite T_n de théories emboités, qui toutes sont engendrées par des énoncés élémentaires ou des négations de tels énoncés.

On se donne une suite $v_o, v_1 n v_2, \dots, v_n, \dots$ d'entiers naturels (qui sera particularisée plus tard). Posons $T_o = A^*$

Supposant T_k déjà définie, T_{k+1} s'obtient par adjonction des hypothèses suivantes :

(1) Pour tout a dans B_k et tout n, a représentant F(x) :

Si $T_k \vdash F(n)$, on introduit $n \epsilon a$

(2) Quand ceci est fait pour tout a dans B_k et tout n, soit a dans B_k :

S'il n'existe aucun n de rang k tel que $n \epsilon a$ ait été introduit, on introduit $\alpha_k \in a$.

(3) Après toutes les opérations tu type (2), considérant a dans B_k, il existe un ensemble (éventuellement réduit à a) d'entiers auxquels ont été attribués les mêmes "éléments" qu'à a. Rangeons les dans l'ordre naturel :

$$a_o, a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$$

Si l'un des v_i figure dans cette suite, on permute le premier d'entre eux avec a_o.

D'où une nouvelle suite :

$$a'_o, a'_1, a'_2, \ldots, a'_i, \ldots$$

On introduit enfin les énoncés suivants :

$$\beta_{k_1} \in a'_1, \beta_{k_2} \in a'_2, \ldots, \beta_{k_i} \in a'_i, \ldots$$

(4) Quand tout ceci a été "fait", pour tout a dans B_k et tout n tel que $n \in a$ n'ait pas été introduit jusqu'ici, on introduit $n \in a$.

Enfin on pose $T = \bigcup_{n \geqslant o} T_n$

Remarques :

α- si a est dans B_k, l'attribution des valeurs de vérités aux énoncés de la forme $n \in a$ se fait dans le passage de T_k à T_{k+1}. La formule $x \in a$ est décidable dans T_{k+1}.

β- Tout élément de B_k autre que α_k contient au moins un autre élément de rang k grâce à l'opération (2).

γ- si a est dans B_k, tout élément de a est de rang $\leqslant k$, ou est un $\beta_{k\ell}$.

δ- deux individus a et b de rangs déterminés et dont l'un au moins n'est pas "vide" ont les mêmes éléments si et seulement si ils sont égaux (en vertu de (3)).

ε- Pour tout a dans B_k, il existe un a' dans B_k qui a exactement les éléments attribués à a dans les opérations (1) et (2) : puisque a'_o est inchangé dans (3).

3°)- Le modèle $\mathcal{V}$:

C'est une validation ainsi définie :

- l'ensemble E des individus est formé de $\bigcup_{i \geqslant 0} B_i$ auquel on adjoint les α_k et les $\beta_{k\ell}$.

- on conserve seulement les prédicats = et $\in$.

- l'ensemble des énoncés élémentaires de ce langage est inclus dans celui de $\mathcal{T}$: on prend la valeur 1 pour les énoncés élémentaires qui sont déduits dans $\mathcal{T}$, o pour les autres.

Ainsi l'égalité est toujours représentée strictement par la formule x = y.

Proposition : Les axiomes de Z' sont valides dans $\mathcal{V}$.

a)- Axiomes du groupe 1

C'est immédiat, la formule x== y représentant strictement l'égalité.

b)- Axiomes du groupe 2 :

Manifestement $\forall x[x \notin \alpha_o]$ de même que $\forall x[x \notin \alpha_k]$ et $\forall x[x \notin \beta_{k\ell}]$ sont déduits.

axiome d'extensionnalité : résulte de la remarque δ ci-dessus.

axiome de la paire : on doit montrer que quels que soient a et b, l'énoncé : $Reg(a) \wedge Reg(b) \rightarrow \exists x \forall z [z \in x \leftrightarrow z=a \vee z=b]$ est valide

Soient a et b dans E. Si a ou b non réguliers, c'est trivial.

Si a et b sont réguliers, ils ont en particulier un rang déterminé. Soit n le rang maximum. Soit F(x) la formule de rang n et de numéro c :

$$(r_o x \vee r_1 x \vee \dots \vee r_n x) \wedge (x=a \vee x=b)$$

Les éléments de c sont attribués dans le passage de $\mathcal{T}_n$ à $\mathcal{T}_{n+1}$:

Au cours de (1), c reçoit a et b exactement.

Au cours de (2), rien de plus d'après le choix de n.

Dans (3), on exhibe un c' qui a les propriétés requises, c'est-à-dire tel que l'énoncé :

$$\forall z [z \in c' \leftrightarrow z=a \vee z=b] \text{ soit valide.}$$

Nous avons fait en détail la démonstration dans ce cas, les démonstrations sont analogues pour les autres axiomes du groupe 2 :

Pour l'axiome de réunion :

Si a est non régulier, tout élément vide vérifie la définition de la réunion des éléments de a.

Si a est régulier et de rang n, on introduit la formule de rang n+1. :

$$(r_o n \vee \ldots \vee r_{n+1} x) \wedge \exists y [y \in a \wedge x \in y]$$

Pour l'ensemble des parties, considérer la formule :

$$(r_o x \vee \ldots \vee r_{n+1} x) \wedge (x \subset a)$$

c)- Axiomes du groupe 3 :

<u>L'axiome de l'infini</u> peut être exprimé par l'existence d'un ensemble contenant les entiers naturels, ces derniers étant définis du point de vue ordinal comme la suite suivante d'ensembles :

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \text{etc...}$$

L'axiome prend donc la forme suivante :

$$\exists x [\forall y [\emptyset \in x \wedge y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x]]$$

En fait, dans notre langage, nous n'avons rien pour représenter des fonctions telle que $A \cup B$, ou $\{A\}$. Il faut donc remplacer ces fonctions par leur définition, d'où la forme sous laquelle nous prendrons l'axiome :

$$\exists x \forall y [\alpha_o \in x \wedge (y \in x \rightarrow \exists z [z \in x \wedge \forall t [t \in z \leftrightarrow t \in y \vee t = y]])]$$

Définissons une suite d'entiers $u_o, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ de la manière suivante :

$u_o = \alpha_o$

u_1 = numéro de $(r_o x \wedge x = u_o)$

....

U_{n+1} = numéro de $(r_o x \wedge (x = u_o \quad x = u \vee \ldots \vee x = u_n))$

....

- Tous les u_i sont de rang 0

-leur ensemble est manifestement récursif.

Il existe donc dans le langage de $\mathcal{T}$ une formule $N(x)$ à une variable libre (qu'on peut toujours supposer être x) telle que :

$$\hat{A} \vdash N(p) \longleftrightarrow p \text{ est l'un des } u_i.$$

Convenons que dans la construction de $\mathcal{T}$ la suite $v_1,\ldots,v_n,\ldots$ a été particularisée en la suite $u_o,u_1,\ldots,u_n,\ldots$

Il en résulte que pour tout $n \geq 1$, l'énoncé :

$$\forall x \left[x \in u_n \longleftrightarrow x = u_o \vee x = u_1 \vee \ldots \vee x = u_{n-1} \right] \text{ est valide dans } \mathcal{V} .$$

Soit alors la formule de rang o :

$$r_o x \wedge N(x), \text{ de numéro } \eta .$$

Les éléments de η sont attribués dans le passage de $\mathcal{T}_o$ à $\mathcal{T}_1$: dans l'opération (1) il réçoit exactement les u_i, dans l'opération (2) rien de plus, et dans l'opération (3) on détermine un individu ω qui a exactement pour éléments les u_i. Cet élément remplit manifestement les conditions requises par l'axiome de l'infini.

L'axiome du choix s'exprime simplement sous forme dite plutiplicative : pour tout ensemble disjoint il existe un "ensemble de choix". En formule :

$$\forall x\left[\forall u \, v\left[u\in x \wedge v\in x \longleftrightarrow \forall w\left[w\notin u \vee w \notin v\right]\right] \rightarrow \exists y \, \forall z\left[z\in x \wedge \exists t\left[t\in z\right] \longrightarrow \exists u\left[u\in y \wedge u\in z \wedge \forall v\left[v\in y \wedge v\in z \rightarrow v = u\right]\right]\right]\right]$$

Soit a dans E.

Si a est vide, tout individu est un ensemble de choix pour a.

Sinon, a est régulier, de rang n. Soit F(x) la formule de rang n+1 et de numéro b : $\quad (r_o x \; r_1 x \vee \ldots \vee r_{n+1} x) \wedge \exists \; z\left[z\in a \wedge x\in z \wedge \forall \; u\left[r_o^2 \; ux \rightarrow u\notin z\right]\right]$

Les éléments de b sont attribués dans le passage de $\mathcal{T}_{n+1}$ à $\mathcal{T}_{n+2}$.

Au cours de (1), b reçoit exactement les individus qui sont le plus

Au cours de (1), b reçoit exactement les individus qui sont le plus petit élément d'un élément (non vide) de a. Dans (2), b reçoit éventuellement α_{n+1} qui n'est pas un élément d'un élément de a (puisque de rang n+1). Dans (3) on exhibe un individu b' qui est un ensemble de choix pour a si de plus a est formé d'éléments deux à deux disjoints.

d)- Axiomes du groupe 4 :

C'est le schéma de séparation.

Avant d'établir sa validité sous la forme annoncée, introduisons quelques définitions.

Définition : une formule $F(x_1,\dots,x_p)$ de $\mathcal{T}$, à p variables libres, sera dite bornée s'il existe n tel que quels que soient $a_1,a_2,\dots,a_p$ dans $\mathbb{N}$, l'énoncé $F(a_1,a_2,\dots,a_p)$ ait même valeur de vérité dans $\hat{\mathcal{T}}$ et dans $\hat{\mathcal{T}}_n$.

Définition : Une formule $F(x_1,\dots,x_p)$ de $\mathcal{T}$ est dite faiblement bornée si quels que soient $a_1,a_2,\dots,a_p$ dans E, $F(x_1,\dots,x_p) \wedge x_1 \in a_1 \wedge \dots \wedge x_p \in a_p$ est bornée.

Toute formule bornée est faiblement bornée.

Lemme 1 : La classe des formules faiblement bornées est close pour les connecteurs $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$.

Il suffit de le montrer pour $\neg$ et $\vee$.

Soit $F(x_1,\dots,x_p)$ faiblement bornée.

Prenons $a_1,\dots,a_p$ dans E et considérons :

$$\neg F(x_1,\dots,x_p) \wedge x_1 \in a_1 \wedge \dots \wedge x_p \in a_p$$

Il existe n tel que quels que soient $q_1,q_2,\dots,q_p$:

$q_1 \in a_1 \wedge q_2 \in a_2 \wedge \dots \wedge q_p \in a_p$ ait même valeur de vérité dans $\hat{\mathcal{T}}$ et $\hat{\mathcal{T}}_n$

Il existe m tel qu'il en soit de même pour $F(q_1,\dots,q_p) \wedge q_1 \in a_1 \wedge \dots \wedge q_p \in a_p$

Soit $h = \operatorname{Sup}\{n,m\}$.

Si $\hat{T} \vdash \neg F(q_1,\dots,q_p) \wedge q_1 \in a_1 \wedge \dots \wedge q_p \in a_p$

$\hat{T} \vdash q_1 \in a_1 \wedge \dots \wedge q_p \in a_p$ donc $\hat{T}_h \vdash q_1 \in a_1 \wedge \dots \wedge q_p \in a_p$

Si $\hat{T}_h \vdash F(q_1,\dots,q_p)$, il en résulte $\hat{T}_h \vdash F(q_1,\dots,q_p) \wedge q_1 \in a_1 \wedge \dots \wedge q_p \in a_p$ ce qui est contradictoire. Donc ($\hat{T}_h$ étant complète) $\hat{T}_h \vdash \neg F(q_1,\dots,q_p)$ on raisonne de même en supposant $\hat{T}_h \vdash \neg F(q_1,\dots,q_p) \wedge q_1 \in a_1 \wedge \dots \wedge q_p \in a_p$.

Pour $\forall$ la vérification est plutôt plus simple encore.

Définition : Soit a un individu, $F(x)$ une formule quantifiable par x.

Les quantificateurs bornés $\exists x \in a$ et $\forall x \in a$ sont définis comme suit :

$\exists x \in a\, [F(x)]$ représente $\exists x\, [x \in a \wedge F(x)]$

$\forall x \in a\, [F(x)]$ représente $\forall x\, [x \in a \rightarrow F(x)]$

$\exists x \in a$ et $\forall x \in a$ sont mis en dualité par $\neg$. a sera appelé la borne.

Lemme 2 : La classe des formules faiblement bornés est close par les quantificateurs bornés compte tenu de la dualité et de la stabilité par $\neg$ il suffit de la montrer pour $\exists x \in a$.

Soit $F(x_1,\dots,x_p)$ faiblement bornée. Soit a dans E.

Considérons :

$$G(x_2,\dots,x_p) = \exists x_1 [x_1 \in a \wedge F(x_1,x_2,\dots,x_p)]$$

Donnons nous $a_2,\dots,a_p$ dans E et considérons :

$$G(x_2,\dots,x_p) \wedge x_2 \in a_2 \wedge \dots \wedge x_p \in a_p$$

C'est-à-dire :

$$\exists x_1 [F(x_1,\dots,x_p) \wedge x_1 \in a] \wedge x_2 \in a_2 \wedge \dots \wedge x_p \in a_p$$

Formule équivalente :

$$\exists x_1 [F(x_1,\dots,x_p) \wedge x_1 \in a \wedge x_2 \in a_2 \wedge \dots \wedge x_p \in a_p]$$

de la forme $\exists x_1 [H(x_1,\dots,x_p)]$ où H est bornée. Donc il existe n telle que quels que soient $q_1,q_2,\dots,q_p$, $H(q_1,\dots,q_p)$ ait même valeur dans $\hat{T}_n$ et dans $\hat{T}$. Il en est de même de $\tilde{h}(\exists x_1 [H(x_1,q_2,\dots,q_p)]) = \sup_{q \in \mathbb{N}} \tilde{h}(H(q,q_1,\dots,q_p))$.

Lemme 3 : Les formules élémentaires sont faiblement bornées.

Par formule élémentaire, nous entendons une formule de l'un des types suivants : $x \in a$, $a \in x$, $x \in y$, $x \in x$, et d'autre analogues, formées avec les autres prédicats (en fait toutes les autres sont décidables dès $T_\circ$, donc bornées).

Pour les précédents, il suffit de le vérifier dans chaque cas.

Les cas $a \in x$, $x \in y$, $x \in x$ donnent des exemples de formules non bornées et faiblement bornées.

Proposition : Toute formule dans laquelle n'interviennent que des quantificateurs bornés est faiblement bornée.

C'est une conséquence immédiate de la conjonction des lemmes 1,2 et 3

N.B. Dans le proposition précédente, il faut entendre que la borné effectivement dans la formule, c'est-à-dire qu'on ne quantifie pas par rapport aux bornes de quantificateurs.

Cette proposition est intéressante, car elle donne une caractérisation qui peut être transportée dans V: on reconnait la restriction imposée à $F(x)$ dans le schéma de séparation. Cela étant, soit $F(x)$ une formule de ce type. On peut toujours supposer que la variable est x. Soit a dans E et considérons la formule $F(x) \wedge x \in a$

C'est une formule bornée : donc il existe $n_\circ$ telle qu'elle ait partout même valeur dans $\hat{T}$ et $\hat{T}_{n_\circ}$. Pour tout n tel que $\hat{T} \vdash F(n) \wedge n \in a$, $\hat{T} \vdash n \in a$: donc le rang de n ne peut dépasser le rang de a. Soit $h = \text{Sup}\{n_\circ, \text{rang de } a\}$.

Considérons la formule de rang h et de numéro b :

$$(r_\circ x \vee \ldots \vee r_h x) \wedge F(x) \wedge x \in a$$

Soit b l'individu qui contient exactement les éléments attribués à b au cours de (1) et (2). Les éléments réguliers de b' sont exactement les éléments réguliers de a qui vérifient F.

En réalité, il faut encore s'assurer que $F(x)$ prend la même valeur de vérité pour tout n de E dans $\hat{T}$ et dans V.

C'est vrai pour les formules élémentaires du type $x = a$, $a \in x$ ou $x \in a$; la propriété se conserve évidemment par les connecteurs du calcul propositionnel, mais aussi par les quantificateurs bornés. En effet tout élément d'une borne étant un élément de E, il suffit de prendre le sup ou l'inf pour les éléments de E dans le calcul de valeurs de vérité.

III - Conclusions :

- Le modèle montre assez que la théorie Z' est compatible avec des phénomènes aberrantes du point de vue d'une saine théorie des ensembles. Aussi s'agit-il d'une théorie strictement plus faible que celle de Zermelo-Fraenkel.

L'affaiblissement du à l'introduction d'éléments "farfelus"..... un peu partout est fondamentalement gênante. Il n'en est pas de même de la restriction supplémentaire imposée aux formules de l'axiome de séparation : pratiquement, les mathématiques classiques ont toujours fait un usage exclusif des quantificateurs bornés. Il n'en va pas de même quand on énonce un théorème du type : "tout corps fini est commutatif". Mais on peut aussi bien le considérer comme un métathéorème dont la signification serait : chaque fois qu'on se donne effectivement un corps fini, on peut démontrer qu'il est commutatif.

Nous n'avons pas fait mention de l'axiome de rextriction (ou de fondement).

En fait il a surtout un rôle esthétique et on peut très bien s'en passer. Mais il est facile de montrer qu'il est nié dans le modèle présenté ici : chaque ensemble B_k est manifestement récursif, donc représentable par une formule $B_k(x)$.

Soit b_k le numéro de $(r_0 x \vee \ldots \vee r_k x) \wedge B_k(x)$.

Les éléments de b_k sont exactement ceux de B_k (plus peut être un k_i).

Tout élément non vide de B_k (donc de b_k) contient au moins un élément de rang k qui appartient donc aussi à B_k : c'est la négation de l'axiome de restriction.

On voit d'ailleurs que $b_k \in b_k$ est valide, ce qui nie une conséquence bien connue de cet axiome.

Entre autres particularités, signalons qu'on peut reproduire l'argument de Russel pour prouver la non existence d'un ensemble universel (qui dans le modèle résulte simplement du fait que les éléments d'un ensemble ont leur rang borné), mais on ne peut reproduire la démonstration de Cantor sur la comparaison des puissances de E et 2^E. En fait, dans le modèle on peut montrer que tout ensemble s'injecte dans ω : grosso modo, ceci provient du fait que ω représentant un ensemble récursif, il existe une formule qui représente dans $\hat{T}$ (comme dans toute validation contenant A) une bijection de ω sur l'ensemble de tous les entiers. Moyennant une "traduction" dans V analogue à celle qui a été faite pour l'axiome du choix le résultat s'y transporte.

BIBLIOGRAPHIE :

[1] Daniel PONASSE : Logique mathématique (cours polycopié de la Fac. des Sc. de Lyon).

[2] Daniel PONASSE : Une démonstration du théorème de complétude

R. CUSIN et B. BOURTOT : Une démonstration du théorème de Lowenheim-Skolem. (Pub. du Dép. de Math. Lyon 1966 t. 3 fasc. 1).

[3] E. MENDELSON : Introduction to mathematical logic (Van Nostrand 1964).

[4] A. GRZEGORCZYK : Fonctions récursives (Gauthier-Villars 1961).

[5] A. FRAENKEL et Y. BAR-HILLEL : Foundations of set theory (North Holland 1958).

Manuscrit remis le 31 janvier 1967

J.F. PABION
Assistant
Département de Mathématiques
43, bd du 11 novembre 1918
VILLEURBANNE