

Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 2
(1927), p. 92-94

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2_92_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1927, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. C.92. — *Un système matériel composé de deux barres AB, AC articulées en A. de même longueur $2l$, homogènes et de même masse, se meut sans frottement dans un plan fixe, sans aucune force donnée.*

1° *Former les intégrales premières du mouvement.*

2° *On supposera, qu'au début, les deux barres sont dans le prolongement l'une de l'autre, que la vitesse de rotation de la barre AB est ω_1 et celle de AC, ω_2 . Discuter suivant la valeur du rapport $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ comment varie l'angle des deux barres.*

3° *On supposera $\omega_1 = +5\omega$, $\omega_2 = -3\omega$, ω rotation positive donnée. On suppose en outre qu'au début du mouvement la vitesse de A est nulle. Au moment où l'angle $\widehat{BAC}$ prend la valeur zero, on introduit la liaison persistante $\widehat{BAC} = 0$. Calculer quelles sont, après le choc, la vitesse de rotation du système, la trajectoire et la vitesse du milieu des barres. On prendra la direction de AB au début du mouvement pour axe des x positifs, la position initiale de A pour origine.*

II. C.93. — *Soient S un solide, G son centre de gravité. L'ellipsoïde d'inertie de S, en G, est de révolution autour de Gz et a pour équation par rapport à trois axes rectangulaires Gxyz*

$$A(X^2 + Y^2) + CZ^2 = 1.$$

Ce solide présente une arête vive qui a pour équations, par rapport aux axes Gxyz,

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = -b,$$

a et b positifs. Cette arête est assujettie à rester en contact sans frottement avec un plan horizontal fixe. Le solide est pesant, de masse M.

1° *Écrire les intégrales premières du mouvement du solide, sans les discuter. On prendra pour axe fixe Oz, la verticale dirigée vers le haut.*

2° θ, φ, ψ étant les angles d'Euler, il existe une infinité de mouvements où θ, φ, ψ sont constants. Quelle relation y a-t-il alors entre θ, φ, ψ ?

Étant données les conditions initiales $\theta = \theta_0; \theta'_0 = 0; \varphi'_0 = \varphi'_0; \psi'_0 = \psi'_0$, dans quel sens θ variera-t-il au début du mouvement ?

ÉPREUVE PRATIQUE. — C.94. — 1° *Une circonférence homogène, de centre C, de rayon a, de masse $m\lambda$, est mobile autour d'un de ses*

points O qui est fixe. Sur cette circonférence se meut librement et sans frottement une masse ponctuelle m .

Étudier les petits mouvements dans un plan vertical : décomposer le mouvement en deux mouvements pendulaires. Interprétation géométrique. Pour quelle valeur de λ les petits mouvements sont-ils périodiques ?

Écrire, en supposant $\lambda = 1$, la solution particulière pour laquelle la position de départ est la position d'équilibre, le cercle étant immobile.

2° On ajoute une surcharge fixe $\dot{m}(1 + \lambda)$ en un point A de la circonférence et tel que $OA = a$. Étudier les petits mouvements.

On posera $\frac{g}{a} = k^2$.

(Bordeaux, juin 1926.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — Une toupie est constituée par un cône homogène circulaire droit de rayon R et de hauteur $4R$. On imprime à cette toupie une vitesse angulaire initiale r_0 autour de son axe, puis on l'abandonne à elle-même en la posant par sa pointe sur un plan horizontal parfaitement poli, de sorte que son axe fasse avec la verticale ascendante un angle θ_0 .

1. m désignant la masse de la toupie, calculer ses moments d'inertie relatifs aux axes centraux d'inertie ;

2. Former les équations différentielles du mouvement de la toupie et montrer qu'elles s'intègrent par quadratures ;

3. Déterminer les limites entre lesquelles varie l'angle de nutation θ , sachant que

$$\theta_0 = 30^\circ, \quad R = 5\text{ cm}, \quad r_0 = 300 \text{ rad./sec}, \quad g = 981 \text{ cm/sec}^2;$$

4. Déterminer la loi approchée de variation de θ en fonction du temps avec les données précédentes ; en déduire la période T des oscillations.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — Cas particulier d'un problème classique :

$$1. \quad A = B = \frac{3}{4} m R^2, \quad C = \frac{3}{10} m R^2.$$

2. N étant la réaction du plan, les équations du mouvement sont, avec des notations évidentes :

$$m\ddot{\xi} = 0, \quad m\ddot{\eta} = 0, \quad m(3R \cos \theta)'' = N - mg,$$

$$A \sin^2 \theta \psi' = C r_0 (\cos \theta_0 - \cos \theta),$$

$$A(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\psi}^2) + g m R^2 \sin \theta \dot{\theta}^2 = 6 m g R (\cos \theta_0 - \cos \theta),$$

$$\varphi' + \psi' \cos \theta = r_0.$$

Elles s'intègrent manifestement par quadratures, θ étant d'abord déterminé par

$$(1) \quad \sin^2 \theta (1 + 12 \sin^2 \theta) \theta'^2 = 8 \frac{g}{R} (\cos \theta_0 - \cos \theta) \left[\sin^2 \theta - \frac{1}{50} \frac{R}{g} r_0^2 (\cos \theta_0 - \cos \theta) \right].$$

3. On a

$$\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$$

avec

$$\sin^2 \theta_1 - \frac{1}{50} \frac{R}{g} r_0^2 (\cos \theta_0 - \cos \theta_1) = 0;$$

d'où

$$\theta_1 = 34^\circ.$$

4. En posant $\theta = \theta_0 + \varepsilon$, (1) devient

$$(1 + 12 \sin^2 \theta_0) \varepsilon'^2 = 8 \frac{g}{R} \varepsilon \left[\sin \theta_0 - \left(\frac{R r_0^2}{50 g} - 2 \cos \theta_0 \right) \varepsilon \right],$$

soit avec les données numériques

$$4 \varepsilon'^2 = 787 \varepsilon - 12680 \varepsilon^2;$$

d'où

$$\varepsilon = 0,031(1 - \cos 56,4 t), \quad T = \frac{2\pi}{56,4} = 0,112 \text{ sec.}$$

(Toulouse, juin 1926.)