PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

S. PONTIER

Demi-groupes dont le treillis des sous-demi-groupes est géométrique. Groupes dont le treillis des sous-groupes est géométrique. Propriétés annexes (thèse de 3ème cycle de la Faculté des Sciences de Lyon)

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1966, tome 3, fascicule 4 , p. 1-66

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1966__3_4_1_0>

INTRODUCTION

Voici une trentaine d'années, les travaux de BAER (1933, 1938, 1939) et de ORE (1937, 1938 a, 1938 b) ont fait ressortir l'existence du champ d'études suivant : celui des relations existant entre d'une part la structure d'un groupe G et d'autre part la structure du treillis T(G) de ses sous-groupes.

Ce domaine commun à la théorie des groupes et à la théorie des treillis a donné lieu par la suite à de nombreux travaux dans deux directions principales :

- d'une part, l'étude des relations entre la structure d'un groupe et la structure du treillis de ses sous-groupes : structure des groupes dont le treillis des sous-groupes est distributif (ORE, 1938 a), modulaire (IWASAWA, 1941 ; IWASAWA, 1943), semi-modulaire inférieurement ou supérieurement (JONES, 1946 ; SATO, 1947 ; SATO, 1949 ; ITO, 1951), complémenté ou relativement complémenté (ZACHER, 1952 ; ZACHER, 1953). L'ensemble de ces travaux est brièvement résumé par ZAPPA (1956), repris en détail par SUZUKI (1956), et plus récemment par KONTOROVIC, PEKELIS et STAROSTIN (1961) (mémoire introuvable en France).

-d'autre part, l'étude de problèmes du type suivant : les treillis des sous-groupes de deux groupes non isomorphes (resp. non homomorphes) peuvent-ils être isomorphes (resp. homomorphes). Nous ne signalons ici ce type de problème que pour mémoire ; nous ne l'envisageons pas dans notre travail. Indiquons simplement que SUZUKI (1956) s'y étend abondamment et reprend l'ensemble des travaux effectués sur ce sujet ; ZAPPA (1956) résume ces travaux.

Plus récemment, ce domaine de recherches s'est trouvé généralisé puisque, ne se limitant pas aux groupes, certains auteurs ont cherché les relations existant entre la structure d'un demi-groupe et la structure du treillis de ses sous-demi-groupes (SEVRIN, 1961 ; EGO, 1963).

Dans le présent travail, nous nous sommes donné comme but l'étude de la structure des groupes (resp. demi-groupes) dont le treillis des sous-groupes (resp. sous-demi-groupes) est géométrique. En ce qui concerne la structure des treillis géométriques, nous nous sommes appuyés sur l'ouvrage de base de DUBREIL-JACOTIN, LESIEUR et CROISOT (1953) ; par ailleurs, nous avons largement utilisé les travaux cités plus haut sur diverses structures de treillis de sous-groupes. Nous avons aussi examiné quelques structures plus particulières : géométries modulaires (= projectives), distributives, affines, affines généralisées. Signalons qu'IWASAWA avait seulement étudié (1941) les groupes tels que T(G) est un treillis de BOOLE ou une géométrie projective irréductible.

Pour les demi-groupes, les problèmes que nous nous sommes posés sont facilement résolus par l'utilisation principalement d'un théorème de EGO (1963) : nous avons décrit la structure des demi-groupes dont le treillis des sous-demi-groupes est un treillis géométrique (proposition 1.4), une géométrie projective (proposition 1.6), une géométrie affine (proposition 1.11), une géométrie affine généralisée (proposition 1.12).

Dans le cas des groupes, nous sommes arrivés à donner des théorèmes généraux sur la structure des groupes dont le treillis des sous-groupes est géométrique (proposition 3.8), une géométrie projective (proposition 5:5), une géométrie distributive (proposition 5.12), un produit de treillis géométriques (proposition 5.3).

Lorsque le groupe G est fini ou localement fini, nous avons pu préciser davantage les structures des groupes G tels que T(G) est un treillis géométrique (propositions 4.4 et 4.5), ou une géométrie projective (propositions 5.8 et 5.11). Nous établissons ainsi le résultat inattendu suivant (si G est fini ou localement fini) : si T(G) est un treillis géométrique, c'est aussi une géométrie projective ; nous ignorons si ce résultat est vrai pour un groupe infini non localement fini.

Enfin, nous avons pu expliciter complètement la structure des groupes dont le treillis des sous-groupes est une géométrie distributive (proposition 5.18)

C H A P I T R E   I

Structure des demi-groupes dont le treillis des sous-demi-groupes est : une géométrie, une géométrie projective, une géométrie affine, une géométrie affine généralisée.

Les travaux de EGO (1963), faisant suite à ceux de SEVRIN (1961), ont mis en évidence la structure des demi-groupes dont le treillis des sous-demi-groupes possède certaines propriétés usuelles : distributivité, modularité, semi-modularité, modularité ou semi-modularité affaiblie, etc...

Nous allons voir ici à quelles conditions le treillis des sous-demi-groupes d'un demi-groupe est un treillis géométrique (c'est à dire une géométrie). Nous verrons aussi dans quelle mesure cette géométrie peut être projective, affine, affine généralisée.

1. Structure des demi-groupes dont le treillis des sous-demi-groupes est géométrique.

Soit D un demi-groupe ; l'ensemble de ses sous-demi-groupes, ordonné par la relation d'inclusion des sous-ensembles, a une structure de treillis : nous le noterons T(D). Nous nous proposons d'établir des conditions nécessaires et suffisantes, relatives à la structure de D pour que T(D) soit un treillis géométrique.

Supposons d'abord que T(D) est géométrique, et rappelons une propriété importante des treillis géométriques (voir DUBREIL-JACOTIN, LESIEUR et CROISOT, 1953,p.272, théorème 3).

Théorème (proposition 1.1) : Pour qu'un treillis soit géométrique, il faut et il suffit qu'il soit semi-modulaire, relativement complémenté, atomique, complet et $\wedge$-continu.

T(D) étant géométrique, il est semi-modulaire, donc il satisfait à la"condition C_1" (voir DUBREIL-JACOTIN, LESIEUR et CROISOT, 1953, p. 87, lemme 1, et p.90, propriété 2).

Puisque T(D) satisfait à la"condition C_1",il satisfait aussi à la "condition C_2" (voir DUBREIL-JACOTIN, LESIEUR et CROISOT, 1953, p. 62, lemme 1).

De plus, T(D) étant géométrique, il est relativement complémenté, donc il est complémenté.

En conclusion, si T(D) est géométrique, il est complémenté et satisfait à la "condition C_2". Or, citons ici un théorème de EGO (EGO, 1963, p. 200, théorème 8.4) :

Théorème (proposition 1.2): Il y a équivalence entre les quatre propositions suivantes :

1) T(D) est égal à $\mathfrak{P}$(D)
2) T(D) est un treillis de Boole
3) T(D) est complémenté et satisfait à la condition C_2
4) D est idempotent et de type ef = e ou f.

Donc, si T(D) est géométrique, cela suppose que D vérifie la condition 3 du théorème ci-dessus. donc aussi D vérifie les trois autres propositions de ce théorème(puisqu'il y a équivalence entre ces quatre propositions).

Par conséquent, chacune des quatre propositions du théorème de EGO constitue une condition nécessaire pour que T(D) soit géométrique.

Réciproquement, ces conditions sont-elles suffisantes ? Pour montrer que chacune des quatre conditions entraîne la propriété "T(D) est géométrique", il nous sufira de le montrer seulement pour l'une d'entre elles, en vertu de l'équivalence entre les quatre propositions.

Supposons donc maintenant que D soit un demi-groupe vérifiant la condition 1 du théorème de EGO : "T(D) est égal à $\mathcal{P}(D)$" ($\mathcal{P}(D)$ désigne l'ensemble des parties de D). Dans ce cas l'union $A \vee B$ dans T(D) s'identifie à la réunion $A \cup B$ dans $\mathcal{P}(D)$. Et comme par ailleurs il y a toujours identité entre :

- l'intersection $A \wedge B$ dans T(D) et l'intersection $A \cap B$ dans $\mathcal{P}(D)$,
- la relation d'ordre $A \leqslant B$ dans T(D) et l'inclusion $A \subset B$ dans $\mathcal{P}(D)$.

nous pouvons conclure que T(D) et $\mathcal{P}(D)$ sont égaux non seulement comme ensembles d'éléments, mais comme ensembles munis de la structure de treillis avec les opérations rappelées ci-dessus.

Or, nous avons la propriété suivante :

<u>Proposition 1.3</u> Etant donné un ensemble E quelconque, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ de ses parties est un treillis géométrique, avec l'inclusion comme relation d'ordre, et la réunion et l'intersection usuelles comme opérations.

La démonstration de cette propriété est immédiate, Il suffit de vérifier que $\mathcal{P}(E)$ satisfait bien aux quatre postulats définissant la structure de treillis géométrique.

Une conséquence immédiate de la proposition 1.3 est que, si T(D) est identique, en tant que treillis, à $\mathcal{P}(D)$, alors T(D) est géométrique.

Donc la condition 1 du théorème de EGO entraîne que T(D) est géométrique.

Donc chacune des quatre conditions de ce théorème est une condition suffisante pour que T(D) soit géométrique.

En conclusion, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème (proposition 1.4) Le treillis T(D) des sous-demi-groupes d'un demi-groupe D est géométrique si et seulement si D vérifie l'une quelconque des quatre conditions suivantes (qui sont équivalentes entre elles):

1) T(D) est égal à $\mathcal{P}(D)$
2) T(D) est un treillis de Boole
3) T(D) est complémenté et satisfait à la condition C_2
4) D est idempotent et de type ef = e ou f.

2. Structure des demi-groupes dont le treillis des sous-demi-groupes est une géométrie projective.

Une propriété fondamentale des géométries projectives est la suivante (voir DUBREIL-JACOTIN, LESIEUR et CROISOT 1957, p. 287, théorème 5) :

Proposition 1.5 Pour qu'une géométrie de dimension finie ou infinie soit projective, il faut et il suffit qu'elle soit modulaire.

Dans le cas qui nous intéresse ici, D étant un demi-groupe, T(D) sera une géométrie projective si et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies :

- T(D) est un treillis géométrique (voir proposition 1.4);
- T(D) est un treillis modulaire.

Or, dire que T(D) est un treillis géométrique, est équivalent à dire que T(D) est un treillis de Boole (condition 2 de la proposition 1.4).

Mais un treillis de Boole est toujours modulaire. Par conséquent la condition "T(D) est géométrique" implique la condition "T(D) est modulaire" . D'où :

<u>Théorème (proposition 1.6)</u> : Le treillis T(D) des sous-demi-groupes d'un demi-groupe D est une géométrie projective si et seulement si T(D) est un treillis géométrique.

3. Structure des demi-groupes dont le treillis des sous-demi-groupes est une géométrie affine, ou une géométrie affine généralisée.

Pour que T(D) soit susceptible d'être une géométrie affine, ou une géométrie affine généralisée, il est nécessaire que T(D) soit un treillis géométrique. Or nous avons vu, au paragraphe précédent, que si T(D) est un treillis géométrique, il est aussi modulaire.

Etudions alors la théorie du parallèlisme dans les treillis géométriques modulaires (c'est à dire dans les géométries projectives).

Soit T un treillis géométrique modulaire, il vérifie en particulier la "condition C_1' " (voir DUBREIL-JACOTIN, LESIEUR et CROISOT, 1953, p. 62; §2, propriété 1), soit :

$$x \vee y \succ y \quad \Longleftrightarrow \quad x \succ x \wedge y.$$

La propriété "x est parallèle à y" , notée $x \| y$, dans un treillis géométrique T, est, rappelons-le la suivante :

$$x \| y \iff \begin{cases} x \wedge y = 0 \text{ (élément nul de T)} \\ x \vee y \succ x \text{ (donc } y \neq 0) \end{cases}$$

Soient alors, dans T treillis géométrique et modulaire, deux variétés x et y, x étant supposé parallèle à y.

On a donc : $x \vee y \succ x$ (définition du parallèlisme), donc aussi : $y \succ x \wedge y$ (condition C_1'), et comme $x \wedge y = 0$, cela signifie que y est nécessairement un point.

Nous avons donc démontré la proposition suivante :

<u>Proposition 1.7</u> : Dans un treillis géométrique modulaire, la relation "x est parallèle à y" n'est vérifiée que dans le cas trivial où y est un point non contenu dans x.

Une conséquence immédiate de cette proposition est la suivante :

<u>Proposition 1.8</u> : Dans un treillis géométrique modulaire, la relation "x et y sont parallèles" n'est vérifiée que dans le cas trivial où x et y sont des points distincts.

Rappelons en effet que la relation " x et y sont parallèles" traduit la double propriété "x est parallèle à y" (donc y est un point non contenu dans x), et "y est parallèle à x"(donc x est un point non contenu dans y).

Examinons maintenant le cas des géométries affines et des géométries affines généralisées.

<u>Proposition 1.9</u> : Un treillis géométrique modulaire n'est jamais une géométrie affine.

En effet, une géométrie affine est une géométrie modulaire affaiblie, de dimension au moins égale à deux, vérifiant le postulat d'Euclide.

Un treillis géométrique est, <u>a fortiori</u>, une géométrie modulaire affaiblie, mais le postulat d'Euclide n'y est jamais vérifié : deux droites distinctes ne peuvent pas être parallèles, cette propriété étant exclusivement réservée aux points (voir proposition 1.8 ci-dessus).

<u>Proposition 1.10</u> : Un treillis géométrique modulaire est une géométrie affine généralisée si et seulement si ce treillis est de dimension au moins égale à trois.

En effet, une géométrie affine généralisée est une géométrie modulaire affaiblie, de dimension au moins égale à trois, vérifiant le postulat d'Euclide généralisé.

Dans T, treillis géométrique modulaire (donc aussi modulaire affaibli), soit D une droite et soit P un point non situé dans D. D'après la proposition 1.8, il n'existe <u>aucune</u> droite X passant par P, telle que X et D soient parallèles. Le postulat d'Euclide généralisé, en vertu duquel il existerait <u>au plus une telle</u> droite X, est donc vérifié.

La seule condition restrictive, pour qu'un treillis géométrique modulaire puisse être une géométrie affine généralisée, est la condition de dimension : celle-ci doit être au moins égale à trois.

Revenons maintenant au cas du treillis T(D) des sous-demi-groupes d'un demi-groupe D. Supposons que T(D) soit géométrique ; il est donc aussi modulaire ; nous pouvons donc lui appliquer les propositions 1.9 et 1.10 ci-dessus, ce qui nous permet d'énoncer les deux théorèmes suivants :

<u>Théorème</u> (<u>proposition 1.11</u>) : Le treillis T(D) des sous-demi-groupes d'un demi-groupe D n'est jamais une géométrie affine.

<u>Théorème</u> (<u>proposition 1.12</u>) : Le treillis T(D) des sous-demi-groupes d'un demi-groupe D est une géométrie affine généralisée si et seulement si T(D) est un treillis géométrique de dimension au moins égale à trois.

CHAPITRE 2

Structure des groupes monogènes dont le treillis des sous-groupes est géométrique

Pour déterminer dans quelles conditions un groupe monogène est susceptible d'avoir pour treillis de sous-groupes un treillis géométrique, nous distinguerons deux cas, exhaustifs :

- le cas des groupes monogènes infinis (c'est à dire les groupes isomorphes à Z, groupe additif des entiers relatifs) :
- le cas des groupes monogènes finis (appelés aussi groupes cycliques).

1. Cas des groupes monogènes infinis :

Soit G un groupe monogène infini, engendré par un élément x.

G étant monogène, il est abélien, et par conséquent, deux sous-groupes quelconques de G étant permutables, leur union est identique à leur produit :

A, B sous-groupes de G $\qquad A \vee B = AB = BA$.

Une condition nécessaire pour que le treillis T(G) des sous-groupes de G soit géométrique, est que T(G) soit complémenté (DUBREIL-JACOTIN, LESIEUR et CROISOT, 1953, p. 270, théorème 3, déjà cité). Cette condition est-elle satisfaite par T(G) ?

Soit A un sous-groupe de G. Admet-il un complément dans T(G) ? Autrement dit, existe-t-il un sous-groupe B de G tel que :

$A \vee B = G$ et $A \wedge B = e$?

A, sous-groupe d'un groupe monogène, est lui-même monogène, engendré par un certain élément x^n, avec $n \neq 0$ si $A \neq \{e\}$, et $n \neq 1$ si $A \neq G$.

Tout sous-groupe B de G est lui aussi monogène, engendré par x^m. L'intersection $A \wedge B$ du sous-groupe A et d'un sous-groupe B quelconque contient nécessairement l'élément $x^{nm} = (x^n)^m = (x^m)^n$. A étant, dans le cas général, supposé différent de G et de $\{e\}$, cet élément x^{nm} ne peut être l'élément neutre que si $m = 0$; ceci signifie que $B = \{e\}$; mais alors on ne peut avoir $A \vee B = G$, puisque $A \vee B = A$ est supposé différent de G.

Donc ; aucun sous-groupe de G, différent de G et de $\{e\}$, n'admet de complément dans T(G). Ceci prouve que T(G) n'est pas complémenté, donc pas géométrique.

Thé rème (proposition 2.1) : si G est un groupe monogène infini, T(G) n'est pas un treillis géométrique.

2. Cas des groupes monogènes finis (ou groupes cycliques) :

Soit G un groupe cyclique d'ordre n, engendré par un élément x : G = (x).

Le treillis T(G) de ses sous-groupes, s'il est géométrique, est nécessairement de dimension finie, puisque, G étant d'ordre fini, T(G) a un nombre fini d'éléments. Nous pourrons donc nous limiter à discuter seulement des postulats P_1, P_2 et P_3 dans T(G)(le postulat P_4 ne concernant que les treillis infinis).

Une question préalable se pose : que sont les "points" dans T(G) ? Nous savons qu'il s'agit des "variétés couvrant l'élément nul" ; donc il s'agit de sous-groupes n'admettant pas de sous-groupe propre autre que $\{e\}$. Or, le premier théorème de SYLOW s'énonce ainsi (voir par exemple DUBREIL et DUBREIL-JACOTIN, 1961, p. 73).

Théorème (proposition 2.2): si G est un groupe d'ordre fini n, et si cet ordre n s'écrit $n = mp^r$ (où p est un nombre premier , $r \geqslant 1$, m premier avec p), alors pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant r$, le groupe G admet au moins un sous-groupe d'ordre p^k.

Ce théorème nous permet d'affirmer que, dans un groupe d'ordre fini, les seuls sous-groupes qui n'admettent pas de sous-groupe propre autre que $\{e\}$ sont les sous-groupes d'ordre premier. En effet, un sous-groupe dont l'ordre, supposé non premier, contient p^r comme facteur (p premier , $r \geqslant 2$), admet au moins un sous-groupe d'ordre p ; et d'autre part, si un sous-groupe de G est d'ordre premier p, il n'admet pas de sous-groupe propre autre que $\{e\}$ (car l'ordre d'un sous-groupe d'un groupe fini est un diviseur de l'ordre de ce groupe, et p, nombre premier, n'admet pas de diviseur autre que 1 et lui-même). Nous pouvons donc énoncer :

Proposition 2.3 : Dans le treillis T(G) des sous-groupes d'un groupe fini G, les "points" sont les sous-groupes d'ordre premier.

Rappelons à ce propos que tout groupe d'ordre premier est cyclique.

Nous pouvons maintenant essayer de voir si les postulats P_1, P_2, P_3 sont vérifiés par le treillis des sous-groupes d'un groupe cyclique.

A) - Postulat P_1

Proposition 2.4 : Quel que soit le groupe G, le treillis T(G) de ses sous-groupes vérifie le postulat P_1.

En effet, le treillis T(G) possède bien un élément nul(qui est le sous-groupe $\{e\}$, réduit à l'élément neutre de

G), et un élément universel (qui est le groupe G lui-même).

B) - Postulat P_2

Proposition 2.5 : le treillis T(G) des sous-groupes d'un groupe cyclique vérifie toujours le postulat P_2.

En effet, nous savons que (DUBREIL et DUBREIL-JACOTIN, 1961, p. 200, théorème 2, corollaire 1) le treillis des sous-groupes d'un groupe abélien est modulaire. Mais un treillis modulaire est toujours semi-modulaire (DUBREIL-JACOTIN, LESIEUR et CROISOT, 19R3, p. 84). De plus, un treillis semi-modulaire avec élément nul et élément universel vérifie les postulats P_1 et P_2 (DUBREIL-JACOTIN, LESIEUR et CROISOT, 1953, p. 251). Donc ici, puisque tout groupe cyclique est abélien, nous pouvons conclure que T(G) vérifie le postulat P_2.

C) - Postulat P_3

Proposition 2. 6 : Une condition nécessaire et suffisante pour que T(G), treillis des sous-groupes d'un groupe cyclique G d'ordre n, soit un treillis géométrique, est que n ne soit pas divisible par le carré d'un nombre premier autre que 1 ; autrement dit, n doit s'écrire sous la forme :

$$n = P_1 P_2 \dots P_k \qquad (P_i \text{ premier, } P_i \neq P_j)$$

Démonstration : Supposons d'abord que l'ordre n de G s'écrive sous la forme $n = mp^r$, avec p premier $r \geqslant 2$. Alors, d'après le premier téhorème de SYLOW déjà cité (voir proposition 2.2), le groupe G admet (au moins) un sous-groupe d'ordre p^2, soit H. Ce sous-groupe H peut-il être exprimé comme union de "points" ? De tels points, s'ils existent, sont nécessairement des us-groupes d'ordre p. Mais H, sous-groupe d'un groupe cyclique, est lui-même cyclique, engendré par un élément x d'ordre p^2. Dire que H est union de sous-groupes tous d'ordre p, c'est dire que, en particulier, cet élément x est produit fini d'éléments tous d'ordre p. Or , si a et b sont deux éléments permutables, d'ordre p, alors leur produit est aussi d'ordre p. Donc dans G, groupe abélien (puisque cyclique), deux éléments quelconques sont permutables, et tout produit d'un nombre fini d'éléments d'ordre p est lui-même d'ordre p. Donc x, d'ordre p^2, ne peut être produit fini d'éléments d'ordre p, et par conséquent H ne peut être union de sous-groupes d'ordre p. La condition indiquée est donc nécessaire.

Réciproquement, soit G un groupe cyclique dont l'ordre n s'écrit sous la forme : $n = p_1 p_2 \dots p_k$, les p_i étant des nombres premiers distincts. Tout sous-groupe de G est cyclique, et son ordre, diviseur de n, est lui-même de la forme

$$m = p_{j_1} p_{j_2} \dots p_{j_s}$$

où les p_{j_i} sont certains des facteurs premiers $p_1, p_2, \dots, p_k$. Par ailleurs nous savons (voir DUBREIL et DUBREIL-JACOTIN, 1961,p. 269) que, si G est un groupe cyclique d'ordre

$$n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_k^{s_k} ,$$

alors G est produit direct de sous-groupes cycliques primaires $A_1, A_2, \dots, A_k$, avec

$$\text{ordre de } A_i = p_i^{s_i}$$

(groupes primaires, voir annexe 1).

Donc ici le groupe G sera de la forme

$$G = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$$

où A_i est d'ordre p_i premier ; et de plus, tout sous-groupe H de G sera aussi de cette forme, soit

$$H = A_{j_1} \times A_{j_2} \times \dots \times A_{j_s}$$

où A_{j_i} est d'ordre p_{j_i} premier.

En rappelant que, dans un groupe abélien, l'union de deux sous-groupes est identique à leur produit, ce résultat signifie que tout sous-groupe H est union de s points A_{j_1}, A_{j_2}, ..., A_{j_s}.

Donc, toute variété étant union de points, ceci démontre que la condition est suffisante.

En résumé, puisque le treillis T(G) des sous-groupes d'un groupe cyclique G vérifie toujours les postulats P_1 et P_2, et qu'il vérifie le postulat P_3 si et seulement si l'ordre n de G est de la forme $n = p_1p_2...p_k$ (p_i premier, $p_i \neq p_j$), nous pouvons énoncer le théorème suivant, qui détermine complètement la structure des groupes cycliques dont le treillis des sous-groupes est géométrique :

<u>Théorème</u> (<u>proposition 2.7</u>) : Le treillis T(G) des sous-groupes d'un groupe cyclique G d'ordre n est géométrique si et seulement si n n'est pas divisible par le carré d'un nombre premier autre que 1 ; autrement dit, si n s'écrit sous la forme : $n = p_1p_2...p_k$ (p_i premier, $p_i \neq p_j$)

3. <u>Conséquence relative aux groupes quelconques</u> :

Soit G un groupe quelconque, d'ordre fini ou infini. Soit T(G) le treillis de ses sous-groupes.

Rappelons le théorème suivant (DUBREIL-JACOTIN, LESIEUR et CROISOT, 1953, p. 270, théorème 4) :

<u>Théorème</u> (<u>proposition 2.8</u>): $A \neq 0$ étant une variété d'un treillis géométrique, le segment $[0, A]$ est aussi un treillis géométrique ; pour que sa dimension d soit finie, il faut et il suffit que la variété A soit de dimension finie égale à d.

En vertu de la première partie de ce théorème, nous pouvons affirmer qu'une condition nécessaire pour que T(G) soit géométrique est que, quel que soit H sous-groupe de G, le treillis T(H) des sous-groupes de H soit lui-même géométrique ; ceci doit en particulier être vrai pour les sous-groupes monogènes de G. Donc, quel que soit x élément de G, le sous-groupe (x) engendré par x doit avoir pour treillis de sous-groupes un treillis géométrique. Ceci ne pourra être réalisé que si cet élément x est d'ordre fini et non divisible par le carré d'un nombre premier autre que 1.

<u>Définition</u> : nous dirons qu'un élément x d'un groupe G satisfait à la condition g_1, si et seulement si l'ordre de cet élément x dans le groupe G est un nombre fini ; non divisible par le carré d'un nombre premier autre que 1; autrement dit, si cet ordre est fini, de la forme

$$n = p_1 p_2 \cdot\cdot p_k \qquad , p_i \text{ premier } , p_i \neq p_j .$$

D'où le théorème suivant :

<u>Théorème</u> (<u>proposition 2.9</u>) : G étant un groupe quelconque, d'ordre fini ou infini, une condition nécessaire pour que le treillis T(G) de ses sous-groupes soit géométrique est que tout élément de G satisfasse à la condition g_1 définie ci-dessus.

<u>4. Etude du treillis des sous-groupes d'un groupe cyclique</u>

Avant de passer à l'étude des groupes dont tout élément satisfait à la condition g_1 (étude qui fera l'objet du chapitre 3), nous allons étudier d'une manière plus détaillée l'ensemble des sous-groupes d'un groupe cyclique, en tant qu'ensemble muni d'une structure de treillis.

Les propriétés ci-dessous sont classiques, ou découlent immédiatement de propriétés classiques (c'est pourquoi nous ne nous étendrons pas sur leur démonstration); néanmoins, nous les avons regroupées ici parce qu'elles ont leur place dans le cadre d'une étude détaillée du treillis des sous-groupes d'un groupe cyclique.

G étant un groupe cyclique, engendré par un élément a d'ordre $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_k^{s_k}$; l'ensemble de ses sous-groupes, ensemble ordonné par la relation d'inclusion entre parties de G, présente la structure de treillis définie de la manière suivante :

- deux sous-groupes H et H' de G ont un plus grand minorant commun, soit $H \wedge H'$, qui est identique à leur intersection (au sens de l'intersection des sous-ensembles de G), soit $H \cap H'$. Donc : $H \cap H' = H \wedge H'$.
- deux sous-groupes H et H' ont un plus petit majorant commun, soit $H \vee H'$, qui est identique à leur produit HH' (en effet, G étant cyclique, donc abélien, deux sous-groupes quelconques sont permutables, donc leur produit est lui-même un sous-groupe de G ; c'est d'autre part le plus petit sous-groupe contenant à la fois H et H'). Donc : $H \vee H' = HH' = H'H$.

Tout sous-groupe de G est cyclique (DUBREIL et DUBREIL-JACOTIN, 1961, p. 87, théorème 3), donc est engendré par a^k (où $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$).

Si d est un diviseur de n, l'élément $a^{n/d}$ engendre un sous-groupe d'ordre d (voir DUBREIL et DUBREIL-JACOTIN, 1961, p.88). Comme l'ordre d'un sous-groupe d'un groupe fini est nécessairement un diviseur de l'ordre de ce groupe, nous concluons qu'il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble T(n) des diviseurs de n et l'ensemble T(G) des sous-groupes de G : à tout sous-groupe H de G correspond l'ordre d de ce sous-groupe, et réciproquement à tout diviseur d de n correspond un et un seul sous-groupe de G d'ordre d.

$$d \longleftrightarrow (a^{n/d})$$

Remarquons que l'ensemble T(n) des diviseurs de n possède lui aussi une structure de treillis définie de la manière suivante :

- relation d'ordre : c'est la relation de divisibilité des nombres entiers : d_i divise d_j.

-deux éléments d_i et d_j de T(n) possèdent un plus petit majorant commun (pour cette relation d'ordre) ; c'est leur plus petit commun multiple : $d_i \vee d_j = \mathrm{ppcm}(d_i, d_j)$.

- deux éléments d_i et d_j de T(n) possèdent un plus grand minorant commun ; c'est leur plus grand commun diviseur :

$d_i \wedge d_j = \mathrm{pgcd}(d_i, d_j)$.

Comme il existe une correspondance biunivoque entre les deux treillis T(G) et T(n), en tant qu'ensembles d'éléments, nous pouvons nous demander si cette correspondance n'est pas un isomorphisme entre treillis (sur les isomorphismes entre ensembles ordonnés, et particulièrement entre treillis, voir annexe 2). Il nous suffit de vérifier que la correspondance biunivoque préserve la relation d'ordre. Etudions alors la correspondance entre les deux relations d'ordre :

Soient deux sous-groupes de G :

$G_i = (a^{n/d_i})$, d'ordre d_i ; $G_j = (a^{n/d_j})$, d'ordre d_j.

Supposons que $G_i \subset G_j$; G_i étant sous-groupe de G_j, son ordre divise l'ordre de G_j.

Réciproquement, soient d_i et d_j deux diviseurs de n, associés à deux sous-groupes G_i et G_j. Supposons que d_i divise d_j. Alors, parmi les sous-groupes de G_j, cyclique, il en existe nécessairement un d'ordre d_i, soit G'_i. G'_i, sous-groupe de G_j, est aussi sous-groupe de G. Comme dans G il existe un et un seul sous-groupe d'ordre d_i, c'est que $G'_i=G_i$. Donc $G_i \subset G_j$. Nous avons ainsi montré que :

$$(a^{n/d_i}) \subset (a^{n/d_j}) \iff d_i \text{ divise } d_j$$

En conclusion :

<u>Proposition 2.10</u> : Soit G un groupe cyclique d'ordre n, engendré par un élément a. Soit T(G) le treillis des sous-groupes de G (ordonné par la relation

d'inclusion entre parties de G). Soit T(n) le treillis des diviseurs de n (ordonné par la relation de divisibilité entre nombres entiers). Alors il existe entre les deux treillis T(G) et T(n) un isomorphisme défini par :

$$H = (a^{n/d}) \text{ sous-groupe de } G \longleftrightarrow d = \text{ ordre de } H.$$

Revenons au treillis T(n) des diviseurs de n. Nous appellerons <u>diviseur maximal de n</u> tout élément maximal de T(n) - {n}, ensemble ordonné par la relation de divisibilité. Un diviseur maximal de n est donc un diviseur propre de n (c'est à dire distinct de n lui-même) qui n'est diviseur d'aucun autre diviseur propre de n.

Etant donné cette notion de diviseur maximal d'un nombre entier donné, nous pouvons préciser, à l'aide de l'isomorphisme entre T(G) et T(n), ce que représentent, dans T(G), les notions de <u>relation de couverture</u>, <u>de point, d'hyperplan</u>.

- relation de couverture dans T(G) : deux sous-groupes G_i et G_j de G, respectivement d'ordres d_i et d_j, sont tels que G_j couvre G_i (notation $G_j \succ G_i$) si , par définition :

  $G_i \subset G_j$, et,si $G_i \subset G_k \subset G_j$, alors $G_k = G_i$ ou G_j

  Cela signifie que d_i est un diviseur maximal de d_j.
- points dans T(G) : ce sont les éléments de T(G) qui couvrent l'élément nul de T(G) ; un point est donc un sous-groupe de G dont l'ordre admet seulement le nombre 1 comme diviseur maximal ; cet ordre est donc un diviseur premier de n. Nous retrouvons bien de cette façon le résultat déjà établi plus haut (voir proposition 2.3).
- Hyperplans dans T(G) : ce sont les éléments de T(G) qui sont couverts par l'élément universel de T(G) ; un hyperplan est donc un sous-groupe de G dont l'ordre est un diviseur maximal de n (cette notion est donc identique à la notion de sous-groupe maximal).

5. Exemples de treillis de sous-groupes de groupes cycliques.

L'existence d'un isomorphisme entre T(G) et T(n) (voir proposition 2.10) nous permet de construire facilement le diagramme du treillis T(G) des sous-groupes d'un groupe cyclique quelconque, d'ordre n. Il nous suffit pour cela de construire le diagramme du treillis T(n) des diviseurs de n, facilement obtenus par décomposition de n en produit de facteurs premiers.

La figure 1 est le diagramme du treillis des sous-groupes d'un groupe cyclique d'ordre n = 210. Un tel treillis est géométrique puisque la condition nécessaire et suffisante (proposition 2.7) est vérifiée : $n = 210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$.

La figure 2 est le diagramme du treillis des sous-groupes d'un groupe cyclique d'ordre n = 200. Un tel treillis n'est pas géométrique puisque la condition nécessaire et suffisante n'est pas vérifiée: $n = 200 = 2^3 \times 5^2$.

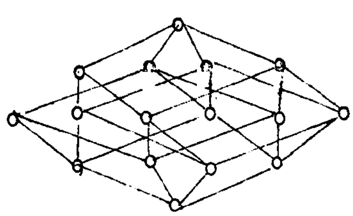


fig. 1

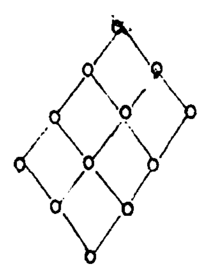


fig. 2

6. Dimension d'un sous-groupe.

Soit G un groupe cyclique d'ordre n, engendré par un élément a. Supposons que le nombre n vérifie la condition nécessaire et suffisante pour que T(G) soit géométrique, soit

$$n = p_1 p_2 \cdots p_k \qquad (p_i \text{ premier, } p_i \neq p_j).$$

Dans le treillis T(G), qui est donc géométrique, nous pouvons parler de <u>rang</u> et de <u>dimension</u> d'une variété (c'est à dire d'un sous-groupe de G) (DUBREIL-JACOTIN, LESIEUR et CROISOT, 1953, p. 252).

Etant donné H, sous-groupe de G, ou variété dans le treillis géométrique T(G), son rang est, par définition, le nombre des points $\vee$-indépendants qu'il contient, Nous allons calculer ce nombre de points.

Le sous-groupe H est d'ordre m, diviseur de n ; donc: $m = p_{j_1} p_{j_2} \cdots p_{j_s}$, où les p_{j_i} sont certains des facteurs premiers $p_1, p_2, \ldots, p_k$. H contient s points, qui sont les sous-groupes $A_{j_i} = (a^{n/p_{j_i}})$, i = 1, 2, ..., s. A_{j_i} est d'ordre p_{j_i}. L'union (c'est à dire ici le produit direct d'un nombre quelconque de points pris parmi ces s points) a pour ordre le pgcd des ordres de ces points, qui est donc leur produit puisque ces ordres sont tous premiers entre eux deux à deux. Ainsi l'union des s points est le sous-groupe H (ce qui est aussi une conséquence du postulat P_3), mais de plus, l'union de s-1 points pris parmi ces s points est un sous-groupe dont l'ordre n'est pas égal à m ; ce sous-groupe n'est donc pas égal à H. Autrement dit aucun des s points contenus dans H n'est $\vee$-dépendants des autres. Donc les s points contenus dans H sont $\vee$-indépendants ; ce qui prouve que le rang de H est s.

La dimension de H est, par définition, égale au rang de H, diminué d'une unité. La dimension de H est donc s-1. Nous pouvons donc énoncer la propriété suivante:

Proposition 2.11 : Soit G un groupe cyclique dont l'ordre $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ vérifie la condition pour que T(G) soit géométrique. Alors un quelconque sous-groupe de G, soit H, d'ordre m, a pour rang (en tant que variété dans T(G)) le nombre des facteurs premiers de m, et pour dimension (dans T(G)), le nombre des facteurs premiers de m, diminué d'une unité.

En particulier, G étant un groupe cyclique d'ordre $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ (k facteurs premiers distincts), le treillis de ses sous-groupes est géométrique, de dimension k-1.

CHAPITRE 3

Structure des g_1-groupes dont le treillis des sous-groupes est géométrique.

Nous dirons qu'un groupe G est un g_1-groupe si chacun de ses éléments satisfait à la condition g_1 introduite au chapitre précédent.

Un g_1-groupe est donc, en particulier, un groupe périodique (annexe 3). De plus, nous avons vu qu'une condition nécessaire pour que le treillis des sous-groupes d'un groupe G soit géométrique, est que le groupe G soit un g_1-groupe. La question que nous nous posons alors est la suivante : cette condition est-elle suffisante ?

Nous allons donc chercher à déterminer, dans le présent chapitre, si, G étant un g_1-groupe, le treillis T(G) de ses sous-groupes vérifie ou non les postulats P_1, P_2, P_3, P_4 définissant la structure de treillis géométrique.

Remarquons que, dans le treillis des sous-groupes d'un g_1-groupe, les "points" sont, comme précédemment, les sous-groupes d'ordre premier.

1. Postulat P_1 Rappelons que quel que soit le groupe G, le treillis de ses sous-groupes vérifie le postulat P_1(voir proposition 2.4).

2. Postulat P_3

Proposition 3.1 : si G est un g_1-groupe, le treillis T(G) de ses sous-groupes vérifie le postulat P_3.

En effet, soit A un sous-groupe du g_1-groupe G. Si $A \neq \{e\}$, il existe dans A au moins un élément $a \neq e$. Cet élément a satisfait à la condition g_1 : son ordre est fini, de la forme $n = p_1 p_2 \ldots p_k$, où les p_i sont des nombres premiers distincts.

L'élément a engendre un sous-groupe cyclique de A, soit $(a) \subset A$. Or nous savons qu'un tel groupe cyclique (a) est union de k points, qui sont les sous-groupes (a^{n/p_i}), $i= i, 2,\ldots k$. Donc le sous-groupe A contient des points.

D'autre part, A est l'union des sous-groupes engendrés par ses divers éléments : $A = \bigvee_{a \in A} (a)$. Mais chacun des sous-groupes (a) est lui-même union finie de points. Donc A est union (finie ou infinie) de points.

3. <u>Postulat P_4</u>

<u>Proposition 3.2</u> : si G est un groupe périodique, le treillis T(G) de ses sous-groupes vérifie le postulat P_4.

Nous savons (voir KUROSH, 1960 a, p. 48) que le sous-groupe engendré par une famille de sous-groupes de G est formé de tous les éléments qui peuvent être écrits comme produits d'un nombre fini d'éléments des sous-groupes donnés. Ceci prouve en particulier l'existence de l'uninn d'une famille quelconque de sous-groupes.

Soit maintenant un point P_o, contenu dans l'union d'une famille de points , soit $X = \bigvee_{f \in F} P_f$.

P_o étant un point, c'est, dans le groupe périodique G, un sous-groupe cyclique d'ordre premier; P_o est donc engendré par un certain élément x_o : $P_o = (x_o)$.

Cet élément x_o étant élément du sous-groupe X,il s'écrit comme produit fini d'éléments pris dans certains P_f, soit : $x_o = x_{o_1} x_{o_2} \ldots x_{o_m}$ où $x_{o_j} \in P_{f_j}$, $f_j \in F$

donc : $x_o \in \bigvee_{j=1}^{j=m} P_{f_j}$, et par conséquent :

$$(x_o) = P_o \subset \bigvee_{j=1}^{j=m} P_{f_j}$$

le point P_o est bien situé dans l'union d'une partie finie de la famille des points P_f.

4. Postulat P_2

Nous savons qu'il existe des g_1-groupes dont le treillis des sous-groupes est géométrique (par exemple : les groupes cycliques, dont les générateurs satisfont à la condition g_1, que nous avons étudiés au chapitre précédent). Donc, pour de tels g_1-groupes, le treillis des sous-groupes vérifie le postulat P_2. Mais il n'est pas certain a priori que ce postulat P_2 soit vérifié par le treillis des sous-groupes de tout g_1-groupe (alors que, nous venons de le voir, les trois autres postulats le sont).

Nous allons essayer de préciser la structure des g_1-groupes dont le treillis des sous-groupes vérifie le postulat P_2.

En rappelant que, dans un treillis quelconque, le postulat P_2 est équivalent à la loi de couverture (annexe 4), nous allons établir quelques propriétés importantes :

Théorème (proposition 3.3) : Dans un treillis avec élément nul, la semi-modularité supérieure entraîne la loi de couverture (donc le postulat P_2).

(semi-modularité supérieure : voir annexe 5)

Soit T un treillis semi-modulaire supérieurement. Soit $A \in T$, $A \neq 0$. Soit P un point , $P \nleq A$.

Nous avons $A \wedge P = 0$ (car P est un point non situé dans A).

Donc $P \succ A \wedge P$ (car P est un point : $P \succ 0$).

Donc $A \vee P \succ A$ (semi-modularité supérieure dans T)

<u>Proposition 3.4</u> : un treillis T vérifiant le postulat P_3 vérifie aussi la réciproque de la loi de couverture. (réciproque de la loi de couverture : voir annexe 6).

Soient en effet deux variétés A et B, B couvrant A ; en vertu du postulat P_3, A et B contiennent des points (chacune étant union de points, et comme $A \neq B$, cela signifie qu'il existe au moins un point, soit P, contenu dans B et non contenu dans A. Donc, d'une part $A < A \vee P$, et d'autre part $A \vee P \leqslant B$. Comme B couvre A par hypothèse, on conclut que $A \vee P = B$: la réciproque de la loi de couverture est bien vérifiée.

<u>Théorème (proposition 3.5)</u> : si dans un treillis T, la loi de couverture et le postulat P_3 sont vérifiés, alors le treillis T est semi-modulaire supérieurement.

En effet, dans un tel treillis, la loi de couverture et sa réciproque sont vérifiées. Soient alors deux variétés A et B telles que $A \succ A \wedge B$. Il existe donc un point P, non contenu dans $A \wedge B$, mais contenu dans A, et tel que :

$$A = (A \wedge B) \vee P \;;$$

donc :
$$\begin{aligned} A \vee B &= [(A \wedge B) \vee P] \vee B \\ &= [(A \wedge B) \vee B] \vee P \\ &= B \vee P \text{ , car } A \wedge B \text{ est contenu dans } B. \end{aligned}$$

Mais le point P n'est pas contenu dans B, car sinon, comme il est contenu dans A, il serait contenu dans $A \wedge B$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc, d'après la loi de couverture, nous concluons que $B \vee P \succ B$, c'est à dire : $A \vee B \succ B$.

Des deux théorèmes ci-dessus (propositions 3.3 et 3.5) se déduit immédiatement le théorème suivant :

<u>Théorème</u> (<u>proposition 3.6</u>) : dans un treillis avec élément nul, vérifiant le postulat P_3, le postulat P_2 et la semi-modularité supérieure sont des propriétés équivalentes.

Nous pouvons tirer de ce théorème la conséquence suivante :

- nous savons (propositions 2.4, 3.1, et 3.2) que, si G est un g_1-groupe, le treillis T(G) de ses sous-groupes vérifie les postulats P_1, P_3, P_4.

- comme il vérifie P_1 et P_3, il vérifie aussi P_2 si et seulement s'il est semi-modulaire supérieurement.

Lorsque le treillis T(G) des sous-groupes d'un groupe quelconque G est semi-modulaire supérieurement, on dit que ce groupe G est un um-groupe (um = abréviation de "upper semi-modular").

5. <u>Conclusion</u> sur la structure des g_1-groupes dont le treillis des sous-groupes est géométrique :

<u>Théorème (proposition 3.7)</u> : le treillis T(G) des sous-groupes d'un g_1-groupe G est géométrique si et seulement si G est aussi un um-groupe.

6. <u>Conclusion</u> sur la structure des groupes dont le treillis des sous-groupes est géométrique:

<u>Théorème (proposition 3.8)</u> : le treillis T(G) des sous-groupes d'un groupe G est géométrique si et seulement si G satisfait aux deux conditions suivantes :

condition g_1 : G est un g_1-groupe , et

condition g_2 : G est un um-groupe.

7. <u>Exemples de groupes dont le treillis des sous-groupes est géométrique.</u>

Comme groupes satisfaisant à la condition g_2, nous connaissons au moins la classe des groupes abéliens, ainsi que la classe des groupes hamiltoniens (voir annexe 7). Tous les sous-groupes d'un groupe de l'une quelconque de ces deux classes sont normaux , par conséquent le treillis des sous-groupes est modulaire (voir par exemple : DUBREIL et DUBREIL-JACOTIN, 1961, p. 200, théorème 2.

<u>A fortiori</u> un tel treillis est semi-modulaire supérieurement, puisque la modularité entraîne la semi-modularité

supérieure (DUBREIL-JACOTIN, LESIEUR et CROISOT, 1953, p. 62, propriété 1).

Nous allons étudier ci-dessous les treillis des sous-groupes de groupes abéliens, et les treillis des sous-groupes des groupes hamiltoniens.

A) - Groupes cycliques d'ordre $n = p_1p_2...p_k$.

Parmi les groupes abéliens satisfaisant à la condition g_1, nous pouvons citer tout groupe cyclique engendré par un élément satisfaisant à la condition g_1 (voir les exemples donnés à la fin du chapitre 2).

B) - Groupes abéliens d'ordre $n = p_1p_2...p_k$.

Tout groupe abélien fini, non nécessairement cyclique dont l'ordre est de la forme

$$n = p_1p_2...p_k \qquad (p_i \text{ premier, } p_i \neq p_j)$$

satisfait à la condition g_1. En effet, l'ordre de tout élément d'un tel groupe est un diviseur de l'ordre n du groupe ; donc tout élément satisfait à la condition g_1.

Un tel groupe est donc un g_1-groupe, et comme il est aussi un um-groupe (puisqu'il est abélien), le treillis de ses sous-groupes est géométrique.

En fait, tout groupe abélien G dont l'ordre est de la forme indiquée ci-dessus, est nécessairement cyclique.

En effet, soit G un tel groupe. Comme il est abélien, il est le produit direct de ses sous-groupes de Sylow (voir ZASSENHAUS, 1958, p. 143, théorème 11). Or , que sont les sous-groupes de Sylow de G ? A chacun des facteurs premiers p_j de l'ordre n du groupe G, correspond un p_j-sous-groupe de Sylow, noté S_j, unique puisque G est abélien (donc tous les sous-groupes sont normaux).

Donc : $G = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k$

Mais, dans un groupe abélien, si a est un élément d'ordre r, et si b est un élément d'ordre s, r et s étant premiers entre eux, alors le produit ab est d'ordre rs (voir DUBREIL et DUBREIL-JACOTIN, 1961, p. 268, exemple 4).

Ici, tout élément non neutre dans S_j est d'ordre p_j. Donc, comme G est produit direct de ses sous-groupes de Sylow, il existe nécessairement dans G un élément x dont l'ordre est n, ordre de G : il suffit de prendre $x = a_1 a_2 \ldots a_k$, avec $a_j \in S_j$, $a_j \neq e$.

Nous pouvons donc énoncer :

<u>Proposition 3.9</u> : tout groupe abélien G d'ordre $n = p_1 p_2 \ldots p_k$ (p_i premier , $p_i \neq p_j$) est cyclique, et de ce fait le treillis T(G) de ses sous-groupes est géométrique.

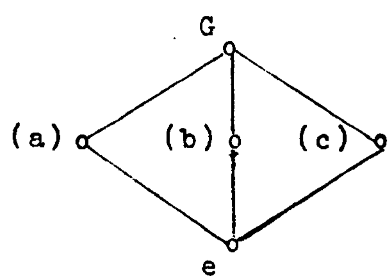
<u>C) - Cas des groupes abéliens quelconques</u> :

Nous avons vu ci-dessus que la condition $n = p_1 p_2 \ldots p_k$ relative à l'ordre d'un groupe abélien G est suffisante pour que T(G) soit géométrique. Mais il est certain que cette condition n'est pas nécessaire.

Exemple : le groupe abélien non cyclique d'ordre 4 (donc ne satisfaisant pas à la condition ci-dessus), admet, outre l'élément neutre, trois éléments d'ordre 2 ; le treillis des sous-groupes est géométrique, de dimension 1 (voir ci-dessous la table opérative de ce groupe, fig.3 a, et le diagramme du treillis de ses sous-groupes, fig.3 b).

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

<u>fig. 3 a</u>



<u>fig. 3 b</u>

Plus généralement, soit G un groupe abélien élémentaire d'ordre p^k (voir annexe 8), où p est un nombre premier. G est donc un um-groupe, et d'autre part tout élément non neutre est d'ordre p, donc satisfait à la condition g_1 ; donc T(G) est géométrique. Exemple : le groupe abélien élémentaire d'ordre 8 = 2^3, dont la table opérative est indiquée à la figure 4a :

	e	a	b	c	d	f	g	h
e	e	a	b	c	d	f	g	h
a	a	e	d	f	b	c	h	g
b	b	d	e	g	a	h	c	f
c	c	f	g	e	h	a	b	d
d	d	b	a	h	e	g	f	c
f	f	c	h	a	g	e	d	b
g	g	h	c	b	f	d	e	a
h	h	g	f	d	c	b	a	e

fig. 4a

Le treillis des sous-groupes est de dimension 2 ; il comprend, outre l'élément nul et l'élément universel, sept points distincts et sept droites (ou hyperplans) distinctes. Les points sont les sous-groupes d'ordre 2 engendrés par les éléments autres que e, soit : (a), (b), (c), (d), (f), (g), (h) ; les droites sont les sous-groupes d'ordre 4 ; ce sont les sous-groupes : {e, a, b, d} , { e, a, c, f } , { e, b, f, h} { e, d, f, g } .

Voir le diagramme de ce treillis à la figure 4b

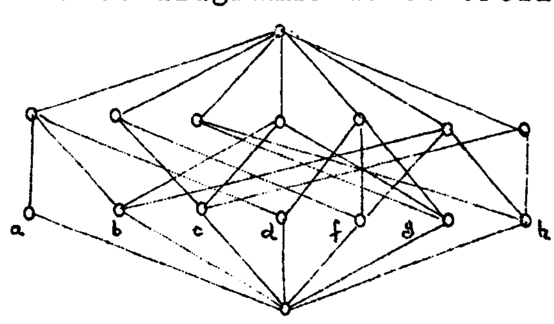


fig. 4 b

Plus généralement encore, nous savons (KUROSH, 1960 a, p. 137-138) que :

Proposition 3.10 : un groupe abélien périodique G peut être décomposé, d'une seule manière, en produit direct d'un nombre fini ou infini de groupes primaires par rapport à des nombres premiers distincts (voir annexe 1).

Ces groupes primaires sont obtenus de la manière suivante:

- à chaque nombre premier p, on associe l'ensemble G_p des éléments de G dont l'ordre est une puissance de p (éventuellement, on a $G_p = \{e\}$).
- on démontre que G_p est un sous-groupe (p-primaire, abélien) de G.
- alors on peut écrire : $G = \prod_{p \in P} G_p$ (où P désigne l'ensemble des nombres premiers).

Dans le cas qui nous intéresse ici, G devant être un g_1-groupe, il s'ensuit que les sous-groupes primaires G_p doivent être abéliens élémentaires.

Montrons d'autre part que cette condition est suffisante pour que G soit un g_1-groupe :

- d'abord, il ne peut exister dans G d'élément d'ordre p^k avec $k > 1$ (sinon le sous-groupe G_p correspondant au nombre premier p ne serait pas abélien élémentaire) ;
- ensuite, supposons qu'il existe dans G un élément x d'ordre np^k , avec $n \neq 1$ et $k > 1$, p premier, n et p premiers entre eux. Considérons alors l'élément x^n ; cet élément est distinct de e (car n ne peut pas être un multiple de l'ordre de x, qui est np^k). L'ordre de l'élément x^n est p^k, car :

$$(x^n)^{p^k} = x^{np^k} = e, \text{ et}$$

$$j < k \Longrightarrow np^j < np^k \Longrightarrow (x^n)^{p^j} = x^{np^j} \neq e \;;$$

nous sommes ainsi ramenés à l'éventualité envisagée plus haut :

comme il ne peut exister dans G d'élément d'ordre p^k avec $k > 1$, il ne peut non plus exister dans G d'élément d'ordre np^k, $k > 1$. Donc tout élément de G satisfait à la condition g_1.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

<u>Théorème</u> (<u>proposition 3.11</u>): G étant un groupe abélien fini ou infini, une condition nécessaire et suffisante pour que T(G) soit géométrique est la suivante :

G est périodique, et tous ses sous-groupes primaires sont abéliens élémentaires.

D) - Cas des groupes hamiltoniens.

Nous avons cité les groupes hamiltoniens comme étant des um-groupes. Dans quels cas peuvent-ils être aussi des g_1-groupes?

La structure des groupes hamiltoniens nous est connue d'après le théorème suivant (ZASSENHAUS, 1958, p. 160):

<u>Théorème</u> (<u>proposition 3.12</u>) : tout groupe hamiltonien est le produit direct de :

- un groupe de quaternions ;
- un groupe abélien où tout élément est d'ordre impair ;
- et un groupe abélien d'exposant 2.

Réciproquement, un tel produit direct est un groupe hamiltonien.

Nous retiendrons de ceci qu'un groupe hamiltonien admet nécessairement parmi ses sous-groupes un groupe de quaternions, lequel est (ZASSENHAUS, 1958, p. 146-147) un groupe d'ordre 8, admettant en particulier deux éléments d'ordre 4, donc ne satisfaisant pas à la condition g_1. Donc un groupe hamiltonien n'est jamais un g_1-groupe, et par conséquent :

<u>Proposition 3.13</u> : si G est un groupe hamiltonien, le treillis T(G) de ses sous-groupes est modulaire (donc semi-modulaire supérieurement), mais n'est pas géométrique.

C H A P I T R E 4

Structure des groupes localement finis dont le treillis des sous-groupes est géométrique

Au chapitre précédent, nous avons déterminé une condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe G ait pour treillis de sous-groupes un treillis géométrique (voir proposition 3.8) : il faut et il suffit que G soit à la fois un g_1-groupe et un um-groupe. Nous avons vu aussi que ces deux conditions ne sont pas contradictoires, puisqu'il existe des groupes les satisfaisant toutes les deux (voir les exemples cités). Donc, l'énoncé de la proposition 3.8 répond complètement à la question que nous nous étions proposés de résoudre comme but de ce travail : la structure des groupes dont le treillis des sous-groupes est géométrique est désormais connue.

Toutefois, nous ne pensons pas que la structure des g_1-groupes, ni celle des um-groupes, soient particulièrement évidentes sur le vu simplement de la définition de ces types de groupes.

C'est pourquoi nous avons jugé utile de consacrer un chapitre à une étude plus détaillée de la structure des g_1-groupes et de celle des um-groupes, avec bien entendu, à la fin, une synthèse permettant de préciser la structure des groupes dont le treillis des sous-groupes est géométrique.

Cependant, nous n'avons pu étudier ces structures dans le cas le plus général. Nous avons limité notre étude (pour des raisons qui apparaîtront au cours de ce chapitre) aux seuls groupes finis ou localement finis.

1. Structure des um-groupes finis ou localement finis :

Un um-groupe G est, par définition, un groupe dont le treillis des sous-groupes est semi-modulaire supérieurement, c'est à dire tel que :

$$\left.\begin{array}{l} A\ ,\ B \text{ sous-groupes de } G \\ A \succ A \wedge B \end{array}\right\} \Longrightarrow A \vee B \succ B$$

La structure des um-groupes a fait l'objet de recherches de la part de SATO (1949) (s'inspirant des recherches faites par IWASAWA (1941) sur la structure des m-groupes, c'est à dire des groupes dont le treillis des sous-groupes est modulaire). Les résultats de SATO ont été repris et approfondis par SUZUKI (1956). Il ressort de ces travaux que la structure des um-groupes dans le cas général n'est pas parfaitement connue ; elle l'est cependant dans certains cas particuliers, notamment dans le cas des um-groupes finis ou localement finis. Voici ce que nous savons de la structure des um-groupes finis, et de celle des um-groupes localement finis :

A) - Cas des um-groupes finis :

La structure des um-groupes finis est décrite par le théorème suivant (SATO, 1949, p. 136, théorème 1 ; SUZUKI, 1956, p. 24, théorème 20) :

Théorème (proposition 4.1) : Un groupe fini G est un um-groupe si et seulement s'il a la structure suivante :

$G = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_m$, produit direct dans lequel :

1°) - deux facteurs directs H_i et H_j distincts ont des ordres premiers entre eux ;

2°) - Chaque facteur direct H_i est :

- soit un sous-groupe qui est à la fois un sous-groupe de SYLOW et un m-groupe ;

- soit un sous-groupe du type suivant :

  $H = (P_1 \times P_2 \times \dots \times P_t) \vee Q$, où

  a) P_j est un sous-groupe de SYLOW de H, associé au nombre premier P_j, et est abélien élémentaire ;

  b) Q est un sous-groupe de SYLOW de H, associé au nombre premier q, et est cyclique, engendré par un élément z d'ordre q^b ;

  c) $p_j > q$ quel que soit $j = 1, 2, \dots, t$;

  d) à chaque sous-groupe P_j correspondent deux entiers r_j et b_j tels que :

  $$r_j \not\equiv 1 \pmod{p_j}$$

  $$r_j^{q^{b_j}} \equiv 1 \pmod{p_j}$$

  $1 \leqslant b_j \leqslant b$ quel que soit $j = 1, 2, \dots, t.$

  $zxz^{-1} = x^{r_j}$ quel que soit $x \in P_j$

  $i \neq j \implies b_i \neq b_j.$

<u>B</u>) - <u>Cas des um-groupes localement finis</u> :

A notre connaissance, il n'existe pas à l'heure actuelle de description complète de la structure des um-groupes infinis dans le cas le plus général.

Cependant, dans certains cas particuliers, cette structure est connue, au moins d'une manière approchée (voir SATO, 1949, sur les um-groupes contenant un ou plusieurs éléments d'ordre infini ; voir SATO ,1949, et SUZUKI; 1956, sur les um-groupes localement finis). Ici, comme nous nous intéressons à des groupes qui sont des groupes périodiques (les g_1-groupes), nous ne considérerons pas les um-groupes possédant des éléments d'ordre infini ; par contre , nous nous intéresserons au cas des um-groupes localement finis, puisque les groupes localement finis sont des groupes périodiques particuliers, donc susceptibles d'être des g_1-groupes.

En ce qui concerne donc les um-groupes localement finis, nous avons le résultat suivant (voir SATO, 1949, p. 138, théorème 2 ; SUZUKI, 1956, p. 26, théorème 21) :

Théorème (proposition 4.2) : Un groupe G, localement fini, est un um-groupe si et seulement si G est produit direct (ayant un nombre fini ou infini de facteurs) de sous-groupes tels que :

1°)- Les ordres de deux éléments pris dans deux facteurs directs distincts sont premiers entre eux ;

2°) - chaque facteur direct est :

- soit un p-sous-groupe de G, et aussi un m-groupe ;
- soit un groupe du type suivant :

$H = (P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_t) \vee Q$, où

les sous-groupes P_j et Q ont les mêmes propriétés a), , b), c), d) que dans le théorème précédent, avec toutefois la différence suivante : chaque P_j est ici un groupe abélien élémentaire qui peut éventuellement être infini (mais le nombre r_j qui lui est associé est fini).

Maintenant que nous connaissons la structure des um-groupes finis ou localement finis, nous devons essayer de préciser quelle est la structure des g_1-groupes finis ou localement finis.

2. Structure des g_1-groupes finis ou localement finis :

En ce qui concerne l'étude de la structure des g_1-groupes finis ou localement finis, nous nous limiterons à la propriété caractéristique suivante :

Proposition 4.3 : un groupe G, localement fini, est un g_1-groupe si et seulement si tout p-sous-groupe de G est d'exposant premier.

(Sur l'exposant d'un groupe, voir annexe 9).

<u>Démonstration</u> :

La condition est nécessaire. En effet, soit G un g_1-groupe localement fini. Soit P un p-sous-groupe de G, c'est à dire un sous-groupe dont tout élément non neutre a pour ordre une puissance d'un même nombre premier p.

Comme G est un g_1-groupe, tout élément de G satisfait à la condition g_1 ; en particulier, si un élément est d'ordre p^k, on a nécessairement $k = 1$. C'est dire que tout élément de P est d'ordre p ; autrement dit, l'exposant de P est le nombre premier p.

La condition est suffisante. Soit G un groupe localement fini, dont tout p-sous-groupe est d'exposant premier. Montrons que G est un g_1-groupe. Pour cela il suffit de vérifier que tout élément x de G satisfait à la condition g_1. Soit alors x un élément de G. Comme G est localement fini, donc périodique, l'ordre n de x est un nombre fini. Nous pouvons donc écrire n sous la forme :

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s} \qquad (p_i \text{ premier, } p_i \neq p_j)$$

Supposons que x ne satisfait pas à la condition g_1. Cela signifie que l'un au moins des exposants k_i est strictement supérieur à 1. Donc l'ordre de x est de la forme $n = mp^k$, où p est l'un des facteurs premiers de n, où $k \geqslant 2$, et où m est premier avec p.

Considérons maintenant l'élément $x' = x^m = x^{n/p^k}$. L'ordre de x' est nécessairement un diviseur de p^k, puisque

$$(x')^{p^k} = (x^{n/p^k})^{p^k} = x^n = e \text{ (n ordre de x).}$$

L'ordre de x' est donc de la forme p^j, avec $1 \leqslant j \leqslant k$. Si nous supposons $j < k$, nous avons :

$$(x')^{p^j} = (x^{n/p^k})^{p^j} = x^{np^j/p^k} = x^{n/p^{k-j}}.$$

Or n/p^{k-j} est un diviseur de n strictement inférieur à n (car $k-j > 0$) ; donc , comme l'ordre de x est n, il est impossible que $x^{n/p^{k-j}} = e$. L'ordre de x' ne peut donc pas être p^j avec $j < k$; l'ordre de x' est donc p^k. Mais comme nous avons supposé $k > 2$, cela signifie qu'il existe dans G au moins un élément d'ordre p^2. Ceci est absurde, puisque par hypothèse tous les p-sous-groupes de G sont d'exposant premier.

Par conséquent : il n'existe pas dans G d'élément ne satisfaisant pas à la condition g_1. Donc G est un g_1-groupe.

3. Structure des groupes finis ou localement finis dont le treillis des sous-groupes est géométrique.

Maintenant que nous connaissons la structure des um-groupes et celles des g_1-groupes, finis ou localement finis, nous pouvons , en faisant la synthèse de ces deux structures, préciser quelle est la structure des groupes finis ou localement finis dont le treillis des sous-groupes est géométrique .

Nous pouvons ainsi énoncer les deux propositions suivantes :

Proposition 4.4 : Le treillis T(G) des sous-groupes d'un groupe fini G est géométrique si et seulement si tout p-sous-groupe de G est d'exposant premier , et si de plus G a la structure décrite à la proposition 4.1.

Proposition 4.5 : Le treillis T(G) des sous-groupes d'un groupe localement fini G est géométrique si et seulement si tout p-sous-groupe de G est d'exposant premier, et si de plus G a la structure décrite à la proposition 4.2

En fait, il est plus intéressant de mettre en évidence les simplifications que peut faire apparaître, dans la structure des um-groupes finis ou localement finis, l'introduction de l'hypothèse supplémentaire que tout p-sous-groupe est d'exposant premier.

Notons d'abord la propriété suivante :

Proposition 4.6 : Soit G un um-groupe localement fini. Alors G est un g_1-groupe si et seulement si tout p-sous-groupe de G est abélien élémentaire.

Démonstration :

La condition est nécessaire. En effet, soit G un um-groupe localement fini. Si G est aussi un g_1-groupe, alors tout p-sous-groupe de G est d'exposant premier (proposition 4.3) Montrons maintenant que tout p-sous-groupe est abélien.

Soit P un p-sous-groupe, d'exposant premier p (donc tout élément de P est d'ordre p). Soient a et b deux éléments de P. Intéressons-nous au sous-groupe $(a) \vee (b)$ engendré par ces deux éléments. Deux cas sont à considérer :

- premier cas : $(a) = (b)$; alors $(a) \vee (b) = (a) = (b)$. est un sous-groupe d'ordre p premier, donc cyclique, donc abélien ; d'où $ab = ba$.

- second cas : $(a) \neq (b)$; comme G est supposé localement fini, $(a) \vee (b)$ est d'ordre fini ; de plus , cet ordre est un multiple de p, soit la forme mp^k. Comme d'autre part $(a) \subset P$ et $(b) \subset P$, on a $(a) \vee (b) \subset P$, et comme P est un p-groupe, il s'ensuit que l'ordre de $(a) \vee (b)$ ne peut être qu'une puissance de p, soit p^k, avec $k \geqslant 2$. Montrons alors que $k = 2$. Supposons pour cela que $k > 2$. Alors $(a) \vee (b)$ contient au moins un sous-groupe d'ordre p^2, d'après le premier théorème de SYLOW (proposition 2.2). Soit H un tel sous-groupe d'ordre p^2 : $H \subset (a) \vee (b)$, $H \neq (a) \vee (b)$. D'autre part, comme $(a) \neq (b)$ et que a et b sont d'ordre p premier, on a $(a) \wedge (b) = e$; ce qui nous permet d'écrire en particulier que $(a) \succ (a) \wedge (b)$. Mais par hypothèse G est un um-groupe ; donc on peut conclure de ce qui précède que $(a) \vee (b) \succ (a)$; et pour la même raison nous avons $(a) \vee (b) \succ (b)$. Si donc il existe un sous-groupe H, d'ordre p^2, distinct de $(a) \vee (b)$, il ne contient ni (a) ni (b).

Par contre il contient nécessairement un sous-groupe (c), d'ordre premier p, tel que $(c) \neq (a)$ et $(c) \neq (b)$. Le diagramme du treillis des sous-groupes de $(a) \vee (b)$ contiendra donc la configuration de la figure 5.

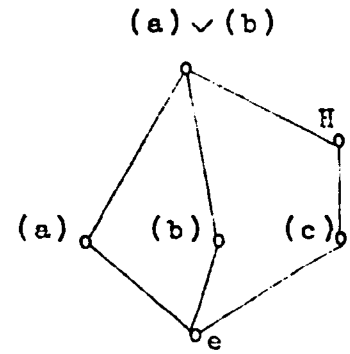


figure 5

Ainsi nous avons :

$(a) \wedge (c) = e$; donc

$(c) \succ (a) \wedge (c)$; donc

$(a) \vee (c) \succ (a)$. Comme par ailleurs $(a) \vee (b) \succ (a)$, et que $(a) \vee (c) \subset (a) \vee (b)$, on a nécessairement $(a) \vee (c) = (a) \vee (b)$.

Remarquons d'autre part que : $(a) \wedge H = e$, car $(a) \wedge H$ est inclus dans (a), groupe d'ordre premier, donc ne peut être que (a) ou $\{e\}$; or $(a) \wedge H \neq (a)$, car sinon $(a) \subset H$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Nous remarquons de la même façon que $(a) \vee (b) = (a) \vee H$, car $(a) \subset (a) \vee H \subset (a) \vee (b)$ et $(a) \vee (b) \succ (a)$; donc $(a) \vee H$ ne peut être que $(a) \vee (b)$ ou (a) ; or $(a) \vee H \neq (a)$ sinon $(a) \supset H$ ce qui est absurde.

Nous avons donc :

$e = (a) \wedge H \subset (c) \subset H \subset (a) \vee H = (a) \vee (b) = (a) \vee (c)$ (inclusions strictes).

Or , d'après les hypothèses faites sur G, le treillis $T(G)$ est géométrique, donc semi-modulaire. Donc par définition de la semi-modularité (voir DUBREIL-JACOTIN, LESIEUR et CROISOT, 1953, p. 85 , définition 2), il existe un sous-groupe K de $(a) \vee (b)$ tel que :

$$(a) \wedge H \subset K \subset (a) \ , \quad K \neq (a) \wedge H,$$

Comme $(a) \succ e$, la seule possibilité est que $K = (a)$, et par conséquent :

$$(c) = [(c) \vee (a)] \wedge H = [(a) \vee (b)] \wedge H = H,$$

ce qui est absurde puisque (c) est d'ordre p et H est d'ordre p^2.

Nous avons donc montré que $(a) \vee (b)$ est d'ordre p^2. Or (ZASSENHAUS, 1958, p. 141) tout groupe d'ordre p^2 est abélien. Donc, dans le groupe abélien $(a) \vee (b)$, on peut écrire ab = ba. Un tel raisonnement étant valable quel que soit le couple (a,b) d'éléments de P, il s'ensuit que ce groupe P est abélien; et comme son exposant est premier, cela signifie qu'il est abélien élémentaire.

La condition est suffisante. En effet, soit G un um-groupe localement fini, dans lequel nous supposons que tout p-sous-groupe est abélien élémentaire. En particulier, tout p-sous-groupe est d'exposant premier ; mais ceci est une condition suffisante pour que G, localement fini, soit un g_1-groupe (voir proposition 4.3).

Revenons maintenant à la structure des groupes finis (ou localement finis) qui sont à la fois des g_1-groupes et des um-groupes.

A) - <u>Cas des groupes finis</u>.

Si, dans le théorème sur les um-groupes finis (proposition 4.2) nous supposons de plus que G est un g_1-groupe, nous tirons les conséquences suivantes :

1°) Tous les sous-groupes de SYLOW de G sont abéliens élémentaires (puisque ce sont des p-sous-groupes particuliers, il suffit de leur appliquer la proposition 4.6 ci-dessus) ; il sera donc en particulier inutile de rajouter l'hypothèse que les sous-groupes du type P_j sont abéliens élémentaires ; de même il sera inutile de préciser que les sous-groupes de SYLOW H sont des m-groupes : étant abéliens, ils le sont automatiquement.

2°) Si un facteur direct H est du type

$$H = (P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_t) \vee Q,$$

alors : Q est cyclique d'ordre premier q (car z, générateur de Q, est d'ordre q^b, et on doit avoir b = 1 puisque G est un g_1-groupe).

Mais, comme b = 1, et comme $1 \leq b_j \leq b$ quel que soit j, on conclut que $b_j = 1$ quel que soit j. Or , si $i \neq j$ on a $b_i \neq b_j$. La seule possibilité est que t = 1 : il n'y a qu'un sous-groupe du type P dans H. Ainsi H s'écrit simplement sous la forme : $H = P \vee Q$, où Q est cyclique d'ordre premier q, engendré par z ; P est un p-sous-groupe de SYLOW (donc abélien élémentaire) avec $p > q$; de plus, au sous-groupe P correspond un nombre r tel que :

$$r \not\equiv 1 \pmod p) \text{ , } r^q \equiv 1 \pmod p \text{ , et } zxz^{-1} = x^r \forall x \in P.$$

Donc , si un um-groupe fini G est un g_1-groupe, il a nécessairement la structure suivante : tout p-sous-groupe est abélien élémentaire , et :

$$G = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n, \text{ où}$$

chaque facteur direct est soit un sous-groupe de SYLOW (abélien élémentaire), soit un sous-groupe du type $P \vee Q$ décrit ci-dessus; de plus, bien entendu, les ordres de deux facteurs directs distincts sont premiers entre eux.

Réciproquement, si un groupe fini G a la structure décrite ci-dessus, nous savons que c'est un um-groupe (car cette structure est conforme à celle décrite dans la proposition 4.2) ; d'autre part, c'est aussi un g_1-groupe, en vertu de la proposition 4.3 ou de la proposition 4.6.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

<u>Théorème</u> (<u>proposition 4.7</u>): Soit G un groupe fini. Le treillis T(G) des sous-groupes de G est géométrique si et seulement si tout p-sous-groupe de G est abélien élémentaire et si G possède la structure suivante :

$$G = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_m \text{ ,} \qquad \text{où}$$

1°) - deux facteurs directs H_i et H_j distincts ont des ordres premiers entre eux ;

2°) - chaque facteur direct H_i est :

- soit un sous-groupe de SYLOW de G ;
- soit un sous-groupe du type suivant : $H = P \vee Q$, où

a) P est un sous-groupe de SYLOW de H, associé au nombre premier p ;

b) Q est un sous-groupe de SYLOW de H, associé au nombre premier q ; Q est cyclique, d'ordre q, engendré par un élément z ;

c) $p > q$;

d) au sous-groupe P correspond un nombre r tel que

$$r \not\equiv 1 \pmod p) \ , \quad r^q \equiv 1 \pmod p) \text{ et}$$
$$zxz^{-1} = x^r \text{ quel que soit } x \in P.$$

<u>Remarque</u> : Dans les sous-groupes du type $H = P \vee Q$, notons que les sous-groupes P et Q sont permutables. En effet, soit $x \in P$, et $z^j \in Q$. Nous avons :

$$\begin{aligned} z^j x z^{-j} &= z^{j-1}(zxz^{-1})z^{-j+1} = z^{j-1}x^r z^{-j+1} \\ &= z^{j-2}(zx^r z^{-1})z^{-j+2} = z^{j-2}x^{r^2}z^{-j+2} \\ &= \ldots = zx^{r^{j-1}}z^{-1} = x^{r^j} \quad ; \end{aligned}$$

ce qui nous permet d'écrire : $z^j x = x^{r^j} z^j$; de plus, nous en déduisons :

$$z^{q-j}xz^j = x^{r^{q-j}}, \text{ soit } xz^j = z^j x^{r^{q-j}}.$$

Donc PQ = QP.

En particulier, on conclut que tout élément de $P \vee Q$, qui est produit fini d'éléments de P et d'éléments de Q, peut s'écrire sous la forme d'un produit de deux éléments seulement: l'un appartenant à P, l'autre appartenant à Q.

$$y \in P \vee Q \Longrightarrow \quad y = z^j x = x' z^k.$$

Nous pouvons de plus affirmer que P est un sous-groupe normal de $P \vee Q$. En effet, soit $y \in P \vee Q$; nous pouvons écrire $y = z^j x'$ (où $x' \in P$). Soit alors $x \in P$; posons $x'' = xx'^{-1}$. Nous avons :

$yxx'^{-1} = yx'' z^j x' x'' = z^j x_1$ (avec $x_1 = x'x'' \in P$),

donc $yxx'^{-1} = x_1^{r^j} z^j$.

Donc $yx = x_1^{r^j} z^j x' = x_1^{r^j} y = x_2 y$, c'est à dire $yP \subset Py$.
Une démonstration semblable conduit à $yP \supset Py$.

B) - Cas des groupes infinis localement finis.

Les démonstrations faites ci-dessus dans le cas des groupes finis sont immédiatement applicables aux groupes localement finis qui sont à la fois des g_1-groupes et des um-groupes La seule différence de structure entre de tels groupes localement finis, et les groupes finis étudiés ci-dessus tient

- d'une part au nombre des facteurs directs, qui peut ici être infini,

- d'autre part, à la nature des sous-groupes P dans les facteurs directs du type $H = P \vee Q$: ici P est un sous-groupe dont l'ordre peut être infini.

Compte tenu de ces remarques, l'énoncé du théorème décrivant la structure des groupes localement finis dont le treillis des sous-groupes est géométrique est le suivant :

Théorème (proposition 4.8) : Soit G un groupe localement fini. Le treillis T(G) de ses sous-groupes est géométrique si et seulement si tout p-sous-groupe de G est abélien élémentaire, et si G possède la structure suivante : G est produit direct (ayant un nombre fini ou infini de facteurs) de sous-groupes tels que :

1°) - Les ordres de deux éléments pris dans deux facteurs directs distincts sont premiers entre eux ;

2°) - chaque facteur direct H est :

- soit un p-sous-groupe de G ;
- soit un groupe du type suivant : $H = P \vee Q$, où les sous-groupes P et Q ont les mêmes propriétés a), b), c), d)

que dans le théorème précédent, avec toutefois la différence suivante : P est un p-sous-groupe pouvant éventuellement être infini (mais le nombre r qui lui est associé est fini).

C) - Quelques exemples .

Nous donnons ci-dessous quelques exemples de groupes finis, dont le treillis des sous-groupes est géométrique. Il s'agit de groupes non abéliens de la forme $P \vee Q$ décrite dans l'énoncé de la proposition 4.7 ci-dessus (des exemples de groupes abéliens ont été donnés à la fin du chapitre 3).

Premier exemple : Le groupe d'ordre $6 = 2 \times 3$, dont la table opérative est donnée à la figure 6 a ; un tel groupe admet trois sous-groupes d'ordre 2 (engendrés respectivement par a , b et c), et un sous-groupe d'ordre 3 (engendré par d, ou par f). Un tel groupe est de la forme $P \vee Q$, où $P=(d)=(f)$ est un p-sous-groupe abélien élémentaire ($p=3$) ; $Q=(a)$ est cyclique d'ordre premier $q = 2$; l'entier r correspondant à P est ici $r = 2$, lequel vérifie bien les propriétés requises :

$2 \not\equiv 1 \pmod 3$, $\quad 2^2 = 4 = 3+1 \equiv 1 \pmod 3$, et

$ada^{-1} = ada = f = d^2$, $\quad afa^{-1} = afa = d = f^2$.

Le treillis des sous-groupes est représenté par le diagramme de la figure 6b.

	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	f	d	c	b
b	b	d	e	f	a	c
c	c	f	d	e	b	a
d	d	b	c	a	f	e
f	f	c	a	b	e	d

figure 6a

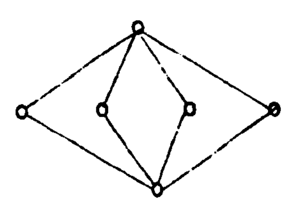


figure 6b

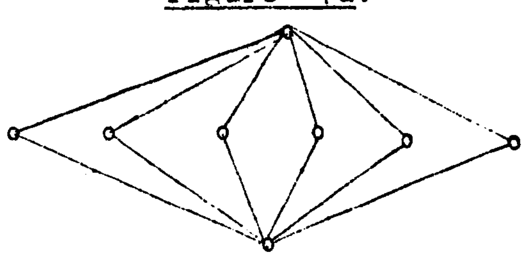
<u>Deuxième exemple</u> : Le groupe d'ordre $10 = 2 \times 5$, dont la table opérative est donnée à la figure 7a ; un tel groupe admet un sous-groupe d'ordre 5 (engendré par a) et cinq sous-groupes d'ordre 2 (engendrés respectivement par b, c, d, f, g). Un tel groupe est de la forme $P \vee Q$, où $P = (a)$ est d'ordre $p = 5$, où $Q = (b)$ est cyclique d'ordre 2, et où l'entier r correspondant à P est ici $r = 4$, lequel vérifie les propriétés requises :

$$4 \not\equiv 1 \pmod 5, \qquad 4^2 = 16 = 15 + 1 \equiv 1 \pmod 5), \text{ et}$$
$$bab^{-1} = bab = a^4,\ ba^2b^{-1} = ba^2b = a^3 = a^8 = (a^2)^4,$$
$$ba^3b = a^2 = a^{12} = (a^3)^4,\ ba^4b = a = a^{16} = (a^4)^4.$$

Le treillis des sous-groupes est représenté par le diagramme de la figure 7b.

	e	a	a^2	a^3	a^4	b	c	d	f	g
e	e	a	a^2	a^3	a^4	b	c	d	f	g
a	a	a^2	a^3	a^4	e	g	b	c	d	f
a^2	a^2	a^3	a^4	e	a	f	g	b	c	d
a^3	a^3	a^4	e	a	a^2	d	f	g	b	c
a^4	a^4	e	a	a^2	a^3	c	d	f	g	b
b	b	c	d	f	g	e	a	a^2	a^3	a^4
c	c	d	f	g	b	a^4	e	a	a^2	a^3
d	d	f	g	b	c	a^3	a^4	e	a	a^2
f	f	g	b	c	d	a^2	a^3	a^4	e	a
g	g	b	c	d	f	a	a^2	a^3	a^4	e

<u>figure 7a</u>.



<u>figure 7b</u>.

D) - Remarque : La non contradiction des conditions g_1 et g_2 (proposition 3.8) a été largement démontrée par les exemples donnés de groupes dont le treillis des sous-groupes est géométrique. La non indépendance de ces deux conditions a été en partie démontrée par l'exemple des groupes hamiltoniens (proposition 3.13) qui satisfont g_2 sans satisfaire g_1. Pour être complet, il aurait fallu trouver un exemple de g_1-groupe qui ne soit pas un um-groupe ; ce problème est pour le moment ouvert.

CHAPITRE 5

Structure des groupes dont le treillis des sous-groupes est : un produit de treillis géométriques, une géométrie projective, une géométrie distributive.

La structure des groupes dont le treillis des sous-groupes est géométrique étant connue, nous allons étudier dans le présent chapitre la structure des groupes dont le treillis des sous-groupes est géométrique et satisfait à certaines conditions supplémentaires. Ce seront les groupes dont le treillis des sous-groupes est :

- un produit de treillis géométriques,
- une géométrie projective,
- une géométrie distributive.

1. Structure des groupes dont le treillis des sous-groupes est produit de treillis géométriques.

Il s'agit d'un cas particulier de groupe dont le treillis de sous-groupes est décomposable en produit direct non trivial.

Au sujet de tels groupes, nous avons le théorème suivant (RIBEIRO, 1948, p. 4 ; SUZUKI, 1956, p. 5, théorème 4):

<u>Proposition 5.1</u> : Le treillis $T(G)$ des sous-groupes d'un groupe G est produit direct de treillis T_f ($f \in \Gamma$) famille d'indices) si et seulement si G est lui-même produit direct de groupes G_f tels que $T(G_f) \sim T_f$ ($f \in F$) et que l'ordre de tout élément de G_f est fini et premier avec l'ordre de tout élément de G_h ($h \neq f$).

En ce qui concerne particulièrement les treillis géométriques, nous avons d'autre part la propriété suivante (DUBREIL-JACOTIN, LESIEUR et CROISOT, 1953, p. 277, théorème 9):

<u>Proposition 5.2</u> : Le produit cardinal d'un nombre fini ou infini de treillis géométriques est un treillis géométrique. Réciproquement, si un treillis géométrique est produit cardinal d'un nombre quelconque de treillis, chacun de ces treillis est géométrique.

La synthèse des deux propositions 5.1 et 5.2 ci-dessus nous permet alors d'énoncer :

<u>Théorème</u> (<u>proposition 5.3</u>): Un groupe G a pour treillis de sous-groupes $T(G)$ un treillis géométrique décomposable en produit (non trivial) de treillis géométriques si et seulement si :

- G est lui-même décomposable en produit direct (non trivial) de sous-groupes G_f ($f \in F$ famille d'indices), tels que l'ordre de tout élément de G_f est fini et premier avec l'ordre de tout élément de G_h ($h \neq f$) ;
- chaque G_f a pour treillis de sous-groupes un treillis géométrique.

De plus, si ces deux conditions sont remplies, le treillis $T(G)$ est produit des treillis $T(G_f)$.

Exemples :

1) - Cas des groupes finis. Au chapitre précédent, nous avons vu (proposition 4.7) qu'un groupe fini G dont le treillis des sous-groupes est géométrique satisfait aux conditions d'application du théorème ci-dessus : G est produit direct de sous-groupes H_i ; les ordres de H_i et H_j sont premiers entre eux si $i \neq j$.

$$G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_m, \text{ donc}$$

$$T(G) = T(H_1) \times T(H_2) \times \dots \times T(H_m).$$

2) - Cas des groupes infinis localement finis. Même chose que ci-dessus : G étant produit direct de groupes tels que deux éléments pris dans deux facteurs directs distincts ont des ordres finis premiers entre eux , il s'ensuit que T(G) est produit des treillis des sous-groupes de ces facteurs directs.

2. Structure des groupes dont le treillis des sous-groupes est une géométrie projective.

A) Cas général :

Rappelons une propriété caractéristique des géométries projectives (DUBREIL-JACOTIN, LESIEUR et CROISOT, 1953, p. 287, Théorème 5) :

Proposition 5.4 : Pour qu'un treillis géométrique de dimension finie ou infinie soit une géométrie projective, il faut et il suffit qu'il soit modulaire.

Alors, compte tenu d'une part de la propriété caractéristique ci-dessus, d'autre part de la structure des groupes dont le treillis des sous-groupes est un treillis géométrique (proposition 3.8), nous pouvons dire qu'un groupe G a pour treillis de sous-groupes une géométrie projective si et seulement si ce groupe satisfait aux trois conditions suivantes :

- condition g_1 : G est un g_1-groupe ;
- condition g_2 : G est un um-groupe ;
- condition g_3 : G est un m-groupe.

En fait, la condition g_3 implique la condition g_2 car :

- tout treillis modulaire est semi-modulaire (DUBREIL-JACOTIN, LESIEUR et CROISOT, 1953, p. 84) ;
- tout treillis semi-modulaire est semi-modulaire supérieurement (DUBREIL-JACOTIN, LESIEUR et CROISOT, 1953, p. 87 lemme 1).

Il est donc suffisant d'énoncer :

Théorème (proposition 5.5) : Le treillis T(G) des sous-groupes d'un groupe G est une géométrie projective si et seulement si G satisfait aux deux conditions suivantes :
condition g_1 : G est un sous-groupe ;
condition g_3 : G est un m-groupe.

B) Cas des groupes finis ou localement finis.

La question des groupes finis ou localement finis dont le treillis des sous-groupes est une géométrie projective peut être abordée de deux façons :

- directement, par l'étude de la structure des groupes finis ou localement finis qui sont à la fois des g_1-groupes et des m-groupes ;
- indirectement, par l'intermédiaire du théorème de décomposabilité (proposition 5.1), applicable ici car si le treillis des sous-groupes d'un groupe fini ou localement fini est géométrique (et a fortiori lorsque il s'agit d'une géométrie projective), un tel groupe est décomposable en produit direct (voir propositions 4.7 et 4.8).

Nous nous bornerons à l'étude indirecte, plus rapide et plus intéressante.

Nous avons la proposition suivante (DUBREIL-JACOTIN, LESIEUR et CROISOT, 1953, p. 63, propriété 5) :

Proposition 5.6 : Un produit cardinal général ou restreint d'un nombre quelconque de treillis modulaires est modulaire. Réciproquement, si un produit cardinal général ou restreint de treillis est modulaire, chacun de ces treillis est modulaire.

Compte tenu de la proposition 5.1 et de la proposition 5.6 ci-dessus, nous pouvons dire que, si G est fini ou localement fini, le treillis T(G), supposé géométrique, est produit de treillis de sous-groupes T(H), et est donc modulaire si et seulement si chaque T(H) est modulaire. Voyons alors à quelle(s) condition(s) chaque treillis T(H) peut être modulaire.

Cas où le groupe G est fini. Supposons que T(G) est géométrique. Alors la structure de chaque facteur H (voir proposition 4.7) est telle que chaque sous-groupe H est un "P-groupe", terme désignant (SUZUKI, 1956, p. 11) tout groupe fini de l'un des deux types suivants :

- type 1 : un p-groupe abélien élémentaire ;
- type 2 : un groupe engendré par a_1, a_2, ..., a_n et b avec les relations $a_i^p = b^q = e$, $a_i a_j = a_j a_i$, $b a_i b^{-1} = a_i^r$, où $r \not\equiv 1 \pmod p$, $r^q \equiv 1 \pmod p$.

SUZUKI (même référence) cite de plus la propriété suivante (BAER, 1939 ; IWASAWA, 1941 ; SUZUKI, 1951) :

Proposition 5.7 : Le treillis des sous-groupes d'un P-groupe est irréductible, complémenté, modulaire, et un P-groupe du type 2 a le même treillis de sous-groupes qu'un P-groupe de type 1.

Ceci nous amène donc, dans le cas des groupes finis, à la conclusion suivante :

<u>Théorème (proposition 5.8)</u>: Le treillis des sous-groupes d'un groupe fini G est une géométrie projective si et seulement si T(G) est un treillis géométrique, c'est à dire si et seulement si G a la structure décrite à la proposition 4.7.

<u>Cas où le groupe G est infini localement fini</u>. En ce qui concerne les m-groupes infinis localement finis, nous avons la propriété suivante (IWASAWA, 1943, théorème 2 et 3 ; SUZUKI, 1956, p. 22, théorème 18) :

<u>Proposition 5.9</u> : Soit G un m-groupe localement fini. Alors G est produit direct de groupes tels que deux éléments pris dans deux facteurs directs distincts ont des ordres premiers entre eux, et que chaque facteur direct est :

- soit un p-groupe modulaire ,
- soit un groupe engendré par P et u, où :
  - a) P est un p-groupe abélien élémentaire ;
  - b) u est un élément d'ordre q^n $(p > q)$;
  - c) quel que soit $x \in P$, on a $uxu^{-1} = x^r$ avec $r \not\equiv 1 \pmod p$, $\quad r^q \equiv 1 \pmod p$.

Dans l'énoncé de cette proposition 5.9, il n'apparait pas que la réciproque de cette propriété soit vraie. En fait nous allons montrer qu'il en est bien ainsi.

Soit un groupe G, localement fini, produit direct de facteurs possédant les propriétés décrites à la proposition 5.9. Nous devons démontrer que G est modualire ; compte tenu des propositions 5.1 et 5.6, il suffira de montrer que tout groupe engendré par P et u, où P et u possèdent les propriétés a), b), c), de la proposition 5.9, est un m-groupe.

Supposons donc que G est un tel groupe, engendré par P et u. Montrer que G est un m-groupe, c'est montrer, par définition de la modularité, que, X, Y et Z désignant des sous-groupes de G :

$$X \leqslant Z \implies X \vee (Y \wedge Z) = (X \vee Y) \wedge Z \quad \forall Y$$

Par ailleurs, remarquons (DUBREIL-JACOTIN, LESIEUR et CROISOT, 1953, p. 59, remarque 1) que dans tout treillis :

$$X \leqslant Z \implies X \vee (Y \wedge Z) \leqslant (X \vee Y) \wedge Z \quad \forall Y$$

La démonstration de la modularité se résumera donc à la démonstration de :

$$X \leqslant Z \implies X \vee (Y \wedge Z) \geqslant (X \vee Y) \wedge Z \quad \forall Y$$

Soit alors un élément $x \in (X \vee Y) \wedge Z$; en particulier $x \in X \vee Y$, c'est à dire :

$$x = \prod_{i=1}^{n} a_i b_i \quad \text{où } a_i \in X \text{ et } b_i \in Y.$$

Autrement dit $x \in X' \vee Y'$ avec :

$$X' = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \leqslant X$$

$$Y' = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \leqslant Y$$

(X' et Y' dépendent de l'élément x ; de plus, ce sont des groupes finis, car chacun est engendré par un nombre fini d'éléments de G, groupe localement fini).

Posons d'autre part $Z' = (a_1, a_2, \ldots, a_n, x)$. Comme $x \in X' \vee Y'$, nous avons $Z' \leqslant X' \vee Y'$. D'autre part, comme $x \in Z'$, nous pouvons écrire que $x \in (X' \vee Y') \wedge Z'$. Remarquons :

- que Z' est un groupe fini, dépendant de x ;
- que $X' \leqslant Z'$;
- que $Z' \leqslant Z$.

Considérons maintenant le fait que $G = P \vee (u)$, où P et (u) sont des sous-groupes permutables. Cela entraîne que :

$a_i = p_i u^{j_i}$ $\quad (p_i \in P,\ u^{j_i} \in (u)\ )$

$b_i = p'_i u^{k_i}$ $\quad (p'_i \in P,\ u^{k_i} \in (u)\ )$

C'est à dire que $X' \vee Y'$, qui est engendré par l'ensemble des a_i et des b_i $(i = 1 \text{ à } n)$ peut également être considéré comme engendré par l'ensemble des p_i, des p'_i, des u^{j_i} et des u^{k_i}.

Donc finalement :

$$X' \vee Y' \leqslant (p_1,\dots,p_n,\ p'_1,\dots,p'_n,\ u).$$

Remarquons que les p_i et p'_i sont en nombre fini, et que ce sont des éléments d'ordre p (ils appartiennent tous à P). Par conséquent, compte tenu des propriétés a), b) et c), le groupe (p_i, p'_i, u ; i = 1 à n), groupe que nous désignerons par P', est un P-groupe du type 2, au sens de la proposition 5.7 ci-dessus. P' , est donc un m-groupe. P' contient comme sous-groupes, notamment, X', Y' et Z' ; comme c'est un m-groupe, nous avons :

$$(X' \vee Y') \wedge Z' = X' \vee (Y' \wedge Z') \ ;$$

or : $X' \leqslant X$, $Y' \leqslant Y$, et $Z' \leqslant Z$; donc :
$Y' \wedge Z' \leqslant Y \wedge Z$ et par suite $X' \vee (Y' \wedge Z') \leqslant X \vee (Y \wedge Z)$.
Nous avons donc montré que, si $x \in (X \vee Y) \wedge Z$, on a $x \in (X' \vee Y') \wedge Z'$, et que :

$$(X' \vee Y') \wedge Z' = X' \vee (Y' \wedge Z') \leqslant X \vee (Y \wedge Z), \text{ donc}$$

$x \in X \vee (Y \wedge Z)$, ce qui montre que

$$X \leqslant Z \implies (X \vee Y) \wedge Z \leqslant X \vee (Y \wedge Z) \quad \forall Y.$$

La modularité est donc démontrée.

En résumé :

<u>Proposition 5.10</u> : **Un groupe G, localement fini, est un m-groupe si et seulement si il a la structure en produit direct décrite à la proposition 5.9.**

Ainsi, si nous comparons la structure des m-groupes localement finis (propositions 5.9 et 5.10) à la structure des groupes localement finis dont le treillis des sous-groupes est géométrique (propositions 4.7 et 4.8), nous constatons que ces derniers groupes sont des m-groupes. Par conséquent :

<u>Théorème (proposition 5.11)</u> : **Le treillis des sous-groupes d'un groupe G localement fini est une géométrie projective si et seulement si T(G) est un treillis géométrique, c'est à dire si et seulement si G a la structure décrite à la proposition 4.8.**

3. Structure des groupes dont le treillis des sous-groupes est une géométrie distributive.

Dans le présent paragraphe, nous nous intéressons aux groupes dont le treillis des sous-groupes est à la fois géométrique et distributif. La distributivité est une condition plus restrictive que la modularité : une géométrie distributive est une géométrie modulaire (ou projective) particulière.

En appelant d-groupe tout groupe dont le treillis des sous-groupes est distributif, nous avons la propriété suivante:

Proposition 5.12 : Le treillis T(G) des sous-groupes d'un groupe G est une géométrie distributive si et seulement si ce groupe satisfait aux deux conditions suivantes:

condition g_1 : G est un g_1-groupe ;

condition g_4 : G est un d-groupe.

Démonstration : Cette double condition est nécessaire. En effet, la condition g_1 est nécessaire pour que T(G) soit géométrique; la condition g_4 est nécessaire pour que T(G) soit distributif.

Cette double condition est suffisante. En effet, un treillis distributif est modulaire (DUBREIL-JACOTIN, LESIEUR et CROISOT, 1953, p. 74, remarque 2). Donc tout groupe satisfaisant aux conditions g_1 et g_4 satisfait *a fortiori* aux conditions g_1 et g_3, ce qui prouve que le treillis des sous-groupes d'un tel groupe est une géométrie projective, donc un treillis géométrique. Par ailleurs, la condition g_4 est également suffisante, par définition, pour que ce treillis soit distributif.

Etude détaillée de la structure des groupes satisfaisant simultanément aux conditions g_1 et g_4.

Les groupes satisfaisant à la condition g_4, c'est à dire les d-groupes, ont une structure connue d'après la proposition suivante (ORE, 1938, p. 267, théorème 4 ; SUZUKI, 1956, p. 4, théorème 2) :

<u>Proposition 5.13</u> : Un groupe G est un d-groupe si et seulement si le groupe G est localement cyclique (c'est à dire : tout sous-ensemble fini d'éléments de G engendre un sous-groupe cyclique).

Une conséquence immédiate est la suivante : un groupe fini G est un d-groupe satisfaisant à la condition g_1 si et seulement si G est un g_1-groupe cyclique (sa structure est donc bien connue : voir ci-avant chapitre 2).

La structure des d-groupes infinis, satisfaisant à la condition g_1, n'est pas aussi évidente. Nous allons l'étudier ci-dessous.

Tout d'abord, il est important de remarquer la propriété suivante :

<u>Proposition 5.14</u> : Tout groupe G localement cyclique est abélien.

En effet, dans un groupe G localement cyclique, deux éléments quelconques a et b engendrent un sous-groupe $(a) \vee (b)$ qui, par définition, est cyclique, donc abélien. C'est dire que a et b, éléments de ce groupe abélien $(a) \vee (b)$, commutent : $ab = ba$.

Donc les groupes satisfaisant aux conditions g_1 et g_4 sont nécessairement des groupes abéliens périodiques. La structure de ces derniers est connue (voir proposition 3.10) : un groupe G, périodique abélien, est produit direct d'un nombre fini, ou infini dénombrable, de sous-groupes primaires par rapport à des nombres premiers distincts :

$$G = G_{p_1} \times G_{p_2} \times \dots \times G_{p_n} \times \dots$$

$$G_{p_i} \neq G_{p_j} \Longrightarrow p_i \neq p_j$$

Nous pouvons donc appliquer à un tel groupe le théorème de décomposabilité (proposition 5.1), ce qui nous permet d'affirmer que le treillis T(G) est le produit des treillis $T(G_p)$.

Mais d'autre part, nous avons (DUBREIL-JACOTIN, LESIEUR et CROISOT, 1953, p. 79, propriété 2) :

<u>Proposition 5.15</u> : Le produit cardinal général ou restreint d'un nombre quelconque de treillis distributifs est distributif. Réciproquement, si un produit cardinal général ou restreint de treillis est distributif, chacun de ces treillis est distributif.

Donc ici : $T(G)$ est distributif si et seulement si chaque $T(G_p)$ est distributif. Nous avons ainsi ramené le problème à l'étude de la structure des p-groupes abéliens qui sont à la fois des d-groupes et des g_1-groupes.

Soit G_p un groupe localement cyclique, qui est à la fois un p-groupe et un g_1-groupe.

Supposons que G_p est fini. Nous avons vu que G_p est un d -groupe si et seulement si G_p est cyclique. G_p est alors engendré par un élement d'ordre p^k (puisque c'est aussi un p-groupe) ; comme de plus on suppose que G_p est un g_1-groupe, on a $k = 1$, ce qui signifie que G_p est un groupe cyclique d'ordre premier p.

Supposons maintenant que G_p est infini. Soient a et b deux éléments de G_p, non neutres, et tels que $(a) \neq (b)$. Alors ces deux éléments a et b engendrent un sous-groupe, soit $(a) \vee (b)$, d'ordre fini p^k avec $k > 1$, car :

- G_p, groupe périodique localement cyclique, est localement fini, et de plus c'est un p-groupe, donc l'ordre de $(a) \vee (b)$ est fini et égal à p^k;

- $(a) \vee (b)$ contient au moins $2p-1$ éléments, car $(a) \neq (b)$;

- comme $p^k \geqslant 2p-1 > p$, on a $k > 1$.

Or G_p est localement cyclique ; donc $(a) \vee (b)$ est cyclique, d'ordre p^k, avec $k > 1$. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse que G_p est un g_1-groupe. Il est donc impossible qu'un groupe G_p, localement cyclique, à la fois p-groupe et et g_1-groupe, soit infini. Donc :

<u>Proposition 5.16</u> : Un p-groupe G_p est à la fois un g_1-groupe et un d-groupe si et seulement si G_p est cyclique d'ordre fini et premier p.

Donc, compte tenu des propositions 5.1, 5.15, et 5.16, nous pouvons énoncer :

<u>Proposition 5.17</u> : Une condition nécessaire pour que le treillis T(G) des sous-groupes d'un g_1-groupe G soit distributif est que G soit produit direct d'un nombre fini ou infini de groupes cycliques dont les ordres sont premiers et premiers entre eux deux à deux.

Cette condition est-elle suffisante ? Soit G un groupe produit direct d'un nombre fini ou infini de groupes cycliques dont les ordres sont premiers et premiers entre eux deux à deux :

$G = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n \times \ldots$, P_i d'ordre premier p_i, $p_i \neq p_j$ si $i \neq j$.

Chaque facteur direct P_i est cyclique, donc, d'après la proposition 5.13, P_i est un d-groupe, c'est à dire $T(P_i)$ est distributif.

D'autre part, les ordres des facteurs directs P_i étant finis et premiers entre eux, l'énoncé de la proposition 5.1 est applicable à G, de sorte que nous avons :

$T(G) = T(P_1) \times T(P_2) \times \ldots \times T(P_n) \times \ldots$

Chaque $T(P_i)$ étant distributif, il s'ensuit, d'après la proposition 5.15, que T(G) est lui-même distributif.

En conclusion, nous pouvons énoncer :

<u>Théorème (proposition 5.18)</u> : Le treillis T(G) des sous-groupes d'un groupe G est une géométrie distributive

si et seulement si G est produit direct d'un nombre fini ou infini de groupes cycliques dont les ordres sont finis, premiers, et premiers entre eux deux à deux.

A N N E X E S

1. Groupes primaires.

Un groupe G est appelé un groupe primaire s'il est abélien et si les ordres de ses différents éléments sont des puissances (finies) d'un même nombre premier p. On dit plus précisément que G est un groupe p-primaire. Voir : DUBREIL et DUBREIL-JACOTIN (1961) page 268 ; KUROSH (1960a) page 137.

2. Isomorphisme entre ensembles ordonnés.

E et E' étant deux ensembles ordonnés, on dit qu'ils sont isomorphes s'il existe une application bijective f de E sur E' qui conserve la relation d'ordre , c'est à dire :

$$x \leq y \iff x' \leq y' \qquad (x \in E,\ y \in E,\ x' = f(x),\ y' = f(y))$$

T et T' étant deux treillis , ils sont isomorphes (en tant que treillis) s'ils le sont en tant qu'ensembles ordonnés. Voir : DUBREIL et DUBREIL-JACOTIN (1961) page 173 ; DUBREIL-JACOTIN, LESIEUR et CROISOT (1953) pages 13 et 49.

3. Groupes périodiques .

Un groupe périodique est un groupe dont tout élément est d'ordre fini. On dit aussi un groupe avec torsion, par opposition aux groupes sans torsion (c'est à dire tels que tout élément non neutre est d'ordre infini).

4. Loi de couverture.

On dit que la loi de couverture est vérifiée dans un treillis si, B étant une variété et P un point non situé dans B, la variété $B \vee P$ couvre B. Par ailleurs, on démontre que la loi de couverture et le postulat P_2 des treillis géométriques sont équivalentes : voir DUBREIL-JACOTIN, LESIEUR et CROISOT, (1953) page 250.

5. Semi modularité supérieure.

Un treillis est dit semi modulaire supérieurement si $B \succ A \wedge B \Longrightarrow A \vee B \succ A$ (voir : SATO (1949) page 135 ; SUZUKI (1956) page 24). Cette notion coïncide avec la notion de treillis satisfaisant à la condition C_1 de DUBREIL-JACOTIN LESIEUR et CROISOT (1953) pages 62 et 87.

6. Réciproque de la loi de couverture.

Dans un treillis, on dit que la réciproque de la loi de couverture est vérifiée si, A et B étant deux variétés : $B \succ A \Longrightarrow B = A \vee P$ où P est un point non situé dans A. Voir DUBREIL-JACOTIN, LESIEUR et CROISOT (1953) page 256.

7. Groupes hamiltoniens.

Un groupe hamiltonien est un groupe non abélien dont tout sous-groupe est normal. Voir ZASSENHAUS (1958) pages 159 à 161.

8. Groupe abélien élémentaire.

Un groupe G est abélien élémentaire s'il est abélien et si tous les éléments autres que l'élément neutre ont pour ordre un même nombre premier p. Voir ZASSENHAUS (1958) page 142.

9. Exposant d'un groupe.

L'exposant d'un groupe peut être défini de plusieurs façons : voir ZASSENHAUS (1958), page 108, exercices 2a, 2b, 3 et 4. Nous retiendrons par exemple : l'exposant est le plus petit commun multiple des ordre des éléments du groupe. En particulier, un groupe abélien élémentaire (annexe 8) est un groupe abélien d'exposant premier p.

B I B L I O G R A P H I E

BAER, R. (1933) - Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe. S. B. Heidelberger Akad. Wiss. Abhandlungen 2, 1933, 12-17.

BAER, R. (1938) - The applicability of lattice theory to group theory. Bull. Amer. Math. Soc., 44, 1938, 817-820.

BAER, R. (1939) - The significance of the system of subgroups for the structure of the group. Amer. Journal of Math., 61, 1939, 1-44.

DUBREIL, P. et DUBREIL-JACOTIN, M.-L. (1961) - Leçons d'algèbre moderne. Dunod, Paris, 1961.

DUBREIL-JACOTIN, M.-L., LESIEUR , L. et CROISOT, R. (1953) - Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées, et des treillis géométriques. Gauthier-Villars, Paris, 1953.

EGO, M. (1963) - Structure des demi-groupes dont le treillis des sous-demi-groupes satisfait à certaines conditions. Bull. Soc. Math. France, 91, 1963, 137-201.

ITO, N. (1951) - Note on (LM)-groups of finite order. Kôdai Math. Sem. Reports, Tokyo, 1, 1951, 1-6.

IWASAWA, K. (1941) - Ueber die endlichen Gruppen und die Verbände ihrer Untergruppen. J. Fac. Sci. Imp., Univ. Tokyo, Sect. I, 4, 1941, 171-199.

IWASAWA, K. (1943) - On the structure of infinite M-groups. Jap. Journal of Math. , 18, 1943, 709-728.

JONES, A.W. (1946) - Semi-modular finite groups and the BURNSIDE basis theorem. Abstract in Bull. Amer. Math. Soc., 52 , 1946.

KONTOROVIC, P.G., PEKELIS, A.S., STAROSTIN, A.I. (1961) - Lattice theoretic problems of group theory. Ural Gos. Univ. Mat. Zap., 3, 1961, 3-50.

KUROSH, A.G. (1960a) - The theory of groups, vol. 1 Second English edition, Chelsea Publishing Company, New York, 1960.

KUROSH, A.G. (1960b) - The theory of groups, vol. 2 Second English edition, Chelsea Publishing Company, New York, 1960.

ORE, O. (1937) - Structures and group theory, I. Duke Math. Journ. , 3, 1937, 149-174.

ORE, O. (1938 a) - Structures and group theory, II. Duke Math. Journ. , 3, 1938, 247-269.

ORE, O. (1938 b) - On the application of structure theory to groups. Bull. Amer. Math. Soc. , 44, 1938, 801-806.

RIBEIRO, H. (1948) - Lattices des groupes abéliens finis. Commentarii Mathematici Helvetici, 23, 1948, 1-17.

SATO, S. (1947) - On (UM)-groups of finite order. Zenkoko Shijô Sûgaku Danwakai, 1947.

SATO, S. (1949) - On groups and the lattices of subgroups. Osaka Mathematical Journal, 1, 1949, 135-149.

SEVRIN, L.N. (1961) - (en russe) Semigroups with certain types of subsemigroups lattices. Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 138, 1961, 796-798.

SUZUKI, M. (1951) - On the lattice of subgroups of finite groups. Trans. Amer. Math. Soc., 70, 1951, 345-371.

SUZUKI, M. (1956) - Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, Berlin, 1956.

ZACHER, G. (1952) - Determinazione dei gruppi d'ordine finito relativamente complementati. Rend. Acc. Sci. Napoli, 19,
1 1952, 200-206.

ZACHER, G. (1953) - Caratterizzazione dei gruppi risolubili d'ordine finito complementati. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 22, 1953, 111-122.

ZAPPA, G. (1956) - Questioni relative al reticolo dei sottogruppi di un gruppo : conoscenze attuali e problemi aperti. Convegno italo-francese de algebra astretta, Padova, 1956 ; Ed. Cremonese , Roma , 1957, 49-58.

ZASSENHAUS, H. (1958) - The theory of groups. Second edition. Chelsea Publishing Company , New York, 1958.