NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. HADAMARD

Récents progrès de la géométrie anallagmatique

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 257-270

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__257_0>

RÉCENTS PROGRÈS DE LA GÉOMÉTRIE ANALLAGMATIQUE (¹);

PAR J. HADAMARD.

Dans un beau Mémoire inséré au *Journal de Mathématiques* (²), M. André Bloch établit relativement aux cercles de l'espace une série de propriétés dont quelques-unes avaient été aperçues par plusieurs auteurs, mais qui, dans leur ensemble, constituent, pour la Géométrie pure, une série de conquêtes véritablement surprenantes et inattendues. Ses démonstrations reposent sur la considération si féconde des *foyers* d'un cercle et sur celle des génératrices imaginaires de la sphère : il appelle l'attention sur l'utilité qu'il y aurait à obtenir, pour les mêmes résultats, des démonstration purement géométriques, anallagmatiques et réelles.

J'ai constaté que les propriétés des rotations (au sens anallagmatique du mot) telles que je les avais énoncées dans mes *Leçons de Géométrie élémentaire* (³) permettent de développer la théorie en satisfaisant à cette triple condition, et même de simplifier et de compléter sur quelques points (voir particulièrement ci-après, section VI) les résultats de M. André Bloch. C'est ce que je vais exposer dans le présent travail.

Le premier qui se soit occupé, au point de vue anallagmatique, de la figure formée par deux cercles arbitraires de l'espace est M. Kœnigs (⁴), qui a obtenu un des invariants (lesquels sont au nombre de deux distincts) de la figure ainsi constituée, pendant que, un peu auparavant, M. Goursat (⁵) avait résolu une autre question que nous verrons fondamentale pour notre objet.

(¹) L'original de ce travail a paru en langue espagnole dans *Revista Matematica Hispano-Americana,* 1927.

(²) 9ᵉ série, tome III, 1924, p. 51. *Voir* aussi *Comptes rendus Ac. Sc.,* t. 177, 1923, nᵒˢ 17 et 19, et *Bulletin des Sciences mathématiques.*

(³) Tome II, 1901, ex. 1249-1254.

(⁴) *Annales Fac. Sc. Toulouse,* t. II, 1888. Un second invariant a été formé en 1915, sans connaissance de notre propre travail par M. D. F. Barrow (*Transactions of the American Math. Soc.*, t. XVI;).

(⁵) *Annales Scient. École Normale supérieure,* t. VI$_3$, 1889.

Quelques années après (*loc. cit.*) nous avons formé les deux invariants du système de deux cercles C_1, C_2, en même temps que nous mettions ce problème en relation avec celui qui fait la base de la présente théorie, la recherche des cercles perpendiculaires communs à C_1 et a C_2.

La résolution de ce dernier problème aurait dû, semble-t-il, forcément conduire à noter qu'il pouvait devenir indéterminé. Cette circonstance m'avait pourtant échappé. Elle est, au contraire, mise en lumière dans l'Ouvrage bien connu, *A Treatise on the Circle and the Sphere* (Oxford, 1916), dans lequel M. Coolidge reprend de son côté la même question et où les cercles *paratactiques*, dénomination crée par M. Coolidge pour ce cas remarquable d'indétermination, sont étudiés en détail au double point de vue analytique et géométrique et définis de manière particulièrement simple à l'aide de la relation qui existe entre leurs foyers. Cependant, à son tour, le géomètre américain laissait de côté certaines des conséquences géométriques les plus curieuses et les plus simples de la notion de parataxie ainsi introduite.

Or, entre temps, ces propriétés avaient été découvertes. Dans une courte Note des *Archiv der Math. und Phys.*, tome VII_3, 1904, E. von Weber avait obtenu quelques-uns des plus importants résultats retrouvés depuis par M. André Bloch, non seulement la notion de cercles paratactiques et leur propriété géométrique caractéristique, mais aussi, avec la forme canonique déjà donnée par M. Goursat, le fait que la réduction d'une transformation sphérique à cette forme canonique peut, elle aussi, être un problème indéterminé, et, des lors, par voie de conséquence, la congruence que, avec M. André Blöch, nous appellerons *paratactique* (*voir* notre Section IV). La beauté des résultats de E. von Weber n'aurait certes pas manqué d'attirer la vive attention des mathématiciens si l'auteur l'avait lui-même soulignée comme elle le méritait ([1]).

D'autre part, en 1911, la propriété angulaire fondamentale des cercles paratactiques (l'un d'eux étant réduit à une droite) figurait dans un problème d'admission à l'École Normale supérieure posé par M. H. Lebesgue (*voir* le tome X_4 des présentes *Annales*, p. 558 et suiv.).

([2]) Le travail plus étendu, annoncé par von Weber sur le même sujet, n'a pas paru, à notre connaissance.

Après les Notes où M. Demoulin [1], puis M. Vessiot [2], en vue de recherches de Géométrie infinitésimale, reprennent tout d'abord l'étude des invariants du système de deux cercles, celle des cercles perpendiculaires communs et du cas paratactique, ont paru les travaux de M. A. Bloch cités plus haut et dont le contenu fait l'objet principal de la présente étude. Parti de nos résultats de 1901, M. A. Bloch a d'ailleurs été inspiré, sur certains points, par les travaux et même par quelques suggestions personnelles de M. Demoulin. Au contraire, à notre connaissance, les travaux antérieurs à 1921 cités dans ce qui précède sont sans relation les uns avec les autres.

M. André Bloch, comme E. von Weber ainsi que MM. Goursat et Kœnigs, fait systématiquement appel aux propriétés des foyers et des autres éléments isotropes. Nous espérons montrer que des considérations de Géométrie réelle et, somme toute, élémentaire, fournissent des démonstrations ne laissant rien à désirer au point de vue de la simplicité et ne le cédant même pas aux premières (sauf peut-être en ce qui regarde la congruence paratactique à laquelle la considération des foyers conduit d'une manière particulièrement directe et immédiate).

Je me borne d'ailleurs, dans ce qui va suivre, à ce point de vue strictement élémentaire, à l'exclusion des points de vue de Géométrie analytique ou de Géométrie infinitésimale auxquels se sont placés des auteurs tels que MM. Cosserat, Demartres, Le Vavasseur, Demoulin, Guichard, Besserve, Vessiot, etc. Aussi ai-je cru pouvoir me contenter souvent d'indiquer l'essentiel des raisonnements, en omettant des détails faciles à suppléer.

Dans toute la Géométrie anallagmatique, sans même parler de la théorie actuelle, qui, on vient de le voir, a été étudiée à plusieurs reprises par des auteurs s'ignorant réciproquement, les terminologies se sont multipliées plus que de raison. Nous avons em-

---

(1) *Comptes rendus Ac. Sc.*, 8 août 1921, et surtout *Bull. Ac. Roy. Belgique*, 5 août 1922, n° 8, p. 499 et suiv.

(2) *Comptes rendus*, 10 et 25 avril 1922. *Voir* aussi *Journal de Mathématiques*, 9e série, t. II, 1923, p. 99 à 165 : la propriété angulaire remarquable qui caractérise deux cercles paratactiques figure, en particulier, à la page 116 de ce dernier travail.

prunté à M. Coolidge, dont l'ouvrage est classique en la matière, celle de *cercles en involution* (*voir* notre Section I) et aussi celle de *cercles paratactiques :* toutefois il y aurait déjà lieu de se demander si, pour cette dernière, le mot de *cercles isogonaux*, employé par M. Vessiot (*loc. cit*) [1], ou celui de *cercles périallèles* ne conviendraient pas mieux pour exprimer, le premier, la constance (découverte par E. von Weber, E. Vessiot et A. Bloch) de l'angle dit de parataxie; le second, l'analogie de la propriété dont il s'agit avec celle de parallélisme (que l'interprétation non euclidienne signalée par M. Demoulin [2] a permis de préciser si heureusement), ainsi que l'enlacement mutuel qu'offrent nécessairement deux cercles qui la possèdent. A la dénomination de cercles en *biinvolution*, adoptée par M. Kœnigs, puis (concurremment avec celle de *croix de cercles*), par M. Coolidge pour le cas *f* de notre section I (*anneau orthogonal* de Guichard, cercles *harmoniques* de M. A. Bloch) j'ai préféré celle de *cercles conjugués*, employée par M. Vessiot (*loc. cit.*) et qui, étant donnés les cercles conjugués spéciaux qui interviennent dans la congruence paratactique, m'offrait l'économie d'une dénomination; mais je ne sais si une relation aussi remarquable et aussi classique ne réclamerait pas un terme plus intuitif, tel que celui de cercles *axiaux*, rappelant que cette relation est celle d'un cercle avec son axe et n'est que la traduction anallagmatique (*voir* ci-après n° 7) de ce cas particulier. Les locutions de cercles *perpendiculaires* et de *symétrie par rapport à un cercle* sont également dues à M. Vessiot.

I. — Rappel de principes.

1. En général, non seulement les énoncés auxquels nous arriverons, mais les raisonnements, seront anallagmatiques, c'est-à-dire ne feront intervenir que des propriétés se conservant dans une inversion quelconque : cercles, sphères, angles sous lesquels peuvent se couper ces divers éléments, rapports anharmoniques. Toutefois, bien entendu, les déductions initiales, qui sont pour la

---

(1) Page 116 du Mémoire cité du *Journal de Mathématiques*. Dans le même ordre d'idées, M. A. Bloch, dans la rédaction qu'il m'avait comuniquée tout d'abord, proposait le nom de cercles *monogonaux*.

(2) *Voir* A. Bloch, *loc. cit.*, n° 5, p. 60.

plupart bien connues et que nous rappelons dans cette première Section, sont forcément empruntées à la Géométrie générale. On ne pourrait opérer autrement qu'en constituant au préalable, pour la Géométrie anallagmatique une Axiomatique propre, ce qui a pu d'ailleurs être fait sans parvenir à notre connaissance, et qui a déjà été fait pour la Géométrie projective.

Le mot « inversion » signifiera toujours, dans ce qui va suivre, une inversion à puissance positive, et par conséquent, à sphère d'inversion réelle, à moins que nous ne parlions d'une « inversion négative ».

Les deux cas se différencient d'ailleurs par un caractère essentiel : une « inversion proprement dite », à notre sens, c'est-à-dire une inversion à puissance positive, change les dispositions des divers trièdres, au lieu qu'une inversion négative les conserve. Une inversion négative de puissance $-k^2$ sera, pour nous, le produit de *quatre* inversions proprement dites : par exemple, de l'inversion de même pôle et de puissance k^2 combinée avec une symétrie par rapport à ce pôle, c'est-à-dire avec des symétries par rapport aux trois faces d'un trièdre trirectangle ayant ce point pour sommet.

Nous appellerons, avec M. A. Bloch, « transformation ou opération sphérique » (ce que nous préférons à « transformation conforme », en raison de la profonde différence qui sépare à ce point de vue le plan et l'espace) un produit d'inversions (proprement dites) en nombre *pair* et qui conserve par conséquent les dispositions des angles polyèdres.

2. Nous ne nous interdirons pas d'ailleurs de raisonner à la manière ordinaire sur les diverses directions de droites (tangentes à divers cercles) et de plans (plans tangents à diverses sphères) issues d'un même point. Cela n'empêchera nullement nos considérations d'être anallagmatiques, puisque toute transformation sphérique respecte dans toutes ses propriétés la figure formée par les directions en question.

L'introduction du rapport anharmonique pourra se faire sous forme anallagmatique par l'emploi de la proposition suivante, traduction anallagmatique de la propriété fondamentale classique.

Le rapport anharmonique de quatre points a, b, c, d d'un *même cercle est égal à celui que forment, en* O, *les tangentes aux quatre cercles* Opa, Opb, Opc, Opd, *en désignant par* O *un point du cercle considéré et par* p *un point pris arbitrairement en dehors de ce cercle.*

3. Nous nous astreignons à ne raisonner que sur des figures réelles. Toutefois, nous pourrons faire intervenir des *sphères imaginaires pures* et des *cercles imaginaires purs*. L'un et l'autre de ces éléments sont en effet susceptibles d'une définition réelle. La sphère de centre O et de rayon purement imaginaire $k\sqrt{-1}$ se définit par l'inversion (négative) correspondante; et, de même que, dans une inversion proprement dite, les sphères et les cercles qui se conservent sont ceux qui sont orthogonaux à la sphère d'inversion (abstraction faite de cette sphère elle-même et des cercles qui sont situés sur elle), nous pourrons parler de sphères ou de cercles orthogonaux à la sphère imaginaire pure, ou même, par extension, éventuellement, « orthogonaux à l'inversion négative » : ce seront par définition les cercles ou sphères qui se conserveront dans cette inversion, par exemple, tout cercle dont le plan passera par le pôle d'inversion, ce dernier point ayant, par rapport à lui, la puissance $-k^2$.

Quant au cercle imaginaire de centre O et de rayon $k\sqrt{-1}$ tracé dans un plan P qui passe par O, ou, ce qui revient au même, au cercle intersection du plan P avec le cercle-point (cône isotrope) ayant pour centre l'un des deux points f, f' situés symétriquement l'un de l'autre sur la perpendiculaire élevée à P au point O à une distance $Of = Of' = k$, il est défini par le *faisceau* des sphères par rapport à chacune desquelles les points f, f' (qui ne sont autres que les *foyers* du cercle) sont inverses l'un de l'autre, de même qu'un cercle réel peut être défini par le faisceau des sphères qui le contiennent. Tout faisceau de sphères et, par conséquent, tout cercle réel ou imaginaire pur définit d'ailleurs une famille à deux paramètres de cercles dont chacun est orthogonal à toutes les sphères du faisceau : dans le cas du cercle imaginaire pur, cette famille est formée des cercles qui passent par les deux foyers f et f'; ces points exceptés, il passe un cercle C orthogonal au faisceau et un seul par un point donné a quelconque de l'espace.

4. Le cercle dont il s'agit est le lieu des inverses du point a par rapport aux diverses sphères du faisceau. Mais, de plus, cette considération permet de définir la notion (importante à notre point de vue) de *rapport anharmonique de quatre de ces sphères :* on appellera ainsi, par définition, le rapport anharmonique formé par les quatre positions correspondantes de l'inverse de a, et qui est indépendant du choix de a, en vertu de la proposition énoncée au n° 2. Le rapport anharmonique en question est celui des quatre centres ou, si le cercle d'intersection G est réel, celui des quatre plans tangents en un même point quelconque de G, comme on le voit en prenant le point arbitraire a soit à l'infini, soit infiniment voisin du cercle G.

5. Lorsque deux spheres S, S′ se coupent suivant un cercle réel G, la figure qu'elles forment a un invariant anallagmatique et un seul, qui est l'angle V sous lequel ces sphères se coupent. On sait qu'un tel invariant peut être formé même dans le cas de deux sphères S, S′ sans point commun, en considérant le rapport anharmonique (constant) intercepté par S et S′ sur un cercle quelconque orthogonal à toutes deux.

Dans le cas des sphères sécantes, leur angle V est défini au signe et à π près; il peut l'être, toutefois, à 2π (et au signe) près si l'on a *orienté* la surface de chacune des sphères ou, ce qui revient au même, donné un signe au rayon correspondant.

Pareillement, nous aurons, conformément à la conception bien connue de Laguerre, à considérer des *cycles*, c'est-à-dire des cercles sur chacun desquels un sens aura été choisi. Le signe de l'angle de deux sphères est déterminé si l'on a choisi un sens sur leur cercle d'intersection.

6. On sait (et nous reviendrons d'ailleurs sur ce point dans la suite) qu'une transformation sphérique quelconque, ou même un produit d'un nombre quelconque (pair ou impair) d'inversions peut être obtenu par quatre inversions au plus.

Mais il y a lieu de considérer spécialement celles qui résultent de deux inversions par rapport à deux sphères S, S′. Si ces dernières sont réelles et sécantes, l'opération est anallagmatiquement équivalente à une rotation, à laquelle elle se réduit si l'on transforme toute la figure par inversion de manière à changer le cercle d'intersection en une droite et, par conséquent, S et S′ en des plans. Lorsque S et S′ seront des sphères quelconques, on pourra, par extension, parler d'une *rotation anallagmatique* et, étant donné le point de vue auquel nous nous placerons dans tout ce qui va suivre, l'épithète d'*anallagmatique* pourra être sous-entendue sans inconvénient. L'angle de la rotation est le double de celui sous lequel se coupent S et S′, et l'opération-produit ne change pas lorsqu'on remplace S et S′ par *deux autres sphères quelconques se coupant suivant le même cercle et sous le même angle que les premières.*

Le cas de deux inversions, par rapport à des sphères tangentes (*translation anallagmatique*) ou sans points communs (*homothétie anallagmatique*) est moins intéressant pour nous. Mais il pourra arriver que nous ignorons *a priori* dans lequel des trois cas qui viennent d'être énumérés on se trouve : lorsqu'il en sera ainsi, le produit de deux inversions sera dit *opération simple*. Une homothétie anallagmatique peut d'ailleurs être considérée comme une rotation (d'angle imaginaire) autour d'un cercle imaginaire.

Lorsque les sphères S, S′ se coupent à angle *droit*, le produit des deux inversions correspondantes (anallagmatiquement équivalent à une rotation de 180° autour d'une droite) prendra le nom de *transposition anallagmatique* ou (comme l'a fait Darboux dans le cas d'une droite) de *renversement;* on peut évidemment encore lui donner le nom de *symétrie* par rapport au cercle d'intersection, en appelant *symétrique* d'un point a par rapport à ce cercle, le transformé a' de a par l'opération en question. Dans le cas dont il s'agit et dans ce cas seulement [1] : 1° l'opération-produit est indépendante de l'ordre des inversions-facteurs; 2° elle est réciproque, c'est-à-dire que le transformé a' n'est autre que a.

On remarquera que tout cercle perpendiculaire (*voir* n° 7) au cercle considéré qui passe par a passe également par son symétrique a', et que le symétrique, par rapport à un cercle quelconque, du point à l'infini, n'est autre que le centre du cercle.

7. Positions particulières de deux cercles. — Nous aurons,

(1) On écarte, bien entendu, le cas où S et S′ coïncident et où l'on trouve l'opération identique.

avant tout, à nous occuper de la figure formée par deux cercles C_1, C_2 de l'espace. Les résultats que nous énoncerons pourront éventuellement subir des modifications dans les cas spéciaux bien connus suivants :

a. Cercles ayant *un point commun* (il peut être commode de noter que ce cas correspond anallagmatiquement à celui de deux *droites*). Plus spécialement :

b. Cercles *cosphériques*, avec les deux cas plus particuliers encore;

c. Cercles *tangents ;*

d. Cercles *perpendiculaires* (nous appellerons ainsi, avec M. Vessiot, deux cercles qui se coupent *en deux points* et à angle *droit*);

e. Cercles *en involution* (Kœnigs), c'est-à-dire que, par chacun d'eux, on puisse faire passer une sphère orthogonale à l'autre;

f. Cercles *conjugués* de M. Vessiot (cercles en *biinvolution* de M. Kœnigs) : on appellera ainsi deux cercles tels que toute sphère menée par l'un soit orthogonale à l'autre.

Il serait également indiqué de les appeler cercles *axiaux*. En effet cette relation est celle de deux cercles C_1, C_2 dont le second est décrit par un point déterminé a dans sa révolution (c'est-à-dire dans sa rotation d'angle continûment variable) autour de C_1.

8. Nous examinerons plus loin dans quels cas une opération sphérique quelconque conserve un cercle déterminé C. Pour une *rotation*, les cas pour lesquels il en est ainsi sont les suivants :

1° L'axe de rotation n'est autre que C;

2° L'axe est axial à C;

3° L'axe est perpendiculaire à C. Mais alors il s'agit d'une transposition et, de plus, il y a inversion du sens sur C, tandis que dans les cas 1° et 2°, le *cycle* C est conservé.

Cet énoncé reste valable (son interprétation résultant des conventions précédentes) pour un cercle imaginaire, pour une homothétie anallagmatique et même pour une translation (l'axe A de la rotation se réduisant à un point et les cercles axiaux à A à des cercles passant par ce point).

9. On sait que toute sphère qui coupe sous des angles égaux deux sphères données S_1 et S_2 est invariante par chacune des deux inversions qui transforment ces sphères l'une dans l'autre.

Un énoncé analogue s'applique à tout cercle C qui coupe S_1 et S_2 sous le même angle. *Il existe deux transpositions* (*l'une au moins réelle*) *qui échangent* S_1 *avec* S_2 *et laissent* C *invariant* (les axes de ces transpositions étant perpendiculaires à C).

10. Deux cercles non cosphériques admettent une sphère orthogonale commune et une seule. Cette sphère — laquelle se réduit à un point dans le cas spécial *a* (n° 7) — peut toutefois être imaginaire, et c'est précisément ce qui se produira, en général, dans toutes les déductions qui vont suivre, et au cours desquelles cette sphère imaginaire ou (n° 3) inversion négative restera constamment la même. Tous les cercles et toutes les sphères sur lesquels nous aurons à raisonner seront, sans même qu'il soit utile de l'indiquer pour chacun d'eux, orthogonaux à cetfe même *inversion négative fondamentale*. Nous appellerons points *opposés* ceux qui se correspondent par cette inversion : ce sera en particulier le cas pour les points d'intersection d'un des cercles avec une sphère arbitraire passant par un autre d'entre eux. Ces points seront toujours réels, étant donné que la sphère orthogonale commune sera imaginaire.

11. Notons enfin que le produit de *deux transpositions dont les axes sont conjugués entre eux est l'inversion négative orthogonale à ces deux axes :* cet énoncé est la traduction anallagmatique, autrement dit le transformé par inversion, de celui par lequel, au n° 1, nous avons représenté une inversion négative.

II. — Les cercles perpendiculaires communs et la parataxie.

12. Le problème fondamental dans le sujet qui nous occupe, celui que nous nous étions posé dans l'Ouvrage précédemment cité et dont sont partis également les auteurs dont nous avons parlé ci-dessus, est le suivant :

Problème. — *Trouver un cercle perpendiculaire commun à deux cercles donnés* C_1, C_2 *de l'espace.*

On reconnaît immédiatement que la recherche d'un tel cercle équivaut à celle de deux sphères S_1, S'_1 orthogonales entre elles passant par C_1, et de deux sphères S_2, S'_2 orthogonales entre elles passant par C_2 de manière que S_1 soit orthogonale à S'_2 et S_2 à S'_1. Le cercle cherché sera l'intersection de S_1 avec S_2, si ces sphères sont sécantes ou, pareillement, celle de S'_1 avec S'_2.

Or, lorsque deux sphères variables passent l'une par le cercle fixe C_1, l'autre par C_2 et sont assujetties à être constamment orthogonales entre elles, *elles varient homographiquement.*

La définition précédemment donnée (nº 2) du rapport anharmonique de quatre sphères $S^{(i)}(i = 1, 2, 3, 4)$ passant par C permet de mettre la démonstration de ce fait sous forme entièrement anallagmatique.

D'après cela, à deux sphères orthogonales arbitraires passant par C_1 correspondront, de par l'homographie H qui vient d'être définie, deux sphères (respectivement orthogonales aux premières) qui décriront une involution. Il est clair que *la solution cherchée est fournie par les sphères rectangulaires de cette involution.*

On voit, du même coup, que les quatre sphères S_i, S'_i sont toujours réelles. Il n'en est pas nécessairement de même des cercles perpendiculaires communs Γ (intersection de S_1 avec S_2) et Γ' (intersection de S'_1 avec S'_2); toutefois, l'un d'entre eux au moins est réel. Dans le cas où ils existent tous deux, on voit que le problème a deux solutions *qui sont deux cercles conjugués entre eux.*

Il est aisé de voir ce que devient ce résultat dans les divers cas spéciaux énumérés tout à l'heure et où, d'ailleurs, il ne tombe pas véritablement en défaut. Dans les seuls cas *e* et *f*, le problème relatif aux sphères S_i, S'_i a une infinité de solutions. Mais c'est que, en réalité, les deux cas relèvent de celui de la parataxie dont il nous reste à parler.

13. Auparavant, rappelons que le problème que nous venons de traiter est en relation (1) avec les variations de l'angle v_1 que fait C_2 avec une sphère arbitraire S_1 menée par C_1, ou encore avec les rapports anharmoniques extrêmes que C_1 et C_2 sont sus-

(1) *Voir* les travaux cités en commençant.

ceptibles de déterminer sur un cercle cosphérique commun. Cette relation résulte immédiatement du n° 9 : il suffit que l'on ait tracé par C_1 deux sphères coupant C_2 sous le même angle pour en déduire un cercle perpendiculaire commun; en particulier, les valeurs extrêmes V, V' de v_1 ne peuvent correspondre qu'aux sphères S_1 ou S'_1. On voit bien ainsi immédiatement qu'un au moins des cercles Γ, Γ est réel, et l'on voit en outre que l'autre l'est ou non suivant que les cercles donnés sont ou non « enlacés » l'un dans l'autre, au sens topologique.

Une sphère quelconque passant par C_1 sera déterminée par l'angle $\mathfrak{I}_1$ qu'elle fait avec S_1 ; une sphère quelconque contenant, C_2 par l'angle $\mathfrak{I}_2$, qu'elle fait avec S_2. Pour que les deux sphères ainsi définies soient orthogonales entre elles, il faut une relation d'homographie qui (étant donné que S_1 et S'_2 sont homologues, ainsi que S_2 et S'_1) est de la forme

$$\tan \mathfrak{I}_1 \tan \mathfrak{I}_2 = \text{const.} \tag{1}$$

Mais on peut aller plus loin et établir, en réduisant l'un des deux cercles à une droite, les formules suivantes (pour lesquelles je ne possède pas de démonstration purement anallagmatique) :

$$\cos v_1 = \cos V \frac{\cos \mathfrak{I}_1}{\sin \mathfrak{I}_2} = \cos V' \frac{\sin \mathfrak{I}_1}{\cos \mathfrak{I}_2},$$
$$\cos v_2 = \cos V \frac{\cos \mathfrak{I}_2}{\sin \mathfrak{I}_1} = \cos V' \frac{\sin \mathfrak{I}_2}{\cos \mathfrak{I}_1},$$

v_2 étant l'angle analogue à v_1, c'est-à-dire celui sous lequel la sphère S_2 coupe C_1, formules qui donnent la valeur de la constante de l'équation (1), savoir $\frac{\cos V}{\cos V'}$; la relation entre v_1 et v_2, savoir

$$\cos v_1 \cos v_2 = \cos V \cos V',$$

et la valeur de v_1 en fonction de $\mathfrak{I}_1$, donnée par

$$\cos^2 v_1 = \cos^2 V \cos^2 \mathfrak{I}_1 + \cos^2 V' \sin^2 \mathfrak{I}_1.$$

14. Le cas paratactique. — Nous venons de déterminer les quatre sphères S_i, S'_i et les cercles Γ, Γ' à l'aide du dièdre droit d'une involution, — celle qui correspond, par l'homographie H, à l'involution des sphères orthogonales passant par C_1 —, et trouvé ainsi deux cercles perpendiculaires communs (au plus).

Mais supposons qu'à deux sphères orthogonales entre elles passant par C_1 correspondent toujours, de par la relation indiquée, deux sphères orthogonales entre elles passant par C_2 ; alors le *problème précédent devient indéterminé*, et il y a une *infinité* de cercles perpendiculaires communs.

Nous dirons, dans ce cas, avec M. Coolidge, que les deux cercles donnés sont PARATACTIQUES.

Cela aura nécessairement lieu, d'après ce qui précède (sauf si les cercles donnés sont cosphériques), dès qu'il existera, soit plus de deux cercles perpendiculaires communs, soit deux cercles perpendiculaires communs non conjugués entre eux.

Les cercles paratactiques existent effectivement. Nous en donnerons une construction générale dans un instant. Dès maintenant, ils peuvent être fournis par la résolution du problème suivant.

Par deux points donnés, a, b, faire passer un cercle paratactique à un cercle donné C.

Résolution qui résulte sans difficulté de ce qui vient d'être combiné avec ce qui a été dit au n° 4.

Il y aurait lieu d'ailleurs d'obtenir également une solution géométrique (anallagmatique autant que possible) ([1]) et réelle des problèmes suivants, lesquels sont tous quadratiques ainsi qu'on le reconnaît par la considération des foyers :

Trouver un cercle paratactique à un cercle donné et conjugué à un autre cercle donné;

Faire passer par un point donné un cercle paratactique à deux cercles donnés;

Trouver un cercle paratactique à deux cercles donnés et orthogonal à une sphère donnée;

Trouver un cercle paratactique à trois cercles donnés.

15. Deux faisceaux de plans homographiques, tels que deux plans rectangulaires de l'un correspondent toujours à deux plans

---

([1]) Si l'on renonce à remplir cette condition dans le problème dont nous venons de parler, il suffit de faire passer le point b à l'infini et, ceci fait, de prendre les focales réelles du cône qui a a pour sommet et C pour base (*cf.* A. Bloch, *loc. cit*).

rectangulaires de l'autre, sont nécessairement, ainsi qu'il est facile de s'en assurer, deux faisceaux égaux. On voit donc déjà que lorsque, par deux cercles paratactiques, on fait passer deux sphères orthogonales entre elles arbitraires, ces sphères tournent d'angles égaux; et ceci définit, sur les deux cercles, des sens correspondants. Il est aisé de voir que les sens correspondants en question sont aussi ceux dans lesquels se déplacent, sur C_1 et C_2 respectivement, les points de rencontre avec un même cercle perpendiculaire commun variable.

Nous aurons éventuellement à considérer deux cycles paratactiques au sens près, c'est-à-dire tels que le second soit paratactique du premier pris en sens inverse : deux tels cycles seront dits *antitactiques*. (*A suivre.*)