

Certificat de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 2
(1927), p. 126-128

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__126_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1927, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICAT DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. C. 102. — *Que devient l'équation différentielle*

$$xy'' + 2(1-x)y' + (x-2)y = -e^{x-1},$$

quand on y fait le changement de fonction $y = \frac{u}{x}$, u étant la nouvelle fonction inconnue.

En déduire l'intégrale générale de l'équation donnée et déterminer celle des solutions qui satisfait aux conditions initiales suivantes :

$$y = 1, \quad y' = C \quad \text{pour} \quad x = 1.$$

Construire la courbe représentative de cette solution particulière. Combien cette courbe présente-t-elle de points d'inflexion. En déterminer les abscisses avec 2 décimales.

Donner des développements limités du troisième ordre de cette fonction au voisinage de $x = 1$ et de $x = -1$. En déduire la valeur du rayon de courbure en ce dernier point.

L'aire comprise, dans le premier quadrant, entre l'axe Ox , l'axe Oy et la courbe et celle comprise, dans le deuxième quadrant, entre Ox et la courbe sont-elles des aires finies ?

On suppose la deuxième des aires ainsi définies recouverte d'une couche de matière dont la densité superficielle est égale à l'unité. Déterminer le moment d'inertie de la plaque ainsi constituée par rapport à Oy .

II. C. 103. — On considère la parabole d'équations paramétriques

$$x = 2pt^2, \quad y = 2pt \quad (\text{en axes rectangulaires}).$$

1° Soit M un point de coordonnées x_0, y_0 . On mène les tangentes MP et MP' à la parabole. Former, en fonction de x_0, y_0 , l'équation donnant les valeurs t_1 et t_2 des paramètres des points P et P' .

2° On pose

$$(\widehat{Ox, MP}) + (\widehat{Ox, MP'}) = \alpha.$$

Calculer $\tan \alpha$ en fonction :

- a. Des coefficients angulaires de MP et MP' .
- b. Des coordonnées de M .

Déduire de la dernière formule le lieu de M lorsque α est constant. Examiner le cas $\alpha = 0$ et justifier le résultat obtenu.

3° Le lieu précédent est une droite (Δ) . Séparer sur cette droite les parties correspondant à des tangentes MP et MP' réelles. (On suppose α différent de zéro.)

La droite (Δ) coupe la parabole en deux points A et B . Démontrer que les tangentes en ces points à la parabole sont rectangulaires.

Lorsque α varie la droite (Δ) passe par un point fixe que l'on caractérisera.

4° On achève le parallélogramme dont MP et MP' sont deux côtés. Lorsque α est constant démontrer que le lieu du quatrième sommet N du parallélogramme est une parabole. Cette parabole passe par un point fixe lorsque α varie.

MÉCANIQUE. — C.104. — Un point matériel pesant M , de masse m , mobile dans un plan vertical, est soumis, en plus de son poids, à l'action d'une force représentée par le vecteur $mk^2\vec{MO}$, O étant un point fixe du plan et k un coefficient donné.

1° Montrer que la résultante de ces deux forces dérive d'une fonction de forces. Tracer les lignes de niveau et les lignes de forces.

2° Le point M , tout en étant soumis au même champ de forces, est assujéti à se déplacer sur une droite Δ , située dans le plan vertical donné, passant par le point O et faisant avec la verticale un angle de 60° . Le coefficient de frottement au contact de la droite et du point a la valeur $f = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Déterminer la partie de la droite où l'on peut placer le point M sans vitesse initiale pour qu'il y reste en équilibre.

3° Les conditions étant les mêmes qu'au paragraphe précédent, le point M est posé sur la droite Δ , sans vitesse initiale, en une position M_0 située plus haut que le point O et telle que $OM_0 = \frac{3}{2}a$ (en appelant a la quantité $\frac{g}{k^2}$). Étudier complètement le mouvement qui se produira et tracer le diagramme des espaces.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Construire la courbe d'équations paramétriques

$$x = \frac{1 + 2t^2 - t^4}{1 - t^4}, \quad y = \frac{3t}{1 - t^4}.$$

(On précisera la position de la courbe par rapport à ses asymptotes.)

2° En supposant l'unité de longueur du dessin égale à 1cm , évaluer à 1mm^2 près l'aire limitée A comprise entre la partie de l'axe Oy située entre les points d'intersection de cet axe et de la courbe, et la portion correspondante de la courbe.

3° Calculer de même à 1mm^3 près le volume engendré par la rotation de l'aire A autour de Ox .

(Strasbourg, juin 1926.)

