J. RAVEL

Injectivité ; généralisations et applications Extensions essentielles dans un treillis de Johnson

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1967, tome 4, fascicule 2 , p. 1-73

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1967__4_2_A2_0>

Publication du
Département de
Mathématiques
Lyon 1967 t. 4-2

INJECTIVITE ; GENERALISATIONS ET APPLICATIONS

EXTENSIONS ESSENTIELLES DANS UN TREILLIS DE JOHNSON

par J. RAVEL

Introduction.

Chapitre I : Objets injectifs d'une catégorie

§ 1 : Définitions et généralités.

§ 2 : Morphismes constants d'une catégorie.

§ 3 : Sources et buts simples d'une catégorie.

§ 4 : Applications.

§ 5 : Exemples de recherche directe des objets injectifs de certaines catégories.

§ 6 : Objets isolés d'une catégorie.

§ 7 : Objets injectifs de la catégorie des modules sur un anneau.

Chapitre II : Extensions essentielles dans un treillis de Johnson

§ 1 : Définitions.

§ 2 : Propriétés.

§ 3 : Fermetures dans un ensemble ordonné.

§ 4 : Enveloppes injectives d'un module.

§ 5 : Applications aux modules.

Chapitre III : Objets quasi-injectifs, semi-injectifs et semi-projectifs d'une catégorie

§ 1 : Objets quasi-injectifs d'une catégorie.

§ 2 : Objets semi-injectifs d'une catégorie.

§ 3 : Modules semi-injectifs et semi-projectifs.

Chapitre IV : Anneaux et modules

INTRODUCTION

Cette thèse est centrée sur la notion d'injectivité.

Dans le premier chapitre, on montre principalement que si tout objet injectif d'une catégorie peut être plongé strictement dans une source simple, les objets injectifs de cette catégorie sont ses objets presque-finaux : en particulier, tout demi-groupe (resp. groupe) injectif est réduit à un élément (résultat indiqué par Roux dans le cas des groupes).

Le second chapitre est consacré à l'étude de l'application ω qui, a un élément d'un treillis de Johnson T, associe l'intersection de ses extensions essentielles maximales dans T : après avoir montré que l'ensemble des fermetures d'un ensemble inductif est réticulé achevé, on identifie ω comme plus grande fermeture de l'ensemble inductif $T_{\lhd}$ (on désigne ainsi l'ensemble T muni de l'ordre d'essentialité). On suppose ensuite que ω est une fermeture dans T, après avoir caractérisé les cas où se produit cette éventualité (c'est en particulier le cas quand T est le treillis des sous-modules d'un module M : la fermeture est alors induite par celle associée à l'enveloppe injective $\hat{M}$ de M) : l'ensemble des invariants de ω est alors un treillis complet et complémenté ; nous donnons trois conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il soit modulaire : l'une d'elles, la compatibilité de l'essentialité avec l'union, se révèlera d'une grande maniabilité. Si elle est vérifiée dans le treillis des sous-modules d'un module M, nous dirons que ce module possède la

propriété (P).

En particularisant une partie de nos théorèmes dans le cas des modules, nous trouvons une généralisation du théorème de Johnson qui fut à la source de ces travaux (cf. [12]).
Ce n'est qu'assez tard que nous fut connu l'intéressant exposé [7] de Renault : si certains de nos théorèmes redonnent certains de ses résultats en les particularisant dans le cas des modules, son premier théorème nous a permis d'éliminer une restriction dans ces mêmes résultats (en montrant que l'application ω est toujours une fermeture dans le cas des modules).

Le chapitre III généralise au cas d'un module quasi-injectif M possèdant la prorpiété (P) le théorème que Johnson et Wong, en [13], avaient démontré dans le cas d'un module quasi-injectif M tel que $M^{\Delta} = 0$, et suivant lequel la somme de deux sous-modules de M est fermée dans M : ce résultat nécessite plusieurs préliminaires, dont une nouvelle formulation, d'ailleurs intéressante en soi, de la propriété (P) dans le cas des modules. Nous introduisons ensuite la notion de semi-injectivité : après avoir montré qu'elle coïncidait avec celle d'injectivité pour les groupes et les demi-groupes, nous donnons quelques propriétés simples des modules semi-injectifs et semi-projectifs (la notion de semi-projectivité étant duale de celle de semi-injectivité). L'idéal maximum m de l'anneau z/p^2 est un exemple de module semi-injectif et semi-projectif qui n'est ni injectif, ni projectif.

Nous démontrons entre autres choses au chapitre IV l'équivalence pour un anneau A, des propriétés "noethérien auto-injectif", "artinien auto-injectif", "tel que les notions d'injectifs et de projectifs coïncident". Une partie seulement de ces résultats semble connue, et nous donnons quelques démonstrations rapides et simples s'appuyant sur les puissants résultats de Bass, Chase, Matlis et Papp, que nous avons brièvement rappelés.

Nous pensons que les résultats érigés en propositions et en théorèmes sont inédits. Toutes les notions "latérales" (modules, idéal, artinianité, noethérianité, perfection etc...) sont entendues "à gauche" lorsque rien n'est spécifié. Les modules considérés sont des modules unitaires sur un anneau unitaire. La notation $N \leqslant M$ exprime le fait que N est un sous-module de M : au chapitre III (voire IV) on l'emploiera parfois pour marquer le fait que N est isomorphe à un sous-module de M. On désigne par An(x) l'annulateur à gauche de l'élément x du module M. La notation $N \simeq N'$ exprime que les modules N et N' sont isomorphes. On désigne par X^* l'ensemble X privé de son zéro.

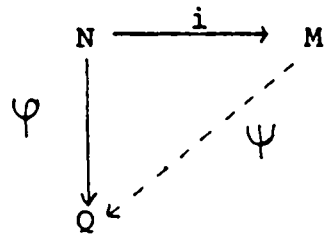
CHAPITRE 1

OBJETS INJECTIFS D'UNE CATEGORIE

§ 1 - DEFINITION ET GENERALITES.

On dit qu'un objet Q d'une catégorie $\mathcal{C}$ est un objet <u>injectif</u> de cette catégorie si, quels que soient les objets N et M de $\mathcal{C}$, le morphisme φ de N dans Q est le monomorphisme i de N dans M, il existe un morphisme ψ de M dans Q prolongeant φ, c'est à dire tel que $\varphi = \psi\, i$ (figure 1)

(1)



- Tout objet final d'une catégorie est un objet injectif de cette catégorie.
- Tout objet isomorphe à un objet injectif d'une catégorie est un objet injectif de cette catégorie.
- Tout monomorphisme d'un injectif Q dans un objet M d'une catégorie est rétractable.

Le produit direct d'une famille d'objets d'une catégorie est injectif si et seulement si tous ses facteurs sont injectifs.

§ 2 - MORPHISMES CONSTANTS D'UNE CATEGORIE.

On dit qu'un morphisme $f : M \longrightarrow N$ est <u>constant</u> si, quels que soient l'objet L et les morphismes g et h de L dans M,

on a fg = fh (figure 2)

$$L \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} M \xrightarrow{f} N$$

Tout morphisme dont la source est un objet final est constant.

Le composé de deux morphismes est constant si l'un d'eux l'est : si $f : M \longrightarrow N$ est un morphisme constant,

- soit $v : N \longrightarrow P$ et soient $g,h : L \longrightarrow M$: on a fg = fh, puisque f est constant, et (vf)g = v(fg) = v(fh) = (vf)h, donc vf est constant.

- soit $u : K \longrightarrow M$ et soient $g,h : L \longrightarrow K$: on a f(ug) = f(uh), puisque f est constant, et (fu)g = f(ug) = f(uh) = (fu donc fu est constant.

Les morphismes constants d'une catégorie à objet nul sont les morphismes nuls : en effet, tout morphisme nul est constant, puisque le composé de deux morphismes est nul si l'un d'eux l'est ; et réciproquement (composer un morphisme constant avec le morphisme identique et avec le morphisme nul de sa source).

On dit qu'un objet F d'une catégorie est presque final si, pour tout objet E de cette catégorie, il existe au plus un morphisme de E dans F.

La source d'un monomorphisme constant est un objet presque final : en effet, si $f : M \longrightarrow N$ est un monomorphisme constant, soient $g,h : L \longrightarrow M$; on a fg = fh, puisque f est constant, et g = h, puisque f est un monomorphisme.

On dit qu'un objet F d'une catégorie est toujours accessible si tout objet de cette catégorie est source d'un morphisme de but F. (Un objet presque final toujours accessible d'une catégorie est un objet final de cette catégorie, et réciproquement).

Si la source d'un monomorphisme constant est toujours accessible, c'est un objet final.

§ 3 - SOURCES ET BUTS SIMPLES D'UNE CATEGORIE.

On dit qu'un objet S d'une catégorie est une source (resp. un but) simple si tout morphisme de source (resp. de but) S est un monomorphisme ou un morphisme constant.

Tout objet S presque final d'une catégorie est une source simple car $S \xrightarrow{f} S'$ est alors nécessairement un morphisme constant.

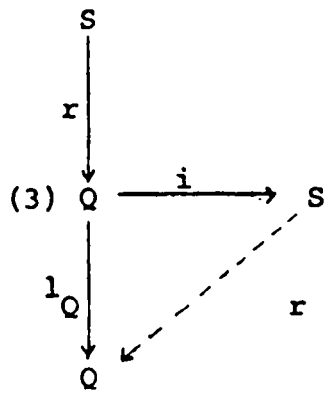
Tout objet isomorphe à une source simple est une source simple : en effet, soient u un isomorphisme de la source simple S sur S' et f un morphisme de S' dans un objet N : le morphisme fu de la source simple S dans N est soit un monomorphisme, auquel cas f est un monomorphisme, puisque u est un isomorphisme, soit un morphisme constant, auquel cas $(fu)u^{-1} = f(uu^{-1}) = f$ est un morphisme constant ; S' est donc, comme S, une source simple.

De façon tout à fait analogue, tout objet isomorphe à un but simple est un but simple.

On dit qu'un objet M d'une catégorie peut-être plongé dans un objet S de cette catégorie s'il existe un monomorphisme de M dans S. On a le théorème suivant :

Théorème 1 : Si tout objet d'une catégorie $\mathcal{C}$ peut être plongé dans une source simple, les injectifs de cette catégorie sont des sources simples et des buts simples.

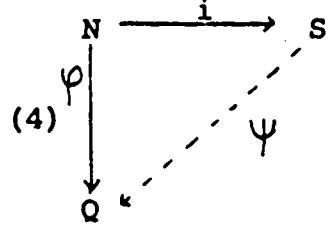
Démonstration : Premier Point : Soient Q un injectif de $\mathcal{C}$, i un monomorphisme de Q dans une source simple S, r une rétraction de i : on a $ri = 1_Q$ (figure 3).



S étant une source simple,

- ou bien r est un monomorphisme, et alors, puisque $r(ir) = (ri)r = 1_Q r = r = r1_S$, on a $ir = 1_S$: i est donc un isomorphisme et Q, comme S, est une source simple.

- ou bien r est un morphisme constant : alors $ri = 1_Q$ en est un aussi et Q, source du monomorphisme constant 1_Q, est un objet presque final, donc une source simple.



Second point : Soient φ un morphisme d'un objet N dans un injectif Q, i un monomorphisme de N dans une source simple S et Ψ un morphisme de S dans Q tel que $\varphi = \Psi i$ (figure 4).

S étant une source simple,

- ou bien Ψ est un monomorphisme, et alors $\varphi = \Psi i$ est un monomorphisme.

- ou bien Ψ est un morphisme constant, et alors $\varphi = \Psi i$ est un morphisme constant.

Il s'ensuit que Q est un but simple, ce qui achève la démonstration du théorème.

On dit qu'un objet M d'une catégorie peut être plongé strictement dans un objet S de cette catégorie s'il existe un monomorphisme de M dans S qui ne soit pas un isomorphisme.

On a le théorème suivant :

Théorème 2 : Si tout injectif d'une catégorie $\mathcal{C}$ peut être plongé strictement dans une source simple, les injectifs de cette catégorie sont des objets presque finaux.

Démonstration : Soient Q un injectif de $\mathcal{C}$, i un monomorphisme qui ne soit pas un isomorphisme de Q dans une source simple S, r une rétraction de i : on a $ri = 1_Q$ (figure 3).

La démonstration du premier point du théorème 1 est valable ici mot pour mot, mais le fait que i ne soit pas un isomorphisme empêche l'éventualité dans laquelle r est un monomorphisme de se produire : ainsi, r est toujours un morphisme constant, $ri = 1_Q$ aussi, et Q est un objet presque final. En particulier :

Corollaire : Si tout injectif d'une catégorie $\mathcal{C}$ peut être plongé strictement dans une source simple et est toujours accessible, les objets injectifs de cette catégorie sont ses objets finaux.

§ 4 - APPLICATIONS.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie dont les objets sont des ensembles, dont chacun est muni d'une loi de composition interne partout définie,

notée multiplicativement, et dont les morphismes sont les homomorphismes. On dit qu'un objet E de $\mathcal{C}$ est simple si les seules équivalences compatibles avec sa multiplication sont l'égalité et l'équivalence universelle : E est alors une source simple. En effet, soit f : E $\longrightarrow$ F un morphisme de source E. L'équivalence d'homomorphisme associée (x R y si et seulement si f(x) = f(y)) est compatible c'est donc soit l'égalité, auquel cas f, homomorphisme injectif, est un monomorphisme, soit l'équivalence universelle, auquel cas f, homomorphisme constant est un morphisme constant.

Si de plus $\mathcal{C}$ possède les propriétés suivantes :

1) Si R est une relation d'équivalence compatible avec la multiplication d'un objet E de $\mathcal{C}$, l'application canonique φ : E $\longrightarrow$ E/R est un morphisme de $\mathcal{C}$.

2) Les monomorphismes de $\mathcal{C}$ sont des homomorphismes injectifs (donc les homomorphismes injectifs).

3) Les morphismes constants de $\mathcal{C}$ sont des homomorphismes constants (donc les homomorphismes constants).

Les sources simples de $\mathcal{C}$ sont des objets simples de $\mathcal{C}$ (donc les objets simples de $\mathcal{C}$). Soit en effet R une équivalence compatible avec la multiplication d'un objet E de $\mathcal{C}$: si E est une source simple, le morphisme canonique φ : E $\longrightarrow$ E/R est soit un monomorphisme, auquel cas il est injectif, et l'équivalence R est l'égalité, soit un morphisme constant, auquel cas c'est un homomorphisme constant, et l'équivalence R est l'équivalence universelle.

Puisque la catégorie des groupes et celle des demi-groupes possèdent les propriétés 1, 2 et 3,* les sources simples de la catégorie des groupes sont les groupes simples usuels (dont les seuls sous groupes distingués sont triviaux) et les sources simples de la catégorie des demi-groupes sont les objets simples de cette catégorie, c'est à dire les demi-groupes simples définis par exemple par Sutov, qui a montré en [1] que tout objet de la catégorie des groupes (resp. des demi-groupes, des demi-groupes inverses et des demi-groupes réguliers à gauche sans élément idempotent) peut être plongé dans un objet simple (donc dans une source simple) de cette catégorie, résultat obtenu auparavant, mais différemment par Scott, en [2] (resp. par Bokut, en [3]) pour les groupes (resp. pour les demi-groupes). Mais tout groupe (resp. demi-groupe, demi-groupe inverse, demi-groupe régulier à gauche sans élément idempotent) peut être plongé dans un groupe (resp. demi-groupe, demi-groupe inverse, demi-groupe régulier à gauche sans élément idempotent) de cardinal strictement plus grand.

---

* Dans le cas des demi-groupes, la propriété 3 se démontre comme suit : si $f : D \longrightarrow D'$ est un morphisme constant, soient $x,y \in D$; les homomorphismes $\varphi : n \longrightarrow x^n$ et $\psi : n \longrightarrow y^n$ de $N^* = N - \{0\}$ dans D sont tels que $f\varphi = f\psi$: en particulier, $f(x) = f(y)$ et f est un homomorphisme constant.

En effet, si G est un objet d'une de ces catégories, on peut supposer $\mathrm{Card}(G) = \aleph \geqslant 2$, car le résultat est immédiat si $\aleph = 1$. Dans la catégorie considérée, il y a des produits directs quelconques qui sont les produits ensemblistes usuels, et on peut plonger G dans le produit direct de $\aleph$ objets isomorphes à G, qui a pour cardinal $\aleph^{\aleph} \geqslant 2^{\aleph} > \aleph$, en vertu du théorème de Cantor.

Puisque tout objet d'une de ces catégories peut être plongé dans un objet de cardinal strictement plus grand, lequel peut être plongé à son tour dans une source simple, et puisque tout isomorphisme d'une de ces catégories est un homomorphisme bijectif, tout objet d'une de ces catégories (groupes, demi-groupes, demi-groupes inverses, demi-groupes réguliers à gauche sans élément idempotent) peut être plongé strictement dans une source simple.

Un objet de la catégorie des groupes étant toujours accessible puisque cette catégorie a des objets nuls (les groupes réduits à un élément) donc des morphismes nuls, il résulte du corollaire du théorème 2 que les objets injectifs de la catégorie des groupes sont les objets finaux, donc les objets nuls de cette catégorie, d'où la proposition.

Proposition : Les objets injectifs de la catégorie des groupes sont les groupes réduits à un élément (l'élément neutre).

Montrons qu'un objet injectif de la catégorie des demi-groupes (resp. demi-groupes inverses) est toujours accessible.

Lemme : Tout objet injectif de la catégorie des demi-groupes (resp. des demi-groupes inverses, des demi-groupes commutatifs) possède un zéro et une unité.

Démonstration : Soit D un objet injectif de la catégorie des demi-groupes, l'injection canonique i de D dans le demi-groupes $D_o = D \cup \{0\}$ obtenu par adjonction d'un zéro à D admet une rétraction $r : D_o \longrightarrow D$ (figure 5) et r(0) est un zéro de D : en effet, si $x \in D$, on a $r(0)x = r(0)r[i(x)] = r(0\ i(x)) = r(0)$ et de même $xr(0) = r(0)$. En remplaçant le zéro par une unité, on aurait $r(1)x = r(1)[r\ i(x)] = r(1\ i(x)) = ri(x) = x$, et de même $sr(1) = x$, et r(1) serait une unité de D. Les mêmes démonstrations s'appliquent aux autres cas indiqués, car si D est un demi-groupe inverse, D_o (resp. $D_1 = D \cup \{1\}$) est un demi-groupe inverse : en effet, un conjugé régulier X de 0 (resp. de 1) est caractérisé par les relations $\begin{cases} X\ 0\ X = X \\ 0\ X\ 0 = 0 \end{cases}$ $\left(\text{resp. } \begin{cases} X\ 1\ X = X \\ 1\ X\ 1 = 1 \end{cases}\right)$, équivalents à X = 0 (resp. X = 1). De même l'adjonction d'un zéro ou d'une unité à un demi-groupe D n'en altère pas la commutativité. En vertu du lemme, un objet injectif D de la catégorie des demi-groupes (resp. des demi-groupes inverses) est toujours accessible, l'application constante d'un objet quelconque sur l'unité de D étant bien un homomorphisme. Il résulte donc du corollaire du théorème 2 que les objets injectifs de la catégorie des demi-groupes (resp. des demi groupes inverses) en sont les objets finaux, c'est à dire réduits à un élément, nécessairement idempotent, d'où la proposition.

(5)

Proposition : Les objets injectifs de la catégorie des demi-groupes (resp. des demi-groupes inverses) sont les demi groupes réduits à un élément.

Enfin, on a le résultat suivant :

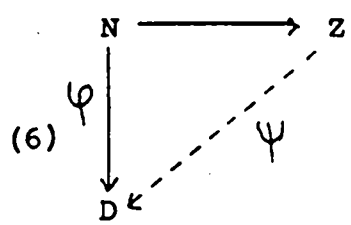
Proposition : La catégorie des demi-groupes réguliers à gauche sans élément idempotent n'a pas d'objet injectif.

En effet, en vertu du théorème 2, un tel objet, D, serait nécessairement presque final, et les homomorphismes $n \longrightarrow a^n$ et $n \longrightarrow (a^2)^n$ de $N^* = N - \{0\}$ dans D devraient coïncider, pour tout élément a de D : en particulier, tout élément a de D serait idempotent, ce qui est exclu.

§ 5 - EXEMPLES DE RECHERCHE DIRECTE DES OBJETS INJECTIFS DE CERTAINES CATEGORIES.

Proposition : Les objets injectifs de la catégorie des demi-groupes commutatifs sont les demi-groupes réduits à un élément.

Démonstration : Soit D un tel objet : on a vu plus haut que D possède un zéro et une unité. Si $x \in D$, l'application $n \longrightarrow x^n$ est un homomorphisme φ de N dans D, x^0 étant l'unité de D : φ se prolonge en un homomorphisme Ψ de Z dans D (figure 6) et $\Psi(-1)$ est l'inverse de x, car $x\,\Psi(-1) = \varphi(1)\,\Psi(-1) = \Psi(1)\,\Psi(-1) = \Psi(0) = \varphi(0) = 1$, et de même $\Psi(-1)x = 1$. Il s'ensuit que D est un groupe, possèdant un zéro, dont réduit à l'élément neutre, d'où le résultat.



(6)

Dans tous les exemples rencontrés jusqu'ici, les objets injectifs sont des objets finaux : ce n'est évidemment pas toujours le cas. C'est ainsi que les objets injectifs de la catégorie des groupes abéliens sont les groupes abéliens G divisibles, c'est à dire tels que $(\forall a \in G)(\forall n \in N^*)(\exists b \in G)(a = nb)$ (par exemple, le groupe additif Q des nombres rationnels).

On a le résultat suivant :

Proposition : Les objets injectifs de la catégorie des demi-groupes commutatifs réguliers sont les groupes abéliens divisibles.

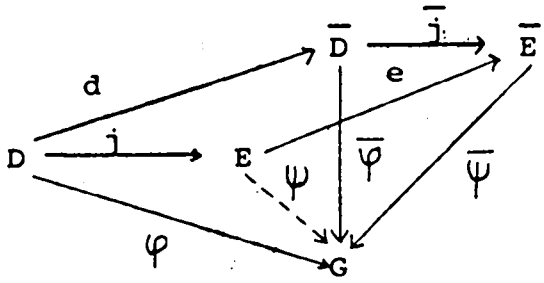
Démonstration : Rappelons d'abord que tout demi-groupe commutatif régulier D peut être canoniquement plongé dans le groupe abélien $\overline{D} = D \times D/R$, où R est l'équivalence compatible

$$(a,b)R(a',b') \iff ab' = ba'.$$

Tout homomorphisme $\varphi : D \longrightarrow E$ de demi-groupes commutatifs réguliers peut être prolongé canoniquement en un homomorphisme $\overline{\varphi} : \overline{D} \longrightarrow \overline{E}$ de groupes abéliens, en posant $\overline{\varphi}([a,b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$.

Celà étant, soit D un objet injectif de la catégorie des demi-groupes commutatifs réguliers : l'injection canonique i de D dans $\overline{D}$ admet une rétraction r et D, image homomorphe du groupe abélien $\overline{D}$, est un groupe abélien : c'est dont un groupe abélien injectif.

(7)



Inversement, soient φ un homomorphisme d'un demi-groupe commutatif régulier D dans le groupe abélien injectif G et j un monomorphisme (c'est à dire un homomorphisme injectif) de D dans le demi-groupe commutatif régulier E : $\bar{j} : \bar{D} \longrightarrow \bar{E}$ est un homomorphisme injectif, donc un monomorphisme (de groupes abéliens). On a $\bar{G} = G$, et l'homomorphisme $\overline{\varphi} : \bar{D} \longrightarrow G$ se prolonge, sur l'injectivité de G, en un homomorphisme $\overline{\psi} : \bar{E} \longrightarrow G$ dont la restriction ψ à E prolonge φ (diagramme commutatif 7), et le résultat est démontré.

§ 6 - OBJETS ISOLES D'UNE CATEGORIE.

On dit qu'un objet Q d'une catégorie est une source (resp. un but) isolée (resp. isolé) de cette catégorie si tout morphisme de source (resp. de but) Q a pour but (resp. pour source) Q. On dit qu'un objet Q d'une catégorie est isolé s'il est isolé en tant que source et en tant que but.

On appelle endomorphisme d'un objet d'une catégorie tout morphisme de cet objet dans lui-même : l'ensemble des endomorphismes d'un objet, muni de la loi de composition des morphismes, est un demi-groupe unitaire dont le morphisme identique est l'unité.
Le but de ce paragraphe est d'élucider la structure du demi-groupe des endomorphismes d'un objet injectif d'une catégorie vérifiant les hypothèses du théorème 1.

Si Q est un objet isolé, les éléments réguliers à gauche (resp. réguliers à droite, réguliers, inversibles à gauche, inversibles à droite, inversibles) du demi-groupe D des endomorphismes de Q sont les monomorphismes (resp. les épimorphismes, les bimorphismes, les monomorphismes rétractables, les épimorphismes sectionnables, les isomorphismes). Les éléments universels à gauche sont les morphismes constants : ce sont en effet des morphismes constants, et, inversement, si Ψ est un morphisme constant, on a $(\forall \varphi \in D)\ \Psi\varphi = \Psi 1 = \Psi$, et Ψ est universel à gauche. Pour qu'un objet isolé Q soit injectif, il faut et il suffit que tout monomorphisme de Q dans lui-même soit rétractable, c'est à dire que tout élément régulier à gauche du demi-groupe D des endomorphismes de Q soit inversible à gauche. Pour qu'une source isolée Q soit une source simple, il faut et il suffit que tout élément du demi-groupe D des endomorphismes de Q soit régulier à gauche ou universel à gauche.

Pour qu'un objet isolé Q soit un injectif et une source simple, il faut et il suffit que tout élément du demi-groupe D des endomorphismes de Q soit inversible à gauche ou universel à gauche : en effet, la nécessité de la condition résulte immédiatement des deux remarques précédentes, et sa suffisance du fait qu'un élément régulier à gauche d'un demi-groupe unitaire ne peut être universel à gauche que si le demi-groupe est réduit à son élément unité. Si nous excluons cette possibilité, soit G (resp. E) l'ensemble des éléments inversibles à gauche (resp. universels à gauche) de D :

G et E sont des sous-demi-groupes de D et forment une partition de D. Si l'élément B de E était un inverse à gauche de l'élément α de G, on aurait $B = B\alpha = 1$ et B appartiendrait à G ce qui est exclu. G est donc un sous-demi-groupe de D ayant pour élément neutre l'unité de D et dans lequel tout élément est inversible à gauche : il s'ensuit que G est un groupe. Tout élément de G est inversible et G est le groupe des isomorphismes de Q sur lui-même. On a, si $\alpha \in G$ et si $B \in E$, $B\alpha = B$, puisque B est universel à gauche, et $\alpha B \in E$: en effet, si $\alpha B \notin E$, $\alpha B \in G$ et $\alpha^{-1} \alpha B = B \in G$, ce qui est exclu. Il s'ensuit que G opère dans E pour la loi obtenue en restreignant à $G \times E$ la loi de composition interne de D. Inversement, si un groupe G opère dans un ensemble E, que l'on peut toujours supposer disjoint de G, il existe sur $D = G \cup E$ une unique structure de demi-groupe dont la multiplication prolonge celle de G et la loi externe de E, tout en rendant universels à gauche les éléments de E.

On dit qu'on <u>isole</u> un objet d'une catégorie lorsqu'on le considère comme faisant partie de la sous-catégorie réduite à cet objet. Lorsqu'un objet Q est injectif et source simple, il le reste quant on l'isole : dans l'isolement, en effet, les monomorphismes demeurent des monomorphismes et les morphismes constants des morphismes constants ; et si un morphisme constant devenait un monomorphisme, les endomorphismes de Q se réduiraient au morphisme identique et l'assertion serait toujours vérifiée.

Il s'ensuit que le demi-groupe des endomorphismes d'un objet injectif décrit dans le théorème 1 a la structure indiquée plus haut.

On peut toujours "ajouter" des objets isolés, injectif ou non, à une catégorie. De façon précise, étant donnée une famille $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ de catégories, on appelle somme directe de ces catégories la catégorie $\mathcal{C}$ dont les objets sont ceux des $\mathcal{C}_i$, et dont les morphismes sont définis ainsi : si $M_j \in Ob(\mathcal{C}_j)$ et $N_e \in Ob(\mathcal{C}_e)$, $Hom_{\mathcal{C}}(M_j,N_e) = \emptyset$ si $j \neq e$ et $Hom_{\mathcal{C}}(M_j,N_e) = Hom_{\mathcal{C}_j}(M_j,$ si $j = e$.

La catégorie d'ordre $\mathcal{N}$ associée à N vérifie les conditions du théorème 2, puisque tous ses morphismes sont des monomorphismes et que ses seuls isomorphismes sont ses morphismes identiques : tous ses objets sont presque finaux, mais aucun n'est injectif.

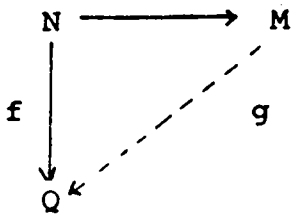
La somme directe d'une catégorie $\mathcal{C}$ vérifiant les hypothèses du théorème 2, et ayant un objet final F, et de $\mathcal{N}$ vérifie les conditions du théorème 2, mais a un objet injectif F qui est presque final, mais non final.

Ces exemples prouvent qu'on ne peut guère améliorer le théorème 2.

§ 7 - OBJETS INJECTIFS DE LA CATEGORIE DES MODULES SUR UN ANNEAU.

Un module Q est dit injectif si tout homomorphisme d'un sous module N d'un module M dans Q se prolonge en un homomorphisme de M dans Q (figure 8)

(8)



Un produit direct de modules est injectif si et seulement si chacun de ses facteurs est injectif : il en est donc ainsi pour toute somme directe finie. Si une somme directe quelconque $Q = \bigoplus_{i \in I} Q_i$ est injective, ses facteurs sont injectifs, car si $j \in I$, on a $Q = Q_j \oplus \left(\bigoplus_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} Q_i \right)$.

Pour qu'un module Q soit injectif, il faut et il suffit qu'il soit facteur direct de tout module dont il est sous module, ou encore que tout homomorphisme d'un idéal de l'anneau dans Q soit du type $\lambda \longrightarrow \lambda q$ (avec $q \in Q$).

Tout module peut être plongé dans un module injectif.

Ces résultats furent démontrés par Baer, qui introduisit les modules injectifs, en [4] . On les trouvera aussi en [5] et en [6] .

L'objet du chapitre suivant sera d'approfondir la notion de plongement d'un module dans un module injectif.

CHAPITRE II

EXTENSIONS ESSENTIELLES DANS UN TREILLIS DE JOHNSON

§ 1 - DEFINITIONS.

On considère dans ce qui suit un treillis T dont l'opération inter (resp. union) sera notée $\wedge$ (resp. $\vee$) ; le plus petit (resp. le plus grand) élément éventuel de T sera désigné par 0 (resp. par I).

On appelle treillis de Johnson un treillis T complet, modulaire et inter-continu [c'est à dire tel que, pour toute famille totalement ordonnée $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de T, et pour tout élément x de T, $x \wedge (\bigvee_{i\in I} x_i) = \bigvee_{i\in I} (x \wedge x_i)$]. Le treillis des sous-modules d'un module possède ces propriétés, ainsi que tout treillis modulaire fini. Le treillis T considéré dans ce qui suit sera toujours un treillis de Johnson : si $x \in T$, $x/0 = \{y \in T \mid y \leqslant x\}$ est un sous-treillis complet, modulaire et inter-continu, donc un sous-treillis de Johnson de T.

si $x,y \in T$, on dit que x est essentiel dans y (relation que l'on exprime par la notation $x \lhd y$) si $x \leqslant y$ et si $(\forall\, z \in T)(x \wedge z = 0 \Rightarrow y \wedge z = 0)$. On dit aussi que y est une extension essentielle de x.

La relation $x \lhd y$ est une relation d'ordre entre éléments de T (qu'on appelle relation d'essentialité de T) : en effet, on a $x \lhd x$ puisque $x \leqslant x$ et que $x \wedge z = 0 \Rightarrow x \wedge z = 0$; si $x \lhd y$ et $y \lhd x$, on a $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, d'où $x = y$; enfin si $x \lhd y$ et $y \lhd z$,

on a $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$, d'où $x \leqslant z$, et si $x \wedge t = 0$, $y \wedge t = 0$, d'où $z \wedge t = 0$ et $x \lhd z$.

Si $u \in T$, la relation d'essentialité $x \underset{u}{\lhd} y$ de $u/0$ est induite par celle de T : en effet, si $x \lhd y$, et si $x \leqslant u$ et $y \leqslant u$, on a évidemment $x \underset{u}{\lhd} y$; inversement, si $x \leqslant u$, $y \leqslant u$ et $x \underset{u}{\lhd} y$, soit $z \in T$ tel que $x \wedge z = 0$: on a $x \wedge (z \wedge u) = 0$, donc $y \wedge (z \wedge u) = 0$, puisque $z \wedge u \leqslant u$. Mais $y \wedge z \wedge u = y \wedge z$, puisque $y \leqslant u$, et $y \wedge z = 0$, d'où $x \lhd y$ et le résultat.

§ 2 - PROPRIETES.

Si $x \in T$, $c(x) = \left\{ y \in T \,\middle|\, x \wedge y = 0 \right\}$ est un sous-ensemble inductif non vide de T : en effet, $0 \in c(x)$, et si $(y_i)_{i \in I}$ est une famille totalement ordonnée non vide d'éléments de $c(x)$, on a $(\forall\, i \in I)(x \wedge y_i = 0)$, d'où $x \wedge (\bigvee_{i \in I} y_i) = \bigvee_{i \in I} (x \wedge y_i) = 0$, et $\bigvee_{i \in I} y_i \in c(x)$. Soit $c_m(x)$ l'ensemble des éléments maximaux de $c(x)$, ensemble qui n'est jamais vide, en vertu du théorème de Zorn, et dont les éléments sont appelés en [7] compléments de x. Johnson a indiqué en [8] le résultat suivant : si $y \in c_m(x)$, $x \vee y \lhd I$; démontrons le : soit $z \in T$ tel que $(x \vee y) \wedge z = 0$; montrons que $I \wedge z = z = 0$.

On a $[x \wedge (y \vee z)] \wedge y = x \wedge y = (x \wedge y) \wedge y$, et $y \vee [x \wedge (y \vee z)] = (x \vee y) \wedge (y \vee z) = y \vee [(x \vee y) \wedge z] = y \vee 0 = y = y \vee (x \wedge y)$. Compte tenu d'une caractérisation bien connue (donnée en [9]) des treillis modulaires, on a $x \wedge (y \vee z) = x \wedge y = 0$. Ainsi $y \vee z \in c(x)$, d'où, puisque $y \in c_m(x)$, $y \vee z = y$ et $z \leqslant y$, d'où $z = (x \vee y) \wedge z = 0$.

Si $x \in T$, on dit que x est semi-simple si x/0 est complémenté, c'est à dire si $(\forall y \in T)\ [y \leqslant x \Rightarrow (\exists y' \in T)(y \wedge y' = 0$ et $y \vee y' = x)]$.

Pour qu'un élément x de T soit semi-simple, il faut et il suffit que $(\forall y \in T)(y \lhd x \Rightarrow y = x)$.

La condition est nécessaire : si x est semi-simple et si $y \lhd x$, soit y' un complément de y dans x/0 ; on a $y \wedge y' = 0$, donc $x \wedge y' = 0$: comme $x = y \vee y'$, $y' = 0$ et $y = x$.

La condition est suffisante : si elle est vérifiée, soit $y \leqslant x$: $y \in x/0$ et, dans ce treillis de Johnson, $c_m(y)$ n'est pas vide. Soit $y' \in c_m(y)$: on a $y \wedge y' = 0$ et $y \vee y' \underset{x}{\lhd} x$, d'où $y \vee y' \lhd x$ et $y \vee y' = x$; ainsi, x/0 est semi-simple.

Par exemple, si $x \in T$ est union d'atomes, x est semi-simple : en effet, si $x \leqslant \bigvee_{i \in I} s_i$, soit $y \lhd x$; si $j \in I$ est tel que $s_j \leqslant y$, on a $y \wedge s_j = 0$, d'où $x \wedge s_j = 0$: or $x \wedge s_j = s_j$ est un atome non nul, d'où $(\forall i \in I)(y \geqslant s_i)$ et $y \geqslant \bigvee_{i \in I} s_i = x$, d'où $y = x$.
Si x est semi-simple et si $y \leqslant x$, y est semi-simple : en effet, si $z \leqslant y$, soit $z' \in x/0$ tel que $z \wedge z' = 0$ et $z \vee z' = x$; on a $z \wedge (z' \wedge y) = 0$ et $z \vee (z' \wedge y) = (z \vee z') \wedge y = x \wedge y = y$ et $z' \wedge y$ est un complément de z dans y/0.

Si $x \lhd x'$ et $y \lhd y'$, $x \wedge y \lhd x' \wedge y'$: soit en effet $z \in T$ tel que $x \wedge y \wedge z = 0$; on a $x' \wedge y \wedge z = 0$, soit $y \wedge x' \wedge z = 0$, d'où $y' \wedge x' \wedge z = x' \wedge y' \wedge z = 0$ et le résultat.

Il s'ensuit qu'un élément est extension essentielle d'au plus un élément semi-simple : soient en effet y et y' des éléments semi-simples essentiels dans x ; on a $y \lhd x$ et $y' \lhd y'$, d'où $y \wedge y' \lhd x \wedge y' = y'$, d'où, puisque y' est semi-simple, $y \wedge y' = y'$ et $y \geqslant y'$: de même $y' \geqslant y$, et $y = y'$.

On dit qu'un élément x de T est artinien si x/0 vérifie la condition minimale. Tout élément artinien d'un treillis de Johnson est extension essentielle d'un unique élément semi-simple de ce treillis : l'unicité étant assurée, prouvons l'existence. Si x est un élément artinien de T, soit y un élément minimal de l'ensemble des éléments de T essentiels dans x (ensemble non vide, puisqu'il contient x) : aucun minorant strict de y n'est essentiel dans y (sinon, il le serait dans x, ce qui contredirait la minimalité de y) et y est semi-simple.

Si x est un élément non nul de T, l'ensemble $\Phi(x)$ des éléments de T essentiels dans x est un filtre de x/0 : en effet, si $0 \lhd x$, puisque $0 \wedge x = 0$, on a $x \wedge x = 0$, soit $x = 0$. Si $y \leqslant z \leqslant x$ et si $y \lhd x$, on a $z \lhd x$, car si $z \wedge t = 0$, a fortiori $y \wedge t = 0$, d'où $x \wedge t = 0$. Enfin, si $y \lhd x$ et $z \lhd x$, on a $y \wedge z \lhd x \wedge x = x$, d'où le résultat.

Montrons enfin que T est inductif pour l'ordre d'essentialité. Soit $(y_i)_{i \in I}$ une famille totalement ordonnée non vide d'éléments de T : on a $(\forall\, i, j \in I)(y_i \lhd y_j$ ou $y_j \lhd y_i)$. Si $y = \bigvee_{i \in I} y_i$, il suffit de montrer que $(\forall\, i \in I)(y_i \lhd y)$: en effet, si

$(\forall\, i \in I)(y_i \lhd t)$, on a en particulier $(\forall\, i \in I)(y_i \leqslant t)$, donc $y \leqslant t$, et, si $\ell \in I$, $y_\ell \leqslant y \leqslant t$ et $y_\ell \lhd t$, d'où $y \lhd t$.

Soit donc $i \in I$ et soit $z \in T$ tel que $y_i \wedge z = 0$: si $j \in I$, on a eu bien $y_j \lhd y_i$, et alors, puisque $y_j \leqslant y_i$, $y_j \wedge z = 0$, ou bien $y_i \lhd y_j$, et alors $y_j \wedge z = 0$. Il s'ensuit que $z \wedge y = z \wedge (\bigvee_{i \in I} y_i) = \bigvee_{i \in I} (z \wedge y_i) = 0$ et l'inductivité de $T_\lhd$ (on désigne ainsi l'ensemble T muni de l'ordre d'essentialité) est démontrée.

§ 3 - FERMETURES DANS UN ENSEMBLE ORDONNE.

On appelle <u>fermeture</u> dans un ensemble ordonné E toute application f de E dans lui-même extensive, croissante et idempotente, c'est à dire telle que : 1) $(\forall\, x \in E)(f(x) \geqslant x)$ (extensivité)

2) $(\forall\, x, y \in E)(x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$ (croissance)

3) $(\forall\, x \in E)(f[f(x)] = f(x))$. (idempotence).

Si f est une fermeture dans E, soit $I(f) = \{x \in E \mid f(x) = x\}$ l'ensemble des éléments de E invariants par f. On a $I(f) \subseteq f(E)$, et comme $f(E) \subseteq I(f)$ vu l'idempotence de f, $I(f) = f(E)$. Pour tout élément x de E, l'ensemble F_x des majorants de x invariants par f a un plus petit élément, f(x) (car $f(x) \in F_x$, et si $y \in F_x$, $y = f(y) \geqslant f(x)$, puisque $y \geqslant x$).

Réciproquement, si F est une partie de E telle que, pour tout élément x de E, l'ensemble $F_x = \{y \in F \mid y \geqslant x\}$ des éléments de F majorant x ait un plus petit élément, l'application $x \longrightarrow f(x) = \min F_x$

est une fermeture dans E telle que $I(f) = F$. En effet, f est bien définie, et extensive par définition ; si $x \leqslant y$, $F_y \subseteq F_x$, d'où $\min F_y \geqslant \min F_x$, soit $f(y) \geqslant f(x)$, et f est croissante ; enfin $f\left[f(x)\right] = \min F_{f(x)} = f(x)$, et f est idempotente : c'est un fermeture telle que $I(f) = f(E) \subseteq F$; mais si $z \in F$, $f(z) = \min F_z = z$, d'où $F \subseteq I(f)$ et $I(f) = F$.

La relation $f \leqslant g \iff (\forall x \in E)(f(x) \leqslant g(x))$ est un relation d'ordre dans l'ensemble E' des fermetures de E (qui n'est jamais vide, l'application identique étant une fermeture de E). On a $f \leqslant g$ si et seulement si $I(g) \subseteq I(f)$:

- si $f \leqslant g$, soit $x \in I(g)$: on a $x \leqslant f(x) \leqslant g(x) = x$ et $f(x) = x \in I(f)$, d'où $I(g) \subseteq I(f)$.
- si $I(g) \subseteq I(f)$, on a, en désignant par $\rho(\{x\})$ l'ensemble des majorants de l'élément x de E, $\rho(\{x\}) \cap I(g) \subseteq \rho(\{x\}) \cap I(f)$, d'où $\min\left[\rho(\{x\}) \cap I(g)\right] \geqslant \min\left[\rho(\{x\}) \cap I(f)\right]$, soit $g(x) \geqslant f(x)$: ainsi $g \geqslant f$.

<u>Il s'ensuit que l'application $f \longrightarrow I(f)$ est un anti-isomorphisme de l'ensemble ordonné des fermetures de E sur l'ensemble Φ ordonné par inclusion des parties H de E telles que, pour tout élément x de E, $H \cap \rho(\{x\})$ ait un plus petit élément.</u>

L'ensemble F des invariants d'une fermeture f possède les propriétés suivantes : il contient les éléments maximaux éventuels de E, en raison de l'extensivité de f, et tout minorant maximal d'une de ses parties non vide ; en effet, si m est un minorant maximal d'une

partie G de F, on a $(\forall\ g \in G)(m \leqslant g)$, d'où $f(m) \leqslant f(g)$ et, $f(m)$ étant un minorant de G, supérieur à m, $f(m) = m \in F$.

Si l'ensemble E est réticulé achevé, Φ est donc l'ensemble des parties H de E contenant le plus grand élément de E et stables pour l'intersection : il résulte en effet de ce qui précède que Φ est contenu dans l'ensemble de ces parties ; inversement, si H est une telle partie, et si $x \in E$, $H \cap \rho(\{x\})$ n'est pas vide (puisqu'il contient le plus grand élément de E) et a pour plus petit élément l'intersection de tous ses éléments. On retrouve ainsi l'exemple usuel des fermetures de Moore (fermetures dans l'ensemble des parties d'un ensemble, ordonné par inclusion). Plus généralement, on a le théorème suivant :

Théorème : Si E est un ensemble inductif, Φ est l'ensemble des parties H de E telles que tout minorant maximal d'une partie de H appartienne à H.

En effet, ceci revient à dire que les minorants maximaux de la partie vide de H, c'est à dire les éléments maximaux de E, appartiennent à H, ainsi que tout minorant maximal d'une partie non vide de H. Il s'ensuit, comme on l'a déjà vu, que Φ est contenu dans l'ensemble des parties considérées dans le théorème. Démontrons l'inclusion inverse.

Si E est un ensemble ordonné, on désigne par $\rho(X)$ (resp. par $\sigma(X)$) l'ensemble des majorants (resp. des minorants) d'une partie X de E. On appelle section de E toute partie S de E telle qu'il existe

des parties X et Y de E telles que $S = \rho(X) \cap \sigma(Y)$. On a le résultat suivant :

Lemme : Toute section non vide d'un ensemble inductif est inductive (pour l'ordre induit).

Soit en effet $(x_i)_{i \in I}$ une famille totalement ordonnée non vide d'éléments de $S = \rho(X) \cap \sigma(Y)$: si $x = \sup_{i \in I}^{E} x_i$, $x \in \rho(X)$, car, si $j \in I$, $x_j \in \rho(X)$ et $x \geqslant x_j$; tout élément de Y, étant un majorant de la famille $(x_i)_{i \in I}$ de $\sigma(Y)$, majore aussi leur borne supérieure x, qui appartient ainsi à $\sigma(Y)$: donc $x \in S$ et, puisque $x = \sup_{i \in I}^{E} x_i$, $x = \sup_{i \in I}^{S} x_i$, ce qui achève de prouver le résultat.

Achevons la démonstration du théorème en prouvant que si H est une partie de l'ensemble inductif E telle que tout minorant maximal d'une partie de H appartienne à H, et si x est un élément de E, $H_x = H \cap \rho(\{x\})$ a un plus petit élément.

Remarquons d'abord que $S = \rho(\{x\}) \cap \sigma(H_x)$ n'est pas vide, puisque $x \in S$, soit y un élément maximal de cette section non vide de E : je dis que $y \in H$ (d'où $y \in H_x$, et, puisque $y \in \sigma(H_x)$, $y = \min(H_x)$). En effet, y est un minorant maximal (dans E) de la partie H_x de H (sinon, la maximalité de y dans S serait contredite).

Bourbaki avait signalé en exercice [10] le fait que l'ensemble des fermetures d'un ensemble inductif est réticulé supérieurement. Plus généralement, il résulte du théorème précédent que l'ensemble F des fermetures d'un ensemble inductif E est réticulé achevé.

En effet, il est anti-isomorphe à l'ensemble $\mathcal{\phi}$ qui, ordonné par inclusion est réticulé achevé inférieurement (puisque stable pour l'intersection, et ayant un plus grand élément, E) donc réticulé achevé. En particulier, F possède un plus petit élément, qui n'est autre que l'application identique de E, et un plus grand élément, dont l'ensemble d'invariants est le plus petit élément de $\mathcal{\phi}$, c'est à dire l'intersection de tous les éléments de $\mathcal{\phi}$: dans le cas où E est un ensemble fini, la borne supérieure d'une famille est une itérée d'ordre suffisamment grand (par exemple, supérieur au nombre d'éléments de E) d'une quelconque de leurs composées. L'ensemble des invariants de la plus grande fermeture s'obtient comme ultime terme d'une suite d'ensembles dont chacun se déduit du précédent en y ajoutant l'ensemble des minorants maximaux de toutes des paires d'éléments, et commençant par l'ensemble des éléments maximaux de E.

En vertu du théorème précédent, l'ensemble inductif T possède une plus grande fermeture, que nous allons caractériser. Si $x \in T$, l'ordre de T coïncide avec l'ordre d'essentialité dans l'ensemble $M_{\lhd}(x)$ des majorants de x pour l'ordre d'essentialité ; soient en effet $y,z \in M_{\lhd}(x)$: si $y \lhd z$, on a $y \leqslant z$; mais si $y \leqslant z$, on a $x \leqslant y \leqslant z$ et $x \lhd z$, d'où $y \lhd z$. L'ensemble des majorants d'un élément d'un ensemble inductif est inductif (pour l'ordre induit) car c'est une section de l'ensemble considéré. Nous désignerons dans la suite par M(x) l'ensemble des éléments maximaux de $M_{\lhd}(x)$. En vertu du théorème de Zorn, cet ensemble n'est jamais vide, et

l'application $x \longrightarrow \omega(x) = \bigwedge_{y \in M(x)} y$ est bien définie. Pour l'ordre d'essentialité, c'est une fermeture.

Elle est en effet :

- extensive, car si $y \in M(x)$, $x \leqslant \omega(x) \leqslant y$ et $x \lhd y$, d'où $x \lhd \omega(x)$.

- elle est croissante, si $x \lhd z$, on a $M(z) \subseteq M(x)$ et $x \leqslant \bigwedge_{y \in M(x)} y \leqslant \bigwedge_{y \in M(z)} y$, soit $x \leqslant \omega(x)\ \omega(z)$. Mais puisque $z \lhd \omega(z)$, en vertu de l'extensivité de ω, on a aussi $x \lhd \omega(z)$, d'où $\omega(x) \lhd \omega(z)$.

- idempotente, car $M[\omega(x)] = M(x)$. On a en effet $M[\omega(x)] \subseteq M(x)$, puisque $x \lhd \omega(x)$; et si $y \in M$, on a $x \lhd \omega(x) \lhd y$, d'où si $y \lhd z$, $x \lhd z$, $z = y$ et $y \in M[\omega(x)]$, donc $M(x) \subseteq M[\omega(x)]$.

Soit maintenant φ une fermeture de $T_{\lhd}$: si $y \in M(x)$, on a $x \lhd y$, $x \lhd \varphi(x) \lhd \varphi(y)$ et $y \lhd \varphi(y)$, d'où $\varphi(y) = y$ et $\varphi(x) \lhd y$. Ainsi, on a $(\forall\, y \in M(x))(\varphi(x) \leqslant y)$, d'où $x \leqslant \varphi(x) \leqslant \bigwedge_{y \in M(x)} y = \omega(x)$, et, puisque $x \lhd \omega(x)$, $\varphi(x) \lhd \omega(x)$, soit $\varphi \lhd \omega$, et ω est bien la plus grande fermeture de $T_{\lhd}$.

ω est idempotente, et extensive pour l'ordre de T, car, si $x \in T$, on a $x \lhd \omega(x)$, donc $x \leqslant \omega(x)$. Elle est croissante pour cet ordre si et seulement si l'ensemble $I(\omega)$ de ses invariants est réticulé inférieurement (pour l'ordre induit par l'ordre T) :

- La condition est nécessaire : en effet, si elle est vérifiée, ω est une fermeture de l'ensemble réticulé achevé T, et l'ensemble de ses invariants est réticulé achevé, donc réticulé inférieurement.

La condition est suffisante : soient en effet $x,y \in T$ tels que $x \leqslant y$; on a $x \leqslant \omega(x)$ et $x \leqslant y \leqslant \omega(y)$, d'où $x \leqslant \omega(x) \wedge \omega(y) \leqslant \omega(x)$ et, puisque $x \lhd \omega(x)$, $x \lhd \omega(x) \wedge \omega(y) \lhd \omega(x)$. Puisque $I(\omega) = \omega(T)$ est réticulé inférieurement, $\omega(x) \wedge \omega(y) \in I(\omega)$: mais $\omega(x)$ est le plus petit élément de $I(\omega)$ majorant x pour l'ordre d'essentialité, d'où $\omega(x) \wedge \omega(y) = \omega(x)$, $\omega(x) \leqslant \omega(y)$ et la croissance de ω.

Si ω est croissante, c'est une fermeture de T : on a vu que l'ensemble des invariants de ω contenait le plus grand élément I de T et était stable pour l'intersection ; il est ainsi réticulé achevé inférieurement, donc réticulé achevé : c'est un treillis complet dont l'intersection coïncide avec l'intersection de T, et dont l'union est définie par $\bigcup_{i \in I} x_i = \omega\left(\bigvee_{i \in I} x_i\right)$. En effet, si $(\forall i \in I) x_i \in I(\omega)$, on a si $j \in I$, $x_j \leqslant \bigvee_{i \in I} x_i \leqslant \omega\left(\bigvee_{i \in I} x_i\right) \in (T) = I(\omega$ et si $x \in I(\omega)$ est tel que $(\forall i \in I)(x \geqslant x_i)$, on a $x \geqslant \bigvee_{i \in I} x_i$, d'où $\omega(x) \geqslant \omega\left(\bigvee_{i \in I} x_i\right)$, et le résultat puisque $x = \omega(x)$.

Le treillis des invariants de ω est complémenté : en effet, si $x \in I(\omega)$, soit y un complément de x dans T ; on a $x \wedge y = 0$, d'où, puisque $y \lhd \omega(y)$, $x \wedge \omega(y) = 0$ et $\omega(y) = y$: ainsi $y \in I(\omega)$. On a $x \vee y \lhd I$, d'où $I = \operatorname{Max} M\Delta(x \vee y)$ et $\omega(x \vee y) = I$, soit $x \cup y = I$.

Pour que le treillis des invariants de ω soit modulaire, il faut et il suffit que tout élément t de T possède une plus grande extension essentielle ($\omega(t)$) dans T.

- La condition est nécessaire : si $t \in T$, soit $z \in M(t)$; on a $t \lhd z = \omega(z)$, d'où $z \in I(\omega)$; vu la croissance pour l'ordre d'essentialité de ω, on a $x = \omega(t) \lhd \omega(z) = z : x \in \omega(T) = I(\omega)$. Si y est un complément de x dans T, $\omega(y) = y \in I(\omega)$. On a $x \leqslant z$: il s'ensuit, en raison de la modularité de $I(\omega)$, que $(x \cup y) \cap z = x \cup (y \cap z)$, soit, puisque $x \cup y = I$, que $z = \omega[x \vee (y \wedge z)]$. Mais, puisque $x \lhd y$, on a $y \wedge z = 0$, d'où $\omega(x) = z$, soit $\omega(t) = z$, puisque $\omega(x) = x = \omega(t)$.

Il s'ensuit que, pour tout élément t de T, $M_{\lhd}(t)$ possède un unique élément maximal, qui est maximum (en raison de l'inductivité de $M_{\lhd}(t)$) : c'est $\omega(t)$, qui est donc bien la plus grande extension essentielle de t.

- La condition est suffisante : si tout élément t de T a une plus grande extension essentielle, qui est l'image de t par la fermeture ω, soient $x, y, z \in I(\omega)$ tels que $x \leqslant y$, $x \cap z = y \cap z$, soit $x \wedge z = y \wedge z$, et $x \cup z = y \cup z$, soit $\omega(x \vee z) = \omega(y \vee z)$; puisque $x \vee z \leqslant y \vee z \leqslant \omega(y \vee z) = \omega(x \vee z)$, on a $x \vee z \lhd y \vee z$, d'où $(x \vee z) \wedge y \lhd (y \vee z) \wedge y = y$. Mais $(x \vee z) \wedge y = x \vee (z \wedge y)$, puisque $x \leqslant y$, et $x \vee (z \wedge y) = x \vee (z \wedge x) = x$, d'où $x \lhd y$, $x \leqslant y \leqslant \omega(x) = x$, soit $x = y$, ce qui achève de prouver le résultat.

On dit que <u>la relation d'essentialité est compatible avec l'union dans un treillis de Johnson T si $(\forall x, y, z \in T)(x \lhd y \Rightarrow x \vee z \lhd y \vee z)$</u>.

Si, dans un treillis de Johnson T, tout élément x a une plus grande extension essentielle, qui est alors $\omega(x)$, et si l'application

ω est une fermeture, c'est à dire si elle est croissante pour l'ordre de T, alors la relation d'essentialité de ce treillis est compatible avec son union. En effet, si $x \lhd y$, on a, pour tout z, $x \vee z \leqslant y \vee z$, $y \leqslant \omega(x) \leqslant \omega(x \vee z)$, $z \leqslant x \vee z \leqslant \omega(x \vee z)$, d'où $y \vee z \leqslant \omega(x \vee z)$ et, puisque $x \vee z \lhd \omega(x \vee z)$, $x \vee z \lhd y \vee z$.

On dit qu'un élément x d'un treillis de Johnson T est <u>fermé</u> dans T si x est la seule extension essentielle de x dans T, c'est à dire si $(\forall\, y \in T)(x \lhd y \Rightarrow x = y)$. Si l'essentialité est compatible avec l'union dans le treillis de Johnson T, l'intersection de deux éléments x et y de T fermés dans T est fermée dans T : en effet, si $x \wedge y \lhd z$, on a $(x \wedge y) \vee x \lhd z \vee x$, soit $x \lhd x \vee z$, d'où, puisque x est fermé dans T, $x \vee z = x$ et $z \leqslant x$; de même $z \leqslant y$ et $z \leqslant x \wedge y$, d'où $z = x \wedge y$ et le fait que $x \wedge y$ est fermé dans T.

Remarquons que si $x \in T$, les éléments de M(x) sont fermés dans T.

Si l'intersection de deux éléments de T fermés dans T est fermée dans T, soient $y, z \in M(x)$: $y \wedge z$ est fermé dans T ; mais $x \leqslant y \wedge z \leqslant z$ et $x \lhd z$, d'où $y \wedge z \lhd z$, $y \wedge z = z$ et $z \leqslant y$: on a de même $y \leqslant z$, d'où $y = z$ et le fait que $M_{\lhd}(x)$ a un unique élément maximal, donc un plus grand élément (en raison de l'inductivité de $M_{\lhd}(x)$). Cet élément n'est autre que $\omega(x)$: les invariants de ω étant précisément les éléments de T fermés dans T forment un ensemble réticulé inférieurement, et ω est une fermeture de T, en vertu de la condition suffisante d'un théorème précédent.

En résumé :

Théorème : L'application $\omega : x \longrightarrow \bigwedge_{y \in M(x)} y$ est une fermeture de T si et seulement si l'ensemble $I(\omega)$ des invariants de ω est réticulé inférieurement : cet ensemble est alors un treillis complet et complémenté. De plus, les assertions suivantes sont équivalentes :

1) ω est une fermeture, et le treillis des invariants de ω est modulaire.

2) tout élément x de T possède une plus grande extension essentielle $\omega(x)$ et ω est une fermeture.

3) la relation d'essentialité est compatible avec l'union dans T.

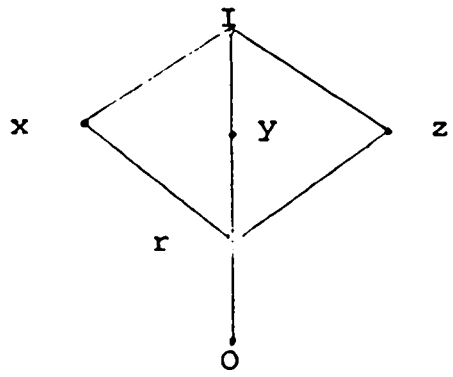
4) l'intersection de deux éléments de T fermés dans T est fermée dans T.

Proposition : Si le treillis de Johnson T est ditributif, la relation d'essentialité est compatible avec l'union dans T.

Démonstration : Soient en effet $x,y \in T$ tels que $x \lhd y$ et $z \in T$: montrons que $x \vee z \lhd y \vee z$. Soit $t \in T$ tel que $(x \vee z) \wedge t = 0$: on a $(x \wedge t) \vee (z \wedge t) = 0$, d'où $z \wedge t = 0$ et $x \wedge t = 0$, d'où aussi $y \wedge t = 0$ et $(y \vee z) \wedge t = (y \wedge t) \vee (z \wedge t) = 0 \vee 0 = 0$ et le résultat.

Exemples : Le treillis des idéaux à gauche d'un demi-groupe avec zéro étant complet, intercontinu et distributif est un exemple intéressant de treillis vérifiant les quatre propriétés équivalentes du théorème précédent.

Le treillis suivant, qui n'est pas distributif, les vérifie pourtant :



§ 4 - ENVELOPPE INJECTIVE D'UN MODULE.

Le treillis des sous-modules d'un A-module P est un treillis de Johnson dans lequel la relation d'essentialité prend la forme suivante : si $N \leqslant M \leqslant P$, $N \lhd M \iff (\forall x \in M^*)(\exists \lambda \in A)(\lambda x \in N^*)$. En effet, si $N \lhd M$, soit $x \in M^*$: $Ax \neq 0$ et $Ax \leqslant M$, d'où $Ax \cap N \neq 0$, et il existe $\lambda \in A$ tel que $\lambda x \in N^*$; inversement, si cette condition est vérifiée, soit L un sous-module non nul de M ; si $x \in L \subseteq M^*$, soit $\lambda \in A$ tel que $\lambda x \in N^*$: $\lambda x \in L \cap N$ et $L \cap N \neq 0$, d'où $N \lhd M$ (en effet, la relation d'essentialité $x \lhd y$ est encore équivalente à $(\forall z \leqslant y)(z \neq 0 \Rightarrow z \wedge x \neq 0)$).

L'application $X \longrightarrow \overline{X} = \{y \in P \mid (\exists \lambda \in A)(\lambda x \in X)\}$ est une fermeture topologique dans P^* : on a en effet, $\overline{\phi} = \phi$, $X \subseteq \overline{X}$ (puisque l'anneau A est unitaire) $\overline{\overline{X}} = X$ (car $\overline{X} \subseteq \overline{\overline{X}}$, et si $x \in \overline{\overline{X}}$, il existe $\lambda \in A$ tel que $\lambda x \in \overline{X}$, puis $\mu \in A$ tel que $\mu \lambda x \in X$, donc $x \in \overline{X}$ et $\overline{\overline{X}} \subseteq \overline{X}$) et $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ (car si $x \in \overline{X}$, $(\exists \lambda \in A)(\lambda x \in X \subseteq X \cup Y)$

et $x \in \overline{XUY}$, d'où $\overline{X} \subseteq \overline{XUY}$, de même $\overline{Y} \subseteq \overline{XUY}$ et $\overline{X}\,\overline{Y} \subseteq \overline{XUY}$, soit $\lambda \in A$ tel que $\lambda x \in XUY$: si $\lambda x \in X$, $x \in \overline{X}$, si $\lambda x \in Y$, $x \in \overline{Y}$, d'où $x \in \overline{X}\,\overline{Y}$ et $\overline{XUY} = \overline{X}\,\overline{Y}$).

Cette application se prolonge en une fermeture topologique de P par une union directe avec l'unique fermeture topologique de $\{0\}$ (qui est l'application identique) : nous la désignerons par la notation $X \longrightarrow \overline{X}^P$. Si $N \leqslant M \leqslant P$, on a donc $N \lhd M \iff M \subseteq \overline{N}^P$.

Remarquons que la fermeture topologique canonique dont on peut munir M à partir de sa relation d'essentialité (comme on l'a fait pour P) est induite par celle de P : on a $\overline{N}^M = \overline{N}^P \cap M$.

Il existe une étroite connexion entre les notions d'essentialité et d'injectivité : c'est ainsi que <u>pour qu'un module soit injectif, il faut et il suffit qu'il soit fermé dans tout module dont il est sous-module</u>. En effet, un module injectif, étant facteur direct de tout module dont il est sous-module, possède la propriété considérée ; inversement, tout module étant sous-module d'un module injectif, un module possèdant la propriété considérée est fermé dans un injectif, donc facteur direct de cet injectif et lui-même injectif (les résultats invoqués ici sont des corollaires immédiats d'un théorème qui trouve mieux sa place au début du chapitre III).

On dit qu'un module injectif Q est une <u>enveloppe injective</u> d'un module M si M est un sous-module de Q essentiel dans Q.

Un module M a pour enveloppe injective toute extension essentielle maximale de M dans un injectif Q dont M est sous-module :

en effet, une telle extension est injective, puisque fermée dans l'injectif Q. Si Q et Q' sont des enveloppes injectives d'un module M, Q et Q' sont isomorphes. En effet, Q étant injectif et M étant un sous-module de Q', l'injection canonique de M dans Q se prolonge en un homomorphisme θ de Q' dans Q ; on a $\mathrm{Ker}(\theta) \cap M = 0$, donc $\mathrm{Ker}(\theta) = 0$, puisque M est essentiel dans Q' ; θ est donc injectif et $\theta(Q')$ est un sous-module injectif de Q, contenant M, qui est essentiel dans Q : donc $\theta(Q') = Q$ et θ est un isomorphisme de Q' sur Q.

Proposition : Pour que la correspondance $M \longrightarrow T(M)$ de la classe des modules dans elle-même soit telle que $M \lhd T(M)$ et $N \lhd M \Rightarrow T(N) \sim T(M)$, il faut et il suffit que, pour tout module M, T(M) soit une enveloppe injective de M.

- La condition est nécessaire, car, si Q est un enveloppe injective de M, on a $M \lhd Q$, donc $T(M) \sim T(Q)$ et $Q \lhd T(Q)$, d'où $T(Q) = Q$ et $T(M) \sim Q$: T(M) est injectif, et c'est une enveloppe injective de M, puisque $M \lhd T(M)$.

- La condition est suffisante, car M est essentiel dans son enveloppe injective T(M), et si $N \lhd M$, on a aussi $N \lhd T(M)$; puisque T(M) est injectif, T(M) est une enveloppe injective de N, donc est isomorphe à T(N).

Ayant choisi une de ces correspondances, on parlera de l'enveloppe injective $\hat{M}$ d'un module M.

L'existence et l'unicité, à un isomorphisme près, de l'enveloppe injective d'un module, ont été démontrées en [11] par Echmann et Schopf

et, auparavant, par Baer, en [4] , dans le cas des groupes abéliens (Z-modules).

§ 5 - APPLICATIONS AUX MODULES.

Théorème : Dans le treillis des sous-modules d'un module, l'application ω est une fermeture.

Lemme : Dans le treillis des sous-modules d'un module injectif Q, l'application ω est croissante.

En effet, si $N \leqslant N' \leqslant Q$, soit Q'_o une extension essentielle maximale de N' dans Q : Q'_o est fermé dans Q, donc injectif, et contient au moins une extension essentielle maximale (dans Q'_o) Q_o de N. Q_o est fermé dans Q'_o, donc est injectif, et est une extension essentielle maximale de N dans Q, contenue dans Q'_o, d'où le lemme.

Remarquons que, dans un module injectif Q, l'application ω fait correspondre à un sous-module N de Q l'intersection des enveloppes injectives de N contenues dans Q.

M étant un module, désignons par ω_M l'application ω du treillis des sous-modules de M, et par ω celle du treillis des sous-modules de l'enveloppe injective $\hat{M}$ de M : on a, pour tout sous-module N de M, $\omega_M(N) = \omega(N) \cap M$.

En effet, l'application $N \longrightarrow \omega(N) \cap M$ est une fermeture pour l'ordre d'essentialité de M :

Elle est extensive, car si $N \leqslant M$, on a $N \lhd \omega(N)$ et $N = N \cap M \lhd \omega(N) \cap M$.

- Elle est croissante, car si $N \lhd N' \leqslant M$, on a $\omega(N) \lhd \omega(N')$ et $\omega(N) \cap M \lhd \omega(N') \cap M$;

- Elle est idempotente, car, ω étant croissante, on a $\omega\left[\omega(N) \cap M\right] \subseteq \omega(\omega(N)) = \omega(N)$ et $\omega\left[\omega(N) \cap M\right] \cap M \subseteq \omega(N) \cap M$: l'inclusion inverse résultant de l'extensivité, on a $\omega\left[\omega(N) \cap M\right] \cap M = \omega(N) \cap M$ et le résultat est démontré.

Puisque ω_M est la plus grande fermeture de $M_\lhd$, il s'ensuit qie l'on a $(\forall N \leqslant M)(\omega(N) \cap M \lhd \omega_M(N))$, et, en particulier, $(\forall N \leqslant M)\ \omega(N) \cap M \subseteq \omega_M(N)$.

Inversement, on a, si $N \leqslant M$, $\omega_M(N) \subseteq \omega(N)$ (d'où puisque $\omega_N(M) \subseteq M$, $\omega_N(M) \subseteq \omega(N) \cap M$, d'où l'égalité de ces ensembles) : en effet, Renault a démontré en [7] que les sous-modules d'un module M fermés dans M sont précisément les intersections avec M des sous modules injectifs de $\hat{M}$; si Q est une extension essentielle dans $\hat{M}$ d'un sous-module N de M, Q est fermé dans $\hat{M}$, donc injectif, et $M \cap Q$ est fermé dans M : c'est donc une extension essentielle maximale de N dans M, contenue dans Q, d'où l'égalité $\omega_M(N) = \omega(N) \cap M$ et la croissance de ω_M, (en raison de la croissance de ω).

En particulier :

Corollaire : Si tout sous-module N d'un module M possède une plus grande extension essentielle $\omega(N)$ dans M, l'application ω est une fermeture dans le treillis des sous-modules de M.

Il résulte alors du théorème démontré au paragraphe 3 que les assertions suivantes sont équivalentes pour un module M :

1) Tout sous-module N de M possède une plus grande extension essentielle dans M.

2) La relation d'essentialité de M est compatible avec son union.

3) L'intersection de deux sous-module de M fermés dans M est fermée dans M.

Renault avait démontré en [7] l'équivalence de 3) et de 1') :

1') Tout sous-module N de M possède une plus grande extension essentielle $\omega(N)$ dans M, et ω est une fermeture.

Si l'une des trois conditions précédentes est vérifiée, l'ensemble des sous-modules de M fermés dans M, c'est à dire invariants par ω, est un treillis complet, modulaire et complémenté.

En appliquant ce théorème dans un cas particulier, nous allons retrouver un résultat que nous avions démontré directement en [12], et qui généralisait un théorème obtenu par Johnson en [8].

On appelle élément singulier d'un module tout élément de ce module dont l'annulateur est essentiel dans A.

L'ensemble M^{Δ} des éléments singuliers d'un module M est un sous-module de M : en effet, l'élément nul de M, qui a pour annulateur A, est singulier ; et si $x,y \in M^{\Delta}$, on a $An(x) \lhd A, An(y) \lhd A$, d'où $An(x) \cap An(y) \lhd A \cap A = A$ et, puisque $An(x) \cap An(y) \subseteq An(x + y)$, $An(x + y) \lhd A$ et $x + y \in M^{\Delta}$; si $x \in M^{\Delta}$ et si $\lambda \in A$, soit I un

idéal non nul de A ; si $I \cap An(\lambda) \neq 0$, soit $\mu \in (I \cap An(\lambda))^*$: on a $\mu \lambda x = 0$ et $\mu \in I \cap An(\lambda x) \neq 0$; si $I \cap An(\lambda) = 0$, $I\lambda$ est un idéal non nul de A : puisque $An(x) \lhd A$, $An(x) \cap I\lambda \neq 0$ et il existe $\mu \in I^*$ tel que $\mu \lambda x = 0$, d'où $I \cap An(\lambda x) \neq 0$; ainsi $An(\lambda x) \lhd A$ et $\lambda x \in M$.

Dans le treillis des sous-modules d'un module M tel que $M^{\Delta} = 0$, la relation d'essentialité est compatible avec l'union.

Remarquons d'abord que si $N \lhd N'$ et si $x \in N'$, $I = \{\lambda \in A \mid \lambda x \in N\}$ est un idéal de A (en tant qu'annulateur de l'élément $\bar{x}$ de N'/N) essentiel dans A ; en effet, si $\mu \in A^*$, ou bien $\mu x = 0$, et alors $\mu = 1.\mu \in I$, ou bien $\mu x \neq 0$: soit alors $\lambda \in A$ tel que $\lambda \mu x \in N^*$; $\lambda \mu \in I^*$ et $I \lhd A$.

Si $N, N', P \leqslant M$ et si $N \lhd N'$, soit $n' + p \in (N' + P)$; on a $I = \{\lambda \in A \mid \lambda n' \in N\} \subseteq J = \{\lambda \in A \mid \lambda(n' + p) \in N + P\}$, donc $J \lhd A$ et $J \not\subseteq An(n' + p)$, puisque $M^{\Delta} = 0$; il existe donc un élément λ de A tel que $\lambda(n' + p) \in (N + P)^*$ et $N + P \lhd N' + P$, ce que nous voulions démontrer. Il s'ensuit que tout sous-module N de M possède une plus grande extension essentielle $\omega(N)$ dans M.

Si $S(N) = \{x \in M \mid (\{\lambda \in A \mid \lambda x \in N\} \lhd A)\} =$ $\{x \in M \mid (\forall I \leqslant A)\,[I \neq 0 \Rightarrow (\exists \lambda \in I^*)(\lambda x \in N)]\}$ on a $\omega(N) = S(N)$. En effet, $N \lhd \omega(N) \Rightarrow \omega(N) \subseteq S(N)$.

Si $x \in S(N)$ et si $\mu \in A$, $\mu x \in S(N)$; soit en effet I un idéal non nul de A : montrons qu'il existe $\lambda \in I^*$ tel que $\lambda \mu x \in N$. C'est évident si $I \cap An(\mu) \neq 0$; sinon, $I\mu$ est un idéal non nul

de A, et il existe $\lambda \in I$ tel que $\lambda \mu \in (I\mu)^*$ (d'où $\lambda \neq 0$ et $\lambda \in I^*$) et $\lambda \mu x \in N$. Si $x \in S(N)$, soit $I = \{\lambda \in A \mid \lambda x \in N\}$: montrons que $Ix \lhd Ax$. Si $\mu x \in (Ax)^*$, $\mu x \in S(N)$ et $J = \{\lambda \in A \mid \lambda \mu x \in N\} \lhd A$. Comme $M^\Delta = 0$, $J \not\subseteq An(\mu x)$ et $(\exists \lambda \in J)(\lambda \mu x \in N^*)$: $\lambda \mu \in I$ et $\lambda \mu x \in (Ix)^*$. Ainsi $Ix \lhd Ax$ et $N + Ix \lhd N + Ax$, soit $N \lhd N + Ax$, d'où $N + Ax \subseteq \omega(N)$ et $x \in \omega(N)$: ainsi $S(N) \subseteq \omega(N)$, ce qui achève de démontrer le résultat. On a donc le théorème suivant :

Théorème : Si M est un module tel que $M^\Delta = 0$, la relation d'essentialité est compatible avec l'union dans le treillis des sous-modules de M. Tout sous-module N de M a une plus grande extension essentielle dans M, $\omega(N) = \{x \in M \mid (\{\lambda \in A \mid \lambda x \in N\} \lhd A)\}$, et le treillis des sous-modules de M fermés dans M est un treillis complet, modulaire et complémenté.

Ce théorème a été démontré par Johnson dans le cas particulier où l'anneau A est tel que $A^\Delta = 0$. Nous en avons donné une démonstration directe en [12].

Remarquons que si la relation d'essentialité est compatible avec l'union dans le treillis des sous-modules d'un module M, on n'a pas forcément $M^\Delta = 0$, car il existe par exemple des modules dans lesquels tout sous-module non nul est essentiel ayant des éléments singuliers non nuls (tel l'anneau $A = z/4$ des entiers modulo 4 en tant que z:4 module : ses seuls idéaux sont 0, $m = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ et A ; m, idéal (propre) maximum est essentiel dans A, et l'on a $An(\bar{2}) = m \lhd A$).

CHAPITRE III

OBJETS QUASI-INJECITFS, SEMI-INJECTIFS ET SEMI-PROJECTIFS D'UNE CATEGORIE.

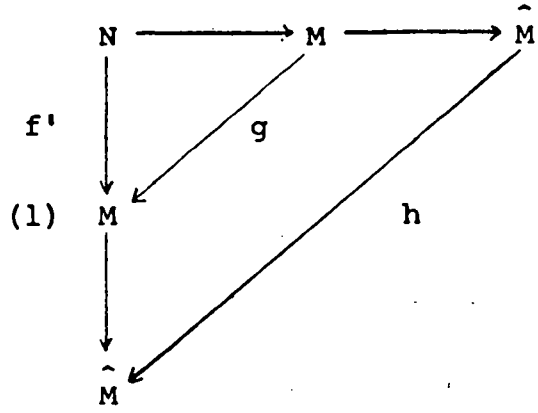
§ 1 - OBJETS QUASI-INJECTIFS D'UNE CATEGORIE.

Johnson et Wong ont introduit, en [13] , dans le cas des modules, la notion d'objet quasi-injectif d'une catégorie : on appelle ainsi un objet M d'une catégorie tel que tout morphisme d'un sous-objet N de M dans M se prolonge en un endomorphisme de M. Ainsi, tout objet injectif d'une catégorie est un objet quasi-injectif de cette catégorie, mais la réciproque n'est pas vraie en général : nous démontrerons par exemple dans le chapitre suivant que les groupes cycliques sont des objets quasi-injectifs de la catégorie des groupes (ou de celle des groupes abéliens).

Dans le cas des modules sur un anneau A, on a le résultat suivant : pour qu'un module M soit quasi-injectif, il faut et il suffit qu'il soit stable pour tout endomorphisme de son enveloppe injective $\hat{M}$.

- La condition est suffisante : si f est un homomorphisme d'un sous-module N de M dans M, on a $N \leqslant M \leqslant \hat{M}$ et f se prolonge en un endomorphisme h de $\hat{M}$, puisque ce module est injectif. Par hypothèse, $h(M) \subseteq M$ et la restriction de h à M est un endomorphisme de M prolongeant f, donc M est quasi-injectif.

La condition est nécessaire : si M est quasi-injectif, soit



f un endomorphisme de $\hat{M}$: sa restriction f' à $N = M \cap \bar{f}^{1}(M)$ se prolonge en un endomorphisme g de M, lequel se prolonge à son tour en un endomorphisme h de $\hat{M}$, puisque $M \leqslant \hat{M}$ et que $\hat{M}$ est injectif (figure 1)

On a $(h - f)(M) = 0$ (d'où $f(M) = h(M) = g(M) \subseteq M$ et le résultat) : en effet, si $(h - f)(M) \neq 0$, on a, puisque M est essentiel dans $\hat{M}$, $(h - f)(M) \cap M \neq 0$, et il existe des éléments non nuls x et y de M tels que $h(x) - f(x) = y$: puisque $x \in M$, $h(x) = g(x)$ et $f(x) = g(x) - y \in M$; ainsi $x \in N$ et $g(x) = f(x)$, d'où $y = 0$, ce qui est absurde.

Ce théorème a été démontré en [13] par Johnson et Wong, et étendu en [14] par Maury aux objets quasi-injectifs d'une catégorie de Grothendieck possèdant un générateur.

Nous allons appliquer ce dernier résultat...au cas particulier de la catégorie des modules sur un anneau A ! Pour qu'un A-module M soit quasi-injectif, il faut et il suffit qu'il soit "catégoriquement stable" pour tous les endomorphismes de son enveloppe injective $\hat{M}$, c'est à dire tel que tout quotient de M isomorphe à un sous-module de $\hat{M}$ soit aussi isomorphe à un sous-module de M. En particulier, <u>un module M tel que tout quotient de M soit isomorphe à un sous-module de M est quasi-injectif</u> : on retrouve ainsi le fait que tout module semi-simple est quasi-injectif.

Après avoir remarqué que l'ensemble Φ des sous-modules de l'enveloppe injective $\hat{M}$ d'un module M stables pour tous les endomorphismes de $\hat{M}$ (c'est à dire quasi-injectifs) était une famille de Moore de parties de $\hat{M}$ (stables pour l'intersection et comprenant $\hat{M}$), Johnson et Wong ont introduit l'enveloppe quasi-injective $\bar{M}$ de M, qui est l'intersection des éléments de Φ contenant M, c'est à dire le plus petit sous-module quasi-injectif de $\hat{M}$ contenant M. Ce résultat a d'ailleurs été étendu en [14] aux catégories de Grothendieck sous certaines conditions.

Théorème : Si N est un sous-module du module quasi-injectif M fermé dans M et si N' est un complément de N dans M, on a $M = N \oplus N'$.

Démonstration : l'application canonique de $N \oplus N'$ sur N est un homomorphisme nul dans N', coïncidant avec l'application identique dans N, et qui se prolonge, puisque M est quasi-injectif, en un endomorphisme f de M.

On a $N' \subseteq \mathrm{Ker}(f)$ et $N \cap \mathrm{Ker}(f) = 0$ (si $x \in N \cap \mathrm{Ker}(f)$, $x = f(x) = 0$), d'où $\mathrm{Ker}(f) = N'$ et $N' \subseteq f^{-1}(N')$. Mais $f^{-1}(N') \cap N = 0$, car si $x \in f^{-1}(N') \cap N$, $x = f(x) \in N'$ et $x \in N \cap N' = 0$, d'où $x = 0$; il s'ensuit que $f^{-1}(N') = N'$ et que $N' \cap f(M) = 0$: en effet, si $x \in N'$ est tel que $f(x) \in M$, $x \in f^{-1}(N') = N'$ et $f(x) = 0$.

Or, si x' est un complément d'un élément x d'un treillis de Johnson T, et si y est un complément de x' supérieur à x, on a $x \lhd y$: en effet, $x \vee x' \lhd I$, d'où $(x \vee x') \wedge y \lhd y$; mais $(x \vee x') \wedge y = x \vee (x' \wedge y) = x \vee 0 = x$. En particulier, tout élément

d'un treillis de Johnson T fermé dans ce treillis est un complément de tous ses compléments. Ainsi, N est un complément de N', et l'on a $f(M) = N$, puisque $N \subseteq f(M)$ et que $N' \cap f(M) = 0$. Il s'ensuit que $(\forall x \in M)(f(f(x)) = f(x))$, puisque $(\forall x \in M)(f(x) \in N)$; f est donc un projecteur de M, et l'on a $m = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = N \oplus N'$, d'où le résultat.

Corollaire : Pour qu'un sous-module d'un module quasi-injectif soit fermé dans ce module, il faut et il suffit qu'il en soit un facteur direct.

La condition est suffisante, car si $M = N \oplus N'$ et si $N \lhd P \leq M$, on a $N' \cap P = 0$, d'où $M = P \oplus N'$ et $N = P$.

Le fait qu'elle soit nécessaire résulte immédiatement du théorème et avait été indiqué par Renault en [7] .

On a le résultat suivant :

Proposition : Tout facteur direct d'un module quasi-injectif est quasi-injectif.

Remarquons d'abord que si les modules M, M', N, N' sont tels que $M \lhd M'$ et $N \lhd N'$, on a $M \oplus N \lhd M' \oplus N'$: en effet, si $x = m' + n' \in (M' \oplus N')$, on a par exemple $m' \neq 0$ et il existe un élément λ de A tel que $\lambda m' \in M$: si $\lambda n' = 0$, $\lambda x = \lambda m' \in (M \oplus N)^*$, et si $\lambda n' \neq 0$, il existe un élément μ de A tel que $\mu \lambda n' \in N^*$, et $\mu \lambda x = \mu \lambda m' + \mu \lambda n' \in (M \oplus N)$ (la somme de M et de N étant directe, $\mu \lambda x \neq 0$, puisque $\mu \lambda n' \neq 0$).

Par une récurrence immédiate, l'essentialité est compatible avec la somme directe finie, donc avec la somme directe, puisque tout élément d'une somme directe appartient à une somme directe partielle finie.

Si M est un module quasi-injectif tel que $M = N \oplus N'$, soient $\hat{N}$ et $\hat{N}'$ les enveloppes injectives de N et de N' : $Q = \hat{N} \oplus \hat{N}'$ est une enveloppe injective de M, puisque c'est un module injectif dans lequel $N \oplus N'$ est essentiel.

Soit φ un endomorphisme de $\hat{N}$: M est stable pour l'endomorphisme ψ de Q nul dans $\hat{N}'$ et coïncidant avec φ dans $\hat{N}$, et $\varphi(N) = \psi(N) \subseteq \psi(M) \subseteq M = N \oplus N'$; mais puisque $\varphi(N) \subseteq \varphi(\hat{N}) \subseteq \hat{N}$, on a $\varphi(N) \subseteq (N \oplus N') \cap \hat{N} = N \oplus (N' \cap \hat{N}) = N \oplus 0 = N$. Il s'ensuit que N est quasi-injectif, et le résultat est démontré.

En particulier, compte tenu du théorème précédent, on a le fait que <u>tout sous-module d'un module quasi-injectif fermé dans ce module en est un facteur direct quasi-injectif</u>.

Johnson et Wong avaient démontré en [13] que si le module quasi-injectif M est tel que $M^{\Delta} = 0$, tout sous-module de M fermé dans M est quasi-injectif.

Toujours dans le même article, il prouvèrent que si le module quasi-injectif M est tel que $M^{\Delta} = 0$, la somme de deux sous-modules de M fermés dans M est fermée dans M : nous allons maintenant pouvoir généraliser ce résultat au cas d'un module quasi-injectif M tel que l'essentialité soit compatible avec l'union dans le treillis des

sous-modules de M.

Lemme : Pour que l'essentialité soit compatible avec l'union dans le treillis des sous-modules d'un module M, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée : si N et N' sont des sous-modules de M, et si P est un sous-module de N' maximal tel que $N \cap P = 0$, alors $N \oplus P$ est essentiel dans $N + N'$.

- La condition est nécessaire, car, dans les conditions indiqué P est un complément de $N \cap N'$ dans le treillis des sous-modules de N' et $(N \cap N') \oplus P \lhd N'$ d'où $N + [(N \cap N') \oplus P] \lhd N + N'$, soit $N \oplus P \lhd N + N'$.

- La condition est suffisante : si elle est vérifiée, soient N, N' et P des sous-modules de M tels que $N \lhd N'$: montrons que $N + P \lhd N' + P$.

Soit R un sous-module de P maximal tel que $N \cap R = 0$: par hypothèse, $N \oplus R \lhd N + P$. Puisque $N \lhd N'$, on a $N' \cap R = 0$ et R est un sous-module de P maximal tel que $N' \cap R = 0$: par hypothèse, $N' \oplus R \lhd N' + P$. Or, l'essentialité étant compatible avec la somme directe, on a $N \oplus R \lhd N' \oplus R$, d'où $N \oplus R \lhd N' + P$ et $N + P \lhd N' + P$, puisque $N \oplus R \leqslant N + P \leqslant N' + P$.

Soient maintenant M un module quasi-injectif tel que l'essentialité soit compatible avec l'union dans le treillis des sous-modules de M, N et N' des sous-modules de M fermés dans M, P un sous-module de N' maximal tel que $N \cap P = 0$: on sait que $N \oplus P \lhd N + N'$.

N', sous-module fermé du module quasi-injectif M, est un facteur direct quasi-injectif de M, et $M = N' \oplus N'_1$. P est un sous-module du module quasi-injectif N' fermé dans N', donc un facteur direct quasi-injectif de N' et $N' = P \oplus P'$: il s'ensuit que $M = P \oplus (P' \oplus N'_1)$ et P est un facteur direct de M, donc est fermé dans M.

Soit N_1, un complément de N contenant P dans M : N étant un sous-module du module quasi-injectif M fermé dans M, on a $M = N \oplus N_1$: N_1 est quasi-injectif, et P est un sous-module de N_1 fermé dans N_1 (puisque fermé dans M), donc un facteur direct de N_1. On a $N_1 = P \oplus P_1$ et $M = (N \oplus P) \oplus P_1$: $N \oplus P$ est un facteur direct de M, donc est fermé dans M, et, puisque $N \oplus P \lhd N + N'$, on a $N \oplus P = N + N'$, ce qui achève de prouver que $N + N'$ est un facteur direct quasi-injectif de M, fermé dans M. Ainsi :

Théorème : Si l'essentialité est compatible avec l'union dans le treillis des sous-modules d'un module quasi-injectif M, la somme de deux sous-modules de M fermés dans M est fermée dans M.

Remarque : Dans le cas où le module M est tel que $M^{\Delta} = 0$, on peut s'appuyer dans les démonstration sur les propriétés suivantes :

- si f est un endomorphisme de M et si N et N' sont des sous-module de M tels que $N \lhd N'$, on a $f(N) \lhd f(N')$.
- si f est un endomorphisme de M et si N est un sous-module de M fermé dans M, $f^{-1}(N)$ est un sous-module de M fermé dans M.

Si l'on sait seulement que l'essentialité est compatible avec l'union dans le treillis des sous-modules du module M, on ne peut plus compter sur ces propriétés, comme le montre l'exemple suivant : l'image directe de l'idéal (propre) maximum $m = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ de l'anneau $A = z/4$, considéré comme $z/4$ module, par l'homomorphisme $f : \bar{x} \longrightarrow \bar{2}$. $\bar{x}$ est nulle, donc non essentielle dans l'image m de A, alors que m est essentiel dans A ; et l'image réciproque de l'idéal nul 0, qui est fermé dans A, est m', qui ne l'est pas.

§ 2 - OBJETS SEMI-INJECTIFS D'UNE CATEGORIE.

Nous avons introduit en [12] , dans le cas des modules, la notion d'objet semi-injectif d'une catégorie; on appelle ainsi un objet N d'une catégorie qui est quotient de tout objet dont il est sous-objet, c'est à dire tel que, pour tout objet M, il existe un épimorphisme de M sur N dès qu'il existe un monomorphisme de N dans M.

Toute rétraction d'un morphisme, étant sectionnable, est un épimorphisme, et tout objet injectif d'une catégorie est un objet semi-injectif de cette catégorie. La réciproque n'est pas vraie en général : en effet, tout objet isolé d'une catégorie est un objet semi-injectif de cette catégorie, puisque le morphisme identique de cet objet est un épimorphisme.

Les notions d'injectif et de quasi-injectif coïncidant dans le cas d'un objet isolé (qui est son propre et unique sous-objet) les notions de quasi-injectif et de semi-injectif sont distinctes ;

pour montrer qu'aucune n'est plus générale que l'autre, il reste à trouver un exemple d'objet quasi-injectif qui ne soit pas semi-injectif or, dans une catégorie d'ordre, tout objet est quasi-injectif, mais les objets semi-injectifs sont les éléments maximaux.

On dit qu'une catégorie est balancée si tout morphisme qui est un monomorphisme et un épimorphisme est un isomorphisme.

On dit qu'un objet N d'une catégorie peut être plongé très strictement dans un objet M de cette catégorie s'il existe un monomorphisme de N dans M et si N et M ne sont pas isomorphes.

On a le résultat suivant :

Proposition : Si, dans une catégorie balancée, tout objet peut être plongé très strictement dans une source simple, et si le but d'un épimorphisme constant est un objet final, les objets semi-injectifs de cette catégorie sont ses objets finaux.

Démonstration : Un objet final d'une catégorie est un objet injectif, donc semi-injectif de cette catégorie. Soient maintenant N un objet semi-injectif et i un monomorphisme de N dans une source simple S non isomorphe à N : il existe un épimorphisme r de S sur N.
S étant une source simple, r est un monomorphisme constant (car si r était un monomorphisme, ce serait aussi un isomorphisme, puisque la catégorie est balancée) : donc N, but d'un épimorphisme constant, est par hypothèse un objet final de la catégorie considérée.

Corollaire : Les objets semi-injectifs de la catégorie des groupes sont des groupes réduits à un élément.

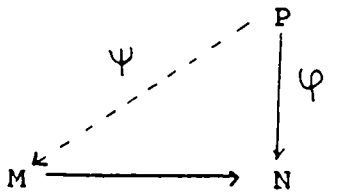
Nous démontrerons plus loin que les groupes abéliens semi-injectifs coïncident avec les groupes abéliens injectifs (ou divisibles).

Comme tout demi-groupe peut être plongé dans un demi-groupe simple de cardinal strictement plus grand, et puisque tout monomorphisme de demi-groupes est un homomorphisme injectif, tout demi-groupe semi injectif est but d'un épimorphisme constant, donc réduit à un élément.

§ 3 - MODULES SEMI-INJECTIFS ET SEMI-PROJECTIFS.

On dit qu'un objet P d'une catégorie $\mathcal{C}$ est un objet projectif de cette catégorie, si, quels que soient les objets M et N de $\mathcal{C}$, le morphisme φ de P dans N, et l'épimorphisme j de M dans N, il existe un morphisme ψ de P dans M tel que $\varphi = j\,\psi$ (figure 2).

(2)



La somme directe d'une famille d'objets est projective si et seulement si tous ses facteurs sont projectifs.

Les modules projectifs sur un anneau A sont les facteurs directs des A-modules libres : en particulier, l'anneau A est un A-module projectif.

On dit qu'un objet N d'une catégorie est semi-projectif s'il est sous-objet de tout objet dont il est objet quotient, c'est à dire tel que pour tout objet M, il existe un monomorphisme de N dans M dès qu'il existe un épimorphisme de M sur N.

On dit qu'un module N est sous-module (resp. surmodule) d'un module M, ce que l'on traduit par la notation $N \leqslant M$ (resp. $N \geqslant M$), s'il existe un monomorphisme de N dans M (resp. un épimorphisme de N sur M).

Ainsi, un module R est semi-projectif si et seulement si il est sous-module de tous ses surmodules, c'est à dire si $(\forall M)(M \geqslant R \Rightarrow R < M)$.

Un module S est semi-injectif si et seulement si tout module dont il est sous-module en est un surmodule, c'est à dire si $(\forall M)(S \leqslant M \Rightarrow M \geqslant S)$.

Puisque tout module a un surmodule libre, tout module semi-projectif est sous-module d'un module libre ; on a donc la filiation suivante : libre $\Rightarrow$ projectif $\Rightarrow$ semi-projectif $\Rightarrow$ sous module d'un libre. Sur un anneau principal, tout sous-module d'un libre est libre (ce qui constitue d'ailleurs une caractérisation des anneaux principaux) et les quatre notions précédentes coïncident.

Puisque tout module est sous-module d'un module injectif, tout module semi-injectif est quotient d'un module injectif.

Or, pour un anneau A, les propriétés suivantes sont équivalentes (cf [5]) :

- Les idéaux de A sont des modules projectifs.
- Tout sous-module d'un A-module projectif est projectif.
- Tout quotient d'un A-module injectif est injectif.

On dit que A est un anneau héréditaire s'il vérifie l'une des propriétés précédentes : sur un anneau héréditaire, les notions d'injectif et de semi-injectif coïncident, ainsi que celles de projectif et de semi-projectif.

Nous allons étudier la réciproque.

Proposition : Si un module S est sous-module d'un module projectif P et a un sous-module P' isomorphe à P, il est semi projectif.

Démonstration : Soit f un épimorphisme d'un module M sur S : on a puisque f est surjectif, $f\left[f^{-1}(P')\right] = P'$. La restriction de f à $M' = f^{-1}(P')$ est un épimorphisme de M' sur le module projectif P' : ainsi P' est isomorphe à un sous-module de M', donc de M, il en est de même pour P, donc aussi à fortiori pour S et le résultat est démontré.

Corollaire : Tout idéal I de A contenant un élément λ d'annulateur nul est semi-projectif.

En effet, on a $A\lambda \sim A/An\lambda \sim A/0 \sim A$ et $A\lambda \leqslant I \leqslant A$.

En particulier, tout idéal d'un anneau intègre est semi projectif.

Il résulte aussi de la proposition que si $L = \bigoplus_{i \in I} Ax_i$ est un A-module libre de base infinie $(x_i)_{i \in I}$ et si J est un idéal de A, $L \oplus J$ est semi-projectif. En effet, on a $L \leqslant L \oplus J \leqslant L \oplus A$, et $L \oplus A$ est un module libre dont une base est équipotente à celle de L (puisque I est infini), donc isomorphe à L.

Proposition : Pour qu'un anneau A soit héréditaire, il faut et il suffit que les notions de semi-projectif et de projectif coïncident sur A.

Démonstration : On a su que la condition est nécessaire : montrons qu'elle est suffisante. Si elle est vérifiée, soient J un idéal de A et L un module libre de base infinie : $L \oplus J$ est semi-projectif, donc projectif, et J est projectif, d'où le résultat.

Proposition : Si un module S est quotient d'un de ses sous-modules injectifs, S est semi-injectif.

Démonstration : Si S est sous-module d'un module M, le sous-module injectif Q de S est un facteur direct, donc un quotient de M : si de plus S est quotient de Q, S est quotient de M, d'où la semi injectivité de S.

Corollaire : Sur un anneau noethérien A, si Q' désigne la somme directe d'une famille infinie $(Q_i)_{i \in I}$ de modules isomorphes à un injectif Q, et si N est un sous-module de Q, $Q' \oplus Q/N$ est semi-injectif.

En effet, toute somme directe de modules injectifs sur un anneau noethérien A est injective : car si φ est un homomorphisme de l'idéal J de A dans une somme directe $Q' = \bigoplus_{i \in I} Q_i$ de A-modules injectifs, il existe, puisque J est de type fini, une partie finie I_o de I telle que $\varphi(J)$ soit contenu dans le sous-module injectif $\bigoplus_{i \in I_o} Q_i$ de $\bigoplus_{i \in I} Q_i$, donc aussi un élément q de $\bigoplus_{i \in I_o} Q_i$ tel que $(\forall \lambda \in J)(\varphi(\lambda) = \lambda q)$, d'où l'injectivité de Q.

Deux sommes directes de modules isotypiques dont les ensembles d'indices sont équipotents étant isomorphes, on a, sous les hypothèses du corollaire, $Q' \backsim Q \oplus Q'$: ce module est injectif,

d'après ce qui précède, et c'est un sous-module de $S = Q' \oplus Q/N$ dont S est quotient, d'où le résultat, d'après la proposition précédente. En particulier :

Proposition : Pour que les notions de semi-injectivité et d'injectivité coïncident sur l'anneau noethérien A, il faut et il suffit que A soit héréditaire.

On a su que la condition est suffisante : montrons qu'elle est nécessaire. Adoptons pour celà les notions du corollaire : $Q' \oplus Q/N$ est semi-injectif, donc injectif et Q/N est injectif ; ainsi, tout quotient d'un injectif est injectif et l'anneau A est hériditaire.

Proposition : Pour un module S, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) S est semi-injectif et projectif.

2) S est injectif et semi-projectif.

3) S est injectif et projectif.

Démonstration : Un module est projectif si et seulement si il est facteur direct de tout module qui en est un surmodule : si donc S est semi-injectif et projectif, il est quotient, donc facteur direct de son enveloppe injective $\hat{S}$, donc injectif.

Si S est injectif et semi-projectif, il est quotient, donc sous-module, donc facteur direct d'un module libre, donc projectif.

Enfin, un module injectif et projectif est, comme on l'a vu, semi-injectif et semi-projectif, ce qui achève de démontrer le résultat.

Proposition : Un module semi-injectif et semi-projectif sur un anneau intègre A est injectif et projectif.

Démonstration : Sur un anneau intègre, tout injectif est divisible et tout sous-module d'un libre est sans torsion : S, étant semi-injectif est quotient d'un injectif divisible, donc est divisible ; étant semi-projectif, il est sous-module d'un libre, donc sans torsion. L'anneau A étant intègre, il s'ensuit que S est injectif, donc injectif et semi-projectif, dont injectif et projectif.

On trouvera en [5] les propriétés des anneaux intègres ici usités. Pour justifier les deux dernières propositions, il convient de remarquer qu'il existe des modules semi-injectifs et semi-projectifs qui ne sont ni injectifs, ni projectifs, tel l'idéal maximum $m = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ de l'anneau z/4, considéré comme z/4 module (affirmation qui sera démontrée au chapitre suivant).

CHAPITRE IV

ANNEAUX ET MODULES

On appelle élément superflu d'un treillis T tout élément x de T tel que : $(\forall y \in T)(x \vee y = I \Rightarrow y = I)$.

On dit qu'un module projectif P est une enveloppe projective d'un module M s'il existe un épimorphisme de P sur M dont le noyau est superflu dans P ; deux enveloppes projectives d'un module sont isomorphes.

On dit qu'un anneau A est parfait si tout A-module a une enveloppe projective. Afin de donner une caractérisation des anneaux parfaits, introduisons les notions suivantes : on dit qu'un idéal m d'un anneau A est T-nilpotent s'il existe, pour toute suite $(x_n)_{n \in N}$ d'éléments de m, et si l'on pose $x'_n = \prod_{i=o}^{n} x_i$, un entier j tel que $x'_j = 0$; on dit que la famille $(e_i)_{i \in I}$ d'élément idempotents de l'anneau A est une famille d'idempotents orthogonaux si $(\forall i,j \in I)(i \neq j \Rightarrow e_i.e_j = 0)$.

Bass a démontré, en [15] , le théorème P : pour un anneau A, les assertions suivantes sont équivalentes :

- A est parfait.
- Le radical de Jacobson de A est T-nilpotent, et A/J est semi-simple.
- Toute famille d'idempotents orthogonaux de A est finie, et tout A-module non nul a un sous-module simple.

- A vérifie la condition de chaîne descandante pour les idéaux principaux à droite.

- Toute limite directe de A-modules projectifs est projective etc... (voir [15]).

Enfin pour qu'un anneau noethérien soit parfait, il faut et il suffit qu'il soit artinien.

On dit qu'un anneau A est auto-injectif si le A-module est injectif.

Théorème : Un anneau noethérien auto-injectif A est parfait.

Lemme : Si x et y sont des éléments d'un anneau auto-injectif A tels que $An(x) \subseteq An(y)$, x est un diviseur à gauche de y.

En effet, l'application $\varphi : \lambda x \longrightarrow \lambda y$ est alors bien définie. C'est un homomorphisme de l'idéal Ax de A dans le module injectif A : il existe donc un élément z de A tel que $(\forall \lambda \in A)(\lambda y = \varphi(\lambda x)\ \lambda xz)$, c'est à dire, A étant unitaire, tel que $y = xz$, d'où le résultat.

Soit maintenant $(x_n A)_{n \in N}$ une suite décroissante d'idéaux principaux à droite de l'anneau noethérien auto-injectif A. On a $(\forall n \in N)(x_{n+1}A \subseteq x_n A)$, en particulier $x_{n+1} \in x_n A$ et il existe un élément a_n de A tel que $x_{n+1} = x_n a_n$: on a $An(x_n) \subseteq An(x_{n+1})$.
A étant noethérien, la suite croissante $[An(x_n)]_{n \in N}$ d'idéaux de A est stationnaire, et il existe un entier n_o tel que $(\forall p \geqslant n_o)(An(x_p) = An(x_{n_o}))$: vu le lemme, x_p est un diviseur à gauche de x_{n_o} et $x_{n_o} A \subseteq x_p A$, d'où $(\forall p \geqslant n_o)(x_p A = x_{n_o} A)$: la suite

$(x_n A)_{n \in N}$ étant stationnaire, A est parfait, donc artinien. Tout anneau artinien étant noethérien, il y a équivalence pour un anneau A, entre les deux propriétés suivantes :

- A est noethérien auto-injectif.
- A est artinien auto-injectif.

On désigne par Na(X) l'annulateur à droite d'une partie X de l'anneau A. Eilenberg et Nakayama ont montré en [16] que les propriétés suivantes sont équivalentes pour un anneau A :

- A est artinien auto-injectif.
- A est artinien à droite et auto-injectif.
- A est noethérien à gauche et à droite, et auto-injectif.
- A est noethérien, et l'on a $Na(I \cap J) = Na(I) + Na(J)$, quels que soient les idéaux à gauche I et J de A, et $NA(An(K)) = K$ pour tout idéal à droite K de A.
- A est artinien, à gauche et à droite, et l'on a $An(Na(I)) = I$ pour tout idéal à gauche I de A, et $Na(An(K)) = K$ pour tout idéal à droite K de A.

Si un anneau A vérifie l'une de ces conditions, on dit qu'il est quasi-frobéniusien. On a le résultat suivant :

Théorème : Un anneau A est quasi-frobéniusien si et seulement si les notions de projectif et d'injectif coïncident sur A.

Condition suffisante : Pour la démontrer, nous utiliserons le résultat suivant, dû à Zoltan Papp [17] :

Lemme : Pour qu'un anneau A soit noethérien, il faut et il suffit que toute somme directe de A-modules injectifs soit injective.

Nous avons vu que la condition est nécessaire : montrons qu'elle est suffisante : si $(I_n)_{n\in N}$ est une suite croissante d'idéaux d'un anneau A ayant la propriété indiquée, $Q = \bigoplus_{n\in N} \widehat{A/I_n}$ est un A-module injectif. Si λ est un élément de l'idéal $I = \bigcup_{n\in N} I_n$ de A, il existe un entier p tel que $\lambda \in Ip$, et l'on a $(\forall n \geqslant p)(\varphi_n(\lambda) = 0)$, en désignant par φ_n l'application canonique de I sur I/I_n.
L'application $\varphi : \lambda \longrightarrow \sum_{n=o}^{+\infty} \varphi_n(\lambda)$ est donc bien définie : c'est un homomorphisme de I dans Q, et il existe un élément q de Q tel que $(\forall \lambda \in I)(\varphi(\lambda) = \lambda q)$. Soit n_o un entier tel que $q \in \bigoplus_{n \leqslant n_o} \widehat{A/I_n} = Q_o$. On a $\varphi(I) \subseteq Q_o$, $\varphi(\lambda) = \sum_{n=o}^{n_o} \varphi_n(\lambda)$ et $(\forall \lambda \in I)(\forall n \geqslant n_o+1)(\varphi_n(\lambda) = 0)$, d'où $I_{n_o+1} = I$ et la noethérianité de A.

Nous avons suivi, la démonstration de Bass, cité par Chase en [18], article où il élucide comme suit le problème dual du précédent : pour un anneau A, les propriétés suivantes sont équivalentes

- Tout produit direct de A-modules projectifs est projectif.
- Tout produit direct de A-modules isomorphes à A est projectif.
- A est parfait, et tout idéal à droite de A est quotient d'un module à droite libre de type fini par un de ses sous-modules à droite de type fini (condition équivalente à l'artinianité dans le cas d'un anneau commutatif A).

Revenons à notre démonstration : si, sur un anneau A, les notions de projectif et d'injectif coïncident, alors toute somme directe d'injectifs est une somme directe de projectifs, donc un projectif, donc un injectif, et A est noethérien, auto-injectif, puisque le A-module projectif A est injectif.

Condition nécessaire : Si un anneau A est noethérien auto-injectif, tout A-module libre, étant somme directe de modules isomorphes à A, donc injectifs, est injectif, et tout A-module projectif, étant facteur direct d'un libre, donc d'un injectif, est injectif.

Démontrons la propriété inverse.

On dit qu'un module M est indécomposable si ses seuls facteur directs sont 0 et M. Pour qu'un module injectif Q soit indécomposable il faut et il suffit qu'il n'existe pas de sous-modules non nuls S et T de Q tels que $S \cap T = 0$. En effet, la condition est évidemment suffisante : montrons qu'elle est nécessaire ; si S et T sont des sous-modules non nuls de Q tels que $S \cap T = 0$, il existe un sous-module T' de Q contenant T et maximal tel que $S \cap T' = 0$: T' est fermé dans l'injectif Q, donc est injectif et facteur direct de Q or $T' \neq 0$, puisque $T \subseteq T'$, et $T' \neq Q$, puisque $S \cap T' = 0$.

Ainsi, pour qu'un module injectif Q soit indécomposable, il faut et il suffit que Q soit une extension essentielle, donc une enveloppe injective de chacun de ses sous-modules non nuls.

Après avoir indiqué ce résultat, Mathis a démontré, en [19] les théorèmes suivants :

- Les modules injectifs indécomposables sont les enveloppes injectives des modules cycliques A/J (où J est un idéal irréductible de A).

- Si un module est somme directe de sous-modules injectifs indécomposables, il y a unicité de cette décomposition, au sens fort (cf. [19]).

- Si l'anneau A est noethérien, tout A-module injectif est somme directe de sous-modules injectifs indécomposables.

Prouvons enfin que si A est quasi-frobéniusien, tout A-module injectif est projectif. Il suffit de prouver que tout injectif indécomposable est sous-module d'un libre : il en est alors facteur direct, donc est projectif, et tout injectif, étant somme directe d'injectifs indécomposables, est somme directe de projectifs, donc est projectif.

Or, tout A-module non nul ayant un sous-module simple, les injectifs indécomposables sont les enveloppes injectives des modules simples.

En effet, le socle $\sum$ d'un module M, qui est la somme des sous-modules simples de M, est un sous-module semi-simple de M, essentie dans M : en effet, si $N \leqslant M$ est tel que $\sum \cap N = 0$, et si S est un sous-module simple de N, on a $\sum \cap S = 0$ et $S \subseteq \sum$, ce qui est absurde ; ainsi $N = 0$ et $\sum \lhd M$. Le socle d'un module injectif indécomposable ne pouvant contenir deux sous-modules non nuls d'intersection nulle, est réduit à un seul module simple. Inversement, l'enveloppe injective $\hat{S}$ d'un module simple S est telle que tout sous-module non nul

N de $\hat{S}$ a une intersection non nulle avec S (puisque S est essentiel dans $\hat{S}$) donc contient S et est essentiel dans $\hat{S}$, d'où l'indécomposabilité de $\hat{S}$.

Il nous suffit donc de montrer que tout A-module simple S est un idéal de A. Soit m un idéal maximal de A tel que $S \sim A/m$. On a $Na(m) \neq 0$ (sinon $m = An(Na(m)) = An(0) = A$) : soit donc $x \in [Na(m)]^*$. On a $m.x = 0$, donc $m \subseteq An(x)$ et $An(x) = m$, d'où $Ax \sim A/An(x) = A/m = S$, ce qui achève de démontrer le résultat.

Corollaire : Tout idéal irréductible J d'un anneau quasi-frobéniusien A est l'annulateur d'un élément λ de A.

En effet, puisque tout injectif est projectif, tout module est sous-module d'un libre : si $x = \overline{1}^J \in A/J$, le module cyclique $Ax = A/J$ est sous-module d'un libre de type fini, $\bigoplus_{i=1}^{n} Ax_i$. On a $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ et $J = An(x) = \bigcap_{i=1}^{n} An(\lambda_i)$, et, puisque j est irréductible, il existe un entier $j \in [1,n]$ tel que $J = An(\lambda_j)$.

Proposition : Tout idéal B' d'un anneau noethérien auto-injectif A isomorphe à un facteur direct bilatère B de A lui est égal.

Démonstration : Puisque tout homomorphisme d'un idéal I dans un idéal J d'un anneau auto-injectif A est de la forme $\lambda \longrightarrow \lambda u$ (avec $u \in A$) il existe des éléments u et v de A tels que $Bu = B'$ et $(\forall b \in B)(buv = b)$. En particulier, B étant bilatère, $B' = Bu \subseteq B$: B' étant isomorphe à B, qui est injectif en tant que facteur direct de l'injectif A, est injectif, et $B = B' \oplus C$. L'endomorphisme de B

nul dans C et coïncidant avec l'homomorphisme $\lambda \longrightarrow \lambda v$ dans B' est un épimorphisme de B sur lui-même, puisque $B'v = B$, donc un isomorphisme de B sur lui-même, puisque le sous-module B du module noethérien A est noethérien (cf. [20]) : ainsi $C = 0$ et $B = B'$.

Corollaire : Si les facteurs d'une décomposition de l'anneau noethérien auto-injectif A en somme directe d'injectifs indécomposables sont des idéaux bilatères, cette décomposition est unique (tout idéal injectif indécomposable de A étant isomorphe, donc égal à un des facteurs) et tout idéal injectif de A, étant somme directe d'idéaux injectifs indécomposables bilatères est bilatère.

Rappelons quelques propriétés des décompositions directes d'anneaux.

Si $A = B \oplus C$ est une décomposition d'un anneau unitaire A en somme directe d'idéaux, tout élément x de A s'écrit de façon unique comme somme d'un élément b de B et d'un élément c de C.

Soient donc $e \in B$ et $e' \in C$ tels que $1 = e + e'$: on a $e = e.1 = e(e + e') = e^2 + ee' = e + 0$, d'où $e^2 = e, ee' = 0$, et de même $e'^2 = e'$, $e'e = 0$. Si $x \in A$, $x = x.1 = x(e + e') = xe + xe'$ est l'unique décomposition de x sous la forme $b + c$, avec $b \in B$ et $c \in C$: ainsi, si I est un idéal de A, on a $I = Ie + Ie' = Ie \oplus Ie'$, puisque $Ie \subseteq Ae \subseteq B$ et $Ie' \subseteq Ae' \subseteq C$; en particulier, $A = Ae \oplus Ae'$ et $B = Ae$, $C = Ae' = A(1 - e)$.

Si B et C sont des idéaux bilatères de A, on a $B.C \subseteq B \cap C = 0$, $B \circ C = 0$ et de même $C.B = 0$: il s'ensuit que A est isomorphe au produit direct des anneaux B et C, qui sont unitaires, étant respectivement isomorphes à A/C et A/B, et ont pour unité $e = \overline{1}^{C}$ et $e' = \overline{1}^{B}$. Donc $An(B) = An(e) = A(1-e) = C$, et de même $An(C) = An(1-e) = B$. On a le résultat suivant :

Proposition : Si $A = B \oplus C$ est une décomposition d'un anneau A en somme directe d'idéaux bilatères, alors A est auto injectif si et seulement si B et C sont auto-injectifs.

Démonstration : Si M_B est un B-module ayant un groupe abélien sous jacent M, on obtient un A-module M_A en munissant M de la loi externe $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda.x = (\lambda e)n$. En effet :

- $\lambda.(x+y) = (\lambda e)(x+y) = (\lambda e)x + (\lambda e)y = \lambda.x + \lambda.y$
- $(\lambda + \mu).x = [(\lambda + \mu)e]x = (\lambda e + \mu e)x = (\lambda e)x + (\mu e)x = \lambda.x + \mu.x$
- $\mu.(\lambda.x) = (\mu e)[(\lambda e)x] = (\mu e\ \lambda e)x = (\mu\ \lambda e)x = (\mu\ \lambda).x$

(on a $e\ \lambda e = \lambda e$, puisque e est l'unité de $B = \Lambda c$).

- $1.x = (1e)x = ex = x$ et M_A est unitaire, puisque M_B l'est.

On a $C \subseteq An(M_A)$. Si φ est un B-homomorphisme de M_B dans N_B, φ est aussi un A-homomorphisme de M_A dans N_A, puisque

$\varphi(\lambda.x) = \varphi[(\lambda e)x] = (\lambda e)\varphi(x) = \lambda.\varphi(x)$.

Inversement, si M_A est un A-module tel que $C \subseteq An(M_A)$, on obtient, en munissant le groupe abélien sous jacent M de la restriction à B de la loi externe définie sur A un B-module M_B, et tout

A-homomorphisme f de M_A dans N_A est aussi un B-homomorphisme de M_B dans N_B.

Ainsi se trouve défini un isomorphisme canonique entre la catégorie des B-modules et la catégorie $\mathcal{B}$ des A-modules dont l'annulateur contient C (et, de même, entre la catégorie des C-modules et la catégorie $\mathcal{C}$ des A-modules dont l'annulateur contient B).

Or tout A-module N est somme directe d'un objet N_B de $\mathcal{B}$ et d'un objet N_e de $\mathcal{C}$: en effet, $N = eN + (1-e)N = eN \oplus (1-e)N$ (la somme est directe puisque e appartient à l'annulateur de (1-e)N et agit sur eN comme l'unité ; eN est bien un sous-module de N, car $AeN = BeN = eBN \subseteq eN$; il en est de même de $(1-e)N = e'N$). Or $C = A(1-e) \subseteq An(eN)$ et $B \subseteq An\left[(1-e)N\right]$.

Comme $\mathrm{Hom}_A(R,S) = 0$ si $R \in \mathcal{B}$ et si $S \in \mathcal{C}$, (ou si $R \in \mathcal{C}$ et $S \in \mathcal{B}$), il s'ensuit qu'un A-module N est A-injectif si et seulement si N_B est B-injectif et N_e C-injectif : en particulier, la proposition est démontrée.

A étant noethérien si et seulement si B et C le sont, il s'ensuit que A est quasi-frobénuisien si et seulement si B et C le sont. Par une récurrence immédiate, le résultat s'étend à un nombre fini de facteurs, et un produit direct fini d'anneaux est quasi-frobéniusien si et seulement si tous ses facteurs sont quasi-frobéniusiens.

Il s'ensuit que l'anneau $\mathbb{Z}/n$ des entiers modulo n est quasi-frobéniusien : en effet, si $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ est une décomposition

de n en produit de facteurs premiers, on a $z/n \sim \prod_{i=1}^{k} z/p_i^{\alpha_i}$, et il suffit de prouver que si p est un entier premier, z/p^{α} est quasi-frobéniusien. C'est vrai si $\alpha = 1$, car z/p est un corps. Si $\alpha > 1$, $A = z/p^{\alpha}$ est un anneau commutatif, unitaire, à idéaux tous principaux (comme z) non intègre et indécomposable (car si $\bar{x}^2 = \bar{x}$, $x^2 - x = kp^{\alpha}$, et, puisque x-1 est premier avec x, ou bien p^{α} divise x, et alors $\bar{x} = \bar{0}$, ou bien p^{α} divise x-1, et alors $\bar{x} = \bar{1}$) : on sait alors qu'il existe un élément x de A et un entier m tel que les seuls idéaux de A soient les $(Ax^j)_{0 \leqslant 1 \leqslant m}$, et que $An(Ax^j) = An(x^j) = Ax^{m-j}$ (cf. [21]). Ainsi $An(An(Ax^j)) = An(Ax^{m-j}) = Ax^j$ d'où le résultat, en raison de la commutativité et de l'artinianité de A.

En particulier, les anneaux z/n sont auto-injectifs, donc quasi-injectifs, en tant que z/n modules : ils le sont donc aussi en tant que z-modules, ce qui revient à dire que les groupes cycliques sont des groupes abéliens (donc aussi des groupes) quasi-injectifs.

L'idéal maximum m de l'anneau $A = z/p^2$ est un A-module semi-injectif et semi-projectif. En effet, on a vu que $A/m \leqslant A$, d'où $A/m \sim m$. A étant artinien, tout A-module non nul a un sous-module simple, nécessairement isomorphe à A/m, et m est semi-projectif.

Si $m \leqslant M$, l'injection canonique de m dans l'injectif A se prolonge en un homomorphisme φ de M dans A : puisque $\varphi(M) \supseteq m$, ou bien $\varphi(M) = m$, et alors $M \geqslant m$, ou bien $\varphi(M) = A$; dans ce cas, on a $M \geqslant A$ et, puisque $A \geqslant A/m \sim m$, $M \geqslant m$, et m est semi-injectif.

Or m n'est pas injectif, car l'idéal maximum de A ne peut être facteur direct de A. Par là même, m n'est pas projectif.

On dit qu'un module M possède le propriété (P) s'il vérifie l'une des conditions équivalentes du théorème du paragraphe 3 du chapitre II. Pour qu'un module injectif Q possède la propriété (P), il faut et il suffit que l'intersection de deux sous-module de Q fermés dans Q (c'est à dire de deux sous-module injectifs de Q) soit fermée dans Q (c'est à dire soit un sous-module injectif de Q).

Si A est un anneau quasi-frobéniusien dont une décomposition en somme directe d'injectifs indécomposables ne comporte que des idéaux bilatères, A, en tant que A-module, possède la propriété (P). En effet, si $A = \bigoplus_{i \subset I} A_i$ (notons que I est fini, puisque A est unitaire) et si Q et Q' sont des sous-modules injectifs de A, on a vu qu'il existait des parties J et J' de I telles que $Q = \bigoplus_{i \in J} A_i$ et $Q' = \bigoplus_{i \in J'} A_i$, et $Q \cap Q' = \bigoplus_{i \in J \cap J'} Q_i$ est injectif, d'où le résultat.

En particulier, tout anneau quasi-frobéniusien commutatif, tel z/n, possède la propriété (P) en tant que A-module : on pourrait en déduire des résultats d'arthmétique !

Pour un anneau A, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) A est semi-simple.

(2) Tout A-module est semi-simple.

(3) Tout A-module est injectif.

(4) Tout A-module est projectif.

(5) Tout A-module possède la propriété (P).

(6) Tout A-module cyclique est injectif.

(7) Tout A-module cyclique est projectif.

(8) A est auto-injectif et héréditaire.

(9) Tout A-module est somme directe d'injectifs.

(10) Tout A-module est produit direct de projectifs.

(11) Tout A-module est quasi-injectif.

(12) Tout A-module est semi-projectif.

Les équivalences 1 $\Longleftrightarrow$ 2 $\Longleftrightarrow$ 3 $\Longleftrightarrow$ 4 sont connues (voir [5]).

L'équivalence 1 $\Longleftrightarrow$ 5 a été démontrée par Renault en [7].

L'équivalence 1 $\Longleftrightarrow$ 6 $\Longleftrightarrow$ 8 a été démontrée par Osofsky en [22].

Il est clair que 4 $\Longrightarrow$ 7 ; si tout A-module cyclique est projectif, soit I un idéal de A : A/I étant projectif, la suite exacte $0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0$ éclate et I est un facteur direct de A. Donc 7 $\Longrightarrow$ 1. On a 3 $\Longrightarrow$ 9 et 9 $\Longrightarrow$ 6. Il est clair que 4 $\Longrightarrow$ 10.

Montrons que 10 $\Longrightarrow$ 1 : si tout module est produit direct de projectifs, tout module simple est projectif, et tout idéal maximal m de A est un facteur direct de A, puisque la suite exacte $0 \longrightarrow m \longrightarrow A \longrightarrow A/m \longrightarrow 0$ éclate ; ainsi aucun idéal maximal de A, donc aucun idéal propre de A, n'est essentiel dans A, et A est semi-simple, d'où le résultat.

L'équivalence de 1 et de 11 a été établie par Govorov en [23] Il est clair que 4 $\Longrightarrow$ 12. Montrons enfin que 12 $\Longrightarrow$ 11 : si tout

module est semi-projectif, tout quotient d'un module est isomorphe à un sous-module de ce module, donc tout module est quasi-injectif, d'après un corollaire que nous avons tiré au chapitre III d'un résultat de Maury.

Il existe bien sûr beaucoup d'autres prorpiétés équivalentes à la semi-simplicité d'un anneau A (telles les suivantes : tout A-module est injectif ou projectif (resp. injectif ou semi-simple, projectif ou semi-simple, injectif ou projectif ou semi-simple)).

Notons qu'en raison de l'équivalence 1 $\Longleftrightarrow$ 5, il existe, sur tout anneau artinien non semi-simple, tel z/4, un module possèdant la propriété (P) essentiel dans un module ne la possèdant pas.

En effet, tout module non nul sur un anneau artinien est extension essentielle d'un (unique) sous-module semi-simple, possèdant donc la propriété (P) ; or, si tout A-module injectif possède la propriété (P), tout A-module possède la propriété (P), puisque tout sous-module d'un module possèdant la propriété (P) possède la propriété (P) (si, dans un treillis de Johnson T, l'essentialité est compatible avec l'union, il en est de même dans tout sous-treillis de Johnson de T). Cette remarque permet d'ailleurs d'assurer que pour qu'un anneau A soit semi-simple, il faut et il suffit que l'intersection de deux sous-module injectifs d'un A-module soit un module injectif.

Les modules injectifs indécomposables possèdant la propriété (P), il existe, sur un anneau noethérien non semi-simple, tel z/4, des modules $(Q_i)_{i \in I}$ possèdant la propriété (P), sans que leur somme directe $Q = \bigoplus_{i \in I} Q_i$ la possède.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E.G. Sutov : Inclusion de demi-groupes dans des demi-groupes simples et complets. Math. Sbornik 62 (104) n° 4, 1963, p. 496-511.

[2] W.R. Scott : The infinite symmetric and alterning groups in contributions to the theory of groups, de W.R. Scott, Calvin V. Holmes et Elbert A. Walker. Université du Kansas, février 1956, (théorème 16, p. 19).

[3] L.A. Bokut : cité par Sutov, in Sib. Math. Z, t. IV, n° 3, 1963.

[4] R. Baer : Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group. Bull. Amer. Math. Soc. 46 (1940) p. 800-806.

[5] Henri Cartan et Samuel Eilenberg : Homological algebra. (Princeton University press, 1956).

[6] Saunders Mac Lane : Homology (Springer Verlag, Barlin, Göttingen - Heidelberg 1963).

[7] Guy Renault : Etude des sous-modules compléments dans un A-module. Séminaire Dubreil-Pisot (algèbre et théorie des nombres) 16ème année, 1962-1963, n° 16.

[8] R.E. Johnson : Structure theory of faithful rings (I et II) Trans. Amer. Math. Soc. t. 84, 1957, p. 508 et suivantes.

[9] Pierre Dubreil et Marie-Louise Dubreil-Jacotin : Leçons d'algèbre moderne. (Dunod 1961 : théorème 3, p. 203).

[10] Bourbaki : Ensembles ordonnés (Hermann).

[11] B. Eckmann et A. Schopf : Über injective moduln. Archiv der Mathematik 4 (1953) p. 75-78.

[12] J. Ravel : Exposé de D. E. A. (1965).

[13] R.E. Johson et E.T Wong : Quasi-injective modules and irreducible rings. Journal of London Mathematical Society 36 (1961) p. 260-268.

[14] Guy Maury : Cours de troisième cycle 1965-1966 (Université de Lyon). Notions sur les catégories avec un complément sur les objets quasi-injectifs dans les catégories de Grothendick à générateur.

[15] Hyman Bass : Finistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings. Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960) p. 466-488.

[16] Samuel Einlenberg et Tadasi Nakayama : On the dimension of modules and algebras. II. Frobenius algebras and quasi-Frobenuis rings. Nagoya Math. J. 9 (1955) p. 1-16.

[17] Zoltan Papp :

[18] Stephen Chase : Direct product of modules. Trans. Amer. Soc. 97 (1960) p. 457-473.

[19] Eben Matlis : Injective modules over noetherian rings. Pacific j. of Math. 8 (1958) p. 511-528.

[20] Nicolas Bourbaki : Modules et anneaux semi-simples (Hermann).

[21] Claude Phillioux : Anneaux commutatifs unitaires indécomposables à idéaux tous principaux (exposé non publié).

[22] B.L. Osofsky : Rings all of whose finitely generated modules are injective. Pacific J. of Mathematics Vol. 14 (1964) p. 645-650.

[23] Govorov V.E. : Semi-injective modules. Algebra i logika Sem. (1963) n° 6 p. 21-50.

Jacques RAYFL
Maître-Assistant
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Lyon