

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 2
(1927), p. 26-29

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__26_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1927, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. C.80. *On considère l'enveloppe E de la famille de plans*

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi + z \cot \theta - p(\theta, \varphi) = 0$$

où φ et θ sont les paramètres variables. A chaque système de valeurs de φ et θ , on fait correspondre le point de contact du plan défini par ces valeurs avec la surface.

1° *Former la condition à laquelle doit satisfaire la fonction p pour que les courbes $\theta = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$ soient conjuguées. Déterminer la forme générale des fonctions p satisfaisant à cette condition.*

2° *Cette condition étant remplie, montrer que les lignes $\varphi = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$ sont orthogonales. Montrer que les lignes de courbure de la surface sont planes, et que celles de l'une des familles sont égales entre elles.*

3° *On considère ces lignes de courbure comme les différentes positions d'une courbe mobile : quelle est la nature du déplacement de son plan ? Définir les deux nappes de la développée de E ; dans quelles conditions l'une ou l'autre de ces deux nappes dégénère-t-elle en une ligne ? Quelle est la nature de E lorsque les deux nappes sont ainsi dégénérées ?*

Nota. — *Les candidats devront faire usage, autant que possible, de considérations géométriques.*

II. C.81. On donne l'équation différentielle

$$xy'' + (3x - 1)y' - (4x + 5a + 4)y = 0,$$

où a est une constante

1° Vérifier que, pour a entier supérieur à -2 , on a une intégrale de la forme $e^x P(x)$, $P(x)$ étant un polynôme; et que pour a entier inférieur à 1 , on a une intégrale de la forme $e^{-4x} Q(x)$, $Q(x)$ étant un polynôme. Dire comment on obtiendrait dans ces deux cas l'intégrale générale. Quelle est cette intégrale générale pour $a = 1$ et $a = 0$?

2° a étant quelconque, quels sont les points singuliers des intégrales de l'équation (1)? Quelle est la forme de ces intégrales? Pour quelles valeurs de a l'intégrale générale est-elle uniforme?

3° Appliquer la méthode de Laplace à l'équation (1). En particulier, retrouver par cette méthode les résultats du n° I.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. Calculer l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x^2 - 4) \sqrt{(1-x)(1+x)^3}}.$$

II. Les axes Ox , Oy , Oz sont rectangulaires. Soit S la surface engendrée par une circonférence variable C tangente à Oz à l'origine et qui coupe le plan Oxy suivant la droite $x - a = 0$. Calculer l'aire de la portion de S comprise entre deux positions de la circonférence C .

(Strasbourg, juin 1920.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Une surface est représentée par l'équation

$$y = x \tan \frac{z}{a}.$$

1° Déterminer les rayons de courbure principaux en un point quelconque de la surface.

2° Déterminer ses lignes de courbure.

3° Pour l'une quelconque de ces lignes de courbure, calculer la longueur de l'arc de courbe, le rayon de courbure et le rayon de torsion de la courbe.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Déterminer une fonction analytique $P + Qi$ de la variable $z = x + yi$, telle que sa partie réelle soit de la forme

$$P = f(x) \varphi(y),$$

Montrer que l'on peut choisir cette fonction de façon qu'elle soit nulle pour $z = 0$.

Le problème a-t-il plusieurs solutions?

(Marseille, octobre 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — C.82. Une surface est représentée par les équations paramétriques

$$x = 3uv^2 - u^3 - 3u,$$

$$y = 3v^2u^2 - v^3 - 3v,$$

$$z = 6v.$$

1° Déterminer les lignes asymptotiques et prouver qu'elles sont orthogonales.

2° Montrer que, pour chacune de ces courbes, la tangente forme un angle constant avec une direction fixe.

3° Déterminer les lignes de courbure de la surface et montrer qu'elles sont planes.

4° Vérifier qu'en chaque point d'une ligne de courbure le plan tangent à la surface forme un angle constant avec le plan de cette courbe.

5° Calculer les rayons de courbure principaux en un point quelconque de la surface.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Déterminer l'intégrale générale de l'équation

$$(a^2 + xy) \left(x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} \right) + a(x^2 + y^2)z^2 = 0.$$

Déterminer une surface intégrale passant par la circonférence

$$z = a, \quad x^2 + y^2 = R^2.$$

(Marseille, juin 1926.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — C.83. — On donne l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = e^z \sin(x + y).$$

1° Déterminer l'intégrale générale.

2° Déterminer une surface intégrale S qui passe par la courbe

$$x + y = 0; \quad e^z \cos^2 x = 1.$$

3° Déterminer les lignes de courbure de cette surface.

4° Former l'équation différentielle des lignes asymptotiques de cette surface S, et montrer qu'elles sont imaginaires.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer, en utilisant les intégrales imaginaires,

$$\int_0^\infty \frac{\cos(px)}{(a^2 + x^2)^2} dx.$$

En déduire les intégrales :

$$\int_0^\infty \frac{x \sin(px)}{(a^2 + x^2)^2} dx,$$
$$\int_0^\infty \frac{x^2 \cos(px)}{(a^2 + x^2)^2} dx,$$
$$\int_0^\infty \frac{\cos(px)}{a^2 + x^2} dx.$$

(Marseille, novembre 1926.)