

Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 2
(1927), p. 219-224

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__219_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1927, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. C. 123. — *Que devient l'équation différentielle*

$$x(x^3 + 3xy^2 + 2y^3) - y(2x^3 + 3x^2y + y^3) \frac{dy}{dx} = 0$$

après le changement de variable $y = tx$? Montrer que la solution de l'équation qui relie x et t peut se mettre sous la forme

$$x = \frac{A(t)}{t^3 - 1},$$

$A(t)$ étant un polynôme que l'on déterminera.

Construire celle des courbes intégrales de l'équation (E) qui rencontre Ox au point d'abscisse -1 .

II. *On considère trois axes rectangulaires Ox , Oy , Oz . Un segment AB , de longueur 1, se déplace en restant parallèle au plan xOy , de telle sorte que son extrémité A décrive l'axe Oz et son extrémité B l'arc d'hélice*

$$x = \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi, \quad z = \varphi \quad \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right).$$

Il engendre ainsi une surface (S).

Évaluer le volume compris entre cette surface, le plan xOy , le plan yOz et le cylindre $x^2 + y^2 = 1$.

Calculer le moment d'inertie par rapport à Oz de ce même volume supposé rempli de matière homogène de densité 1.

III. Étudier la fonction de x

$$y = \int_0^x \frac{t \, dt}{\sqrt[3]{t^3 - 1}}$$

et en donner la représentation graphique.

On ne cherchera pas à évaluer la primitive; on se contentera d'examiner si la fonction a un sens pour toutes les valeurs de x , si elle présente des maxima et des minima et d'en faire l'étude à l'infini en déterminant s'il y a lieu l'asymptote.

MÉCANIQUE. — I. C. 124. — Un fil élastique dont la longueur naturelle est 1 est attaché par une de ses extrémités en un point fixe A, il passe sur une petite poulie fixe O située sur la verticale du point A et à une distance 1 au-dessus de ce point, il supporte ensuite une petite poulie mobile B à laquelle est suspendue un poids P; enfin, l'autre extrémité C du fil est soumise à une force F.

La position du point C étant supposée donnée, déterminer la force F de telle façon que le système soit en équilibre.

La force F varie naturellement suivant la position du point C. Montrer que le champ de forces ainsi défini dérive d'une fonction de forces. En tracer les surfaces de niveau et les lignes de forces.

N. B. — On admettra que la tension du fil est proportionnelle à son allongement et l'on assimilera les poulies à des points.

II. Un pendule simple de longueur 5a oscille dans un plan vertical. Sur la verticale du point de suspension et à une distance 4a en dessous est fixé un clou perpendiculaire au plan d'oscillation. Le pendule oscille alors vers la gauche avec la longueur 5a et vers la droite avec la longueur a seulement.

On écarte le pendule à partir de la position verticale et vers la gauche d'un angle α . Entre quelles limites cet angle doit-il être compris pour que le fil reste tendu dans la suite de son mouvement?

ÉPREUVE PRATIQUE. — Étudier les variations de la fonction

$$y = 2x^5 - 10x^4 - 5x^2 + 40x.$$

Combien l'équation $2x^5 - 10x^4 - 5x^2 + 40x = 0$ a-t-elle de racines réelles? Calculer à 0,001 près la plus petite racine positive α .

Évaluer l'aire comprise entre la courbe représentative de la fonction proposée et le segment de l'axe Ox compris entre les points d'abscisses 0 et α . Avec quelle approximation le calcul précédemment fait permet-il de trouver l'aire demandée?

(Strasbourg, novembre 1926.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Les axes étant rectangulaires, on considère, dans la région où x et y sont positifs, une boucle de lemniscate, que l'on pourra définir à volonté par l'équation*

$$(x^2 + y^2)^2 = xy,$$

ou par les équations paramétriques

$$x = \frac{t}{1+t^4}, \quad y = \frac{t^3}{1+t^4},$$

ou enfin par l'équation polaire

$$\rho^2 = \cos \theta \sin \theta.$$

1° *Calculer l'intégrale double $I = \iint (x^2 + y^2) dx dy$, étendue à l'aire limitée par cette boucle.*

2° *Calculer l'intégrale curviligne $J = \int x^3 dy - y^3 dx$, étendue au contour de cette boucle, parcouru dans le sens positif.*

3° *Expliquer la relation simple qui existe entre les intégrales I et J, que l'on vient de calculer directement.*

II. C. 125. — *Soit une courbe plane (C), rapportée à deux axes rectangulaires Ox, Oy . Soient M un point quelconque de cette courbe, R le rayon de courbure algébrique en ce point et T le point de rencontre de la tangente en M avec Ox .*

1° *Déterminer la courbe (C) de telle manière que l'on ait*

$$R = \overline{MT} + 2.$$

2° *Montrer que, parmi les courbes (C), il en existe une Γ , qui passe par le point de coordonnées (1, 1) et qui jouit en outre de la propriété suivante :*

On peut construire un carré de sommet M et ayant un côté porté par MT et de longueur constante, tel que le sommet P opposé à M soit constamment sur Ox .

3° *Construire la courbe Γ .*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un point pesant M, de poids 3^{kg} , est attiré par un point fixe O proportionnellement à la distance OM. Lorsque $OM = 10^m$, cette attraction est égale à $5^{kg}, 24$.*

On lance le point, à partir de O, avec une vitesse de 8^m par seconde. Dans quelle direction faut-il le lancer pour qu'il rencontre le plan horizontal passant par O à $3^m, 50$ de ce dernier point et dans le minimum de temps. Calculer ce temps.

On donne $g = 981$ C. G. S.

(Clermont, juin 1927.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° *Calculer les racines complexes de l'équation binôme*

$$z^4 = -1$$

et marquer les points représentatifs sur le plan $z = re^{i\theta}$.

2° Dédire de ce calcul une décomposition du polynome $z^4 + 1$ en deux polynomes du deuxième degré à coefficients réels

$$z^4 + 1 = (z^2 + p z + q)(z^2 + p' z + q').$$

3° Calculer l'intégrale $\int \frac{ax^2 + bx + c}{x^4 + 1} dx$; appliquer la formule trouvée au calcul de

$$\int_0^{+\sqrt{1}} \frac{dx}{x^4 + 1} \quad (a, b, c \text{ constantes}).$$

II. Ayant choisi une origine I et un sens positif sur une courbe plane (γ), on désigne par S l'arc IM et par σ l'angle de Ox avec la tangente positive u.

1° Démontrer que si le rayon de courbure est une fonction connue de σ : $R = f(\sigma)$, on peut, par deux quadratures, obtenir l'expression paramétrique des coordonnées x et y de M en fonction de σ ; on peut, sans nouvelle quadrature, en déduire les coordonnées x_c et y_c du centre de courbure c , ce qui définit paramétriquement la développée (δ) de (γ). On désignera par x_0, y_0 les coordonnées du point arbitraire I, par α la valeur de σ en ce point.

2° Appliquer ces résultats généraux à $R = k\sigma$; construire en particulier les courbes (δ_0) et (γ_0) correspondant à $x_0 = y_0 = 0, \alpha = 0$; démontrer géométriquement sur cet exemple la propriété du rayon de courbure exprimée par l'équation $R = k\sigma$; déduire de ce cas particulier la construction générale de (δ) et (γ) quand x_0, y_0, α sont arbitraires.

3° On considère sur la courbe précédente (γ_0) le point M_0 , où, en partant de I_0 , la courbe coupe pour la première fois la droite $x = -2k$; calculer la longueur de l'arc $I_0 M_0$.

“ EPREUVE PRATIQUE. — On considère l'équation différentielle

$$y'' - y' + \lambda y = 10e^x - 2e^{2x}.$$

1° Déterminer son intégrale générale, en indiquant toutes les formes qu'elle prend lorsque la constante λ varie de $-\infty$ à $+\infty$.

2° En supposant $\lambda = 0$, déterminer l'intégrale particulière qui passe par le point $x_0 = 0, y_0 = -1$, sa tangente en ce point ayant pour pente $m_0 = 8$; construire la courbe représentative, déterminer les points remarquables (maxima, minima, racines, inflexions) avec 3 chiffres exacts.

Nota. — Toute méthode correcte (construction graphique, formule d'interpolation) sera admise pour la résolution des équations qui déterminent les points demandés. (Lille, juin 1927.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Étant donnée la série entière en x

$$\frac{x^2}{1,2} - \frac{x^3}{2,3} + \frac{x^4}{3,4} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{(n-1)^n} + \dots$$

déterminer l'intervalle de convergence de cette série : est-elle convergente aux extrémités?

Former dans cet intervalle une expression simple de la somme $S(x)$ de la série, par comparaison avec une série entière connue.

Représenter graphiquement la somme $S(x)$: la courbe obtenue a-t-elle des points d'inflexion?

II. Déterminer le centre de gravité de l'arc de cycloïde supposé homogène représenté par les équations

$$x = R(\varphi - \sin \varphi), \quad y = R(1 - \cos \varphi)$$

quand le paramètre φ varie de 0 à π . On calculera successivement :

- 1° La longueur de cet arc;
- 2° L'ordonnée y du centre de gravité;
- 3° Son abscisse X .

III. Donner l'intégrale du système différentiel

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= z + \cos x + \cos 2x, \\ \frac{dz}{dx} &= -y + x^2 + e^x \cos x, \end{aligned}$$

définie par les conditions initiales

$$x = 0, y = 0, z = 0$$

et deux intégrales premières qui soient des polynômes du premier degré en y et z , dont les coefficients dépendent de x .

SOLUTION. — Dans la série des valeurs absolues le rapport d'un terme au précédent

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x| \frac{n}{n+2}$$

tend, quand n tend vers l'infini, vers $|x|$. Donc, d'après la règle de d'Alembert, l'intervalle de convergence est l'intervalle $-1, +1$. Pour $x = -1$, la série a pour terme général

$$\frac{1}{n|n+1|} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

et la somme des n premiers termes est égale à $1 - \frac{1}{n+1}$, et la série est convergente et a pour somme l'unité; d'ailleurs aussi le terme général a pour partie principale $\frac{1}{n^2}$ et le produit $n^2 u_n$ tend vers 1, d'où résulte encore la convergence de la série. Pour $x = 1$, la série est par suite absolument convergente, et d'ailleurs aussi c'est une série alternée dont le terme général tend vers zéro en décroissant constamment.

En dérivant terme à terme la série proposée, on obtient la série qui donne le développement classique de $\log(1+x)$; donc pour $-1 < x < 1$,

on a

$$S(x) = \int_0^x \log(1+x) dx = (x+1) \log(1+x) - x.$$

D'où résulte la courbe qui n'a pas de points d'inflexions, puisque

$$S''(x) = \frac{1}{1+x}.$$

On peut remarquer que, si l'on forme directement pour $x = -1$ et $x = 1$ la somme de la série, soit 1 et $2 \log 2 - 1$, on obtient les valeurs limites de l'expression précédente quand x tend vers -1 ou $+1$.

II. Le carré de l'élément d'arc a pour expression

$$ds^2 = R^2 [(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi] d\varphi^2 = 2R^2 (1 - \cos \varphi) d\varphi^2 = 4R^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} d\varphi^2,$$

d'où

$$L = \int_0^\pi 2R \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = 4R \left(-\cos \frac{\varphi}{2} \right)_0^\pi = 4R$$

et

$$4Ry = \int_0^\pi 2R^2 (1 - \cos \varphi) \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi, \quad 4Rx = \int_0^\pi 4R^2 (\varphi - \sin \varphi) \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi.$$

Les deux intégrales se calculent par les procédés classiques, et ont pour valeur commune $\frac{16R^2}{3}$. Donc les coordonnées x et y sont égales toutes deux à $\frac{4R}{3}$.

III. L'élimination de la fonction z donne l'équation linéaire du second ordre en y :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = x^2 + e^x \cos x - \sin x - 2 \sin 2x;$$

dont l'intégrale générale se forme par les procédés classiques :

$$y = A \cos x + B \sin x + x^2 - 2 + \frac{e^x}{5} (\cos x + 2 \sin x) + \frac{x}{2} \cos x + \frac{2}{3} \sin 2x,$$

A et B désignant deux constantes arbitraires. On tire de la première équation la valeur correspondante de z :

$$z = -A \sin x + B \cos x + 2x + \frac{e^x}{5} (3 \cos x + \sin x) - \frac{\cos x}{2} - \frac{2 \sin x}{2} + \frac{\cos 2x}{3}.$$

Les conditions initiales $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ donnent les valeurs des constantes

$$A = \frac{9}{5}, B = \frac{13}{30}.$$

On obtient les deux intégrales premières demandées en résolvant les deux formules donnant les expressions de y et z , par rapport aux deux constantes A et B .

(Paris, juin 1927).