

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 2
(1927), p. 125-126

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__125_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1927, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. C.97. — On considère la fonction $F(z)$ définie par l'égalité $F(z) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(t) dt}{z-t}$, où t et $f(t)$ sont réelles, $f(t)$ continue pour $-1 \leq t \leq 1$.

1° Montrer que $F(z)$ est holomorphe dans le plan des z dont on a supprimé la portion d'axe réel comprise entre les points $-1, +1$ (on montrera que $F(z)$ a une dérivée en chaque point.)

2° Donner sous forme d'intégrales les expressions des coefficients du développement de Laurent de $F(z)$ pour $|z| > 1$.

3° En supposant $f(t)$ comprise entre deux nombres positifs A et B , que peut-on dire du produit $(n+1) \int_{-1}^{+1} t^n f(t) dt$?

Montrer que dans ces conditions le développement de Laurent de $F(z)$ ne converge plus pour $|z| < 1$ et que l'un des points -1 ou $+1$ est point singulier de $F(z)$.

II. C.98. — Les axes de coordonnées $Oxyz$ étant rectangulaires, on considère une surface et l'on appelle N le point où la normale en M à la surface perce le plan des xy .

1° Former l'équation aux dérivées partielles des surfaces telles que $OM = MN$.

2° Déterminer les surfaces intégrales qui sont de révolution autour de Oz .

3° Déterminer une intégrale complète et les caractéristiques. (Il sera commode d'employer les coordonnées semi-polaires.)

ÉPREUVE PRATIQUE. — C.99. — On donne l'équation aux dérivées partielles

$$q^2x - py = 0.$$

1° Trouver une intégrale complète.

2° Trouver la surface intégrale passant par la courbe $x = 0$, $b^2z = y^3$.

3° Montrer que la surface intégrale S passant par la parabole $y = 0$, $az - x^2 = 0$ a pour équation

$$9(az - x^2)^2 - 8ay^3 = 0.$$

4° Calculer l'aire de la portion de S qui est à l'intérieur du prisme

dont les arêtes sont parallèles à Oz et dont la base est le carré de côtés

$$y = 0, \quad y = a; \quad x = 0, \quad x = a$$

(les axes sont rectangulaires). (Strasbourg, novembre 1926.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — C.100. — Soit $Oxyz$ un trièdre rectangulaire. Former l'équation aux dérivées partielles des surfaces telles que le plan tangent en un quelconque de leurs points forme avec OM un angle constant donné V .

Montrer qu'il y a une caractéristique formée des points d'une courbe du plan xOz et des plans tangents à cette courbe parallèles à Oy .

Trouver toutes les caractéristiques.

Exprimer en fonction de deux paramètres les coordonnées des points de celle des surfaces cherchées qui passe par la droite

$$z = 0, \quad x = a,$$

où a est donné.

ÉPREUVE PRATIQUE. — C.101. — On considère l'intégrale

$$\int \frac{\operatorname{th}^2 z \, dz}{(\pi^2 + z^2)^4} \quad (z = x + iy).$$

Soit $ABCD$ un rectangle de côtés parallèles aux axes, le côté AB étant porté par l'axe réel. Montrer qu'on peut trouver une suite de tels rectangles, grandissant indéfiniment, de manière à contenir, à partir d'un certain rang, à leur intérieur, n'importe quelle région du demi-plan $y > 0$ et tels que les intégrales prises le long des côtés autres que AB tendent vers zéro.

Calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{th}^2 x \, dx}{(\pi^2 + x^2)^4}.$$

(Clermont-Ferrand, novembre 1926.)