

Certificat de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 2
(1927), p. 155-157

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__155_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1927, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICAT DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. On considère l'équation du deuxième degré en z à coefficients complexes

$$z^2 - 2(1 + it^2)z + (1 - t^4) = 0,$$

t désignant une variable réelle, pouvant prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$.

1° Donner l'expression des deux racines $z_1(t)$ et $z_2(t)$ de cette équation sous la forme

$$z_1(t) = x_1(t) + iy_1(t), \quad z_2(t) = x_2(t) + iy_2(t).$$

2° Pour chaque valeur de t on marque dans le plan complexe

$$z = x + iy,$$

les points P_1 et P_2 représentant z_1 et z_2 ; quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$, P_1 et P_2 décrivent respectivement les courbes C_1 et C_2 ; tracer ces courbes [on pourra d'abord former leurs équations explicites $y = f(x)$].

3° Marquer de même les points P_3 et P_4 correspondant à

$$z_3(t) = \frac{z_1(t) + z_2(t)}{2}, \quad z_4(t) = z_1(t)z_2(t)$$

et tracer les courbes C_3 et C_4 décrites par ces points.

II. Soit C le centre de courbure correspondant au point M qui décrit une courbe (γ) .

1° Déterminer l'équation $y = f(x)$ de (γ) de manière que la projection du vecteur $\vec{MC}$ sur l'axe Oy soit égale à une constante donnée k .

2° Dans la famille de courbes obtenue, déterminer celle qui passe par O et qui est tangente à Ox ,

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad y'_0 = 0;$$

indiquer l'allure générale de cette courbe (γ_0) .

3° Sur la courbe (γ_0) on prend comme origine des arcs s le point O et un sens tel que s croisse avec x . Calculer en fonction de x :

a. l'arc s ;

b. l'angle $\sigma = (\widehat{Ox, MT})$, $\vec{MT}$ désignant la tangente positive;

c. le rayon de courbure R .

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. Les racines sont

$$z = 1 + it^2 \pm t(1 + i).$$

Les points qui les représentent décrivent la parabole

$$y = x^2 - x.$$

Le point P_3 décrit une partie de la droite

$$x = 1,$$

et le point P_4 , une partie de l'axe Ox .

II. La courbe (γ) a pour équation

$$y - y_0 = -K \log \cos \frac{x - x_0}{K}.$$

L'arc s a pour valeur

$$K \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2K} \right).$$

L'angle σ est $\frac{x}{K}$; le rayon de courbure R a pour valeur

$$\frac{K}{\cos \frac{x}{K}},$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. Étudier la variation et tracer la courbe représentative de la fonction

$$y = \frac{x}{x^2 - 1};$$

décomposer cette fraction en éléments simples et calculer les deux intégrales

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} y \, dx, \quad I_2 = \int_2^{+\infty} y \, dx$$

avec quatre chiffres significatifs.

II. On considère une ellipse d'axes $AA' = 2a$, $BB' = 2b$; soit $MM'M''M'''$ un rectangle inscrit dans cette ellipse. Donner l'expression du périmètre p du rectangle en fonction de l'anomalie excentrique

$$t = (\widehat{OA, ON})$$

de son sommet M . Étudier la variation de p lorsque M décrit l'arc AB ; déterminer si p passe par un maximum ou un minimum et, dans l'affirmative, donner une construction simple de la position correspondante de M .

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. La fonction est décroissante. Son intégrale générale est

$$\frac{1}{4} \log \left| \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right|,$$

d'où

$$I_1 = \frac{1}{4} \log \frac{3}{5}; \quad I_2 = \frac{1}{4} \log \frac{3}{5}.$$

II. Le périmètre p passe par un maximum pour

$$\tan t = \frac{b}{a};$$

ON est alors parallèle à $A'B$.

(Lille, novembre 1926.)