

L. BICKART

Sur une généralisation des caustiques par réfraction

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 2
(1927), p. 175-178

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__175_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1927, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

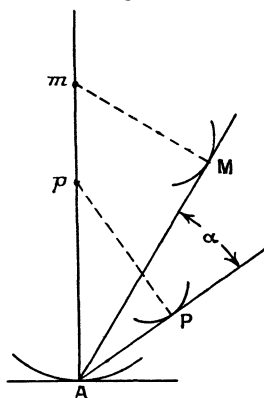
SUR UNE GÉNÉRALISATION DES CAUSTIQUES PAR RÉFRACTION ;

PAR L. BICKART.

Le physicien Cornu a donné la construction du point où un rayon réfracté touche son enveloppe, connaissant le point où le rayon incident touche la sienne. Je vais résoudre le problème plus général suivant :

On considère sur une courbe (A) donnée dans le plan un

Fig. 1.



point A quelconque où se rencontrent deux droites mobiles AP, AQ, faisant respectivement avec la normale en A les angles i

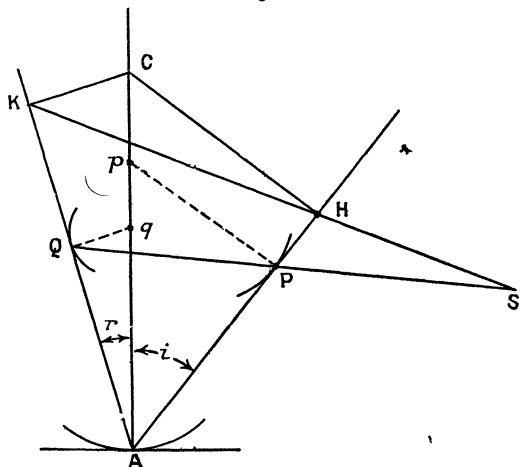
et r . Ces angles étant liés par une relation connue $f(i, r) = 0$ trouver le point où l'une des droites mobiles touche son enveloppe connaissant le point où l'autre droite touche la sienne.

1° *Rappel de formule* (fig. 1). — Si deux droites se coupent en A sous l'angle α , soient M et P les points où elles touchent respectivement leurs enveloppes. Les normales à ces droites, en M et P rencontrent la normale en A aux points m et p . Si ds est l'élément d'arc en A sur la courbe (A) on a

$$(1) \quad d\alpha = \left(\frac{1}{Ap} - \frac{1}{Am} \right) ds.$$

2° *Corollaire*. — Si AM se confond avec la normale en A à (A) les points M et m viennent se confondre au centre de cour-

Fig. 2.



bure C de (A) en A. Soit $R = AC$ le rayon de courbure (fig. 2). Si l'on appelle i l'angle de AP avec la normale AC, on aura

$$di = \left(\frac{1}{Ap} - \frac{1}{R} \right) ds.$$

3° Projetons C en H sur AP, et soit dt l'angle de contingence en A; on a

$$di = \frac{ds}{R} \left(\frac{R}{Ap} - 1 \right) = \left(\frac{AH}{AP} - 1 \right) dt.$$

Projetons de même C en K sur AQ et soit Q le point où AQ touche son enveloppe. On aura aussi

$$dr = \left(\frac{AK}{AQ} - 1 \right) dt.$$

Entre les deux équations qui donnent di et dr éliminons dt ; il vient

$$(2) \quad \left(\frac{AH}{AP} - 1 \right) dr = \left(\frac{AK}{AQ} - 1 \right) di.$$

Appelons S le point où PQ rencontre HK et soit $\frac{SH}{SK} = m$. On a, en introduisant la notation vectorielle,

$$\vec{AS} = \frac{\vec{AH} - m \vec{AK}}{1 - m} = \frac{\vec{AP} - \lambda \vec{AQ}}{1 - \lambda}.$$

En identifiant les composantes dirigées suivant AP, AQ il vient

$$\begin{aligned} \frac{AH}{1 - m} &= \frac{AP}{1 - \lambda}, & \text{d'où} & \quad \frac{AH}{AP} - 1 = \frac{\lambda - m}{1 - \lambda}, \\ m \frac{AK}{1 - m} &= \lambda \frac{AQ}{1 - \lambda}, & \text{d'où} & \quad \frac{AK}{AQ} - 1 = \frac{1}{m} \frac{\lambda - m}{1 - \lambda}, \end{aligned}$$

d'où en portant dans l'équation (2) et après réduction

$$m = \frac{di}{dr}.$$

Telle est la relation que je voulais établir et d'où résulte la construction :

Projeter le centre de courbure C de la courbe (A) en H et K sur les deux droites mobiles. Construire sur HK le point S qui divise $\overline{HK}$ dans le rapport $\frac{di}{dr}$. La droite qui joint les contacts de AP, AQ avec leurs enveloppes passe au point S.

Cas particulier. — Si le centre de courbure C est à l'infini la construction se modifie comme suit :

Prendre sur la normale en A un point C quelconque et construire S comme ci-dessus. La droite PQ sera parallèle à AS.

Applications diverses. — Je me borne à énoncer quelques résultats faciles à vérifier :

