PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

R. OUZILOU

Faisceaux additifs et applications catégoriques

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1966, tome 3, fascicule 3
, p. 2-41
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1966__3_3_2_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1966 t. 3-3

FAISCEAUX ADDITIFS ET APPLICATIONS CATEGORIQUES

par R. OUZILOU

Ce n'est pas l'exposé d'une théorie nouvelle qu'on trouvera ici mais l'exploitation d'une théorie récente due à Giraud, à savoir, celle des sites et de leurs faisceaux. L'objet de ce mémoire est de montrer comment, en adaptant cette théorie aux faisceaux additifs, définis sur une catégorie pré-additive (i.e, catégorie dont le bifoncteur hom. se lit dans la catégorie Ab des groupes abéliens), on arrive à retrouver le théorème d'immersion de Freyd-Mitchell pour les petites catégories abéliennes et à étendre ce résultat aux (grandes) catégories sous certaines conditions ; en fin de compte, on retrouvera aussi le théorème de Petresco-Gabriel [7] qui donne la structure des catégories abéliennes de Grothendieck.

En nous refusant au départ la notion d'univers, nous nous sommes imposé un cadre : celui de la théorie des classes (Bernays , Von Neumann et autres...) regrettons, au passage, que cette théorie, qui connait une grande vogue à l'étranger, ne soit pas appréciée en France où il semble qu'on en soit encore aux ensembles à la Zermelo. Le lecteur, qui voit dans les univers la condition sine qua non pour "faire des catégories", se dira que nous nous sommes donné un univers (celui des ensembles, en l'occurrence) avec l'interdiction d'en sortir (les voyages intersidéraux ne sont pas encore pour demain).

Pour la bonne compréhension du texte, nous avons jugé utile de reprendre, presque à la lettre, d'importants passages de [5] ; en particulier, nous nous sommes inspiré, pour nos paragraphes 2 et 3, du très bel exposé II de cet ouvrage cité.

Lorsqu'on trouvera entre guillemets les termes habituels de la théorie des ensembles, on saura qu'ils se rapportent à des classes.

Tous les "groupes" considérés seront abéliens et les foncteurs covariants :

1. Préliminaires :

(1.1) Par "catégorie" nous entendrons la donnée d'une classe C d'éléments (les morphismes), de deux opérateurs monaires σ et β (la source et le but) partout définis sur C, et d'un opérateur binaire (la composition) sous les conditions suivantes :

(c_1) $\sigma_o\sigma = \beta_o\sigma = \sigma$, $\beta_o\beta = \sigma_o\beta = \beta$

(c_2) Le composé $g.f$ d'un couple (f,g) de morphismes est défini si, et seulement si, $\beta(f) = \sigma(g)$.

(C_3) Pour tout triplet de morphismes (f,g,h) tel que $\beta(f) = \sigma(g)$ et $\beta(g) = \sigma(h)$, les composés $h.(g.f)$ et $(h.g).f$ sont définis et égaux.

(C_4) Pour tout morphisme f, on a :

$$f.\sigma(f) = \beta(f)\circ f = f$$

La "catégorie" C sera une catégorie si, de plus :

(C_5) Les morphismes de source et de but donnés forment toujours un ensemble.

Toute source est un but et vice versa, ces morphismes particuliers seront les unités de la "catégorie" .

Une "catégorie" est déterminée par ses unités, ses classes de morphismes de but et de sources donnés, et les restrictions à ces classes de la composition ; on retrouve donc par là la définition naïve des catégories par les objets, i.e, par une collection d'ensembles (ou même de classes) en correspondance biunivoque avec les unités.

Par interversion des opérateurs σ et β et renversement de la composition on définit la "catégorie" duale C° d'une "catégorie" C .

Le lecteur mettra au compte des "catégories" la notion de foncteur (i.e, application qui commute aux opérateurs) et toute la terminologie catégorique usuelle.

Les foncteurs (additifs) d'une catégorie (pré-additive) A dans une catégorie (pré-additive) B , et leurs transformations naturelles, forment une "catégorie" que nous noterons $F(A,B)$ (resp. AB) ; si B est abélienne, ces catégories le sont aussi.

En raison de leur importance ultérieure, nous allons rappeler d'autres notions :

On dit qu'une "famille" G_i d'objets d'une "catégorie" C est un <u>système de générateurs</u> de C si le "foncteur" $\prod_i \mathrm{hom}(G_i,.)$ est fidèle, i.e, si, pour toute paire $u,v : U \rightrightarrows U'$ de morphismes distincts, il existe un morphisme $G_i \to U$ tel que $G_i \to U \overset{u}{\to} U'$ et $G_i \to U \overset{v}{\to} U'$ soient distincts ; si, de plus, ces morphismes $G_i \to U$ forment, pour chaque U, en ensemble <u>fini</u> qui ne dépend que de U, nous dirons que (G_i) est un <u>gros</u> système de générateurs de C. Lorsque (G_i) est réduite à un seul objet, on dit alors qu'un tel objet est un générateur (gros générateur) de C ; un objet G de C dont toutes les sommes (les sommes finies) sont définies est un générateur (gros générateur) de C si, et seulement si, tout objet de $\mathcal{C}$ est quotient d'une somme (somme finie) de copies de G.

Par voie duale, on définit les systèmes de séparateurs et les objets <u>séparateurs</u>.

(1.2) Etant donnés un foncteur $\mathfrak{f} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ de "catégories" et un objet B de $\mathcal{B}$ la catégorie $\mathcal{A}^B_{\mathfrak{f}}$ des <u>objets de $\mathcal{A}$ mis par $\mathfrak{f}$ au-dessous de B</u> est définie de la façon suivante : ses objets sont les couples (A,α) où A décrit la classe des objets de $\mathcal{A}$ tels que $\hom(B,\mathfrak{f}(A)) \neq \emptyset$ et α est, pour chaque A, un morphisme de B dans $\mathfrak{f}(A)$; les morphismes $(A,\alpha) \to (A',\alpha')$ de cette catégorie sont les morphismes $a : A \to A'$ de $\mathcal{A}$ tels que $\mathfrak{f}(a).\alpha = \alpha'$.

En particulier, lorsque $\mathcal{A}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{B}$ et $\mathfrak{f}$ son inclusion on retrouve la catégorie $\mathcal{A}^B$ des objets de $\mathcal{A}$ au-dessous de B.

Considérons maintenant deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{A}$; en associant à tout objet A de $\mathcal{A}$ le foncteur constant de valeur A défini sur $\mathcal{C}$, on obtient évidemment un foncteur $k : \mathcal{A} \to \mathcal{F}(\mathcal{C},\mathcal{A})$; si un objet F de $\mathcal{F}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ est tel que la catégorie $\mathcal{A}^F_k$ possède un objet initial, nous dirons que cet objet initial est la <u>limite à droite</u> du foncteur F ; par abus de notation, $\varinjlim F$ désignera l'objet de $\mathcal{A}$, but de cette limite.

<u>Exemples</u> : Si la catégorie $\mathcal{C}$ est triviale (i.e, tous ses morphismes sont neutres) on retrouve la notion de "somme".

. Si $\mathcal{C}$ est la sous-catégorie de $\mathcal{A}$ définie par une paire $A \rightrightarrows A'$, la limite à droite de $\mathcal{C}$ (i.e, de son inclusion) est le conoyau de cette paire.

. Les "sommes" fibrées de $\mathcal{A}$, i.e, les "sommes" des catégories $\mathcal{A}^A$, peuvent être considérées comme les limites à droite des foncteurs définis dans les catégories triviales auxquelles on adjoint un objet initial.

Le lecteur définira de lui-même la limite à droite d'un morphisme fonctoriel et s'assurera qu'elle est épique si les composantes de ce morphisme sont toutes épiques.

Par voie duale, on a la notion de limite à gauche (e.g, produits, noyaux, produits fibrés).

Nous dirons qu'une "catégorie" $\mathcal{A}$ <u>est complète à droite</u> si tout <u>petit</u> foncteur (i.e, défini sur une petite catégorie) à valeurs dans $\mathcal{A}$, possède une limite à droite ; on voit aisément qu'il en est ainsi si, et seulement si, toute famille d'objets de $\mathcal{A}$ possède une somme et toute paire $A \rightrightarrows A'$ de morphismes de $\mathcal{A}$ un conoyau. Si $\mathcal{A}$ est complète à droite (à gauche), il en est de même pour $\mathcal{F}(\mathcal{B},\mathcal{A})$ et pour $\mathcal{B}\mathcal{A}$, lorsque $\mathcal{B}$ et $\mathcal{A}$ sont préadditives ; dans ces "catégories" de foncteurs, les limites se calculent argument par argument.

Nous aurons besoin de définir, extra muros, les limites de "groupes" ; la théorie des classes nous refusant la catégorie des "groupes", il va falloir procéder pour cela à quelques aménagements : tout d'abord, pour élargir la notion de foncteur, nous appelerons $\mathcal{C}$-<u>système</u> de "groupes" toute transformation F soumise aux conditions de la définition naive des foncteurs, i.e :

a/ Pour tout objet U de $\mathcal{C}$, il existe un groupe unique F(U) tel que $F(1_U) = 1_{F(U)}$.

b/ Pour tout morphisme $u : U \to V$ de $\mathcal{C}$, F(u) est une application additive de F(U) dans F(V).

c/ Pour des morphismes composables $U \xrightarrow{u} V \xrightarrow{v} W$ de $\mathcal{C}$, on a toujours $F(v.u) = F(v)_\circ F(u)$.

De façon évidente, on définit un système d'applications additives de "groupes", ce qui permet de présenter la notion de limite à droite d'un

C-système de "groupes" en termes de problème universel. Tout comme pour les groupes, ce problème admet une solution ; lorsque ces "groupes" sont des ensembles, le foncteur $F : C \to Ab$ admet une limite à droite si, et seulement si, la relation d'équivalence qui définit cette "limite" est assez grossière pour fournir un ensemble quotient.

En présence d'un produit fibré $V' \rightrightarrows {U' \atop V} \rightrightarrows U$, nous dirons que $V' \to U'$ se déduit de $V \to U$ par le <u>changement de base</u> $U' \to U$.

Soit F un foncteur de C dans A ; pour tout objet U de A au-dessous de F et tout morphisme $V \to U$ de A, on définit, par changement de base, un foncteur G au-dessus de V ; si $\varinjlim F = U$ implique $\varinjlim G = V$, on dit que la limite à droite de F est <u>universelle</u>. Cette notion s'adapte aux systèmes de "groupes" et il est aisé de montrer que <u>les limites à droite de "groupes" sont universelles</u>.

Nous dirons qu'une catégorie C est <u>bonne</u> si les conditions suivantes sont satisfaites :

a/ Deux objets de C se trouvent toujours au-dessus d'un même troisième.

b/ Pour toute paire $U \rightrightarrows V$ de morphismes de C il existe un morphisme $V \to V'$ tel que $U \rightrightarrows V \to V'$ soit commutatif.

<u>Exemples</u> : Un préordre filtrant croissant ; une catégorie à 2-sommes et conoyaux.

Remarquons que toute sous-catégorie pleine, cofinale, d'une bonne catégorie est bonne.

Les limites à droite des foncteurs (des systèmes) définis sur une bonne catégorie seront dites <u>inductives</u>.

Soit C une bonne catégorie et C' une sous-catégorie pleine, cofinale (i.e, tout objet de C est au-dessus d'un objet de C') ; si la restriction à C' d'un foncteur F admet une limite à droite, il en est de même pour F et ces deux limites sont égales.

Propriétés des limites de "groupes".

1/ Une limite inductive de "groupes" est égale à la limite inductive des classes sous-jacentes.

2/ Pour qu'un "groupe" A, placé sous un système inductif F(U), soit la limite à droite de ce système, il faut et il suffit que :

α/ A soit la réunion des images des applications $F(U) \to A$.

β/ Pour deux éléments x et y de F(U) donnant le même élément de A, il existe un morphisme $U \to V$ tel que $F(U \to V)(x) = F(U \to V)(y)$.

3/ Les limites inductives de "groupes" sont exactes (Pour les démonstrations, s'inspirer de [3]).

(1.3) Une adjonction entre deux "catégories" $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ consiste en la donnée de deux foncteurs

$$\mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathcal{B} \xrightarrow{d} \mathcal{A}$$

et de deux morphismes fonctoriels :

$$\alpha : 1_{\mathcal{A}} \to dg \quad , \quad \beta : gd \to 1_{\mathcal{B}}$$

telle que, pour tout objet A de $\mathcal{A}$ (B de $\mathcal{B}$), les morphismes :

$$g(A) \xrightarrow{g(\alpha_A)} gdg(A) \xrightarrow{\beta_{g(A)}} g(A)$$

$$d(B) \xrightarrow{\alpha_{d(B)}} dgd(B) \xrightarrow{d(\beta_B)} d(B)$$

soient des unités.

De façon plus précise, on dit alors que g est adjoint à d à gauche ou encore que d est adjoint à g à droite.

Ceci a lieu si, et seulement si, les classes hom(g(A),B) et hom(A,d(B)) sont dans une correspondance biunivoque naturelle par rapport à A et B (la naturalité par rapport à l'un de ces arguments suffit d'ailleurs).

Un foncteur $d : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ admet un adjoint à gauche si, et seulement si, pour tout objet A de $\mathcal{A}$, la catégorie $\mathcal{A}_d^A$ possède un objet initial ; bien entendu, c'est cet objet initial qui donne l'adjoint en question.

Le lecteur verra de lui-même comment une adjonction se comporte avec les êtres catégoriques habituels et retiendra, pour son emploi ultérieur, le résultat suivant :

(1.3.1) Lemme : soit une adjonction (g,d ; α,β) entre deux catégories $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$

$\mathcal{B}$; alors :

1/ d(resp. g) est fidèle si, et seulement si, β (resp. α) est à composantes épiques (moniques).

2/ d (resp. g) est pleinement fidèle si, et seulement si, β (resp. α) est inversible.

Pour montrer , e.g, que la pleine fidèlité de d équivaut à l'inversibilité de β , il suffit de remarquer que l'application de hom(B,B') dans hom(gd(B),B') définie par :

$$u \longrightarrow \beta_{B'} . gd(u) \qquad ; u : B \to B'$$

est bijective si, et seulement si, d est pleinement fidèle ; or, la naturalité de β fait que cette application est égale à hom(β_B,B').

Corollaire : Si $\mathcal{B}$ est balancée (i.e, tout bimorphisme est inversible) cette adjonction est une équivalence si, et seulement si, g est pleinement fidèle et d fidèle.

Considérons maintenant trois catégories pré-additives $\mathcal{A}$,$\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ($\mathcal{C}$ petite) et un foncteur additif $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$; on définit alors un foncteur $f^* : \mathcal{DA} \to \mathcal{CA}$

en associant à tout objet G de $\mathcal{D}A$ et tout-objet U de C, l'objet de A :

$$f^*(G)(U) = Gf(U)$$

Avec ceci, on a l'important résultat que voici :

(1.3.2) Lemme de Kan [4]

Si A est complète à droite (à gauche) f^* possède un adjoint à gauche (à droite) noté ${}_*f$ (resp. f_*)

Le foncteur ${}_*f$, par exemple, est obtenu de la façon suivante : pour tout objet V de $\mathcal{D}$, on considère la catégorie C_V^f des objets de C mis par f au-dessus de V et l'on désigne par i_V^f le foncteur source de C_V^f dans C ; il est aisé de voir alors que, pour tout objet F de CA :

$$\varinjlim F.i_V^f \quad (= {}_*f(F)(V))$$

est fonctoriel en V et que le morphisme fonctoriel $F \to f^*.{}_*f(F)$ dont les composantes sont les morphismes évidents $F(U) \to \varinjlim F.i_{f(U)}^f$ est un objet initial de la catégorie des objets de $\mathcal{D}A$ mis par f^* au-dessous de F.

Corollaire 1 : Si A est complète à droite (à gauche) les foncteurs d'évaluation $V^* : \mathcal{D}A \to A$, définis, pour tout objet V de $\mathcal{D}$, par :

$$V^*(G) = G(V)$$

admettent chacun un adjoint à gauche (à droite).

Pour cela, il suffit de réduire C à une unité de $\mathcal{D}$. Calculons, e.g, l'adjoint à gauche ${}_*V$: pour $C = \{1_V\}$, toute catégorie $C_{V'}^f$ est triviale et ses objets sont les morphismes de V dans V', par conséquent :

$${}_*V(A)(V') = \sum_{\hom(V,V')} A$$

et le morphisme d'adjonction $A \to V^*.{}_*V(A) = \sum_{\mathrm{end}(V)} A$ est la composante d'indice 1_V de cette somme.

Corollaire 2 : Si $\mathcal{A}$ est complète, un morphisme de $\mathcal{DA}$ est monique (épique) si, et seulement si, ses composantes le sont ; pour tout objet projectif P (injectif I) de $\mathcal{A}$, les objets $_*U(P)$ (resp. $U_*(I)$) sont projectifs (injectifs) dans $\mathcal{DA}$; pour tout générateur G (séparateur S) de $\mathcal{A}$, la classe des $_*U(G)$ (des $U_*(S)$) est un système de générateur (séparateurs) de $\mathcal{DA}$.

Corollaire 3 : Si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne, complète, à séparateur injectif, et si $\mathcal{D}$ est une petite catégorie pré-additive, $\mathcal{DA}$ hérite de ces propriétés de $\mathcal{A}$.

Corollaire 4 : Si $\mathcal{D}$ est une petite catégorie pré-additive, $\mathcal{D}Ab$ est à enveloppes injectives.

Car, tout comme Ab, cette catégorie de foncteurs satisfait à l'axiome de Grothendieck, i.e, pour tout sous-objet U d'un objet V et toute famille filtrante croissante V_α de sous-objets de V, on a : $\sup(U \cap V_\alpha) = U \cap \sup V_\alpha$; on sait qu'alors, avec assez d'injectifs (cor. 3), on obtient des enveloppes injectives.

Corollaire 5 - (Yoneda) : Pour tout objet V de $\mathcal{D}$ et tout objet G de $\mathcal{D}Ab$, l'application de hom(hom(V,.),G) dans G(V) définie par :

$$y(\phi) = \phi_V(1_V) \ , \quad \phi\colon \hom(V,.) \to G$$

est bijective, naturelle en G et V.

Tout d'abord, rappelons que $_*V(Z) = \sum_{\hom(V,.)} Z = \hom(V,.)$ de sorte que, l'application z de hom(hom(V,.),G) dans hom(Z,G(V)) qui associe à tout ϕ le composé de ϕ_V avec le morphisme d'adjonction $Z \to V^*.{}_*V(Z) = \mathrm{end}(V)$ est bijective ; or ce morphisme d'adjonction consiste à transformer le nombre 1 en l'identité de V et, en identifiant les applications additives $Z \to G(V)$ à leurs en 1, on voit alors que z devient y.

La naturalité de y en F résulte de l'adjonction sa naturalité en V est une paraphrase de celle de ϕ .

L'application inverse de y est fournie par :

$$\bar{y}^1(v)_U\ (V \to U) = G(V \to U)(v)\ ;\ v \in G(V), U \in \mathcal{D}$$

En particulier, pour $G = \hom(V',.)$ on a :

$$\bar{y}^1(V' \to V) = \hom(V' \to V,.)$$

d'où le :

Corollaire 6 : Le foncteur $h : V \to \hom(.,V)$ de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}^\circ Ab$ est pleinement fidèle.

Ce qui nous permettra d'identifier chaque objet de $\mathcal{D}$ à l'objet de $\mathcal{D}^\circ Ab$ qu'il représente.

Les objets de $\mathcal{D}^\circ Ab$ seront appelés les préfaisceaux additifs de groupes définis sur $\mathcal{D}$; de façon plus générale, pour deux catégories préadditives A et $\mathcal{D}$, les objets de $\mathcal{D}^\circ A$ seront les préfaisceaux à valeurs dans A définis sur $\mathcal{D}$.

Pour en terminer avec ces prémisses, voici encore un résultat important :

Soit C une catégorie pré-additive, pour tout objet P de $C^\circ Ab$, désignons par C_P la catégorie des objets de C pointés par P, i.e, les objets de C_P sont les couples (U,u), $u \in P(U)$ et les morphismes $(U,u) \to (V,v)$ sont les morphismes $U \to V$ de C pour lesquels $P(u \to V)(v) = u$; il existe un foncteur évident de C_P dans C , c'est le foncteur source i_P.

Ceci dit, on a le :

(1.3.3) Lemme : tout objet P de $C^\circ Ab$ est la limite à droite du foncteur $h.i_P$.

Pour mettre l'objet P au-dessous de $h.i_P$, considérons, pour tout objet (U,u) de C_P et tout objet V de G, l'application :

$$\phi_V(U,u) : \hom(V,U) \to P(V)$$

définie par :

$$\phi_V(U,u)(f) = P(f)(u) \qquad , \quad f : V \to U$$

ce qui, de façon évidente, donne les morphismes fonctoriels :

$$\phi(U,u) : \; h.i_P\,(U,u) = h(U) \to P. \text{ et } i$$

et il est aisé de voir que ces morphismes sont compatibles avec ceux de C_P.

Il reste donc à établir que, pour tout V :

$$P(V) = \varinjlim \hom(V,.)\, i_P$$

Comme, pour tout élément v de P(V) :

$$\phi_V(V,v)(1_V) = v$$

on voit tout d'abord que l'application :

$$\sum_{(U,u)\in C_P} \hom(V,U) \to P(V)$$

de composantes $\phi_V(U,u)$, est surjective ; pour montrer qu'elle induit une bijection de $\varinjlim \hom(V,.)i_P$ sur P(V), il suffira de prouver que l'équivalence (R) associée à cette application est plus fine que l'équivalence (S) qui définit cette limite :

A cet effet, considérons deux objets (U_1,u_1) et (U_2,u_2) de C_P et deux morphismes $f_1 : V \to U_1$ et $f_2 : V \to U_2$ de C, congrus (R),

i.e, $P(f_1)(u_1) = P(f_2)(u_2) \quad (=v)$;

ceci fait de (V,v) un objet de C_P et de f_1 et f_2 des morphismes de C_P et, comme on peut écrire alors que :

$$f_i = \hom(V,.).i_P(f_i)(1_V) \quad ; \quad i = 1,2$$

on a bien $f_1 \equiv 1_V \equiv f_2$ (S) C.Q.F.D.

En gros, ceci revient à dire que, dans $C^\circ Ab$, tout objet est limite à droite des préfaisceaux représentables qui sont au-dessus de lui.

Corollaire : Si A est une catégorie additive complète à droite, tout foncteur additif $f : C \to A$ se prolonge suivant un foncteur unique (à un isomorphisme près) ${}_*f : C^\circ Ab \to A$ qui préserve les limites à droite. Ce foncteur ${}_*f$ est adjoint à gauche au foncteur $f_* : A \to \hom(f.,A)$.

Il est aisé de voir, en effet, que le foncteur $P \to \varinjlim f.i_P$ est le seul à répondre à la question.

A titre de première application, nous allons retrouver une propriété caractéristique des catégories de foncteurs additifs de groupes (cf[1], p. 109) :

Théorème : Si une catégorie A , additive, balancée, complète à droite, possède une famille génératrice de petits projectifs G_i alors, elle est é équivalente à la catégorie des préfaisceaux additifs de groupes définis sur la sous-catégorie pleine G de A engendrée par les G_i.

Rappelons qu'un objet P d'une catégorie additive A en est un petit projectif si le foncteur hom(P,.) de A dans Ab préserve les limites à droite.

Pour prouver ce théorème, remarquons que, dans l'adjonction $({}_*f, f^*)$, définie selon le corollaire précédent par l'inclusion $f : G \to A$, le foncteur f^* est fidèle et commute aux limites à droite ; or, ce dernier point entraine que $f^*.{}_*f$, dont la restriction à G est l'identité, reste dans $G^\circ Ab$ isomorphe au foncteur neutre, i.e, ${}_*f$ est pleinement fidèle et il suffit alors d'appliquer le corollaire de (1.3.1).

Corollaire : Lorsque (G_i) est réduite à un seul objet G (i.e, G est un petit générateur projectif) alors A est équivalente à la catégorie des modules à droite sur l'anneau des endomorphismes de G.

Remarque : Ce théorème, énoncé pour une catégorie abélienne A , est dû à Freyd ; nous n'en donnons ici qu'une légère amélioration (additif + balancée). Il est amusant de retrouver à partir de là une petite chose bien connue : à savoir que la catégorie des espaces vectoriel topologiques sur un corps topologique est balancée si, et seulement si, ce corps est discret.

2 - Sites et faisceaux :

(2.1) Rappelons qu'une topologie T (de Grothendieck) sur une catégorie C s consiste en la donnée, pour tout objet U de C , d'une classe de familles $(U_\alpha \to U)$ (les recouvrements de T) sous les conditions suivantes :

(t.1) Les familles $U_\alpha \to U = 1_U$ sont des recouvrements

(t.2) Pour tout recouvrement $U_\alpha \to U$ et tout morphisme $V \to U$, les produits fibrés $V_\alpha \begin{smallmatrix}\to & V & \to \\ \to & U_\alpha & \to\end{smallmatrix} U$ sont définis et la famille $V_\alpha \to V$, ainsi obtenue par changement de base, est un recouvrement.

(t.3) Si $U_\alpha \to U$ est un recouvrement et si, pour tout α , la famille $U_{\beta\alpha} \to U_\alpha$ est un recouvrement alors, la famille composée $U_{\beta\alpha} \to U_\alpha \to U$ est un recouvrement.

Exemples :

1/ La topologie grossière où les recouvrements sont neutres ; la topologie discrète où toute famille $U_\alpha \to U$ est un recouvrement.

2/ Dans une catégorie à 2-produits fibrés, les épimorphismes universels constituent, un à un, les recouvrements d'une topologie (la topologie épique). Cette topologie sera utilisée pour les catégories abéliennes où l'on sait notamment, que les épimorphismes sont universels.

Définition : Un préfaisceau P défini dans C et à valeurs dans A est un infrafaisceau pour une topologie T sur C si, pour tout recouvrement

$U_\alpha \to U$ de $\mathcal{T}$ et tout objet A de $\mathcal{A}$, l'application :

$$\hom(A,P(U)) \to \prod_\alpha \hom(A,P(U_\alpha))$$

est <u>injective</u>.

Si, de plus, le diagramme

$$\hom(A,P(U)) \to \prod_\alpha \hom(A,P(U_\alpha)) \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta} \hom(A,P(U_{\alpha\beta}))$$

défini par les produits fibrés :

$$U_{\alpha\beta} \rightrightarrows \begin{matrix} U_\alpha \\ U_\beta \end{matrix} \rightrightarrows U$$

représente un <u>noyau</u>, on dit que P est un <u>faisceau</u> pour $\mathcal{T}$.

<u>Remarques</u> :

1/ Si $\mathcal{A}$ est à produits, ceci revient à dire que $P(U) \to \prod_\alpha P(U_\alpha)$ est monique (pour lef infrafaisceaux) ; que $P(U) \to \prod_\alpha P(U_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha\beta} P(U_{\alpha\beta})$ est un noyau (pour les faisceaux).

2/ En explicitant complètement la définition, on remarquera que P est un faisceau si, et seulement si, la famille $P(U) \to P(U_\alpha)$ représente P(U) comme limite à gauche du système de diagrammes.

$$\begin{matrix} P(U_\alpha) & \to & \\ P(U_\beta) & \to & P(U_{\alpha\beta}) \end{matrix}$$

obtenu lorsque U_α et U_β décrivent le recouvrement $(U_\alpha \to U)$.

Avant de déterminer les faisceaux de la topologie épique d'une catégorie abélienne, procédons à quelques généralités :

Dans une catégorie à 2-produits fibrés, le produit fibré $R \rightrightarrows A$ d'un morphisme $A \to A'$ par lui-même s'appelle la <u>relation d'équivalence</u> de ce morphisme ; il est aisé de voir que les composantes de cette relation d'équivalence ont une section commune et que cette section est le noyau de la relation d'équivalence ; de plus, lorsque $A \to A'$ est épique, c'est le conoyau de sa relation d'équivalence si, et seulement si, $R \rightrightarrows A \to A'$ représente une somme fibrée or cette dernière condition est satisfaite dans les catégories abéliennes. Ceci dit, on a la :

(2.1.1) <u>Proposition</u> : Soit A et B deux catégories abéliennes ; dans $A^{o}B$, les <u>infrafaisceaux</u> (<u>faisceaux</u>) de la <u>topologie épique</u> de A sont les préfaisceaux qui transforment les <u>épimorphismes</u> en <u>monomorphismes</u> (les <u>conoyaux</u> en <u>noyaux</u>).

La première assertion étant triviale, démontrons la seconde.

Si P est un préfaisceau exact à gauche, il transforme tout conoyau $R \rightrightarrows A \to A'$ en un noyau $P(A') \to P(A) \rightrightarrows P(R)$; or, d'après ce qui précède, c'est ce qui se passe lorsque $R \rightrightarrows A$ est la relation d'équivalence d'un épimorphisme $A \to A'$; ainsi, P est un faisceau pour la topologie épique de A .

Réciproquement, si F est un faisceau pour cette topologie, considérons une suite exacte $0 \to A'' \to A \to A' \to 0$ et la relation d'équivalence $u,v : R \rightrightarrows A$ de $A \to A'$ alors, on sait que $A'' \to A$ se factorise suivant $A'' \to R \overset{u}{\to} A$ où $A'' \to R$ est le noyau de v ce qui donne une suite exacte et fissible $0 \to A'' \rightleftarrows R \underset{\leftarrow}{\overset{v}{\rightarrow}} A \to 0$; comme F est additif, il s'ensuit dans B, un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & F(A') \arrow[r] \arrow[d, dashed] & F(A) \arrow[d, dashed] & & \\
0 \arrow[r, dashed] & F(A) \arrow[r, dashed, shift left] & F(R) \arrow[l, dashed, shift left] \arrow[r, dashed, shift left] & F(A'') \arrow[l, dashed, shift left] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dont le carré représente le noyau de $F(A) \rightrightarrows F(R)$; comme les morphismes de cette paire possèdent une rétraction commune, ce carré représente aussi un produit fibré et, par conséquent, la suite $0 \to F(A') \to F(A) \to F(A'')$ est exacte.

(2.2) Soit C une catégorie pré-additive et U un objet de C ; tout sous-objet de U dans $C^{o}Ab$ sera appelé un <u>idéal</u> sur U ; l'immersion canonique de C dans

$C^\circ Ab$ permet d'expliciter cette définition dans C : en effet, un idéal sur U consiste en la donnée, pour tout objet V de C, d'un groupe de morphismes de V dans U de telle sorte que ces groupes soient compatibles avec les morphismes $V' \to V$ de C ce qui, en clair, signifie qu'un idéal sur U est une classe Γ de morphismes de but U qui satisfait aux conditions suivantes :

(i.1) Pour tout morphisme $V \to U$ de Γ et tout morphisme $V' \to V$ de C, le morphisme composé $V' \to V \to U$ appartient à Γ.

(i.2) Pour tout paire $v,v' : V \rightrightarrows U$ de morphismes de Γ, $v+v'$ appartient à Γ.

Il est clair que toute intersection d'idéaux sur U est un idéal sur U ce qui permet de parler de l'idéal sur U engendré par une famille $(U_i \to U)$ de morphismes de C : cet idéal est constitué par les morphismes $V \to U$ qui se décomposent en une somme de morphismes de la forme $V \to U_i \to U$.

D'après Yoneda et (1.3.3), on peut écrire (abusivement) pour tout idéal Γ sur U :

$$\Gamma = \varinjlim_{V \in \Gamma} V \qquad (C^\circ Ab)$$

i.e, le préfaisceau Γ est limite à droite du foncteur source de la catégorie (Γ) dont les objets sont les morphismes $V \to U$ de Γ et les morphismes sont les morphismes $V' \to V$ compatibles avec ces objets.

Par changement de base $u : U' \to U$, on passe d'un idéal Γ sur U à un idéal $u^{-1}(\Gamma)$ sur U ; explicitement, cet idéal est constitué par les morphismes $V' \to U'$ tels que $V' \to U' \to U$ appartienne à Γ.

Nous appellerons pré-site $\mathscr{C}$ sur C la donnée, pour tout objet U de C, d'une classe non vide $\mathscr{C}(U)$ d'idéaux sur U sous les conditions suivantes :

(s.1) Chaque $\mathscr{C}(U)$ contient les idéaux sur U plus grands qu'un idéal de $\mathscr{C}(U)$;

(s.2) Les $\mathcal{C}(U)$ sont stables par changement de base.

Explicitement, cette dernière condition signifie que, pour tout morphisme $u : U' \to U$ de C et pour tout idéal Γ de $\mathcal{C}(U)$, l'idéal $u^{-1}(\Gamma)$ appartient à $\mathcal{C}(U')$.

Remarquons que (s.1) entraine que toute $\mathcal{C}(U)$ contient l'idéal trivial sur U (i.e, tous les morphismes de but U sont dans cet idéal).

Un pré-site sera d'autant plus fin qu'il comportera plus d'idéaux.

Etant donné un pré-site $\mathcal{C}$ sur C, on dit qu'un monomorphisme $P' \to P$ de $C^{o}Ab$ est couvrant si, par changement de base au-dessus des objets de C, il donne des idéaux de $\mathcal{C}$; il est clair qu'un idéal $\Gamma \to U$ est couvrant si, et seulement si, il appartient $\mathcal{C}(U)$.

Dans $C^{o}Ab$, la classe des monomorphismes couvrants pour $\mathcal{C}$ est stable par changement de base, de plus :

a/ Tout isomorphisme est couvrant.

b/ Deux monomorphismes composables sont couvrants dès que leurs composé l'est.

On dit qu'un pré-site $\mathcal{C}$ sur une catégorie pré-additive C est un <u>site</u> si les monomorphismes couvrants de $\mathcal{C}$ sont stables par composition ; cette condition se traduit aisément dans C suivant :

(s.3) Pour tout objet U de C et tout idéal Γ de $\mathcal{C}(U)$, un idéal Γ' sur U, plus petit que Γ, appartient à $\mathcal{C}(U)$ dès que, pour tout morphisme $V \to U$ de Γ l'idéal sur V, obtenu à partir de Γ' par changement de base, appartient à $\mathcal{C}(V)$.

<u>Exemples</u> :

1/ Le site grossier dont les idéaux couvrants sont triviaux ; le site discret où tout idéal est couvrant.

2/ Il est aisé de voir que les idéaux engendrés par les recouvrements d'une topologie et les idéaux plus grands forment un site ; à la topologie grossière (discrète) correspond le site grossier (discret).

Des axiomes de sites, il résulte immédiatement que :

(2.2.1) Proposition : Pour tout site $\mathcal{C}$ sur C et tout objet P de $C^\circ Ab$, l'ordre $\mathcal{C}(P)$ des sous-objets couvrants de P est un filtre.

Si $\mathcal{C}$ est le site d'une topologie sur C, la classe $\mathcal{B}(U)$ des idéaux engendrés par les recouvrements d'un objet U est une base du filtre $\mathcal{C}(U)$ et le système des $\mathcal{B}(U)$ est stable par les changements de base $U' \to U$. De façon générale, nous dirons, pour un site $\mathcal{C}$, qu'un tel système $\mathcal{B}$ de bases $\mathcal{B}(U)$ est une base de $\mathcal{C}$.

Par rapport à un site $\mathcal{C}$ sur C, on dit qu'un morphisme $P' \to P$ de $C^\circ Ab$ est couvrant si son image est un sous-objet couvrant de P ; un tel morphisme sera bicouvrant si, de plus, le noyau de sa relation d'équivalence est couvrant. On remarquera que, pour tout diagramme commutatif $P'' \rightrightarrows P' \to P$ où $P' \to P$ est bicouvrant, le noyau de $P'' \rightrightarrows P'$ est couvrant ; réciproquement, si, pour tout diagramme commutatif $U \rightrightarrows P' \to P$, tel que U soit un objet de C et $P' \to P$ un morphisme couvrant, le noyau de $U \rightrightarrows P'$ est couvrant alors, $P' \to P$ est bicouvrant.

Exemples : tout épimorphisme est couvrant ; tout monomorphisme couvrant est bicouvrant.

(2.2.2) Proposition : Pour un site $\mathcal{C}$ sur C, les morphismes couvrants (bicouvrants) de $C^\circ Ab$ sont stables, par changement de base. (vérification de routine).

Remarque : Pour qu'un morphisme $P' \rightrightarrows P$ soit couvrant, il suffit que, pour tout morphisme $U \to P$ au-dessous d'un objet de C, on puisse trouver une insertion commutative $Q \begin{smallmatrix} \to U \to \\ \to P' \to \end{smallmatrix} P$ où $Q \to U$ est couvrant.

(2.2.3) Proposition : Les morphismes couvrants (bicouvrants) sont stables par composition.

La seconde assertion résulte aisément de la première qu'on démontre en se limitant à un monomorphisme couvrant $P' \to P$ et à un épimorphisme $P \to P''$ sans perte de généralité : soit $U \to P''$ un objet de C au-dessus de P'' ; on sait alors que $P(U) \to P''(U)$ est surjective, i.e, d'après Yoneda, que $hom(U,P) \to hom(U,P'')$ est surjective, i.e, $U \to P''$ se factorise à travers P ; de la sorte, en composant le produit fibré $\Gamma \begin{smallmatrix}\to U \to \\ \to P' \to\end{smallmatrix} P$ avec $P \to P''$, on obtient une insertion commutative répondant aux conditions de la remarque précédente, ce qui fait que $P' \to P \to P''$ est couvrant.

Corollaire 1 : Si, dans un diagramme commutatif $Q' \to Q \to P$ de $C^{\circ}\mathcal{A}b$, les morphismes $Q' \to P$ et $Q \to P$ sont bicouvrants alors, $Q' \to Q$ l'est aussi.

(Vérification diagrammatique).

Corollaire 2 : La catégorie $\mathcal{C}^2(P)$ des objets de $C^{\circ}\mathcal{A}b$ bicouvrant un préfaisceau P pour un site $\mathcal{C}$ est à 2-produits et noyaux.

(La catégorie duale est donc une bonne catégorie).

(2.3) Relativement à un site $\mathcal{C}$ sur C, on dit qu'un objet P de $C^{\circ}\mathcal{A}b$ est un infrafaisceau (faisceau) si, pour tout objet U de C et tout idéal couvrant $\Gamma \to U$, l'application

$$hom(U,P) \to hom(\Gamma,P)$$

est injective (bijective).

Explicitement cette application se présente sous la forme

$$P(U) \to \varprojlim_{V\in\Gamma} P(V)$$

On remarquera que tout produit de faisceaux (infrafaisceaux) est un faisceau (infrafaisceau), que tout sous-objet d'un infrafaisceau est un infrafaisceau et que tout noyau de faisceaux est un faisceau ; ainsi, la sous-catégorie pleine de $C^{\circ}Ab$, constituée par les faisceaux d'un site est <u>complète à gauche</u>.

On remarquera aussi que, pour une suite exacte $0 \to P' \to P \to P'' \to 0$ de préfaisceaux.

a/ P est un faisceau (infrafaisceau) dès que P' et P'' sont des faisceaux (infrafaisceaux).

b/ Si P est un infrafaisceau et P' un faisceau, P'' est un infrafaisceau.

(Pour cela, on appliquera le lemme des 4 au diagramme défini par cette suite exacte et un idéal $\Gamma \to U$).

Si, pour tout objet U, $\mathfrak{B}(U)$ est une base du filtre $\mathscr{C}(U)$, il est clair que P est un infrafaisceau dès que, pour les idéaux $\Gamma \to U$ de $\mathfrak{B}(U)$, les applications $\hom(U,P) \to \hom(\Gamma,P)$ sont injectives ; pour les faisceaux, on a un résultat analogue si l'on précise $\mathfrak{B}$, à savoir :

(2.3.1) <u>Proposition</u> : Si $\mathfrak{B}$ est une <u>base</u> du site $\mathscr{C}$, un préfaisceau P est un faisceau pour $\mathscr{C}$ dès que les applications $P(U) \to \hom(\Gamma,P)$, <u>définies par les idéaux</u> $\Gamma \to U$ de $\mathfrak{B}$, sont bijectives.

En effet, tout idéal Γ' de $\mathscr{C}(U)$ contient un idéal Γ de $\mathfrak{B}(U)$ et, pour les produits fibrés :

$$\Delta \begin{smallmatrix} \to V \to \\ \to \Gamma \to \end{smallmatrix} \Gamma' \qquad , \qquad V \in C$$

on a, d'après (1.3.3) et l'universalité des limites à droite de $C^{\circ}Ab$:

$$\Gamma \to \Gamma' = \varinjlim_{V \in \Gamma'} (\Delta \to V)$$

d'où $\hom(\Gamma',P) \to \hom(\Gamma,P) = \varprojlim_{V \in \Gamma'} . \hom(V,P) \to \hom(\Delta,P)$

Mais, comme les diagrammes composés :

$$\Delta \begin{smallmatrix} \to V \to \\ \to \Gamma \to \end{smallmatrix} \Gamma' \to U$$

représentent des produits fibrés, les composantes de cette limite sont bijectives.

Corollaire : Soit T une topologie sur C et $\mathscr{C}$ le site qu'elle définit ; alors, un objet P de $C^{\circ}Ab$ est un infrafaisceau (faisceau) pour T si, et seulement si, c'est un infrafaisceau (faisceau) pour $\mathscr{C}$.

En effet, d'après ce qui précède, P est un $\mathscr{C}$-faisceau si, et seulement si, les idéaux Γ engendrés par les recouvrements $U_{\alpha} \to U$ donnent $P(U) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{V \in \Gamma} P(V)$ et, pour prouver que cette limite à gauche est bien le noyau de $\prod_{\alpha} P(U_{\alpha}) \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta} P(U_{\alpha\beta})$, il suffit de s'appuyer sur le résultat général suivant :

Lemme : Etant donnée, dans une catégorie I , une famille cofinale d'objets (i_{α}) telle que tous les produits $i_{\alpha} \times i_{\beta}$ existent, on ne change pas la limite à gauche d'un préfaisceau P, défini sur I , en "réduisant" les morphismes de I aux composantes de ces produits $i_{\alpha} \times i_{\beta}$

(Pour cela, on verra que toute valeur au-dessus des $P(i_{\alpha}) \to P(i_{\alpha} \times i_{\beta}) \leftarrow P(i_{\beta})$ peut être placée canoniquement au-dessus de P).

(2.3.2) Proposition : Si F est un infrafaisceau (faisceau) pour un site $\mathscr{C}$ sur C, pour tout morphisme couvrant (bicouvrant) $P \to Q$, l'application $\hom(Q,F) \to \hom(P,F)$ est injective (bijective).

En effet, si $P \to Q$ est monique, $\hom(Q,F) \to \hom(P,F)$ est, d'après (2.3.1) une limite à gauche d'injections (bijections) ce qui entraine la seconde assertion dans ce cas et la première en général.

Pour avoir la seconde assertion en général, il suffira de supposer $P \to Q$ épique ; dans ce cas, $P \to Q$ est le conoyau de sa relation d'équivalence $R \rightrightarrows P$ (cette propriété est évidente pour les groupes donc pour les préfaisceaux) et, par conséquent, $\hom(Q,F) \to \hom(P,F) \rightrightarrows \hom(R,F)$ est un noyau ; comme le noyau $S \to R$ de $R \rightrightarrows P$ est couvrant, il s'ensuit que $\hom(R,F) \to \hom(S,F)$ est bijective, i.e, les deux morphismes $\hom(P,F) \rightrightarrows \hom(R,F)$ sont égaux et qu'ainsi, $\hom(Q,F) \to \hom(P,F)$ est bijective.

3. Beaux sites. :

(3.1) Nous dirons qu'un site $\mathcal{C}$ sur une catégorie pré-additive C est beau si :

(b.1) Il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}$ telle que, pour tout objet U de C et tout idéal Γ de $\mathcal{B}(U)$, les classes $\hom(\Gamma,P)$, $P \in C^{\circ}Ab$, sont des ensembles.

(b.2) Chaque base $\mathcal{B}(U)$ possède une base $\mathcal{B}'(U)$ qui est un ensemble.

Exemples :

1/ Sur une petite catégorie, tout site est beau.

2/ Le site d'une topologie satisfait à la condition (b.1) parce que, pour l'idéal Γ engendré par un recouvrement $U_\alpha \to U$, on a (2.3.1 ; cor) :

$$\hom(\Gamma,P) = \ker . \prod_\alpha P(U_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta} P(U_{\alpha\beta})$$

En général, on n'est pas assuré de (b.2), cependant :

3/ Si les épimorphismes de C sont universels (i.e stables par changement de base) et si C possède un générateur (gros générateur) G dont toutes les sommes ΣG (les sommes finies) sont définies alors, le site de la topologie épique de C est beau : en effet, soit $V \to U$ un épimorphisme ; de toute paire $U \rightrightarrows U'$ de morphismes distincts on déduit, par composition, une paire $V \rightrightarrows U'$ de morphismes distincts ; il existe alors un morphisme $G \to V$ qui, par composition, donne une paire $G \rightrightarrows U'$ de morphismes distincts ce qui signifie qu'on a un ensemble (fini) I, de morphismes de G dans U factorisés par $V \to U$, tel que $\sum_I G \to U$ soit épique ; ainsi, tout idéal engendré par un épimorphisme de bit U contient l'idéal engendré par un épimorphisme $\sum_I G \to U$ où I est une partie (finie) de $\hom(G,U)$.

(3.2) Nous allons voir maintenant comment, sur un beau site, on peut associer à tout préfaisceau P un faisceau "universel".

En général, l'expression $\varinjlim_{\Gamma \in \mathscr{C}(U)} .\hom(\Gamma,P)$ (i.e, la limite à droite du "foncteur" obtenu en composant $\hom(.,P)$ avec le foncteur source de $\mathscr{C}(U)$ dans $\mathcal{C}$) n'a pas de sens ; mais, si le site est beau, les classes $\hom(\Gamma,P)$ sont des ensembles lorsque Γ décrit une (belle) base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{C}$ et, pour une (petite) base $\mathscr{B}'(U)$ de $\mathscr{B}(U)$, $\varinjlim_{\Gamma\in\mathscr{B}'(U)} .\hom(\Gamma,P)$ est alors définie, ce qui permet, vue la bonne catégorie $\mathscr{C}(U)^{\circ}$, de définir $\varinjlim_{\Gamma\in\mathscr{B}(U)} .\ \hom(\Gamma,P) = P^{+}(U)$.

Le changement de base $\Gamma' \underset{x}{\overset{\gamma'}{\rightrightarrows}} \begin{matrix}U'\\ \Gamma\end{matrix} \underset{\gamma}{\overset{u}{\rightrightarrows}} U$, défini par un morphisme u de $\mathcal{C}$ donne, à la limite, un morphisme $P^{+}(U) \to P^{+}(U')$ qui, par transitivité, fait de P^{+} un préfaisceau et, en désignant par Φ_{γ} le morphisme composé $\hom(\Gamma,P) \to P^{+}(U) \xrightarrow{\sim} \hom(U,P^{+})$, on a alors le diagramme commutatif.

$$\begin{tikzcd}
\hom(\Gamma,P) \arrow[r, "\Phi_{\gamma}"] \arrow[d] & \hom(U,P^{+}) \arrow[d] \\
\hom(\Gamma',P) \arrow[r, "\Phi_{\gamma'}"] & \hom(U',P^{+})
\end{tikzcd}$$

c'est-à-dire que :

(1) $$\Phi_{\gamma'}(f.x) = \Phi_{\gamma}(f).u \quad , \quad f : \Gamma \to P$$

Par ailleurs, on peut supposer que l'idéal $1 : U \to U$ appartient à $\mathscr{B}(U)$ ce qui donne une application additive

$$P(U) \xrightarrow{\Pi_U} P^{+}(U)$$

naturelle en U d'où :

$$P(U) \xrightarrow{\Pi_U} P^{+}(U) = \hom(U,P) \xrightarrow{\hom(U,\Pi)} \hom(U,P^{+}) = \Phi_1$$

c'est-à-dire que :

(2) $$\Pi.g = \Phi_1(g) \quad , \quad g : U \to P$$

Avec ceci, on a le :

<u>Lemme</u> : Pour tout idéal $\gamma : \Gamma \to U$ de $\mathscr{B}$ et tout morphisme $f : \Gamma \to P$, le diagramme de préfaisceaux

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\Pi"] & P^+ \\ \Gamma \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\gamma"] & U \arrow[u, "\Phi_\gamma(f)"'] \end{tikzcd}$$

est <u>commutatif</u>.

A cet effet, considérons les éléments $u : V \to U$ de Γ; ils se factorisent dans $C^\circ Ab$ suivant $V \xrightarrow{x} \Gamma \xrightarrow{\gamma} U$ et :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, equal] \arrow[d, "x"'] & V \arrow[d, "u"] \\ \Gamma \arrow[r, "\gamma"] & U \end{tikzcd}$$

est évidemment un produit fibré ; les formules (2) et (1) donnent alors :

$$\Pi f.x = \Phi_1(f.x) = \Phi_\gamma(f).u = \Phi_\gamma(f).\gamma.x$$

et, comme $\Gamma = \varinjlim V$, il s'ensuit que $\Pi.f = \Phi_\gamma(f).\gamma$

(3.2.1) <u>Proposition</u> : Avec les notations précédentes :

a/ Π est bicouvrant ;

b/ P^+ est un infrafaisceau ;

c/ Si P est un infrafaisceau, Π est monique et P^+ est un faisceau ;

d/ Si P est un faisceau, Π est inversible.

Tout d'abord, on sait que la limite inductive $P^+(U) = \hom(U,P^+)$ est la réunion des images de ses composantes, i.e, tout morphisme $U \to P^+$ est de la forme $\Phi_\gamma(f)$ où $\gamma : \Gamma \to U$ est un idéal de $\mathfrak{D}$ et f un morphisme de Γ dans P ; le lemme qui précède montre alors que Π est couvrant. Si $f,g : U \rightrightarrows P$ est telle que $\Pi.f = \Pi.g$, i.e, $\Phi_1(f) = \Phi_1(g)$, on sait qu'il existe alors un idéal $\gamma : \Gamma \to U$ de $\mathfrak{D}$ tel que $f.\gamma = g.\gamma$,i.e, Π est bicouvrant.

Avant de montrer que P^+ est un infrafaisceau, remarquons que le diagramme

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\Pi"] & P^+ \\ \Gamma \arrow[u, "u"] \arrow[r, "\gamma"] & U \arrow[u, "\Phi_\gamma(u)"'] \end{tikzcd}$$

se "maintient" lorsqu'on diminue Γ dans $\mathcal{B}(U)$, i.e, pour $\gamma' : \Gamma' \to U = \Gamma' \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\gamma} U$ on a $\Phi_\gamma(u) = \Phi_{\gamma'}(u.i)$; ceci dit, soit $\gamma : \Gamma \to U$ un idéal de $\mathcal{B}$ et $f,g : U \rightrightarrows P^+$ une paire telle que $f.\gamma = g.\gamma$; il existe alors un idéal $\gamma' : \Gamma' \to U$ de $\mathcal{B}$, plus petit que Γ et une paire $u,v : \Gamma' \to P$ tels que $f = \Phi_{\gamma'}(u)$, $g = \Phi_{\gamma'}(v)$ et $\Pi.u = \Pi.v$ mais, Π étant bicouvrant, on peut trouver un égaliseur $i : \Gamma'' \to \Gamma'$ de (u,v) tel que $\gamma'' = \gamma'.i$ soit un idéal de $\mathcal{B}(U)$ d'où $f = \Phi_{\gamma''}(u.i) = \Phi_{\gamma''}(v.i) = g$ ce qui prouve que P^+ est un infrafaisceau.

Si P est un infrafaisceau, les composantes Π_U sont injectives en tant que limites inductives d'injections et, par conséquent, Π est monique dans $C^\circ Ab$. Considérons maintenant un idéal $\gamma : \Gamma \to U$ de $\mathcal{B}$ et un morphisme $u : \Gamma \to P^+$; Π étant un monomorphisme couvrant, on peut insérer ces morphismes dans un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Gamma' \arrow[r, "i"] \arrow[d] & \Gamma \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "u"] & U \\ P \arrow[r, "\Pi"] & P^+ & \end{tikzcd}$$

où $\gamma' = \gamma.i$ est un idéal de $\mathcal{B}$ et, d'après le lemme précédent, il existe alors un morphisme $v : U \to P^+$ tel que $v.\gamma.i = u.i$; comme P^+ est un infrafaisceau, il s'ensuit que $v.\gamma = u$, i.e, $\hom(U,P^+) \to \hom(\Gamma,P)$ est surjective ce qui, d'après (2.3.1), assure que P^+ est un faisceau.

Quant à l'assertion d/ elle est évidente (la limite inductive d'un foncteur constant est égale à la valeur de ce foncteur).

<u>Corollaire</u> 1 : $P \to P^{++}$ est un objet initial de la catégorie des $\mathcal{C}$-faisceaux

au-dessous du préfaisceau P.

Corollaire 2 : L'inclusion dans $C^{\circ}Ab$ de la sous-catégorie pleine des $\mathcal{C}$-faisceaux admet un adjoint à gauche exact.

(L'exactitude à gauche du foncteur faisceau associé : $a : P \to P^{++}$ résulte de sa construction par limites inductives).

(3.2.2) Théorème : Soit $\mathcal{C}$ un beau site sur une catégorie pré-additive C ; alors, la catégorie $C_{\mathcal{C}}$ des $\mathcal{C}$-faisceaux de groupes est abélienne et complète.

On sait déjà que c'est une sous-catégorie complète à gauche de $C^{\circ}Ab$; l'adjonction a ; $P \to P^{++}$ en fait une catégorie complète à droite : en effet, toute famille de faisceaux F_i de somme P dans $C^{\circ}Ab$ est de somme $a(P)$ dans $C_{\mathcal{C}}$ et, si $F' \to F \to P \to 0$ est une suite exacte de $C^{\circ}Ab$ où F' et F sont des faisceaux alors, la suite $F' \to F \to a(P) = P^{+} \to 0$ est exacte dans $C_{\mathcal{C}}$.

De plus :

(3.2.3) Proposition : Dans $C^{\circ}Ab$, les catégories de faisceaux sont stables par enveloppes injectives.

Compte tenu du fait évident qu'un infrafaisceau injectif est un faisceau, il suffira de montrer que :

Lemme : Toute extension essentielle d'un infrafaisceau est un infrafaisceau.

En effet, si $F \to P$ est une telle extension, pour tout idéal couvrant $\Gamma \to U$ et tout morphisme $U \to P$ de composé nul on a, avec le produit fibré $\Gamma' \begin{array}{c} \to U \to \\ \to F \to \end{array} P$ un morphisme nul $\Gamma \to \Gamma' \to F$; comme $\Gamma \to \Gamma'$ est un monomorphisme couvrant et F un infrafaisceau, il s'ensuit (2.3.2) que $\Gamma' \to F = 0$ ce qui, du fait que $F \to P$ est essentiel, donne $U \to P = 0$.

Corollaire : Soit C une petite catégorie pré-additive et $\mathcal{C}$ un beau site sur C ; alors la catégorie abélienne des $\mathcal{C}$-faisceaux de groupes est à

<u>enveloppes injectives</u>.

Car (lemme de Kan, corollaire 4) $C^{\circ}Ab$ est à enveloppes injectives et les sous-catégories de faisceaux sont exactes à gauche.

Voici une autre conséquence intéressante de (3.2.1) :

(3.2.4) <u>Proposition</u> : Pour un beau site $\mathscr{C}$ sur une catégorie pré-additive C et un morphisme $P \to Q$ de $C^{\circ}Ab$, les assertions suivantes sont équivalentes :

a/ $P \to Q$ est <u>bicouvrant</u> pour $\mathscr{C}$;

b/ Pour tout $\mathscr{C}$-faisceau F, l'application $\hom(Q,F) \to \hom(P,F)$ est <u>bijective</u> ;

c/ $P^{++} \to Q^{++}$ est un <u>isomorphisme</u> de $\mathscr{C}$-faisceau.

On sait déjà (2.3.2) que a/ implique b/ qui donne c/ par adjonction ; enfin c/ entraine a/ compte tenu du fait que les morphismes d'adjonction $P \to P^{++}$ et $Q \to Q^{++}$ sont bicouvrant (2.2.3 ; cor. 1).

<u>Corollaire</u> : Un beau site est déterminé par ses faisceaux.

4. <u>Faisceaux images</u> :

(4.1) Revenons à l'adjonction (1.3.3 ; cor.) définie par un foncteur additif $f : C \to D$ de catégories pré-additives entre les "catégories" $C^{\circ}Ab$ et $D^{\circ}Ab$: l'adjoint à droite $f^{*} : D^{\circ}Ab \to C^{\circ}Ab$ est défini par $f^{*}(Q) = \hom(f.,Q)$ et l'adjoint à gauche $_{*}f : C^{\circ}Ab \to D^{\circ}Ab$ par $_{*}f(P) = \varinjlim f.i_P$ où i_P est le foncteur source de C_P dans C, alors :

(4.1;1) <u>Lemme</u> : Si f est <u>pleinement fidèle</u>, $_{*}f$ l'est aussi.

En effet, comme $_{*}f$ commute aux limites à droite et f^{*} aussi (ce qui est évident), le morphisme d'adjonction $1 \to f^{*}.{}_{*}f$, qui est inversible sur C, reste inversible dans $C^{\circ}Ab$.

C.Q.F.D.

D'autre part, ${}_*f.f^*(V)$ est, pour chaque objet V de $\mathcal{D}$, la limite à droite des objets de C placés par f au-dessus de V et, par conséquent, dans $\mathcal{D}^\circ Ab$, l'image de la composante ${}_*f.f^*(V) \to V$ du morphisme d'adjonction ${}_*f.f^* \to 1$ est le sup. des images des morphismes $f(U) \to V$, i.e, c'est l'idéal sur V engendré par les morphismes $f(U) \to V$.

Pour un site $\mathfrak{D}$ sur $\mathcal{D}$, nous dirons que le foncteur f est dominant si toutes les composantes ${}_*f.f^*(V) \to V$ sont couvrantes pour $\mathfrak{D}$; il en résulte alors que, pour tout objet Q de $\mathcal{D}^\circ Ab$, ${}_*f.f^*(Q) \to Q$ est couvrant. Si f est pleinement fidèle, ces morphismes sont tous bicouvrants : il est aisé de voir, en effet, que, compte tenu de la pleine fidèlité de ${}_*f$, le morphisme couvrant ${}_*f.f^*(Q') \to Q'$ est un égaliseur de toute paire $Q' \rightrightarrows {}_*f.f^*(Q)$ égalisée par ${}_*f.f^*(Q) \to Q$.

Nous dirons qu'un objet U de C domine un site $\mathfrak{C}$ sur C si la sous-catégorie pleine end(U) domine $\mathfrak{C}$.

Exemple : Soit C une catégorie abélienne ; pour qu'un objet U de C domine la topologie épique de C, il faut et il suffit que U soit un gros générateur de C : en effet, l'idéal Γ sur un objet V engendré par les morphismes de U dans V est constitué par les morphismes $W \to V$ qui se factorisent suivant $W \twoheadrightarrow \sum_J U \to V$ où J est une partie finie de $I = \hom(U,V)$; or Γ est couvrant pour la topologie si, et seulement si, il contient un épimorphisme, ce qui revient à dire qu'il existe un épimorphisme $\sum_J U \to V$.

Ceci se présente notamment pour une petite catégorie C possèdant un générateur sommable G, car, en prenant pour I la réunion des ensembles $\hom(G,U)$, $U \in C$, chaque objet U apparait comme un quotient de $\sum_I G$.

(4.2) Relativement à deux sites $(\mathcal{C},\mathscr{C})$ et $(\mathcal{D},\mathscr{D})$, on dit qu'un foncteur $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est <u>continu</u> si, pour tout faisceau G de $\mathscr{D}$, $f^*(G) = \hom(f.,G)$ est un faisceau de $\mathscr{C}$.

(4.2.2) <u>Proposition</u> : Soit $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur additif et $\mathscr{D}$ un site sur $\mathcal{D}$; alors, parmi les <u>sites sur $\mathcal{C}$ qui rendent f continu</u>, il en existe un <u>un plus fin</u> (Noté $f(\mathscr{D})$).

Pour un tel site $\mathscr{C}$, il est nécessaire que toutes les images $f^*(G)$ de faisceaux de $\mathscr{D}$ soient des faisceaux ; la proposition résultera alors du :

(4.2.1) <u>Lemme</u> : Soit $\mathcal{P}$ une classe d'objets de $\mathcal{C}^\circ Ab$; les idéaux $\Gamma \to U$, $U \in \mathcal{C}$, tels que, pour tout changement de base : $\Delta \begin{smallmatrix} \to V \to \\ \to \Gamma \to \end{smallmatrix} U$ dans $\mathcal{C}$, les <u>applications</u> $\hom(V,P) \to \hom(\Delta,P)$, $P \in \mathcal{P}$, soient <u>bijectives</u>, sont les <u>idéaux couvrants d'un site</u> $\mathscr{C}$; ce site est le <u>plus fin</u> de ceux pour lesquels les <u>préfaisceaux de $\mathcal{P}$ soient des faisceaux</u>.

La seconde assertion résulte de la première.

Tout d'abord, la condition imposée est faite pour assurer l'axiome (1.2).

Pour prouver (s.1) considérons un idéal $\Gamma' \to U$ plus grand qu'un idéal $\Gamma \to U$ de $\mathscr{C}(U)$; soit $V \to U$ un morphisme de $\mathcal{C}$ et :

$$\begin{tikzcd}
\Delta \arrow[r] \arrow[d] & \Delta' \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d] \\
\Gamma \arrow[r] & \Gamma' \arrow[r] & U
\end{tikzcd}$$

le changement de base qu'il donne ; avec les changements de base $\Phi \begin{smallmatrix} \to W \to \\ \to \Delta \to \end{smallmatrix} \Delta'$, définis par les éléments $W \to V$ de Δ', on sait que :

$$\Delta \to \Delta' = \varinjlim_{W \in \Delta'} (\Phi \to W)$$

d'où, pour $P \in \mathcal{P}$:

$$\hom(\Delta',P) \to \hom(\Delta,P) = \varprojlim_{W \in \Delta'} . \hom(W,P) \to \hom(\Phi,P)$$

mais, comme $\Phi \begin{smallmatrix}\to W \to \\ \to \Gamma \to\end{smallmatrix} U$ est un produit fibré, il s'ensuit que cette limite à gauche est une bijection et, par suite, $\hom(V,P) \to \hom(\Delta',P)$ est bijective, i.e, $\Gamma' \in \mathcal{C}(U)$.

Considérons maintenant un idéal $\Gamma \to U$ de $\mathcal{C}$ et un idéal plus petit $\Gamma' \to U$ satisfaisant aux hypothèses de (s.3) ; soit :

$$\begin{tikzcd}
\Delta' \arrow[r] \arrow[d] & \Delta \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d] \\
\Gamma' \arrow[r] & \Gamma \arrow[r] & U
\end{tikzcd}$$

le changement de base défini par un morphisme $V \to U$ de C ; pour $W \to U \in \Delta$, le changement de base $\Phi' \begin{smallmatrix}\to W \to \\ \to \Delta' \to\end{smallmatrix} U$ donne, par composition, un changement de base :

$$\begin{tikzcd}
\Phi' \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\Gamma' \arrow[r] & \Gamma \arrow[r] & U
\end{tikzcd}$$

et, comme par hypothèse $\Phi' \to W \in \mathcal{C}(W)$, on a à la limite :

$$\hom(\Delta,P) \xrightarrow{\sim} \hom(\Delta',P) \quad , \quad P \in \mathcal{P}$$

ce qui fait que $\hom(V,P) \to \hom(\Delta',P)$ est bijective, i.e, $\Gamma' \in \mathcal{C}(U)$

C.Q.F.D.

Lorsque $\mathcal{P}$ est la classe des préfaisceaux représentables (i.e, les objets de $C^{o}Ab$ isomorphes à ceux de C), le site défini par le lemme s'appelle le <u>site canonique</u> ; en fait, lorsque C est à 2-produits fibrés, son site canonique est celui d'une topologie : les recouvrements $U_\alpha \to U$ de la topologie canonique sont les familles <u>épiques strictes universelles</u> de C, i.e, les familles telles que, pour tous objets V et W de C, les diagrammes :

$$\hom(V,W) \to \prod_{\alpha} \hom(V_\alpha,W) \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta} \hom(V_{\alpha\beta},W)$$

définis par les produits fibrés :

$$V_{\alpha\beta} \begin{array}{c}\to V_\alpha \to \\ \to V_\beta \to\end{array} V \qquad - ,$$

représentent des noyaux.

Voici une précision apportée à (4.2.2).

(4.2.3) Proposition : Si un foncteur pleinement fidèle $f : C \to \mathcal{D}$ domine un beau site $\mathcal{D}$ alors, un idéal de C est couvrant pour $f(\mathcal{D})$ si, et seulement si, son image par $_*f$ est bicouvrante pour $\mathcal{D}$.

En effet, si $\Gamma \to U$ est un idéal couvrant de $f(\mathcal{D})$ on a, pour tout faisceau G de $\mathcal{D}$: $\hom(U, f^*(G)) \cong \hom(\Gamma, f^*(G))$ d'où, par adjonction, $\hom(f(U), G) \cong \hom(f(\Gamma), G)$ de sorte que, d'après (3.2.4), $_*f(\Gamma) \to f(U)$ est bicouvrant pour $\mathcal{D}$.

Réciproquement, considérons un idéal $\Gamma \to U$ de C tel que $_*f(\Gamma) \to f(U)$ soit bicouvrant pour $\mathcal{D}$; compte tenu de la pleine fidèlité de $_*f$ et de la préservation des limites par f^*, on déduit des produits fibrés

$$Q \begin{array}{c}\to f(V) \to \\ \to {}_*f(\Gamma) \to\end{array} f(U) \quad , \quad V \in C ,$$

les produits fibrés

$$f^*(Q) \begin{array}{c}\to V \to \\ \to \Gamma \to\end{array} U$$

et, comme $_*f . f^*(Q) \to Q \to f(V)$ est bicouvrant, l'application $\hom(V, f^*(G)) \to \hom(f^*(Q), f^*(G))$, qui, par adjonction, s'identifie à $\hom(f(V), G) \to \hom({}_*f . f^*(Q), G)$, est alors une bijection pour tout faisceau G de $\mathcal{D}$.

(4.2.4) Corollaire : Un morphisme de C^oAb est bicouvrant pour $f(\mathcal{D})$ si, et seulement si, son image par $_*f$ est bicouvrante pour $\mathcal{D}$.

Par adjonction, on voit comme précédemment que les morphismes bicouvrants sont préservés par $_*f$.

Réciproquement, considérons un morphisme $P \to P'$ tel que $_*f(P) \to {}_*f(P')$

soit bicouvrant ; tout d'abord, si $P' = U \in C$, la décomposition triangulaire $_*f(P) \to Q \to f(U)$ dans $\mathcal{D}^\circ Ab$ induit dans $C^\circ Ab$ la décomposition triangulaire $P \to f^*(Q) \to U$ ($_*f$ est pleinement fidèle et f^* est exact) et, comme l'idéal $f^*(Q) \to U$ devient le morphisme bicouvrant $_*f.f^*(Q) \to Q \to f(U)$, il résulte de (4.2.3) que $P \to U$ est couvrant ; un petit raisonnement par changement de base, analogue à celui de (4.2.3) permet de montrer alors que, pour P' quelconque, $P \to P'$ est couvrant.

Enfin, pour toute paire $U \rightrightarrows P$ égalisée par $P \to P'$, le noyau $\Delta \to f(U) \rightrightarrows f(P)$ est un idéal couvrant de sorte que $f^*(\Delta) \to U$ est un égaliseur couvrant de $U \rightrightarrows P$.

C.Q.F.D.

Désignons par a le foncteur faisceau associé $Q \to Q^{++}$ dans $\mathfrak{D}$; avec tout ceci, on a le lemme de réduction de Giraud ·

Théorème : Soit $\mathfrak{D}$ un beau site sur une catégorie pré-additive $\mathcal{D}$, C une sous-catégorie pleine et dominante de $\mathcal{D}$; alors, l'inclusion $f : C \to \mathcal{D}$ définit, au moyen des foncteurs f^* et $a._*f$ une équivalence entre la catégorie des faisceaux de $\mathfrak{D}$ et celle des faisceaux de $f(\mathfrak{D})$.

Tout d'abord, le morphisme bicouvrant $_*f.f^*(G) \to G$ devient, pour tout faisceau G de $\mathfrak{D}$, l'isomorphisme $a._*f.f^*(G) \to a(G) = G$ (3.2.4).

Il s'agit donc de montrer que, pour tout faisceau F de $f(\mathfrak{D})$, $F \to f^*.a._*f(F)$ est inversible, i.e, pour tout objet U de C, l'application $\hom(U,F) \to \hom(f(U), a._*f(F))$ est bijective ; cette application s'obtient en associant à tout $U \to F$ le morphisme composé $f(U) \to {}_*f(F) \to a._*f(F)$.

Si deux morphismes $U \rightrightarrows F$ donnent le même composé, il existe, $_*f(F) \to a._*f(F)$ étant bicouvrant, un égaliseur bicouvrant $Q \to f(U) \rightrightarrows {}_*f(F)$ d'où l'égaliseur bicouvrant $f^*(Q) \to U \rightrightarrows F$ et, comme F est un faisceau, il s'ensuit que les deux morphismes $U \rightrightarrows F$ sont égaux.

Considérons maintenant un morphisme $\delta(U) \to a._*\delta(F)$; le changement de base :

$$Q \begin{matrix} \to \\ \to \end{matrix} \begin{matrix} {}_*\delta(F) \\ \delta(U) \end{matrix} \begin{matrix} \to \\ \to \end{matrix} a._*\delta(F)$$

donnant un morphisme bicouvrant $Q \to \delta(U)$, le morphisme $\delta^*(Q) \to U$ est bicouvrant et, par conséquent, $\delta^*(Q) \to F$ se factorise par lui ; on obtient alors un morphisme $U \to F$ tel que :

$$_*\delta\cdot\delta^*(Q) \to \delta(U) \to {}_*\delta(F) \to a._*\delta(F) = {}_*\delta\cdot\delta^*(Q) \to \delta(U) \to a._*\delta(F)$$

mais, puisque $a._*\delta(F)$ est un faisceau et que $_*\delta\cdot\delta^*(Q) \to \delta(U)$ est bicouvrant, il s'ensuit que :

$$\delta(U) \to {}_*\delta(F) \to a._*\delta(F) = \delta(U) \to a._*\delta(F)$$

ce qui termine la démonstration.

5. Applications :

(5.1) Si C est une petite catégorie abélienne, on sait, d'après le lemme de Kan, que la catégorie C^oAb est abélienne, complète et à enveloppes injectives ; d'autre part (que C soit petite ou grande) la sous-catégorie pleine $\tilde{C}$ de C^oAb , constituée par les préfaisceaux exacts à gauche, est la catégorie des faisceaux de la topologie épique de C de sorte que, au moyen du foncteur faisceau associé, qui est exact, $\tilde{C}$ hérite des propriétés de C^oAb (3,2 ; 2 et 3) ; de plus :

(5.1.1) Lemme : Toute catégorie abélienne C est équivalente à une sous-catégorie pleine et exacte de $\tilde{C}$.

Car si $0 \to U' \to U \to U'' \to 0$ est une suite exacte de C, la suite $0 \to U' \to U \to U''$ reste exacte dans C^oAb donc dans $\tilde{C}$, sous-catégorie exacte à gauche ; pour montrer que $U \to U''$ est épique dans $\tilde{C}$, il s'agit de s'assurer que $\hom(U'',F) \to \hom(U,F) = F(U'') \to F(U)$ est injective pour tout objet F de $\tilde{C}$, ce qui est clair.

Avec tout ceci, on a le :

Théorème (Freyd) : Toute petite catégorie abélienne est équivalente à une sous-catégorie pleine et exacte d'une catégorie abélienne complète à générateur projectif.

Pour avoir la forme duale de ce résultat, il suffit de se rappeler que $\tilde{C}$ est complète, qu'elle possède assez d'injectifs etque le faisceau, associé au générateur ΣU, $U \in C$, de $C^{o}Ab$, est un générateur G de $\tilde{C}$; dans ces conditions, si P est le produit des quotients de G, toute extension injective S de P est un séparateur de $\tilde{C}$: en effet, si $G \to I \to A$ est la décomposition triangulaire d'un morphisme non nul, en composant $P \to S$ avec une section $I \to P$ de la projection $P \to I$, on obtient un mononorphisme $I \to S$ qui se relève suivant $A \to S$ et $G \to A \to S = G \to I \to S$ n'est pas nul ; comme G est un générateur, c'est terminé.

Supposons maintenant que C soit une (grande) catégorie abélienne avec un gros générateur G ; on se rappelle qu'alors la topologie épique de C est belle et que G domine le site de cette topologie (exemples de 3.1 et 4.1) ; en appliquant alors le lemme de réduction, on a ;a :

(5.1.2) Proposition : Si une catégorie abélienne C possède un gros générateur G, le foncteur hom(G,.) est une équivalence de la catégorie $\tilde{C}$ sur une sous-catégorie pleine de la catégorie des modules à droite sur end(G) ; l'inclusion de cette sous-catégorie de modules admet un adjoint à gauche exact.

Corollaire (Mitchell).

Toute petite sous-catégorie B, pleine et exacte, d'une catégorie abélienne A, complète à générateur projectif G, est équivalente à une sous-catégorie pleine et exacte d'une catégorie de modules.

Pour cela, considérons la sous-catégorie pleine et exacte C de A engendrée par B et $G' = \sum_I G$ où I est la réunion des ensembles $hom(G,U)$, $U \in B$; il est clair que G' est un gros générateur projectif de C et il suffit alors d'appliquer (5.1.2) pour avoir, à fortiori, le lemme de Mitchell.

Corollaire (Mitchell-Freyd).

Toute petite catégorie abélienne est équivalente à une sous-catégorie pleine et exacte d'une catégorie de modules.

(5.2) Rappelons qu'une famille de morphismes $U_\alpha \to U$ d'une catégorie C est épique si, pour tout objet V de C , l'application

$$hom(U,V) \to \prod_\alpha hom(U_\alpha,V)$$

est injective ; lorsque la famille U_α est sommable, ceci revient à dire que $\Sigma U_\alpha \to U$ est épique.

Si C possède des 2-produits fibrés, on dit que la famille $U_\alpha \to U$ est épique stricte si les diagrammes :

$$hom(U,V) \to \prod_\alpha hom(U_\alpha,V) \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta} hom(U_{\alpha\beta},V)$$

définis par les produits fibrés $U_{\alpha\beta} \begin{smallmatrix}\to U_\alpha \to \\ \to U_\beta \to\end{smallmatrix} U$, représentent des noyaux ; lorsque C est complète à droite, ceci revient à dire que la suite :

$$\sum_{\alpha,\beta} U_{\alpha\beta} \rightrightarrows \sum_\alpha U_\alpha \to U$$

représente un conoyau.

Grâce à la construction connuedu produit fibré, il est aisé de montrer, pour une catégorie abélienne C complète à droite, l'équivalence des assertions suivantes :

a/ Toute famille épique est stricte ;

b/ Les sommes sont exactes (i.e, toute somme directe de monomorphismes est monique).

Rappelons aussi qu'une famille épique (stricte) est universelle si les familles qui s'en déduisent par changement de base sont épiques (strictes). Pour une catégorie abélienne C complète à droite, les assertions suivantes sont équivalentes :

a'/ Toute famille épique est stricte universelle ;

b'/ Les sources sont universelles ;

c'/ Pour tout morphisme $u : U \to V$ et toute famille filtrante croissante V_α de sous-objets de V, on a :

$$\overset{-1}{u}(\sup V_\alpha) = \sup \overset{-1}{u}(V_\alpha) ,$$

d'/ Pour tout sous-objet U de V et toute famille filtrante croissante V_α de sous-objets de V, on a :

$$U \cap (\sup V_\alpha) = \sup (U \cap V_\alpha)$$

(Axiome de Grothendieck).

Ceci dit, on a le résultat suivant :

(5.2.1) Proposition : Si C est une petite catégorie abélienne à sommes universelles alors, pour la topologie canonique, tout faisceau additif de groupes est représentables.

En effet, la topologie canonique étant plus fine que la topologie épique, un tel faisceau F est exact à gauche ; de plus, les composantes $U_\alpha \to \Sigma U_\alpha$ d'une somme formant une famille épique , i.e, un recouvrement de la topologie canonique, on a la suite exacte :

$$F(\sum_\alpha U_\alpha) \to \prod_\alpha F(U_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta} F(U_{\alpha\beta}) = 0$$

i.e $\quad F(\Sigma U_\alpha) \overset{\sim}{\to} \Pi F(U_\alpha) \quad ;$

or, le critère d'adjonction de Freyd ([1], p. 124) assure qu'un préfaisceau additif de groupes, défini sur une petite catégorie complète à droite, est représentable dès qu'il transforme les sommes en produits et les conoyaux en noyaux, ce qui est le cas de F.

Corollaire 1 : Une petite catégorie abélienne C à sommes universelles est complète, à enveloppes injectives, et ses limites inductives sont exactes.

Car le foncteur faisceau associé lui fait hériter des propriétés de $C^{\circ}Ab$.

Corollaire 2 : Dans toute catégorie abélienne C à sommes universelles, les limites inductives sont exactes.

Soit $(U_\alpha \to V_\alpha)$ un petit système inductif de monomorphismes de C de limite à droite $U \to V$, considérons la sous-catégorie A, exacte et complète à droite de C, engendrée par les morphismes $U_\alpha \to U_\beta$, $V_\alpha \to V_\beta$, $U_\alpha \to U_\beta$; cette catégorie s'obtient en prenant les analyses de ces morphismes et toutes les sommes directes de ces morphismes puis en itérant ce procédé ; de la sorte, A est une petite catégorie et $U \to V$, qui d'après le corollaire 1 est un monomorphisme de A, reste monique dans C.

Lorsque C n'est plus forcément petite, le critère d'adjonction de Freyd nous assure cependant que

(5.2.1') Proposition : Si C est une catégorie abélienne à sommes universelles et à générateur G alors, pour la topologie canonique de C tout faisceau additif de groupes est représentable.

Dans ces conditions, on s'assurera aussi que :

1/ la topologie canonique de C est belle

2/ G domine le site canonique de C.

Par conséquent, grâce au lemme de réduction, on a le :

(5.2.2) Théorème (Petresco-Gabriel). : Si une catégorie abélienne C, à sommes universelles, possède un générateur G, le foncteur $\hom(G,.)$ est une équivalence de C sur une sous-catégorie pleine de la catégorie des modules à droites sur end(G) ; l'inclusion de cette sous-catégorie de modules admet un adjoint à gauche exact.

Corollaire (Grothendieck) : Une telle catégorie est à enveloppes injectives.

(5.3) Pour terminer, remarquons que, pour une catégorie quelconque C , la théorie des faisceaux de groupe sur C se ramène au cas où C est pré-additive ; en effet : on peut associer à C une catégorie pré-additive C^a de façon universelle, i.e, tout préfaisceau, défini sur C , à valeurs dans une catégorie pré-additive A se prolonge à C^a suivant un préfaisceau additif unique : les objets de cette catégorie C^a sont ceux de C et ses groupes de morphismes Hom(U,V) sont les groupes libres engendrés par les ensembles de morphismes hom(U,V) de C .

Sur ce, si $\mathscr{C}$ est un site sur C(cf[5]), les idéaux de C^a engendrés par les cribles couvrants de $\mathscr{C}$ sont les idéaux couvrants d'un site $\mathscr{C}^a$ sur C^a : pour cela, il suffit de remarquer que, pour tous objets U et V de C, les morphismes de $\mathscr{C}^a(U)$ issus de V sont les élements du groupe libre engendré par les morphismes de $\mathscr{C}(U)$ issus de V ; ceci premet de voir que les faisceaux de $\mathscr{C}$ à valeurs dans A s'identifient canoniquement aux faisceaux de $\mathscr{C}^a$ à valeurs dans A.

BIBLIOGRAPHIE :

Pour les limites et les foncteurs adjoints :

[1] MITCHELL : Theory of categories (acad. press. 1965)

[2] POITOU : Introduction à la théorie des catégories (Offilib. Paris 1965).

Pour les limites de groupes :

[3] BOURBAKI : Algèbre linéaire (Hermann. 1963 ; 3ème édition).

Pour les sites et faisceaux :

[4] M. ARTIN : Grothendieck Topologies (Harvard. 1962).

[5] VERDIER : Théorie des faisceaux (I. H. E. S. 1963-1964).

Pour la théorie des classes :

[6] KELLEY : General Topology - appendix (Van Nostrand 1955).

Autres références :

[7] FREYD : Abelian Categories (Harper. Row. 1964).

[8] PETRESCO-GABRIEL : Caractérisation des catégories abéliennes avec générateurs et limites inductives exactes (CR. Acad. Sc. (Paris 27 avril 1964).

Manuscrit remis le 9 juin 1966

René OUZILOU
Maître-Assistant
Département de Mathématiques
15, quai Claude Bernard
LYON 7°